АКАДЕМИЯ НАУК УССР

ФИЗИКО - ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ
НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР

Математическая физика и функциональный анализ

ВЫПУСК V

ХАРЬКОВ 1974

АКАДЕМИЯ НАУК УССР
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Выпуск У

Харьков - 1974

Корректор Л.А.Еременко

БЦ 50186, подписано к печати 10.07 - 1974, физ.п.л. 10,0, усл.п.л.10,0,
заказ 67, тираж 500. Цена 1 руб.

Ротапринт ФТИНТ АН УССР, Харьков, 86, пр. Ленина, 47.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Стр.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1974 выпуск У

О РОСТЕ ЦЕЛЫХ ХРЕБТОВЫХ ФУНКЦИЙ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ НУЛЯМИ

А.А. Гольдберг, И.В. Островский

I°. Следуя Ю.В. Линнику, будем называть целую функцию $\varphi(z)$, не равную тождественно постоянной, хребтовой, если она во всей конечной z-плоскости удовлетворяет неравенству

$$|\varphi(z)| \leq |\varphi(i\,Im\,z)|. \tag{I}$$

Понятие хребтовой функции возникло в связи с изучением характеристических функций вероятностных законов: целые характеристические функции составляют собственный подкласс класса хребтовых функций ([I] , гл. II, § 3).

Известно ([I] , гл. II, § 4), что порядок ρ хребтовой функции удовлетворяет условию $\rho \geq 1$. Никаких других ограничений на ρ нет: для всякого $\rho \geq 1$ существует хребтовая функция порядка ρ. Однако ситуация меняется, если делать некоторые предположения о распределении нулей.

Марцинкевич [2] (см. также [I] , гл. II, § 5) доказал следующую теорему. Пусть $\varphi(z)$ - хребтовая функция конечного порядка ρ с показателем сходимости нулей ρ_1. Если $\rho_1 < \rho$, то $\rho \leq 2$.

Условие $\rho_1 < \rho$ является условием, наложенным на модули нулей. В настоящей работе будет показано, что утверждение теоремы Марцинкевича сохраняет силу, если это условие заменить другим, относящимся лишь к аргументам нулей: вместо $\rho_1 < \rho$ мы предполагаем, что все нули действительны. Основным результатом работы является следующая теорема.

Т Е О Р Е М А I. Всякая хребтовая функция конечного порядка, имеющая только действительные нули, представляется в виде

$$\varphi(z) = ce^{-\gamma z^2 + i\beta z} \prod_k \left(1 - \frac{z^2}{a_k^2}\right), \tag{2}$$

где c, γ, β и a_k - постоянные, $\gamma \geq 0,\ Im\beta = 0,\ a_k > 0,\ \sum_k a_k^{-2} < \infty$.

Из представления (2) в силу классических теорем теории целых функций следует, что порядок функции $\varphi(z)$ не превосходит 2.

Требование конечности порядка функции $\varphi(z)$ в теореме I отбросить нельзя, так как существуют хребтовые функции бесконечного порядка, вовсе не имеющие нулей. Такими являются, например, функции вида $\varphi(z) = exp_n\, iz$, где $n \geq 2$, а через exp_n обозначена n-я итерация показательной функции. Следующее замечание показывает, что требование конечности порядка можно несколько ослабить.

З А М Е Ч А Н И Е I. Пусть $\varphi(z)$ - хребтовая функция, имеющая только действительные нули. Если показатель сходимости нулей конечен, а функция $\varphi(z)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{r \to \infty} r^{-1} \ln\ln M(r, \varphi) = 0, \tag{3}$$

$(M(r,\varphi) = \max_{|z| \leq r} |\varphi(z)|)$, то утверждение теоремы I сохраняет силу.

Вероятно, если хребтовая функция $\varphi(z)$ имеет только действительные нули $\{a_k\}$, то должно выполняться $\sum_k a_k^{-2} < \infty$ (нули считаются с учетом кратности). В связи с этой гипотезой сделаем следующее замечание.

З А М Е Ч А Н И Е 2. Пусть $\varphi(z)$ – хребтовая функция, $\{a_k\}$ – множество ее действительных нулей (оно может не совпадать со множеством всех нулей). Тогда при любом $\varepsilon>0$ имеем

$$\sum_k \exp(-\varepsilon|a_k|) < \infty.$$

2^0. Теорема I получается как следствие такой теоремы о целых функциях с отрицательными нулями.

Т Е О Р Е М А 2. Пусть $f(z)$ – целая функция конечного порядка, имеющая только отрицательные нули. Если функция $f(z)$ удовлетворяет неравенству

$$|f(re^{i\theta})| \leq |f(r\cos^2(\theta/2))|, \ -\pi \leq \theta \leq \pi, \ r \geq 0, \tag{4}$$

то она имеет вид

$$f(z) = ce^{\gamma z} \prod_k \left(1+\frac{z}{b_k}\right), \tag{5}$$

где c, γ, b_k – постоянные, $\gamma \geq 0,\ b_k > 0,\ \sum_k b_k^{-1} < \infty$.

Покажем, как теорема I выводится из теоремы 2.

Пусть функция $\varphi(z)$ удовлетворяет условиям теоремы I и, кроме того, является четной. Тогда $f(z) = \varphi(i\sqrt{z})$ – целая функция конечного порядка и все ее нули отрицательны. Условие (I), которому удовлетворяет $\varphi(z)$, приводит к условию (4) для $f(z)$. Поэтому к $f(z)$ можно применить теорему 2. Замечая, что $\varphi(z) = f(-z^2)$, приходим к представлению (2) с $\beta = 0$, $a_k = \sqrt{b_k}$.

Пусть теперь функция $\varphi(z)$ не является четной. Не уменьшая общности, можем считать, что $\varphi(0) = 1$. Рассмотрим четную хребтовую функцию $\varphi_1(z) = \varphi(z)\varphi(-z)$. Множество ее нулей содержит множество нулей $\varphi(z)$. Поскольку для $\varphi_1(z)$ утверждение теоремы I уже доказано, то мы заключаем, что $\sum_k a_k^{-2} < \infty$.

Далее заметим, что порядок функции $\varphi(z)$ не превосходит 2. Действительно, порядок $\varphi_1(z)$ не превосходит 2. Как известно ([I] , стр.82), если произведение двух хребтовых функций имеет порядок $\rho \geq 1$, то и порядок каждой из этих функций не превосходит ρ. Учитывая, что нули $\varphi(z)$ симметричны относительно мнимой оси ([I] , стр. 45), и применяя теорему Адамара о каноническом представлении, заключаем, что $\varphi(z)$ имеет вид

$$\varphi(z) = e^{cz^2+dz} \prod_k \left(1-\frac{z^2}{a_k^2}\right),$$

где c и d – постоянные.

Так как всякая хребтовая функция $\varphi(z)$, нормированная условием $\varphi(0)=1$, принимает на мнимой оси положительные значения ([I] , стр. 44), то постоянная c – действительная, а постоянная d – чисто мнимая. Если бы выполнялось $c>0$, то, используя известную оценку канонического произведения Вейерштрасса (см., например, [3] , стр. 79), мы имели бы $\ln\varphi(iy) = -cy^2 + o(y^2),\ y\to\pm\infty$. Отсюда следовало бы, что функция $\varphi(z)$ ограничена на мнимой оси, а, в силу (I), и во всей плоскости. Применив теорему Лиувилля, мы получили бы $\varphi(z) = const$, что противоречит предположению.

3^0. Приступим к доказательству теоремы 2. Будем считать (это, конечно, не уменьшает общности), что $f(0) = 1$.

Пусть $\{-b_k\}$ – нули функции $f(z)$, рассматриваемые с учетом кратности. Обозначим через p наименьшее целое неотрицательное число, для которого $\sum_k b_k^{-p-1} < \infty$. По теореме Адамара функция $f(z)$ допускает представление

$$f(z) = e^{Q(z)}\,\pi_p(z), \tag{6}$$

где $Q(z)$ – полином, а $\pi_p(z)$ – каноническое произведение Вейерштрасса рода p :

$$\pi_p(z) = \prod_k E\left(-\frac{z}{b_k}, p\right) \tag{7}$$

(через $E(u,p)$ обозначаем первичный множитель Вейерштрасса рода p).

Покажем, что степень полинома $Q(z)$ не превосходит $max(p,1)$. Для этого нам понадобится следующая оценка для произведения $\pi_p(z)$ в углу $\{|arg\, z|<\pi-\varepsilon\}$, $\varepsilon>0$:

$$|\ln \pi_p(z)| = o(|z|^{p+1}), \quad |z|\to\infty. \tag{8}$$

Чтобы ее получить, воспользуемся известной формулой (ср. [3] , стр. 92)

$$\ln \pi_p(z) = (-1)^p z^{p+1}\int_0^\infty \frac{n(t,0)\,dt}{t^{p+1}(z+t)}, \quad |arg\, z|<\pi, \tag{9}$$

где $n(t,0)$ – число нулей функции π_p в круге $\{|z|\le t\}$. Так как при $|arg\, z|<\pi-\varepsilon$ выполняется $|z+t|\geq (\sin\frac{\varepsilon}{2})(|z|+t)$, то имеем

$$|\ln \pi_p(z)| \le |z|^{p+1}\int_0^\infty \frac{n(t,0)\,dt}{t^{p+1}(\sin\frac{\varepsilon}{2})(|z|+t)} = |z|^{p+1}o(1) = o(|z|^{p+1})$$

(мы учли, что интеграл $\int\limits^\infty n(t,0)t^{-p-2}dt$ сходится, и воспользовались теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла).

Обозначим через q степень полинома $Q(z)$ и предположим, что $q>p$. Полагая $Q(z)=d_q z^q+\ldots+d_1 z$, $d_q\neq 0$, и используя оценку (8), будем иметь

$$\ln|f(z)| = Re\,Q(z)+\ln|\pi_p(z)| = Re(d_q z^q)+o(|z|^q), \tag{10}$$
$$|z|\to\infty, \quad |arg\, z|<\pi-\varepsilon.$$

По условию теоремы функция $f(z)$ удовлетворяет неравенству (4). Поэтому имеем $(|\theta|<\pi-\varepsilon)$

$$Re(d_q r^q e^{iq\theta})+o(r^q) \le Re\left(d_q r^q (\cos^2\frac{\theta}{2})^q\right)+o(r^q), \quad r\to\infty.$$

Обозначая $\alpha = arg\, d_q$, отсюда получим, что при $|\theta|<\pi-\varepsilon$ должно выполняться неравенство

$$\cos(\alpha+q\theta) \le \cos\alpha\cdot\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2q}. \tag{11}$$

По непрерывности оно должно выполняться и при $|\theta|\le\pi$. Но при $q>1$ это невозможно: противоречие получается при $\theta=2\pi/q$, если $\cos\alpha>0$, при $\theta=\pi/q$, если $\cos\alpha<0$, и при $\theta=\pi/(2q)$ или $\theta=-\pi/(2q)$, если $\cos\alpha=0$. Тем самым доказано, что должно выполняться $q\le max(p,1)$.

З А М Е Ч А Н И Е. Если $p=0$, а $q=1$, то (11) выполняется только в том случае, когда $\cos\alpha=1$ (иначе получаем противоречие при $\theta=-\alpha\,(mod\, 2\pi)$). Таким образом, если $p=0$, а $q=1$, то полином $Q(z)$ должен иметь вид $Q(z)=d_1 z$, $d_1>0$.

4°. Для дальнейшего нам понадобится следующая лемма.

Л Е М М А 1. Пусть $\{b_k\}$ – последовательность положительных чисел, p – наименьшее целое неотрицательное число, для которого ряд $\sum\limits_k b_k^{-p-1}$ сходится, $\pi_p(z)$ – каноническое произведение (7). Если $p\ge 1$, то

$$r^p = o(|\ln \pi_p(r)|), \quad r\to+\infty. \tag{12}$$

Для доказательства леммы заметим, что из формулы (9) следует, при $r>0$

$$|\ln \pi_p(r)| = r^{p+1}\int_0^\infty \frac{n(t,0)\,dt}{t^{p+1}(r+t)} \ge r^{p+1}\int_0^r \frac{n(t,0)\,dt}{t^{p+1}(r+t)} \ge$$
$$\ge \frac{1}{2}r^p\int_0^r n(t,0)t^{-p-1}dt.$$

Так как ряд $\sum_k b_k^{-p}$ расходится, то $\int_0^r n(t,0)t^{-p-1}dt \to \infty$ при $r \to \infty$, и мы получаем соотношение (I2).

Возвращаясь к доказательству теоремы 2, покажем теперь, что число p в (6) не может быть нечетным. Так как степень полинома $Q(z)$ не превосходит $max(p,1)$, то в силу (I2) при $p \geqslant 1$ имеем $(r \to \infty)$

$$\ln|f(r)| = ReQ(r) + \ln \pi_p(r) = (1+o(1))\ln \pi_p(r).$$

Но,как видно из формулы (9), при нечетном p имеем $\ln \pi_p(r) < 0$ $(r>0)$. Поэтому функция $f(z)$ ограничена на луче $z = r \geqslant 0$. В силу условия (4) отсюда следует, что эта функция ограничена во всей z-плоскости, что невозможно.

5⁰. Основная трудность в доказательстве теоремы 2 - это установить, что в представлении (6) число p не может быть четным $\geqslant 2$. Для этого нам понадобится лемма об асимптотическом поведении канонических произведений с отрицательными нулями, дополняющая результаты одного из авторов [4].

Л Е М М А 2. Пусть выполнены условия леммы I. Если p - четное число $\geqslant 2$, то для некоторого ψ, $0 < \psi < \pi$, выполняется

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|\pi_p(re^{i\psi})|}{\ln \pi_p(r\cos^2\frac{\psi}{2})} > 1.$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Обозначим через ρ порядок произведения π_p. Как известно ([3], стр. 80), справедливо неравенство $p \leqslant \rho \leqslant p+1$. Рассмотрим отдельно два случая: а) $p \leqslant \rho < p+1$, б) $\rho = p+1$.

а) Случай $p \leqslant \rho < p+1$. Фиксируем ветвь функции $\ln E(-u,p)$ в u-плоскости, разрезанной по лучу $-\infty < u \leqslant -1$, такую, чтобы при $u=0$ она обращалась в нуль. Тогда справедливо соотношение

$$\int_0^\infty \ln E(-re^{i\theta},p)\frac{dr}{r^{1+\sigma}} = \frac{\pi e^{i\theta\sigma}}{\sigma \sin \pi\sigma}, p<\sigma<p+1, |\theta|<\pi. \qquad (13)$$

Это соотношение легко получить, если в левой части произвести интегрирование по частям, а затем воспользоваться стандартными методами теории вычетов. Отделяя в (I3) действительную часть, получим

$$\int_0^\infty \ln|E(-re^{i\theta},p)|\frac{dr}{r^{1+\sigma}} = \frac{\pi \cos\theta\sigma}{\sigma \sin \pi\sigma}, p<\sigma<p+1, |\theta|<\pi, \qquad (14)$$

откуда с помощью очевидных преобразований получаем

$$\int_0^\infty \ln|E(-re^{i\theta},p)|\frac{dr}{r^{1+\sigma}} = \frac{\cos\theta\sigma}{(\cos\frac{\theta}{2})^{2\sigma}}\int_0^\infty \ln E(-r\cos^2\frac{\theta}{2},p)\frac{dr}{r^{1+\sigma}},$$
$$p<\sigma<p+1, \quad |\theta|<\pi.$$

Сделаем в обеих частях замену переменной $r = xb_k^{-1}$, а затем, считая ,что $\rho<\sigma<p+1$, просуммируем получающиеся равенства по k. Будем иметь

$$\int_0^\infty \ln|\pi_p(xe^{i\theta})|\frac{dx}{x^{1+\sigma}} = \frac{\cos\theta\sigma}{(\cos\frac{\theta}{2})^{2\sigma}}\int_0^\infty \ln \pi_p(x\cos^2\frac{\theta}{2})\frac{dx}{x^{1+\sigma}}, \qquad (15)$$
$$\rho<\sigma<p+1, \quad |\theta|<\pi.$$

Далее нам понадобится следующая теорема[I)], представляющая простую перефразировку одного результата Пойа [7].

Пусть на полуоси $0 \leqslant x < \infty$ заданы две функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, причем

I) Эта теорема была обобщена в работе авторов [5].

$\varphi_2(x) \geqslant 0$. Пусть числа $\rho > 0$ и $\varepsilon > 0$ обладают свойствами:
(I) оба интеграла

$$\int_0^\infty |\varphi_1(x)| x^{-1-\sigma} dx, \quad \int_0^\infty \varphi_2(x) x^{-1-\sigma} dx$$

сходятся при $\rho < \sigma < \rho + \varepsilon$, а второй из них при любом $\sigma < \rho$ расходится,

$(\overline{II})$ существует функция $\Psi(z)$, голоморфная при $|z - \rho| < \varepsilon$ и действительная при действительных z, такая, что при $\rho < \sigma < \rho + \varepsilon$ выполняется

$$\int_0^\infty \varphi_1(x) x^{-1-\sigma} dx = \Psi(\sigma) \int_0^\infty \varphi_2(x) x^{-1-\sigma} dx.$$

Тогда
$$\varlimsup_{x \to \infty} \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \geqslant \Psi(\rho).$$

Фиксируем произвольное θ, $-\pi < \theta < \pi$. Полагая

$$\varphi_1(x) = \ln|\pi_p(xe^{i\theta})|, \quad \varphi_2(x) = \ln \pi_p\left(x\cos^2\frac{\theta}{2}\right), \quad \Psi(z) = \frac{\cos\theta z}{(\cos\frac{\theta}{2})^{2z}},$$

с помощью (I5) легко убеждаемся, что эти функции удовлетворяют условиям теоремы Пойа. Поэтому имеем

$$\varlimsup_{x \to \infty} \frac{\ln|\pi_p(xe^{i\theta})|}{\ln \pi_p(x\cos^2\frac{\theta}{2})} \geqslant \frac{\cos\theta\rho}{(\cos\frac{\theta}{2})^{2\rho}}, \quad |\theta| < \pi. \tag{I6}$$

Заметим, что $\rho \geqslant p \geqslant 2$. При $\rho > 2$ положим $\psi = 2\pi/\rho$, а при $\rho = 2$ положим $\psi = 7\pi/8$. Поскольку $0 < \psi < \pi$, а при $\theta = \psi$ выражение в правой части (I6) строго больше единицы, то мы убеждаемся в справедливости утверждения леммы 2.

б) Случай $\rho = p + 1$. Из (I4) следует равенство

$$\int_0^\infty \left\{ \ln\left|E(-re^{i\theta}, p)\right| - \frac{\cos(p+1)\theta}{(\cos\frac{\theta}{2})^{2p+2}} \ln E\left(-r\cos^2\frac{\theta}{2}, p\right) \right\} \frac{dr}{r^{1+\sigma}} =$$
$$= \frac{\pi}{\sigma \sin\pi\sigma}\left[\cos\theta\sigma - \cos(p+1)\theta \cdot \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2(\sigma-p-1)}\right] = \Phi(\sigma, \theta), \tag{I7}$$
$$p < \sigma < p+1, \quad |\theta| < \pi.$$

Нетрудно убедиться, что выражение в фигурных скобках под знаком интеграла есть $O(r^{p+2})$ при $r \to 0$ и есть $O(r^p)$ при $r \to \infty$. Поэтому интеграл абсолютно сходится при $p < Re\sigma < p + 2$ и является аналитической функцией в полосе $\{p < Re\sigma < p + 2\}$. Так как выражение, стоящее в правой части (I7), также аналитично в указанной полосе (особенность в точке $\sigma = p + 1$ является устранимой), то равенство (I7) имеет место в полосе $\{p < Re\sigma < p + 2\}$. Для дальнейшего существенно, что (I7) справедливо при $p + 1 < \sigma < p + 2$.

Считая, что $p + 1 < \sigma < p + 2$, сделаем в левой части (I7) замену переменной $r = xb_k^{-1}$ и просуммируем получающиеся равенства по k. Получим соотношение

$$\int_0^\infty \left\{ \ln|\pi_p(xe^{i\theta})| - \frac{\cos(p+1)\theta}{(\cos\frac{\theta}{2})^{2p+2}} \ln \pi_p\left(x\cos^2\frac{\theta}{2}\right) \right\} \frac{dx}{x^{1+\sigma}} = \Phi(\sigma, \theta) \sum_k b_k^{-\sigma}. \tag{I8}$$
$$p + 1 < \sigma < p + 2, \quad |\theta| < \pi.$$

Заметим, что

$$\sum_k b_k^{-\sigma} = \sigma \int_0^\infty n(x, 0) x^{-1-\sigma} dx.$$

Поэтому равенство (I8) означает, что выполняется условие $(\overline{II})$ теоремы Пойа с $\rho = p + 1$,

$\Psi(z) = z\Phi(z, \theta)$, $\varphi_2(x) = n(x, 0)$,

$$\varphi_1(x) = \ln|\pi_p(xe^{i\theta})| - \frac{\cos(p+1)\theta}{(\cos\frac{\theta}{2})^{2p+2}} \ln \pi_p\left(x\cos^2\frac{\theta}{2}\right).$$

Легко видеть, что выполняется также и условие (I) (учитываем, что $n(x,0)$ имеет порядок ρ ([3] , стр. 79)). Применяя теорему Пойа, получим неравенство

$$\varlimsup_{x\to\infty}\left\{\ln|\pi_p(xe^{i\theta})|-\frac{\cos(p+1)\theta}{(\cos\frac{\theta}{2})^{2p+2}}\ln\pi_p(x\cos^2\frac{\theta}{2})\right\}\left[n(x,0)\right]^{-1}\geqslant \tag{I9}$$
$$\geqslant(p+1)\Phi(p+1,\theta),\quad |\theta|<\pi.$$

Покажем, что существуют такие значения ψ, $0<\psi<\pi$, для которых одновременно справедливы оба неравенства

$$\cos(p+1)\psi>(\cos\frac{\psi}{2})^{2p+2},\quad \Phi(p+1,\psi)>0. \tag{20}$$

Легко видеть, что в интервале $(2\pi(p+1)^{-1}, 5\pi(2p+2)^{-1})$ лежит ровно один корень θ_0 уравнения $\cos(p+1)\theta=(\cos\frac{\theta}{2})^{2p+2}$, причем в интервале $(2\pi(p+1)^{-1},\theta_0)$ выполняется $\cos(p+1)\theta>(\cos\frac{\theta}{2})^{2p+2}$.

Так как (напомним, что p - четное)

$$\Phi(p+1,\theta)=\lim_{\sigma\to p+1}\Phi(\sigma,\theta)=\frac{1}{p+1}\left[\theta\sin(p+1)\theta+\cos(p+1)\theta\times\right.$$
$$\left.\times 2\ln\cos\frac{\theta}{2}\right]=\frac{\cos(p+1)\theta}{(p+1)^2}\left[(p+1)\theta\, tg\,(p+1)\theta+2(p+1)\ln\cos\frac{\theta}{2}\right],$$

то при $2\pi<(p+1)\theta<5\pi/2$ имеем

$$\Phi(p+1,\theta)=\frac{\cos(p+1)\theta}{(p+1)^2}\left[\int_{2\pi}^{(p+1)\theta}\frac{\lambda d\lambda}{\cos^2\lambda}-\ln\cos(p+1)\theta+2(p+1)\ln\cos\frac{\theta}{2}\right].$$

Полагая $\theta=\theta_0$, видим, что

$$\Phi(p+1,\theta_0)=\frac{\cos(p+1)\theta_0}{(p+1)^2}\int_{2\pi}^{(p+1)\theta_0}\frac{\lambda d\lambda}{\cos^2\lambda}>0.$$

Поскольку $\Phi(p+1,\theta)$ - непрерывная функция от θ , то $\Phi(p+1,\theta)>0$ в достаточно малой окрестности точки θ_0 . Для любого ψ из пересечения этой окрестности с интервалом $(2\pi(p+1)^{-1},\theta_0)$ выполняются оба неравенства (20).

Пусть ψ таково, что имеют место неравенства (20). Так как $\Phi(p+1,\psi)>0$, то из соотношения (I9) при $\theta=\psi$ следует, что

$$\varlimsup_{x\to\infty}\left\{\ln|\pi_p(xe^{i\psi})|-\frac{\cos(p+1)\psi}{(\cos\frac{\psi}{2})^{2p+2}}\ln\pi_p(x\cos^2\frac{\psi}{2})\right\}>0. \tag{2I}$$

Поскольку p -четное число, то, в силу (9), имеем $\ln\pi_p(x\cos^2\frac{\psi}{2})>0$ $(x>0)$. Поэтому из (2I) вытекает неравенство

$$\varlimsup_{x\to\infty}\frac{\ln|\pi_p(xe^{i\psi})|}{\ln\pi_p(x\cos^2\frac{\psi}{2})}\geqslant\frac{\cos(p+1)\psi}{(\cos\frac{\psi}{2})^{2p+2}}.$$

Так как правая часть этого неравенства строго больше единицы (в силу первого из неравенств (20)), то мы получаем утверждение леммы.

Леммы 2 доказана полностью.

6^0. Завершим доказательство теоремы 2. Покажем, что в представлении (6) число p не может быть четным $\geqslant 2$. Так как по доказанному в 3^0 степень полинома $Q(z)$ не превосходит p , то из (6) следует

$$\ln|f(re^{i\theta})|=\ln|\pi_p(re^{i\theta})|+O(r^p),\quad r\to\infty,\ |\theta|<\pi.$$

Поскольку функция $f(z)$ удовлетворяет условию (4), то должно выполняться неравенство

$$\ln|\pi_p(re^{i\theta})| \leqslant \ln \pi_p(r\cos^2\frac{\theta}{2}) + O(r^p), \quad r\to\infty, \ |\theta|<\pi.$$

В силу леммы I отсюда следует, что

$$\ln|\pi_p(re^{i\theta})| \leqslant (1+o(1))\ln\pi_p(r\cos^2\frac{\theta}{2}), \quad r\to\infty, \ |\theta|<\pi.$$

Но по лемме 2 это неравенство не может выполняться при $\theta=\psi$ и четном $p\geqslant 2$.

Итак, p не может быть четным числом $\geqslant 2$. По доказанному в 4^0 число p не может быть также нечетным. Следовательно, $p=0$. Из результата пункта 3^0 получаем, что степень полинома $Q(z)$ не превосходит I. Учитывая замечание в конце 3^0, заключаем, что $Q(z)$ имеет вид $Q(z)=\gamma z$, $\gamma\geqslant 0$, и, следовательно, $f(z)$ имеет вид (5). Теорема 2 доказана.

7^0. Покажем справедливость замечания I. Так как нули функции $\varphi(z)$ имеют конечный показатель сходимости, то функция $\varphi(z)$ допускает представление

$$\varphi(z) = g(z)\exp h(z), \tag{22}$$

где $g(z)$ и $h(z)$ - целые функции, причем $g(z)$ имеет конечный порядок. Из условия (3) легко следует, что функция $h(z)$ является функцией не выше минимального типа порядка I.

Воспользуемся следующей теоремой, являющейся частным случаем теоремы III из работы [6]. Если хребтовая функция $\varphi(z)$ допускает представление (22), где $g(z)$ - целая функция конечного порядка, а $h(z)$ - трансцендентная целая функция, то $h(z)$ - не ниже нормального типа порядка I. Следовательно, функция $h(z)$ в (22) не может быть трансцендентной, а, значит, является полиномом. Но тогда функция $\varphi(z)$ имеет конечный порядок, и мы можем к ней применить теорему I.

8^0. Перейдем к замечанию 2. Хорошо известно ([8], стр. 223), что нули ζ_k функции $F(\zeta)$, аналитической и ограниченной в круге $\{|\zeta|<1\}$, удовлетворяю условию $\sum_k(1-|\zeta_k|)<\infty$. Пусть $\varphi(z)$ - хребтовая функция. Так как ее нули расположены симметрично относительно мнимой оси ([I], стр. 45), то множество действительных нулей можно записать в виде $\{\pm a_k\}$, где $a_k>0$. Из условия (1) вытекает, что при любом фиксированном $H>0$ функция $\varphi(z)$ ограничена в полосе $\{|\operatorname{Im} z|<H\}$. Поскольку функция $\zeta=\zeta(z)=th\frac{\pi z}{4H}$ конформно и однолистно отображает $\{|\operatorname{Im} z|<H\}$ на круг $\{|\zeta|<1\}$, то функция $F(\zeta)=\varphi(z(\zeta))$ - аналитическая и ограниченная в $\{|\zeta|<1\}$. Так как $F(\zeta_k)=0$, где $\zeta_k=th\frac{\pi a_k}{4H}$, то

$$\infty > \sum_k\left(1-th\frac{\pi a_k}{4H}\right) = \sum_k 2\left[1+\exp\left(\frac{\pi a_k}{2H}\right)\right]^{-1} > \sum_k \exp\left(-\frac{\pi a_k}{2H}\right).$$

Учитывая произвольность $H>0$, получаем утверждение замечания 2.

ЛИТЕРАТУРА

I. Ю.В. Линник, И.В. Островский. Разложения случайных величин и векторов, М., "Наука", 1972.

2. **J.Marcinkiewicz. Sur une propriété de la loi de Gauss, Math. Zeitschr., 44, 612-618, 1938.**

3. А.А. Гольдберг, И.В. Островский. Распределение значений мероморфных функций, М., "Наука", 1970.

4. И.В. Островский. О некоторых асимптотических свойствах целых функций с вещественными отрицательными нулями, Зап. матем. отд. Харьк. ун-та и Харьк. матем. об-ва, 28, 1961, 23-32.

5. А.А. Гольдберг, И.В. Островский. Некоторые теоремы о росте мероморфных функций, Зап. матем. отд. Харьк. ун-та и Харьк. матем. об-ва, 27, 1961, 3-37.

6. И.В. Островский. О целых функциях, удовлетворяющих некоторым специальным неравенствам, связанным с теорией характеристических функций вероятностных законов, Зап. матем. отд. Харьк. ун-та и Харьк.матем. об-ва, 29, 1963, 145-168.

7. G.Pólya. On the minimum modulus of integral functions, J. London Math.Soc., 1, 78-86, 1926.

8. А.И. Маркушевич. Теория аналитических функций, т. II, М., "Наука", 1968.

ON THE GROWTH OF THE ENTIRE RIDGE FUNCTIONS WITH REAL ZEROS

A. A. Goldberg, I. V. Ostrovskii

Let $\varphi(z)$ be the entire function having the ridge property: $|\varphi(z)| \le |\varphi(i\,\mathrm{Im}\,z)|$. If $\varphi(z)$ has the finite order and all its zeros are real then $\varphi(z)$ can be represented in the form

$$\varphi(z) = ce^{-\gamma z^2 + i\beta z} \prod \left(1 - \frac{z^2}{a_k^2}\right),$$

where c, γ, β and a_k are constants, $\gamma \geq 0$, $\mathrm{Im}\,\beta = 0$, $a_k > 0$, $\sum a_k^{-2} < \infty$.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1974 выпуск У

ДИСКРЕТНЫЕ МНОЖЕСТВА ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА, ОГРАНИЧЕННЫХ ПРИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ПЕРЕМЕННЫХ

Л.И. Ронкин

Пусть E, $E \neq \phi$ – дискретное множество в $\mathbb{R}^n$, а $\gamma(x)$ – функция, определенная на E и принимающая на E целые положительные значения. Обозначим через T_r n-мерный куб $\{x \in \mathbb{R}^n : |x_j| < r, \; j = 1, \dots, n\}$ и положим

$$\mu_{E,\gamma}(r) = \sum_{x \in E \cap T_r} \gamma(x),$$
$$d_{E,\gamma} = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{1}{(2r)^n} \mu_{E,\gamma}(r).$$

В дальнейшем рассматриваются только те множества E, точки которых находятся друг от друга на расстояниях, ограниченных снизу положительной константой. Иными словами всюду предполагается положительной величина

$$h_E = \frac{1}{2} \inf_{\substack{x' \in E, x'' \in E \\ x' \neq x''}} |x' - x''| . \qquad (I)$$

Мы рассматриваем здесь целые функции $f(z)$ экспоненциального типа, обращающиеся в точках множества E в ноль с кратностью не меньшей $\gamma(x)$. Ранее, см. [I, 2], для случая $\gamma(x) \equiv 1$ нами было доказано существование константы $a > 0$, при которой выполнение условия

$$\overline{\lim_{|z_1| + \dots + |z_n| \to \infty}} \frac{\ln|f(z)|}{|z_1| + \dots + |z_n|} < a h_E^{n-1} d_{E,\gamma}, \qquad (2)$$

где функция $f(z)$ из указанного класса, т.е. обращающаяся в ноль в точках множества E, влечет за собой тождественное равенство этой функции нулю. В [I], [2] были получены оценки точной верхней грани таких констант a. В предположении, что $\sup_{\mathbb{R}^n} |f(x)| < \infty$, было доказано

$$\sup a \geqslant \frac{2}{n!e} \left(\frac{\pi}{2}\right)^n \left\{1 + \frac{25}{3} \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{29}{3}\right)^{n-2-k}\right\}^{-1}. \qquad (3)$$

Несколько усовершенствуя метод работ [I], [2], мы получим здесь результаты, обобщающие и уточняющие цитированные утверждения. Именно: вместо оценки (3) будет получена оценка, более близкая к той, которую мы предполагаем точной, вместо функции $\gamma(x) \equiv 1$ будет рассматриваться случай произвольной функции $\gamma(x)$, и, наконец, рост целых функций будет характеризоваться не типом как в [I], [2], а более тонким понятием – системой сопряженных типов. При наложении некоторых дополнительных условий на множество E будет получена теорема единственности с точным значением соответствующей константы (для класса множеств).

Как следствие теорем единственности в заключение будут установлены соответствующие результаты о полноте систем функций вида $P(x)e^{i\langle\lambda, x\rangle}$, где $P(x)$ – полином, и, как обычно, $\langle\lambda, x\rangle = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$.

Через $\mathcal{B}_\sigma$, где $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, $0 \le \sigma_1 < \infty, \dots, 0 \le \sigma_n < \infty$, обозначим класс целых функций $f(z)$, $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, таких, что

$$\ln|f(z)| \le const + \sigma_1|y_1| + \dots + \sigma_n|y_n|.$$

Множество тех точек z, в которых голоморфная функция $f(z)$ обращается в ноль, обозначим через χ_f. Если $z^\circ \in \chi_f$, то через $\varkappa_f(z^\circ)$ обозначается кратность корня функции $f(z)$ в точке z°.

Множество функций $f \in \mathcal{B}_\sigma$ и таких, что

$$f(x) = 0 \quad \forall x \in E \ , \quad \varkappa_f(x) \ge \gamma(x) \quad \forall x \in E,$$

обозначим через $\mathcal{B}_\sigma(E, \gamma)$.

Наряду с эвклидовой нормой

$$|z| = \left\{\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

мы будем рассматривать норму

$$\|z\| = max\left\{|Re\, z_1|, |Im\, z_1|, \dots, |Re\, z_n|, |Im\, z_n|\right\}.$$

В частности, всюду в дальнейшем величину h_E мы определяем не соотношением (I), а посредством равенства

$$h_E = \frac{1}{2} \inf_{\substack{x' \in E,\ x'' \in E \\ x' \neq x''}} \|x' - x''\|.$$

При этом для сокращения записи вместо h_E в ряде случаев будет писаться h.

Через $V(\chi_f \cap G)$, где G – область в $\mathbb{C}^n$, обозначается ($2n-2$) – мерный, вычисленный с учетом кратности, объем множества $\chi_f \cap G$. Иными словами

$$V(\chi_f \cap G) \stackrel{def}{=\!=} \int_{\chi_f \cap G} \varkappa_f(z)\, dV_{2n-2} \ ,$$

где dV_{2n-2} – элемент ($2n-2$) – мерного эвклидового объема множества χ_f.

Через $\omega_n(\ell)$ обозначен

$$\inf V(\chi_f \cap \{z : \|z\| < 1\}),$$

где $\inf$ берется по всем функциям f, голоморфным в кубе $\{z : \|z\| < 1\}$ и обращающимся в начале координат в ноль с кратностью не меньшей ℓ. Заметим, что поскольку указанный куб содержит шар $\{z : |z| < 1\}$, то, как это следует из оценок величины $V(\chi_f \cap G)$, полученных Рутисхаузером [3] и Лелоном [4] (см. например [5]) для случая $G = \{z : |z| < r\}$, величина $\omega_n(\ell)$ оценивается следующим образом [I])

$$\omega_n(\ell) \ge \ell \frac{\pi^{n-1}}{(n-1)!} \ . \qquad (4)$$

Естественно предположить, что точное значение константы $\omega_n(\ell)$ есть $\ell \cdot 4^{n-1}$ (оценка $\omega_n(\ell) \le \ell \cdot 4^{n-1}$ – очевидна), однако доказано это лишь для случая $n = 2$ (см. [6]).

Обозначим

$$d^*_{E,\gamma} = \varlimsup_{z \to \infty} \frac{1}{(2z)^n} \sum_{x \in E \cap T_z} \omega_n(\gamma(x)),$$

$$A^*_{E,\gamma} = \sup_{E' \subset E} h^{n-1}_{E'} d^*_{E',\gamma} \ ,$$

$$A_{E,\gamma} = \sup_{E' \subset E} h^{n-1}_{E'} d_{E',\gamma} \ .$$

I) Отметим, что $\frac{\pi^{n-1}}{(n-1)!}$ есть объем единичного шара в $\mathbb{C}^{n-1}$.

Из (4) следует, что

$$d^*_{E,\gamma} \geqslant \frac{\pi^{n-1}}{(n-1)!} d_{E,\gamma}$$

и следовательно

$$A^*_{E,\gamma} \geqslant \frac{\pi^{n-1}}{(n-1)!} A_{E,\gamma} .$$

При $n=2$
$$d^*_{E,\gamma} = 4d_{E,\gamma} ,$$
$$A^*_{E,\gamma} = 4A_{E,\gamma} .$$

По-видимому, при произвольном n имеют место равенства
$$d^*_{E,\gamma} = 4^{n-1} d_{E,\gamma} ,$$
$$A^*_{E,\gamma} = 4^{n-1} A_{E,\gamma} .$$

Доказательство этого очевидным образом сводится к доказательству того, что $\omega_n(\ell) = \ell \cdot 4^{n-1}$. Последнее, как уже отмечалось, доказано лишь для случая $n=2$.

Если $\sup\limits_E \gamma(x) < \infty$, то, как нетрудно видеть, $A^*_{E,\gamma} < \infty$ (напомним, что $h_E > 0$).

Обозначим через α_n точную верхнюю грань констант c таких, что каковы бы ни были множество E и функция $\gamma(x)$ имеет место импликация

$$\left.\begin{array}{l} f(z) \in \mathcal{B}_\sigma(E,\gamma) \\ \sigma_1 + \ldots + \sigma_n < cA^*_{E,\gamma} \end{array}\right\} \Longrightarrow f(z) \equiv 0. \tag{5}$$

Т Е О Р Е М А I. Имеет место следующая оценка

$$\alpha_n \geqslant \frac{\pi}{e 2^{n-1}} . \tag{6}$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Чтобы убедиться в справедливости теоремы, достаточно показать, что при априори произвольных σ, E и γ имеет место импликация

$$\left.\begin{array}{l} f \in \mathcal{B}_\sigma(E,\gamma) \\ f \not\equiv 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \sigma_1 + \ldots + \sigma_n \geqslant \frac{\pi}{2^{n-1} e} h_E^{n-1} d^*_{E,\gamma} . \tag{7}$$

Обозначим через $S^{(j)}$ прямоугольник в плоскости переменного z_j

$$S^{(j)} = \{ z_j : |\operatorname{Im} z_j| < h, \ |\operatorname{Re} z_j| < r \} .$$

Декартово произведение прямоугольников $S^{(j)}$, $j = 1,\ldots,n$, обозначим через $T_{r,h}$.

Ограничения на рост функции $f(z)$, содержащиеся в определении класса $\mathcal{B}_\sigma$, позволяют оценить сверху величину $V(\chi_f \cap T_{r,h})$ для функций $f \in \mathcal{B}_\sigma$, а значит и для функций $f \in \mathcal{B}_\sigma(E,\gamma)$. С другой стороны, $V(\chi_f \cap T_{r,h})$ легко оценивается снизу, если дано, что $f(x) = 0 \ \forall x \in E$. Импликация (7) будет доказана сравнением таких оценок.

Итак, пусть $f \in \mathcal{B}_\sigma(E,\gamma), f \not\equiv 0$. Чтобы оценить $V(\chi_f \cap T_{r,h})$ снизу покроем каждую точку x множества E кубом $Q_x = \{ z : \|z - x\| < h \}$. Согласно определению величины $h = h_E$ эти кубы не пересекаются. Кроме того, очевидно, что $Q_x \subset T_{r,h}$ $\forall x \in T_{r-h}$. Поэтому

$$V(\chi_f \cap T_{z,h}) \geqslant \sum_{x\in E\cap T_{z-h}} V(\chi_f \cap Q_x).$$

Отсюда, замечая, что

$$V(\chi_f \cap Q_x) \geqslant h^{2n-2}\,\omega_n(\varkappa_f(x)),$$

заключаем, что

$$V(\chi_f \cap T_{z,h}) \geqslant h^{2n-2} \sum_{x\in E\cap T_{z-h}} \omega_n(\gamma(x)).$$

Следовательно

$$\overline{\lim_{z\to\infty}} \frac{1}{(2z)^n} V(\chi_f \cap T_{z,h}) \geqslant h_E^{2n-2}\, d^*_{E,\gamma}. \tag{8}$$

Для оценки сверху величины $V(\chi_f \cap T_{z,h})$ мы воспользуемся тем, что, как известно (см., например, [5], стр. 343, 368) ($2n-2$)-мерный объем аналитического множества [2] $\chi_f \cap G$ равен сумме ($2n-2$)-мерных объемов его проекций на комплексно ($n-1$)-мерные координатные плоскости $z_j=0,\ j=1,\dots,n$. Оценим объем проекции множества $\chi_f \cap T_{z,h}$ на плоскость $z_1=0$. Этот объем равен

$$\int_{'T_{z,h}} n_f(z,'z)\,d'z,$$

где $'z=(z_2,\dots,z_n)$, $'T_{z,h}=S^{(2)}\times\dots\times S^{(n)}$, $d'z$ – элемент объема в пространстве C^{n-1} , $n_f(z,'z)$ – число корней (с учетом кратности) функции $\varphi_{'z}(z_1)=f(z_1,'z)$ в прямоугольнике $S^{(1)}$.

Применяя формулу Иенсена, оценим $n_f(z,'z)$. Имеем

$$\begin{aligned} n_f(z,'z) &\leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f((z+h)e e^{i\theta},'z)|\,d\theta - \ln|f(0,'z)| \leqslant \\ &\leqslant \sup_{\mathbb{R}^n} \ln|f(x)| + \sigma_1 \frac{2e}{\pi}(z+h) + \\ &+ \sum_{j=2}^{n} \sigma_j |y_j| - \ln|f(0,'z)| \end{aligned}$$

и значит

$$\begin{aligned} &\overline{\lim_{z\to\infty}} \frac{1}{(2z)^n}\int_{'T_{z,h}} n_f(z,'z)\,d'z \leqslant \\ &\leqslant \sigma_1 \frac{e}{\pi}(2h)^{n-1} - \underline{\lim_{z\to\infty}} \frac{1}{(2z)^n}\int_{'T_{z,h}} \ln|f(0,'z)|\,d'z. \end{aligned}$$

Заметим теперь, что второе слагаемое справа равно нулю. Это вытекает из следующей леммы, доказательство которой будет приведено несколько позже.

---

2) Каждый раз, говоря об объеме аналитического множества или его проекций, мы имеем в виду, специально этого не оговаривая, объем, вычисленный с учетом кратности соответствующих нулевых точек.

ЛЕММА I. Если $f\in\mathcal{B}_\sigma, f\neq 0$, то

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\int_{T_h}dy\int_{|x|<r}\ln|f(x+iy)|\,dx=0.$$

Таким образом

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{1}{(2r)^n}\int_{'T_{r,h}}n_f(r,'z)\,d'z\leqslant\sigma_1\frac{e}{\pi}(2h)^{n-1}.$$

Аналогичные соотношения получаются и для проекций множества χ_f на другие координатные плоскости. Следовательно

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{1}{(2r)^n}V(\chi_f\cap T_{r,h})\leqslant(\sigma_1+\ldots+\sigma_n)\frac{e}{\pi}(2h)^{n-1}. \tag{9}$$

Сравнивая оценки (8) и (9), заключаем, что имеет место неравенство

$$\sigma_1+\ldots+\sigma_n\geqslant\frac{\pi}{2^{n-1}e}\,h_E^{n-1}\,d^*_{E,\gamma}\ ,$$

т.е. верна импликация (7). Следовательно в предположении справедливости леммы I теорема доказана.

Прежде чем перейти к доказательству леммы I, отметим два утверждения, непосредственно вытекающих из теоремы I и сделанных на стр. I3 замечаний о связи между величинами $A^*_{E,\gamma}$ и $A_{E,\gamma}$.

СЛЕДСТВИЕ I[3]. Если

$$\sigma_1+\ldots+\sigma_n<\frac{2}{n!\,e}\left(\frac{\pi}{2}\right)^n A_{E,\gamma}\ ,$$

то

$$f(z)\in\mathcal{B}_\sigma(E,\gamma)\Rightarrow f(z)\equiv 0.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $E\subset\mathbb{R}^2$ и

$$\sigma_1+\sigma_2<\frac{2\pi}{e}A_{E,\gamma}\ ;$$

тогда

$$f(z_1,z_2)\in\mathcal{B}_\sigma(E,\gamma)\Rightarrow f(z)\equiv 0.$$

Замечание. Пример функции $f(z)=\prod_{j=1}^{n}\sin z_j$, принадлежащей $\mathcal{B}_\sigma(E,\gamma)$ с $\sigma=(\pi,\ldots,\pi)$, $E=\{(k_1,\ldots,k_n): k_j=0,\pm1,\ldots, j=1,\ldots,n\}$, показывает, что импликация

$$f(z)\in\mathcal{B}_\sigma(E,\gamma)\Rightarrow f(z)\equiv 0$$

не имеет места при всех E, γ и σ таких, что

$$\sigma_1+\ldots+\sigma_n<cA_{E,\gamma}\ ,$$

если $c>2^{n-1}\pi$.

В случае $n=2$ это означает, что $\alpha_2\leq\frac{\pi}{2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ I. Так как функция $f\in\mathcal{B}_\sigma$, то имеет место неравенство

---

[3] Ср. с (2) и (3).

$$\ln|f(x+iy)| \leqslant c+\sigma_1|y_1|+\ldots+\sigma_n|y_n|, \tag{10}$$

где константа $c \in (-\infty,\infty)$. Поэтому

$$\varlimsup_{R\to\infty} \frac{1}{R^{n+1}}\int_{T_h} dy \int_{T_R} \ln|f(x+iy)|\,dx \leqslant 0. \tag{11}$$

Отсюда следует, что равенство

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^{n+1}}\int_{T_h} dy \int_{T_R} \ln|f(x+iy)|\,dx = 0$$

эквивалентно следующему

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^{n+1}}\int_{T_h} dy \int_{\lambda<|x|<R} \{-\ln|f(x+iy)|\}^+ dx = 0. \tag{12}$$

Обозначив

$$\{-\ln|f(tx+iy)f(-tx+iy)|\}^+ = u(t,x,y)$$

и

$$\Phi(t) = \int_{|x|=1} d\nu \int_{T_h} u(t,x,y)\,dy,$$

где $d\nu$ - элемент объема сферы $\{x:|x|=1\}$, преобразуем интеграл в (12). Имеем

$$\int_{T_h} dy \int_{\lambda<|x|<R} \{-\ln|f(x+iy)|\}^+ dx = \frac{1}{2}\int_{\lambda}^{R} \Phi(t)\,t^{n-1}\,dt.$$

Функция $\Phi(t)$ положительна и, следовательно, $\int_\lambda^R \Phi(t)t^{n-1}dt$ монотонно неубывает при $R\to\infty$. Поэтому (см.,например, [5]) для доказательства равенства (12) или, что то же самое, равенства

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^{n+1}}\int_{\lambda}^{R} \Phi(t)\,t^{n-1}\,dt = 0$$

достаточно доказать, что

$$\int^{\infty} \frac{dR}{R^{n+2}}\int_{\lambda}^{R} \Phi(t)\,t^{n-1}\,dt < \infty. \tag{13}$$

В свою очередь для доказательства (13) достаточно показать, что

$$\int_{\lambda}^{\infty} \frac{\Phi(t)}{t^2}\,dt < \infty.$$

Это с очевидностью следует из равенства

$$\int_{\lambda}^{R} \frac{\Phi(t)}{t^2}\,dt = \frac{1}{R^{n+1}}\int_{\lambda}^{R}\Phi(t)\,t^{n-1}dt + (n+1)\int_{\lambda}^{R}\frac{dt}{t^{n+2}}\int_{\lambda}^{t}\Phi(s)\,s^{n-1}ds.$$

Оценим вначале интеграл

$$\int_{\lambda}^{R} \frac{u(t,x,y)}{t^2}\,dt.$$

Имеем

$$\int_{\lambda}^{R} \frac{u(t,x,y)}{t^2}\,dt \leqslant \frac{4}{3}\int_{\lambda}^{2R} u(t,x,y)\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{4R^2}\right)dt. \tag{14}$$

Далее, согласно теореме Карлемана (см., например, [7]), применяемой к функции $f(wx+iy)$, имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\lambda}^{2R} u(t,x,y)\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{4R^2}\right)dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\lambda}^{2R} \ln^+|f(tx+iy)\,f(-tx+iy)|\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{4R^2}\right)dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi R}\int_0^{\pi}\ln|f(2Re^{i\theta}x+iy)|\sin\theta\, d\theta- \tag{15}$$

$$-\operatorname{Im}\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\ln f(\lambda e^{i\theta}x+iy)\left(\frac{\lambda e^{i\theta}}{2R}-\frac{e^{-i\theta}}{\lambda}\right)d\theta=\Lambda_1+\Lambda_2+\Lambda_3 .$$

Из (I4) и (I5) следует, что

$$\int_{\lambda}^{R}\frac{\Phi(t)}{t^2}dt \leqslant \frac{8\pi}{3}\int_{T_h}dy\int_{|x|=1}\Lambda_1\, d\nu +$$

$$+\frac{8\pi}{3}\int_{T_h}dy\int_{|x|=1}\Lambda_2\, d\nu+\frac{8\pi}{3}\int_{T_h}dy\int_{|x|=1}\Lambda_3\, d\nu= \tag{16}$$

$$=\Lambda_1^*+\Lambda_2^*+\Lambda_3^* .$$

Оценим последовательно величины Λ_1^* , Λ_2^* , Λ_3^* . Учитывая (I0), имеем

$$\Lambda_1^* \leqslant$$

$$\leqslant \frac{8}{3}\int_{|x|=1}d\nu\int_{\lambda}^{2R}\Big\{c+\sum_{j=1}^{n}\sigma_j|y_j|\Big\}^+\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{4R^2}\right)dt \leqslant \tag{17}$$

$$\leqslant \frac{8}{3}(2h)^n\nu_n\Big\{c+h\sum_{j=1}^{n}\sigma_j\Big\}\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{4}\right)=c_1<\infty .$$

$$\Lambda_2^* <$$

$$< \frac{4}{3R}\int_{T_h}dy\int_{|x|=1}d\nu\int_0^{\pi}\Big\{c+\sum_{j=1}^{n}\sigma_j|y_j|+2R\sin\theta\sum_{j=1}^{n}\sigma_j|x_j|\Big\}\sin\theta\, d\theta \leqslant \tag{18}$$

$$\leqslant \frac{8}{3R}(2h)^n\nu_n\Big\{c+h\sum_{j=1}^{n}\sigma_j\Big\}+\frac{4\pi}{3}(2h)^n\sum_{j=1}^{n}\sigma_j=c_2<\infty .$$

Оценку Λ_3^* проведем при дополнительном предположении, что $f(0)\neq 0$ и при этом h столь мало, что $f(z)\neq 0$ при $y\in T_{2h}$, $x\in T_h$. В этом случае при $\lambda<h$ функция $\ln f(z)$ - голоморфная на $\mathcal{K}=\{z:\ \|x\|\leqslant\lambda,\ \|y\|<h+\lambda\}$. Следовательно

$$\sup_{\mathcal{K}}|\ln|f(z)||=c_3'<\infty .$$

Заметим теперь, что $\lambda e^{i\theta}x+iy\in\mathcal{K}$ при $|x|=1$, $\|y\|\leqslant h$. Поэтому

$$\Lambda_3^* \leqslant \frac{4\pi}{3}(2h)^n\nu_n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\lambda}\right)c_3'=c_3<\infty . \tag{19}$$

Из (I6) - (I9) следует, что

$$\int^{\infty}\frac{\Phi(t)}{t^2}dt\leqslant c_1+c_2+c_3<\infty .$$

Тем самым утверждение леммы доказано при дополнительных предположениях $f(0)\neq 0$

и малости числа h . Чтобы избавиться от этих ограничений, заметим, что ввиду (I3) имеют место следующие утверждения.

а) Для любой функции $f\in\mathcal{B}_\sigma$ и любого $a\in\mathbb{R}^n$

$$\underline{\lim}_{R\to\infty}\frac{1}{R^{n+1}}\int_{T_h}dy\int_{|x|<R}\ln|f(x+iy)|\,dx=$$
$$=\underline{\lim}_{R\to\infty}\frac{1}{R^{n+1}}\int_{T_h}dy\int_{|x|<R-a}\ln|f(x+iy)|\,dx\geqslant$$
$$\geqslant\underline{\lim}_{R\to\infty}\frac{1}{R^{n+1}}\int_{T_h}dy\int_{|x|<R}\ln|f(x+a+iy)|\,dx.$$

б) Пусть конечное семейство открытых множеств U_j образует покрытие куба T_h . Тогда

$$\underline{\lim}_{R\to\infty}\frac{1}{R^{n+1}}\sum_j\int_{U_j}dy\int_{|x|<R}\ln|f(x+iy)|\,dx\leqslant$$
$$\leqslant\underline{\lim}_{R\to\infty}\frac{1}{R^{n+1}}\int_{T_h}dy\int_{|x|<R}\ln|f(x+iy)|\,dx. \tag{20}$$

Из а) следует, что утверждение леммы инвариантно относительно сдвига начала координат на вещественный вектор, а поскольку на $\mathbb{R}^n$ всегда есть точки, в которых $f(x)\neq 0$, то фигурировавшее выше условие $f(0)\neq 0$ *можно отбросить. Таким образом, для каждой точки* $y^\circ\in\overline{T}_h$ найдется такое число h° , что

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R^{n+1}}\int_{\|y-y^\circ\|<h^\circ}dy\int_{|x|<R}\ln|f(x+iy)|\,dx=0. \tag{21}$$

Кубы $\{y:\|y-y^\circ\|<h^\circ\}$ образуют покрытие замкнутого куба $\overline{T}_h$. Выбирая из этого покрытия конечное и используя затем б) и (21), заключаем, что для любой функции $f\in\mathcal{B}_\sigma$ и любого $h>0$

$$\underline{\lim}_{R\to\infty}\frac{1}{R^{n+1}}\int_{T_h}dy\int_{|x|<R}\ln|f(x+iy)|\,dx\geqslant 0$$

и, следовательно,

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R^{n+1}}\int_{T_h}dy\int_{|x|<R}\ln|f(x+iy)|\,dx=0.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда пара E,γ характеризуется не поведением функции

$$\sum_{x\in E\cap T_r}\omega_n(\gamma(x)),\qquad (r\to\infty),$$

как это было в теореме I, а поведением функции

$$\Phi(s)=\sum_{\substack{x\in E\\ |x_1|<s_1,\dots,|x_n|<s_n}}\omega_n(\gamma(x))\qquad (s_1\to\infty,\dots,s_n\to\infty).$$

Пусть $\varphi_j(R)$, $\psi_j(R)$, $j=1,\dots,n$, - положительные, монотонно возрастающие функции, удовлетворяющие условиям:

а) $\qquad \varphi_j(R)<\psi_j(R)$, $\quad j=1,2,\dots,n$;

б) $\sup\limits_{R>1} \dfrac{\psi_j(R)}{R} < \infty$, $j=1,\dots,n$;

в) $\lim\limits_{R\to\infty} \dfrac{\varphi_j(R)}{R} = 0$, $j=1,\dots,n$;

г) $\overline{\lim\limits_{R\to\infty}} \dfrac{1}{R^n} \prod\limits_{j=1}^{n} \psi_j(R) > 0$.

Обозначим

$$T_\varphi^\psi(R) = \{s \in \mathbb{R}^n : \varphi_j(R) < s_j < \psi_j(R),\ j=1,\dots,n\},$$

$$\Omega_\varphi^\psi = \bigcap_{R>1} T_\varphi^\psi(R),$$

$$D_s = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_j| < s_j,\ j=1,\dots,n\},$$

$$D_{s,h} = D_s \times T_h = \{z \in \mathbb{C}^n : x \in D_s,\ y \in T_h\}.$$

В качестве характеристики пары E, γ здесь будут использованы величины

$$B_{E,\gamma} = \sup_{\varphi,\psi} \sup_{E' \subset E} h_{E'}^{n-1} \delta_{E',\gamma}(\varphi,\psi),$$

$$B^*_{E,\gamma} = \sup_{\varphi,\psi} \sup_{E' \subset E} h_{E'}^{n-1} \delta^*_{E',\gamma}(\varphi,\psi),$$

где

$$\delta_{E,\gamma}(\varphi,\psi) = \frac{1}{2^n} \lim_{\substack{|s|\to\infty \\ s\in\Omega_\varphi^\psi}} \frac{1}{s} \sum_{x \in D_s \cap E'} \gamma(x),$$

$$\delta^*_{E',\gamma}(\varphi,\psi) = \frac{1}{2^n} \lim_{\substack{|s|\to\infty \\ s\in\Omega_\varphi^\psi}} \frac{1}{s} \Phi(s),$$

а $$\frac{1}{s} = \frac{1}{s_1 \dots s_n}.$$

Заметим, что $B_{E,\gamma}$ и $B^*_{E,\gamma}$ связаны друг с другом теми же соотношениями, что и величины $A_{E,\gamma}$ и $A^*_{E,\gamma}$.

П р и м е р. Пусть $\gamma \equiv 1$, $E =$

$$= \{(k_1, k_2) : k_j = 0, \pm 1, \dots, j = 1,2,\ \sqrt[3]{|k_1|} < |k_2| < |k_1|^3\}.$$

Положим $\varphi_1(R) = \varphi_2(R) = \sqrt{R}$, $\psi_1(R) = \psi_2(R) = R$.

Тогда имеем

$$\Omega_\varphi^\psi = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ : \sqrt{x_1} < x_2 < x_1^2\},$$

$$\delta_{E,\gamma}(\varphi,\psi) = 1, \quad \delta^*_{E,\gamma}(\varphi,\psi) = 4$$

и, следовательно, $B_{E,\gamma} = \frac{1}{2}$, $B^*_{E,\gamma}(\varphi,\psi) = 2$.

Обозначим через β_n точную верхнюю грань таких констант c , что при любых E и γ имеет место импликация

$$\left.\begin{aligned} &f(z)\in\mathcal{B}_{\sigma}(E,\gamma)\\ &\sigma_1+\ldots+\sigma_n<cB^*_{E,\gamma}\end{aligned}\right\}\Rightarrow f(z)=0.$$

ТЕОРЕМА 2. Имеет место оценка

$$\beta_n\geqslant\frac{\pi}{2^{n-1}}\qquad\forall n=2,3,\ldots\ .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема будет доказана, если мы покажем, что при любых $E,\gamma,\ \varphi_j,\ \psi_j$ имеет место импликация

$$\left.\begin{aligned} &f\in\mathcal{B}_{\sigma}(E,\gamma)\\ &f\neq0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\sigma_1+\ldots+\sigma_n\geqslant\frac{\pi}{2^{n-1}}h_E^{n-1}\delta_{E,\gamma}(\varphi,\psi).\qquad(22)$$

Чтобы установить это, мы получим и сравним оценки сверху и снизу величины

$$\frac{1}{R^n}\int\limits_{T_{\varphi}^{\psi}(R)}\frac{V_f(s)}{s}\,ds,\qquad(23)$$

где

$$V_f(s)=V(\chi_f\cap D_{s,h}).$$

Поскольку $V_f(s)$ есть сумма объемов проекций множества $\chi_f\cap D_{s,h}$ на координатные плоскости, то оценка выражения (2I) сводится к оценке величин, отличающихся от (2I) тем, что $V_f(s)$ заменено в них объемами проекций множества $\chi_f\cap D_{s,h}$ на координатные плоскости. В случае, когда рассматривается проектирование на плоскость $z_1=0$, соответствующая величина имеет вид

$$\frac{1}{R^n}\int\limits_{T_{\varphi}^{\psi}(R)}\left\{\int\limits_{'D_{s,h}}n_f(s_1,'z)\,d'z\right\}\frac{ds}{s},$$

где $'D_{s,h}=\{'z:|x_j|<s_j,\ |y_j|<h,\quad j=2,\ldots,n\}$.

$n_f(s_1,'z)$ как и прежде – число корней (с учетом кратности) функции $f(z_1,'z)$ в прямоугольнике $|x_1|<s_1$, $|y_1|<h$.

Обозначим

$$'T_{\varphi}^{\psi}(R)=\left\{'s=(s_2,\ldots,s_n):\ \varphi_j(R)<s_j<\psi_j(R),\ j=2,\ldots,n\right\},$$
$$\frac{d's}{'s}=\frac{ds_2\ldots ds_n}{s_2\ldots s_n}.$$

Используя формулу Иенсена, имеем

$$\begin{aligned}
&\varlimsup_{R\to\infty}\frac{1}{R^n}\int\limits_{T_{\varphi}^{\psi}(R)}\left\{\int\limits_{'D_{s,h}}n_f(s_1,'z)\,d'z\right\}\frac{ds}{s}=\\
&=\varlimsup_{R\to\infty}\frac{1}{R^n}\int\limits_{'T_{\varphi}^{\psi}(R)}\frac{d's}{'s}\int\limits_{'D_{s,h}}d'z\int\limits_{\varphi_1(R)}^{\psi_1(R)}\frac{1}{s_1}n_f(s_1,'z)\,ds_1\leqslant\\
&\leqslant\varlimsup_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi R^n}\int\limits_{'T_{\varphi}^{\psi}(R)}\frac{d's}{'s}\int\limits_{'D_{s,h}}d'z\int\limits_{0}^{2\pi}\ln|f((\psi_1(R)+h)e^{i\theta},'z)|\,d\theta-\qquad(24)\\
&-\varliminf_{R\to\infty}\frac{1}{R^n}\int\limits_{'T_{\varphi}^{\psi}(R)}\frac{d's}{'s}\int\limits_{'D_{s,h}}\ln|f(0,'z)|\,d'z.
\end{aligned}$$

При этом предполагается, что $f(0,'z)\neq0$. Это предположение не нарушает общности.

Ниже будет доказана

Л Е М М А 2. П у с т ь ф у н к ц и я $f\in\mathcal{B}_\sigma$. Т о г д а

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R^{n+1}}\int_{T_\varphi^\psi(R)}\frac{ds}{s}\int_{\mathcal{D}_{s,h}}\ln|f(z)|\,dz=0.$$

Из этой леммы, ввиду свойств а) – в) функций φ_j и ψ_j , следует, что последнее слагаемое в (24) равно нулю. Следовательно

$$\overline{\lim_{R\to\infty}}\frac{1}{R^n}\int_{T_\varphi^\psi(R)}\left\{\int_{'\mathcal{D}_{s,h}}n_f(s_1,'z)\,d'z\right\}\frac{ds}{s}\leqslant$$

$$\leqslant\overline{\lim_{R\to\infty}}\frac{1}{2\pi R^n}\int_{'T_\varphi^\psi(R)}\frac{d's}{'s}\int_{'\mathcal{D}_{s,h}}\ln|f((\psi_1(R)+h)e^{i\theta},'z)|\,d\theta\leqslant$$

$$\leqslant\overline{\lim_{R\to\infty}}\frac{1}{2\pi R^n}\int_{'T_\varphi^\psi(R)}\frac{d's}{'s}\int_{'\mathcal{D}_{s,h}}\left\{4\sigma_1\psi_1(R)+\sum_{j=2}^{n}\sigma_j|y_j|+const\right\}d'z=$$

$$=\frac{2^{2n-1}h^{n-1}}{\pi}\sigma_1\overline{\lim_{R\to\infty}}\frac{1}{R^n}\prod_{j=1}^{n}\psi_j(R).$$

Аналогично оцениваются соответствующие величины при проектировании на другие координатные плоскости. В итоге получается следующая оценка

$$\overline{\lim_{R\to\infty}}\frac{1}{R^n}\int_{T_\varphi^\psi(R)}V_f(s)\frac{ds}{s}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{2^{2n-1}}{\pi}(\sigma_1+\ldots+\sigma_n)h_E^{n-1}\overline{\lim_{R\to\infty}}\frac{1}{R^n}\prod_{j=1}^{n}\psi_j(R). \tag{25}$$

Оценка снизу величины (23) производится с помощью тех же рассуждений, что и при доказательстве неравенства (8).

Если $\delta^*_{E,\gamma}(\varphi,\psi)>0$, то при любом $\varepsilon\in(0,\delta^*_{E,\gamma}(\varphi,\psi))$

$$\overline{\lim_{R\to\infty}}\frac{1}{R^n}\int_{T_\varphi^\psi(R)}V_f(s)\frac{ds}{s}\geqslant$$

$$\geqslant\overline{\lim_{R\to\infty}}\frac{h^{2n-2}}{R^n}\int_{T_\varphi^\psi(R)}2^n(\delta^*_{E,\gamma}(\varphi,\psi)-\varepsilon)\,ds=$$

$$=h_E^{2n-2}\,2^n(\delta^*_{E,\gamma}(\varphi,\psi)-\varepsilon)\overline{\lim_{R\to\infty}}\frac{1}{R^n}\prod_{j=1}^{n}\psi_j(R)$$

и следовательно

$$\overline{\lim_{R\to\infty}}\frac{1}{R^n}\int_{T_\varphi^\psi(R)}V_f(s)\frac{ds}{s}\geqslant$$
$$\geqslant 2^n\delta^*_{E,\gamma}(\varphi,\psi)\,h^{2n-2}\overline{\lim_{R\to\infty}}\frac{1}{R^n}\prod_{j=1}^{n}\psi_j(R). \tag{26}$$

Если же $\delta^*_{E,\gamma}(\varphi,\psi)=0$, то неравенство (26) очевидно. Сравнивая (25) и (26) и учиты-

$$\frac{\pi}{2^{n-1}}\,\delta^*_{E,\gamma}\,h_E^{n-1} \leqslant \sum_{j=1}^{n}\sigma_j\,,$$

то есть имеет место импликация (22).

Для завершения доказательства теоремы осталось провести доказательство леммы 2. Но прежде сформулируем утверждение непосредственно вытекающее из теоремы 2 для случая $n=2$, то есть для случая, когда известно точное значение величины $\omega_n(\ell)$.

Т Е О Р Е М А 3. Точная верхняя грань тех констант c, при которых для всех E,γ и $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2)$ имеет место импликация

$$\left.\begin{array}{l} f(z_1,z_2)\in\mathcal{B}_\sigma(E,\gamma) \\ \sigma_1+\sigma_2 < c\,B_{E,\gamma}\end{array}\right\} \Longrightarrow f(z)\equiv 0,$$

равна 2π.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О Л Е М М Ы 2. Проведем индукцию по числу переменных. Предположим, что утверждение леммы имеет место для функций от $n-1$ переменной.

Обозначим

$$G_R^\varepsilon=\left\{s\in\mathbb{R}^n : s\in T_\varphi^\psi(R),\ \min_j s_j > \varepsilon R\right\},\ \varepsilon>0.$$

Не нарушая общности, можно считать, что $|f(z)|\leqslant 1$ при $x\in\mathbb{R}^n$, $y\in T_h$. В этом случае

$$\int_{D_{s,h}} \ln|f(z)|\,dz \geqslant \int_{T_{\tau R,h}} \ln|f(z)|\,dz \qquad \forall s\in T_\varphi^\psi(R).$$

Здесь

$$\tau=\sup_j \sup_{1<R<\infty}\frac{\psi_j(R)}{R}.$$

Поскольку согласно лемме I

$$\overline{\lim_{R\to\infty}}\,\frac{1}{R^{n+1}}\int_{T_{\tau R,h}}\ln|f(z)|\,dz=0,$$

то при любом $\eta>0$, начиная с некоторого $R_0=R_0(\eta)$, имеет место неравенство

$$\int_{T_{\tau R,h}}\ln|f(z)|\,dz \geqslant -R^{n+1}\eta.$$

Поэтому

$$\frac{1}{R^{n+1}}\int_{G_R^\varepsilon}\frac{ds}{s}\int_{D_{s,h}}\ln|f(z)|\,dz \geqslant$$

$$\geqslant -\eta\int_{G_R^\varepsilon}\frac{ds}{s}+O(1)\geqslant -\eta\left(\ln\frac{\tau}{\varepsilon}\right)^n+O(1)$$

и, следовательно,

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R^{n+1}}\int_{G_R^\varepsilon}\frac{ds}{s}\int_{D_{s,h}}\ln|f(z)|\,dz=0. \tag{27}$$

Оценим теперь

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R^{n+1}}\int_{T_\varphi^\psi(R)\setminus G_R^\varepsilon}\frac{ds}{s}\int_{D_{s,h}}\ln|f(z)|\,dz. \tag{28}$$

Обозначим
$$G_j^{\varepsilon}(R) = \{ s : s \in T_{\varphi}^{\psi}(R), \quad s_j < \varepsilon R \}, \quad j = 1, \dots, n.$$
Имеем
$$T_{\varphi}^{\psi}(R) \setminus G_R^{\varepsilon} = \bigcup_{j=1}^{n} G_j^{\varepsilon}(R). \tag{29}$$
и, значит, для оценки величины (28) достаточно оценить
$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^{n+1}} \int_{G_j^{\varepsilon}(R)} \frac{ds}{s} \int_{D_{s,h}} \ln|f(z)|dz \tag{30}$$
Для упрощения записи рассмотрим случай $j=1$. Имеем
$$\int\limits_{D_{s,h}} \ln|f(z)|dz = \int\limits_{'D_{s,h}} d'z \int\limits_{-s_1}^{s_1} dx_1 \int\limits_{-h}^{h} \ln|f(x_1+iy_1, 'z)|dy_1.$$
В [2] имеется следующая оценка (см. лемму 3)
$$\int\limits_{-r}^{r} dx_1 \int\limits_{-h}^{h} \ln|\mathcal{F}(x_1+iy_1)|dy_1 \geqslant$$
$$\geqslant -16hr\, n_F(2r+2h) - \frac{8}{3}hr^3 \int_{2r}^{\infty} \frac{n_F(t+h)}{t^3}dt -$$
$$-16hr\, n_F(2h) - \frac{8}{3}rh^3 \int_{2h}^{\infty} \frac{n_F(t)}{t^3}dt +$$
$$+4hr \ln|\mathcal{F}(0)|.$$
Здесь $\mathcal{F}(z_1)$ – целая функция экспоненциального типа от $z_1 \in \mathbb{C}$, $n_F(t)$ – число корней (с учетом кратности) функции $\mathcal{F}(z_1)$ в круге $|z_1| \leqslant t$.

Из этой оценки с помощью формулы иенсена заключаем, что для любой функции $f(z) \in \mathcal{B}_{\sigma}$, $z \in \mathbb{C}^n$, существуют такие константы $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $c_3 > 0$, зависящие только от выбора f и h, что при любом $r \geqslant 0$ и $'z \in \mathbb{R}^{n-1} \times 'T_h$ имеет место неравенство
$$\int\limits_{-r}^{r} dx_1 \int\limits_{-h}^{h} \ln|f(x_1+iy_1, 'z)|d'z \geqslant$$
$$\geqslant -c_1 r^2 - c_2 r + c_3 r \ln|f(0,'z)|.$$

Из этого неравества следует, что при $s \in G_1^{\varepsilon}(R)$
$$\frac{1}{R^{n+1}} \int\limits_{G_1^{\varepsilon}(R)} \frac{ds}{s} \int\limits_{D_{s,h}} \ln|f(z)|dz \geqslant -\frac{c_1'}{R^{n+1}} \int\limits_{G_1^{\varepsilon}(R)} s_1 ds -$$
$$-\frac{c_2'}{R^{n+1}} \int\limits_{G_1^{\varepsilon}(R)} ds + \frac{c_3'}{R^{n+1}} \int\limits_{G_1^{\varepsilon}(R)} \frac{ds}{'s} \int\limits_{D_{s,h}} \ln|f(0,'z)|d'z,$$
где константы c_1', c_2', c_3' той же природы, что и c_1, c_2, c_3.

Далее имеем
$$\int_{G_1^{\varepsilon}(R)} s_1\, ds \leqslant \int_{\varphi_1(R)}^{\varepsilon R} s_1\, ds_1 \int_{'T_{\varphi}^{\psi}(R)} d's \leqslant (\varepsilon R)^2 \prod_{j=2}^{n} \psi_j(R),$$
$$\int_{G_1^{\varepsilon}(R)} ds \leqslant \prod_{j=1}^{n} \psi_j(R),$$
$$\int\limits_{G_1^{\varepsilon}(R)} \frac{ds}{'s} \int_{'D_{s,h}} \ln|f(0,'z)|d'z = (\varepsilon R - \varphi_1(R)) \int_{'T_{\varphi}^{\psi}(R)} \frac{d's}{'s} \int_{'D_{s,h}} \ln|f(0,'z)|d'z.$$

Следовательно

$$\varliminf_{R\to\infty} \frac{1}{R^{n+1}} \int_{G_1^\varepsilon(R)} \frac{ds}{s} \int_{D_{s,h}} \ln|f(z)|\,dz \geqslant$$

$$\geqslant -\varepsilon^2 c_1' \tau^{n-1} + \varepsilon c_3' \varliminf_{R\to\infty} \frac{1}{R^n} \int_{'T_\varphi^\psi(R)} \frac{d's}{'s} \int_{'D_{s,h}} \ln|f(0,'z)|\,d'z.$$

По предположению индукции второе слагаемое в правой части этого неравенства равно нулю. Поэтому

$$\varliminf_{R\to\infty} \frac{1}{R^{n+1}} \int_{G_1^\varepsilon(R)} \frac{ds}{s} \int_{D_{s,h}} \ln|f(z)|\,dz \geqslant -\varepsilon^2 c_1' \tau^{n-1}.$$

Аналогично имеем

$$\varliminf_{R\to\infty} \frac{1}{R^{n+1}} \int_{G_j^\varepsilon(R)} \frac{ds}{s} \int_{D_{s,h}} \ln|f(z)|\,dz \geqslant -\varepsilon^2 c_1' \tau^{n-1}, \quad j = 2,\dots,n.$$

Отсюда и из (27) и (29) следует, что

$$\varliminf_{R\to\infty} \frac{1}{R^{n+1}} \int_{T_\varphi^\psi(R)} \frac{ds}{s} \int_{D_{s,h}} \ln|f(z)|\,dz \geqslant -n\varepsilon^2 c_1' \tau^{n-1},$$

а ввиду произвольности $\varepsilon > 0$, и

$$\varliminf_{R\to\infty} \frac{1}{R^{n+1}} \int_{T_\varphi^\psi(R)} \frac{ds}{s} \int_{D_{s,h}} \ln|f(z)|\,dz \geqslant 0.$$

Соответствующее неравенство с верхним пределом тривиально. Следовательно

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^{n+1}} \int_{T_\varphi^\psi(R)} \frac{ds}{s} \int_{D_{s,h}} \ln|f(z)|\,dz = 0.$$

Для завершения доказательства леммы теперь достаточно проверить ее справедливость при $n=1$, то есть показать, что для любой функции $f(z_1) \in \mathcal{B}_\sigma$, $z_1 \in \mathbb{C}$, имеет место равенство

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^2} \int_{\varphi_1(R)}^{\psi_1(R)} \frac{ds_1}{s_1} \int_{-s_1}^{s_1} dx_1 \int_{-h}^{h} \ln|f(x_1+iy_1)|\,dy_1 = 0.$$

Но это непосредственно следует из того, что согласно лемме I (для случая $n=1$)

$$\lim_{s_1\to\infty} \frac{1}{s_1^2} \int_{-s_1}^{s_1} dx_1 \int_{-h}^{h} \ln|f(x_1+iy_1)|\,dy_1 = 0.$$

Лемма доказана.

Из теорем I, 2, 3 с помощью стандартных процедур, как следствие, получаются следующие теоремы о полноте систем функций $x^k e^{i\langle\lambda,x\rangle}$, где $x^k = x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n}$.

ТЕОРЕМА 4. Если множество $E \subset \mathbb{R}^n$, функция γ и положительные числа $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ таковы, что

$$\sigma_1 + \dots + \sigma_n < \frac{\pi}{2^{n-1}e} A^*_{E,\gamma},$$

то система функций

$$\left\{ \left\{ x^k e^{i\langle\lambda,x\rangle} \right\}_{k_1+\dots+k_n<\gamma(\lambda)} \right\}_{\lambda\in E}$$

полна в пространстве $\mathcal{L}^p(D_\sigma)$, $p \geqslant 1$.

ТЕОРЕМА 5. Если множество $E \subset \mathbb{R}^n$, функция γ и положительные числа $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ таковы, что

$$\sigma_1 + \dots + \sigma_n < \frac{\pi}{2^{n-1}} B^*_{E,\gamma},$$

то система функций

$$\left\{ \left\{ x^k e^{i\langle\lambda, x\rangle} \right\}_{k_1 + \dots + k_n < \gamma(\lambda)} \right\}_{\lambda \in E}$$

полна в пространстве $\mathcal{L}^p(D_\sigma), p \geq 1$.

ТЕОРЕМА 6. Если множество $E \subset \mathbb{R}^2$, функция $\gamma(\lambda_1, \lambda_2)$ и положительные числа σ_1, σ_2 таковы, что

$$\sigma_1 + \sigma_2 < 2\pi B_{E,\gamma},$$

то система функций

$$\left\{ \left\{ x_1^{k_1} x_2^{k_2} e^{i\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \rangle} \right\}_{k_1 + k_2 < \gamma(\lambda_1, \lambda_2)} \right\}_{(\lambda_1, \lambda_2) \in E} \tag{31}$$

полна в пространстве $\mathcal{L}^p(D_{\sigma_1, \sigma_2}), \ p \geq 1$.

Существуют множество $E \subset \mathbb{R}^2$, функция $\gamma(\lambda_1, \lambda_2)$ и положительные числа σ_1, σ_2 такие, что

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 2\pi B_{E,\gamma},$$

а система функций (31) не полна в пространстве $\mathcal{L}^2(D_{\sigma_1, \sigma_2})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л.И. Ронкин. О полноте систем функций $e^{i\langle\lambda, x\rangle}$ и о вещественных множествах единственности целых функций многих переменных. Функциональный анализ и его приложения, т. 5, вып. 4, 86, 1971.
2. Л.И. Ронкин. О вещественных множествах единственности для целых функций многих переменных и о полноте систем функций $e^{i\langle\lambda, x\rangle}$. Сибирский математический журнал, т.XIII, № 3, 638-644, 1972.
3. H.Rutishauser. Über Folgen und Scharen von analytyschen und meromorphen Functionen mehrerer Variabeln, Sowie von analytischen abbildungen, Acta Math., 83, 249 – -325, 1950.
4. P.Lelong. Propriétés mébriques des variétés analytiques complexes definies par une equation, Ann.Scient.Ecole Noum.Supér., 67, 393-419, 1950.
5. Л.И. Ронкин. Введение в теорию целых функций многих переменных, М., "Наука", 1971.
6. В.Э. Кацнельсон, Л.И. Ронкин. Об оценке снизу объема аналитического множества. Сибирский математический журнал (в печати).
7. Б.Я. Левин. Распределение корней целых функций, М., ГИТТЛ, 1956.

DISCRETE UNIQUENESS SETS FOR ENTIRE FUNCTIONS OF AN EXPONENTIAL TYPE BOUNDED ON THE REAL PLANE

L. I. Ronkin

Let E be the discrete set of points $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ and

$$h_E=\frac{1}{2}\inf_{\substack{x'\in E,\, x''\in E\\ x'\neq x''}}\max_j|x'_j-x''_j|.$$

It has been proved that if the entire function $f(z)$ of an exponential type not larger than $\sigma_1,\dots,\sigma_n$, is bounded on the real plane and is equal to zero in points $x\in E$ with the multiplicity not less than $\gamma(x)$, then the following implication is true

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\left(\frac{1}{2r}\right)^n\sum_{\substack{x\in E\\ |x_1|<r,\dots,|x_n|<r}}\gamma_f(x)<a h_E^{n-1}(\sigma_1+\dots+\sigma_n)\Rightarrow f(z)=0.$$

The estimate for the constant α have been obtained including the exact ones for a certain class of sets E. As a corollary, the completeness theorems for systems $x^k e^{i\langle\lambda,x\rangle}$ have been derived.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1974 выпуск V

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫХ ЗАКОНОВ

Г.П. Чистяков

Мы будем пользоваться терминологией, принятой в монографии [I]. Напомним, что через $\mathcal{L}$ обозначается класс безгранично делимых (б.д.) вероятностных законов $F(x)$, введенный Ю.В. Линником, с характеристическими функциями

$$\varphi(t;F)=\exp\left\{i\beta t+\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x)\right\}, \tag{I}$$

где $\operatorname{Im}\beta=0$; $G(x)$ - неубывающая функция с точками роста во множестве вида $\{\mu_{m1}\}_{m=-\infty}^{\infty}\cup\{\mu_{m2}\}_{m=-\infty}^{\infty}$, $\mu_{m1}>0$, $\mu_{m2}<0$, причем числа $\mu_{m+1,r}/\mu_{mr}$ $(m=0,\pm1,\dots;\ r=1,2)$- натуральные, отличные от единицы. И.В. Островским [2] был рассмотрен подкласс $\mathcal{L}_1\subset\mathcal{L}$ законов, удовлетворяющих дополнительно условию

$$\int_{|x|>y}dG(x)=O(e^{-My^2}),\ \exists M>0,$$

и было показано, что законы этого класса принадлежат I_0, т.е. классу вероятностных законов, имеющих только б.д. компоненты. В настоящей статье исследуется устойчивость разложений законов класса $\mathcal{L}_1$ в метрике Леви. Напомним, что расстоянием Леви между законами $F_1(x)$ и $F_2(x)$ называется

$$\mathcal{L}(F_1,F_2)=\inf\{h: F_1(x-h)-h\leqslant F_2(x)\leqslant F_1(x+h)+h,\ -\infty<x<\infty\}.$$

По поводу истории рассматриваемого вопроса, мы отсылаем читателя к монографии [I], где этот материал подробно изложен. Перейдем к формулировке нашего основного результата, предварительно заметив, что через $\exp_n$ и $\ln_n$ будем обозначать n-итерацию соответственно экспоненциальной и логарифмической функций.

Т Е О Р Е М А I. Пусть для закона $F(x)$, являющегося композицией законов $F_1(x)$ и $F_2(x)$, выполняется неравенство $\mathcal{L}(F,\mathcal{G})<\varepsilon$, $0<\varepsilon<e^{-\exp_3 e}$, где закон $\mathcal{G}\in\mathcal{L}_1$ и для него в представлении (I) $G(+0)-G(0)=2\gamma>0$. Тогда справедлива оценка для $j=1,2$

$$\inf_{\tilde{\mathcal{G}}\in\mathcal{L}_1}\mathcal{L}(F_j,\tilde{\mathcal{G}})<A\max\left\{\delta_1^{1/3}\ln\frac{1}{\delta_1},\ \delta_2^{1/3}\ln\frac{1}{\delta_2},\ \frac{(\ln_5\frac{1}{\varepsilon})^{11/9}}{(\ln_4\frac{1}{\varepsilon})^{1/18}}\right\},\ \left(\delta^{1/3}\ln\frac{1}{\delta}\Big|_{\delta=0}=0\right),$$

где δ_j $(j=1,2)$ определяются соотношениями:

$$\delta_j=\min_{b>\alpha}\left(\int_{\{\alpha<(-1)^j x\leqslant b\}}(1+x^2)\,dG(x)+\alpha^{\frac{1}{3}}\int_{\{(-1)^j x>b\}}\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x)\right),$$

$\alpha=(\ln_5\frac{1}{\varepsilon})^2\cdot(\ln_4\frac{1}{\varepsilon})^{-1/2}$, а под A понимается положительная постоянная, зависящая только от закона $\mathcal{G}$.

С Л Е Д С Т В И Е. Если дополнительно потребовать, чтобы в представлении (I) для $\varphi(t;\mathcal{G})$ функция $G(x)$ не имела точек роста в окрестности нуля, за исключением самой точки O, то

$$\inf_{\tilde{\mathcal{G}}\in\mathcal{L}_1} \mathcal{L}(F_j, \tilde{\mathcal{G}}) < A\cdot\left(\ln_5\frac{1}{\varepsilon}\right)^{11/9}\left(\ln_4\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1/18}, \quad j=1,2;\ 0<\varepsilon<e^{-\exp_3 e}.$$

Действительно, если $G(x)$ не имеет в некоторой окрестности нуля, отличных от O точек роста, то из определения δ_j $(j=1,2)$ следует оценка $\delta_j < A_1\cdot\alpha^{1/3}$, где A_1 – положительная постоянная, зависящая только от закона $\mathcal{G}$.

Метод доказательства нашей теоремы является развитием метода автора [3, 4] и также, как в [3, 4], опирается на некоторые идеи Н.А. Сапогова [5] и И.В. Островского [2].

В дальнейшем через A будем обозначать, вообще говоря, различные положительные постоянные, зависящие только от закона $\mathcal{G}$. Нам понадобятся также следующие утверждения.

Т Е О Р Е М А I [6]. Пусть закону $\mathcal{G}(x)$ отвечает целая характеристическая функция $\varphi(t;\mathcal{G})$, для которой

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\ \ln_3 M(r,\varphi(t;\mathcal{G}))/\ln r = \varkappa > 0, \quad M(r,\varphi(t;\mathcal{G})) = \max_{0<\theta\le 2\pi}|\varphi(re^{i\theta};\mathcal{G})|,$$

тогда $1-\mathcal{G}(x)+\mathcal{G}(-x)>0$ $(x>0)$ и

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\ln_2(1-\mathcal{G}(x)+\mathcal{G}(-x))^{-1}-\ln x\right\}/\ln_2 x = \frac{1}{\varkappa}.$$

Т Е О Р Е М А 2 [2]. Пусть $\mathcal{G}\in\mathcal{L}_1$, тогда функция $\varphi(t;\mathcal{G})$ продолжается в $\mathbb{C}^1$ как целая и представима там в виде (I), причем интеграл справа сходится абсолютно и равномерно на любом компакте в $\mathbb{C}^1$, и найдутся такие постоянные $A>0$, $c>0$, зависящие от $\mathcal{G}$, что имеют место оценки для $t\in\mathbb{C}^1$

$$\left|\int_{+0}^{1}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x)\right| < 8(1+|t|^2)e^{|\mathrm{Re}\,t|}\min_{0<b\le 1}\left\{\int_{+0}^{b}(1+x^2)\,dG(x)+\frac{1}{1+|t|}\int_{b}^{1}\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x)\right\},$$

аналогичная оценка верна и для интеграла по промежутку $[-1,0)$; далее

$$\left|\int_{|x|\ge 1}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x)\right| < A\left(\exp\left\{c(\mathrm{Re}\,t)^2\right\}+|t|+1\right) \tag{3}$$

и как следствие (2) и (3)

$$|\ln\varphi(t;\mathcal{G})| < A(1+|t|^2)\exp\left\{c(\mathrm{Re}\,t)^2\right\}. \tag{4}$$

Приступим к доказательству теоремы I. Предположим сначала, что функция $G(x)$ из представления (I) для $\varphi(t;\mathcal{G})$ имеет по меньшей мере две точки роста, тогда в силу теоремы 2 $1\le\varkappa\le 2$ и применима теорема I к функции $\varphi(t;\mathcal{G})$. Из нее получим, что при любом η, $0<\eta<\frac{1}{2}$ выполняется

$$0 < 1-\mathcal{G}(x)+\mathcal{G}(-x) < A(\eta)\,e^{-x(\ln x)^{\eta}}, \quad x\ge 1. \tag{5}$$

Для наших целей достаточно полагать $\eta=\frac{1}{4}$. Если же $\mathcal{G}(x)$ совпадает с нормальным распределением, то оценка (5), очевидно, выполняется. Так как закон $\mathcal{G}(x)$ содержит гауссову компоненту, то он является абсолютно непрерывным и обладает ограниченной сверху производной.

Отсюда[I)] и из условия теоремы получаем неравенство

$$\sup_x |F(x) - \mathcal{G}(x)| < A\mathcal{L}(F, \mathcal{G}) < A\cdot\varepsilon. \tag{6}$$

Можно считать, что медиана m_1 закона $F_1(x)$ равна 0, так как в противном случае мы рассматривали бы вместо закона $F_1(x)$ закон $F_1(x+m_1)$, а вместо $F_2(x)$ закон $F_2(x-m_1)$. Воспользовавшись тем, что $m_1=0$, приходим к неравенствам: для любого $a>0$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}F_2(-a) \leqslant \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{-0} dF_2(-a+x) \leqslant \int_{-\infty}^{-0} F_1(-x)\,dF_2(-a+x) \leqslant \\ \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} F_1(-x)\,dF_2(-a+x) < A\cdot\varepsilon + \mathcal{G}(-a),\end{aligned} \tag{7}$$

аналогично

$$\frac{1}{2}(1-F_2(a)) < A\cdot\varepsilon + 1 - \mathcal{G}(a). \tag{8}$$

Также доказываются следующие оценки:

$$\frac{1}{2}F_1(-a) < A\cdot\varepsilon + \mathcal{G}(-a-m_2); \quad \frac{1}{2}(1-F_1(a)) < A\cdot\varepsilon + 1 - \mathcal{G}(a-m_2). \tag{9}$$

Введем в рассмотрение законы $F_j^*(x)$, определив их следующим образом:

$$F_j^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -N, \\ F_j(x) - F_j(-N), & -N < x \leqslant 0, \\ F_j(x) + 1 - F_j(N+0), & 0 < x \leqslant N, \\ 1, & x > N, \end{cases} \qquad (j=1,2),$$

где N задается равенством $N(\ln N)^{1/4} = \ln\frac{1}{\varepsilon}$. Образуем закон $F^* = F_1^* * F_2^*$. Нетрудно показать справедливость оценки

$$|F(x) - F^*(x)| \leqslant \sum_{j=1}^{2}\{1 - F_j(N) + F_j(-N)\}. \tag{10}$$

Учитывая соотношения (7) - (9) с $a=N$, получаем из (6) и (10)

$$|F^*(x) - \mathcal{G}(x)| < 9A\cdot\varepsilon + 4\mathcal{G}(-N+|m_2|) + 4\{\mathcal{G}(N-|m_2|)\}. \tag{11}$$

Положив в (7) и (8) $a=|m_2|-0$, видим, что $|m_2|<A$ для всех $\varepsilon<\varepsilon_1$, где ε_1 зависит лишь от закона $\mathcal{G}$. Так как $N(\ln N)^{1/4} = \ln\frac{1}{\varepsilon}$, то с помощью (5) получаем из неравенства (11) для $\varepsilon<\varepsilon_1$

$$|F^*(x) - \mathcal{G}(x)| < A\cdot\varepsilon\cdot\ln\frac{1}{\varepsilon}. \tag{12}$$

Характеристические функции $\varphi(t; F_j^*)$, $j=1,2$, $\varphi(t; F^*)$

[1)] Мы воспользуемся следующим утверждением [7]: пусть $F(x)$ и $\mathcal{G}(x)$ - законы, причем закон $\mathcal{G}(x)$ абсолютно непрерывен, тогда

$$\mathcal{L}(F,\mathcal{G}) \leqslant \sup_x |F(x) - \mathcal{G}(x)| \leqslant (1+\sup_x \mathcal{G}'(x))\mathcal{L}(F,\mathcal{G}).$$

законов F_j^*, $j=1,2$, F^*, очевидно, продолжаются как целые на всю комплексную плоскость. Продолженные функции условимся обозначать через $\varphi(t;F_j^*)$ $j=1,2$, $\varphi(t;F^*)$. Сейчас нам понадобятся следующие оценки, получаемые с помощью (5) и (I2). В круге $|t|\le\frac{1}{4}(\ln N)^{1/4}$ имеют место:

$$S_1(t)=\left|\int_{-2N}^{2N} e^{itx}d(F^*(x)-\mathcal{G}(x))\right|=\left|\{e^{itx}(F^*(x)-\mathcal{G}(x))\}_{-2N}^{2N}-\right.$$

$$\left.-\int_{-2N}^{2N}(F^*(x)-\mathcal{G}(x))ite^{itx}dx\right|\le A\varepsilon\cdot\ln\frac{1}{\varepsilon}e^{2N|\Im m t|}(1+4N|t|)\le A\varepsilon^{\frac{1}{2}}(\ln\frac{1}{\varepsilon})^2;$$

$$S_2(t)=\left|\int_{|x|\geq 2N} e^{itx}d\mathcal{G}(x)\right|\le e^{2N|\Im m t|}\{1-\mathcal{G}(2N)+\mathcal{G}(-2N)\}+|t|\int_{2N}^{\infty}e^{|\Im m t|x}\{1-\mathcal{G}(x)+$$

$$+\mathcal{G}(-x)\}dx\le A\exp\{2N(|\Im m t|-(\ln 2N)^{\frac{1}{4}})\}+A|t|\int_{2N}^{\infty}\exp\{|\Im m t|\cdot x-x(\ln x)^{\frac{1}{4}}\}dx\le$$

$$\le A\exp\{-\tfrac{3}{2}N(\ln N)^{\frac{1}{4}}\}+A(\ln N)^{\frac{1}{4}}\exp\{-\tfrac{3}{4}N(\ln N)^{\frac{1}{4}}\}\le A\cdot\varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

С помощью этих неравенств получаем, что в круге $|t|\le\frac{1}{4}(\ln N)^{\frac{1}{4}}$

$$|\varphi(t;F^*)-\varphi(t;\mathcal{G})|\le S_1(t)+S_2(t)\le A\varepsilon^{1/2}(\ln\tfrac{1}{\varepsilon})^2. \tag{I3}$$

С другой стороны, в силу (4) на окружности $|t|=\frac{1}{4}(\ln N)^{\frac{1}{4}}$ имеем

$$\min_t|\varphi(t;\mathcal{G})|\ge\exp\{-A(1+\tfrac{1}{16}(\ln N)^{\frac{1}{2}})\exp(\tfrac{c}{16}(\ln N)^{\frac{1}{2}})\}\ge A\cdot\varepsilon^{\frac{1}{4}}. \tag{I4}$$

Так как минимум $|\varphi(t;\mathcal{G})|$ в круге $|t|\le\frac{1}{4}(\ln N)^{\frac{1}{4}}$ принимается на границе области, то неравенства (I3) и (I4) дают в круге $|t|\le\frac{1}{4}(\ln N)^{\frac{1}{4}}$ для достаточно малых ε (т.е. при $0<\varepsilon<\varepsilon_2$, где ε_2 определяется только законом $\mathcal{G}$) соотношение $|\varphi(t;F^*)-\varphi(t;\mathcal{G})|<\frac{1}{2}|\varphi(t;\mathcal{G})|$, из которого следует

$$\tfrac{1}{2}|\varphi(t;\mathcal{G})|<|\varphi(t;F^*)|<\tfrac{3}{2}|\varphi(t;\mathcal{G})|,\ |t|\le\tfrac{1}{4}(\ln N)^{\frac{1}{4}}=T_1. \tag{I5}$$

Докажем ряд теоретико-функциональных лемм, которые понадобятся в дальнейшем.

Л Е М М А I. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в полукруге $|z|\le R$, $Re\,z\ge 0$, $R\ge e^{e+1}$, и удовлетворяет условиям

I. $|f(z)|\le C|z+1|^a$ при $Re\,z=0$, $-R\le\Im m\,z\le R$,

2. $|f(z)|\le C|z+1|^\ell$ при $\Im m\,z=0$, $0\le Re\,z\le R$,

3. $|f(z)|\le Ce^{d(Re\,z)^2}|z+1|^\ell$ при $Re\,z\ge 0$, $|z|\le R$,

где a, $\ell\ge a$, d и C – положительные постоянные. Тогда в полукруге $|z|\le(\ln R/4\ln_2 R)^{\frac{1}{2}}$, $Re\,z\ge 0$ справедливо соотношение:

$$|f(z)|\le Ce^{3d}|z+1|^\ell.$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Рассмотрим в полукруге $|z|\le R$, $Re\,z\ge 0$ функцию $\Theta(z)=C^{-1}(z+1)^{-\ell}\cdot f(z)$, которая допускает там в силу условий леммы оценку $|\Theta(z)|\le\exp\{d(Re\,z)^2\}$, а на мнимом диаметре и положительном радиусе ее модуль не превосходит I.

Введем функцию

$$\theta_\nu(z)=\theta(z)e^{i\nu z^2},\quad \nu=\frac{\pi d}{8}\,\frac{\ln_2 R-\ln_3 R}{\ln R}. \tag{I.I}$$

Для ее модуля выполняется неравенство

$$|\theta_\nu(z)|\leqslant \exp\{d(\operatorname{Re}z)^2-2\nu\operatorname{Re}z\cdot\operatorname{Im}z\},\ |z|\leqslant R,\ \operatorname{Re}z\geqslant 0. \tag{I.2}$$

Из этой оценки, а также из вышеприведенной оценки для $\theta(z)$ следует, что $|\theta_\nu(z)|\leqslant 1$ на радиусах $z=t$; $z=t\cdot\exp(i\operatorname{arctg} d/2\nu),\ 0\leqslant t\leqslant R$. Построим гармоническую в секторе $D_\nu=\{|z|\leqslant R,\ 0\leqslant\arg z\leqslant\operatorname{arctg} d/2\nu\}$ функцию, равную 0 на ограничивающих его радиусах и 1 на дуге окружности. Эта функция имеет вид:

$$U_\nu(z)=\frac{2}{\pi}\operatorname{Im}\ln\frac{1+(z/R)^{\pi/\alpha}}{1-(z/R)^{\pi/\alpha}},\quad \alpha=\operatorname{arctg} d/2\nu.$$

Так как при $|w|\leqslant\frac{1}{2}$ имеем неравенство $\left|\ln\frac{1+w}{1-w}\right|\leqslant 3|w|$, то при $|z|\leqslant\frac{1}{2}R$ выполняется

$$|U_\nu(z)|\leqslant 2\left|\frac{z}{R}\right|^{\pi/\alpha}. \tag{I.3}$$

Из (I.2) следует, что в D_ν $\ln|\theta_\nu(z)|\leqslant d(\operatorname{Re}z)^2$, а на радиусах, ограничивающих D_ν, $\ln|\theta_\nu(z)|\leqslant 0$. Поэтому на границе области D_ν, а следовательно, и внутри выполняется неравенство $\ln|\theta_\nu(z)|\leqslant dR^2U_\nu(z)$. Используя (I.3), видим, что для $z\in D_\nu$, $|z|\leqslant(\ln R/4\ln_2 R)^{\frac{1}{2}}\leqslant R^{-2\alpha/\pi+1}$, $\ln|\theta_\nu(z)|\leqslant 2d$. Значит, для этих же z справедлива оценка

$$|\theta(z)|\leqslant\exp(2\nu\operatorname{Re}z\cdot\operatorname{Im}z+2d),$$

и в силу выбора ν (I.I) получаем в области $D_\nu\cap\{|z|\leqslant(\ln R/4\ln_2 R)^{1/2}\}$

$$|\theta(z)|\leqslant e^{3d}. \tag{I.4}$$

В области $\{|z|\leqslant(\ln R/4\ln_2 R)^{\frac{1}{2}},\ \alpha\leqslant\arg z\leqslant\frac{\pi}{2}\}$ оценка (I.4) следует из (I.2) и выбора ν. Почти дословным повторением предыдущего рассуждения неравенство (I.4) доказывается и в области $\{|z|\leqslant(\ln R/4\ln_2 R)^{1/2},\ \operatorname{Im}z\leqslant 0,\ \operatorname{Re}z\geqslant 0\}$.

Л Е М М А 2. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в полукруге $|z|\leqslant R$, $\operatorname{Re}z\geqslant 0$, $R\geqslant e$, и удовлетворяет условиям

1. $|f(z)|\leqslant C_1|z+1|^l\exp(b\operatorname{Re}z)$, $|z|\leqslant R$, $\operatorname{Re}z\geqslant 0$,

2. $|f(z)|\leqslant C_2|z+1|^a$ при $\operatorname{Re}z=0$, $-R\leqslant\operatorname{Im}z\leqslant R$,

где $a,\ l\geqslant a,\ b,\ C_1,\ C_2$ – положительные постоянные. Тогда для $|z|\leqslant\frac{1}{2}R/\ln R$, $\operatorname{Re}z\geqslant 0$ справедливо неравенство

$$|f(z)|\leqslant C_2|z+1|^a\exp\left\{b\operatorname{Re}z+\frac{\ln C_1-\ln C_2}{\ln R}+2(l-a)\right\}.$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Доказательство проведем аналогично доказательству леммы I. Рассмотрим функцию $\theta(z)=f(z)C_2^{-1}(z+1)^{-a}e^{-bz}$ в области $|z|\leqslant R$, $\operatorname{Re}z\geqslant 0$. В указанной области $\theta(z)$ допускает оценку

$$|\theta(z)|\leqslant C_1/C_2\cdot|z+1|^{l-a}, \tag{2.I}$$

а на вертикальном диаметре $|\theta(z)|\leqslant 1$. Далее рассмотрим гармоническую в области $|z|\leqslant R$, $\operatorname{Re}z\geqslant 0$ функцию

$$U(z)=\frac{2}{\pi}\,\mathrm{Im}\ln\frac{1+iz/R}{1-iz/R}\quad .$$

Для этой функции

$$U(iy)=0,\ -R\le y\le R;\quad U(Re^{i\theta})=1,\ -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2};\qquad |U(z)|\le 2\left|\frac{z}{R}\right|;\quad |z|\le\frac{1}{2}R. \tag{2.2}$$

Последнее неравенство получается также, как и аналогичное неравенство для $U_\nu(z)$ из леммы I. Поскольку на границе области $|z|\le R$, $\mathrm{Re}\,z\ge 0$ в силу (2.I) и (2.2)

$$\ln|\theta(z)|\le\ln\left\{C_1/C_2\cdot(R+1)^{l-a}\right\}\cdot U(z),$$

то это же неравенство верно и внутри полукруга $|z|\le R$, $\mathrm{Re}\,z\ge 0$. Но тогда в полукруге $|z|\le\frac{1}{2}R/\ln R$, $\mathrm{Re}\,z\ge 0$ выполняется

$$|\theta(z)|\le\exp\left\{\frac{2|z|}{R}\cdot\ln\left(C_1/C_2\cdot(R+1)^{l-a}\right)\right\}\le\exp\left\{\frac{\ln C_1/C_2}{\ln R}+2(l-a)\right\},$$

что и требовалось.

Л Е М М А 3. Если функция $f(z)$, аналитическая в круге $|z|\le R$, периодическая с периодом iT, где T удовлетворяет условию $0<T\le\frac{1}{2}R$, и

$$\ln|f(z)|\le\begin{cases}\ln C+\kappa(\mathrm{Re}\,z)^2+8\ln(|z|+1), & \mathrm{Re}\,z\ge 0,\ |z|\le R,\\ \ln C+8\ln(|z|+1), & \mathrm{Re}\,z<0,\ |z|\le R,\end{cases}$$

где C, κ - положительные постоянные, то в круге $|z|\le\frac{1}{2}\sqrt{R^2-T^2}$ $f(z)$ допускает представление

$$f(z)=\sum_{p=0}^{\infty}d_p\exp\left(\frac{2\pi pz}{T}\right)+H(z),$$

в котором постоянные d_p удовлетворяют условию

$$|d_p|\le\begin{cases}C\left(\frac{\pi(p+1)}{\kappa_1}\right)^8\exp\left\{8\ln(1+T+T^{-1})-\frac{\pi^2}{\kappa}\frac{p^2}{T^2}\right\}, & \frac{\pi p}{\kappa T}\le\sqrt{R^2-T^2}\\ C\ \exp\left\{8\ln(1+2R)-\frac{\pi p}{T}\sqrt{R^2-T^2}\right\}, & \frac{\pi p}{\kappa T}>\sqrt{R^2-T^2},\end{cases} \tag{3.I}$$

где $\kappa_1=\min(1,\kappa)$, а для функции $H(z)$ выполняется оценка

$$|H(z)|\le 2C(1+R)^8\exp\left(-\frac{\pi}{T}\sqrt{R^2-T^2}\right),\quad |z|\le\frac{1}{2}\sqrt{R^2-T^2}\ .$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О . Разложим функцию $f(iy)$ в ряд Фурье:

$$f(iy)=\sum_{p=-\infty}^{\infty}d_p\exp\left(\frac{2\pi ipy}{T}\right),\quad -R\le y\le R,$$

где

$$d_p=\frac{1}{T}\int_0^T f(iy)\exp\left(-\frac{2\pi ipy}{T}\right)dy,\qquad p=0,\pm1,\pm2,\ \dots\ .$$

Проведем оценку коэффициентов d_p $(p=-1,-2,\dots)$. Заметим, что справедливо соотношение

$$\int_{(T)}f(iz)\exp\left(-\frac{2\pi ipz}{T}\right)dz=0, \tag{3.2}$$

где интегрирование ведется по сторонам прямоугольника с вершинами $(0,\ ih,\ T+ih,\ T)$, $0\le h\le\sqrt{R^2-T^2}$. Из периодичности $f(z)$ следует, что интегралы по вертикальным сторонам прямоугольника взаимно уничтожаются, поэтому из (3.2) следует

$$d_p = \frac{1}{T}\int_0^{T} f(iy-h)\exp\left(\frac{2\pi ph}{T} - \frac{2\pi ipy}{T}\right)dy,$$

откуда получаем для $p=-1,-2,\ldots$

$$\left|d_p\right| \le \exp\left(\frac{2\pi ph}{T}\right)\cdot \max_{0\le y\le T}\left|f(iy-h)\right| \le C\exp\left\{\frac{2\pi ph}{T} + 8\ln(1+R)\right\}. \qquad (3.3)$$

Проводя аналогичные рассуждения, но беря прямоугольник с вершинами $(0,-ih,\ T-ih,\ T)$, приходим к такой оценке для d_p $(p=0,1,2,\ldots)$

$$|d_p| \le C\exp\left\{-\frac{2\pi ph}{T} + kh^2 + 8\ln(1+h+T)\right\}.$$

Если в правой части этого неравенства положить $h = \pi p/kT$ для $\frac{\pi p}{kT} \le \sqrt{R^2-T^2}$ и $h=\sqrt{R^2-T^2}$ для $\frac{\pi p}{kT} > \sqrt{R^2-T^2}$, то легко получить оценку (3.I).

Обозначим через $H(z)$ функцию

$$H(z) = \sum_{-\infty}^{-1} d_p\exp\left(\frac{2\pi pz}{T}\right).$$

Если учесть неравенства (3.3) с $h=\sqrt{R^2-T^2}$, а также оценку $\frac{\pi\sqrt{R^2-T^2}}{T} \ge \pi\sqrt{3}$, то при $|z| \le \frac{1}{2}h = \frac{1}{2}\sqrt{R^2-T^2}$ выполняется

$$|H(z)| \le \sum_{-\infty}^{-1}|d_p|\exp\left(\frac{2\pi p\,\mathrm{Re}\,z}{T}\right) \le C(1+R)^8\sum_{-\infty}^{-1}\exp\left\{\frac{2\pi p}{T}(h+\mathrm{Re}\,z)\right\} \le$$

$$\le C(1+R)^8\sum_{-\infty}^{-1}\exp\left(\frac{\pi ph}{T}\right) = C(1+R)^8\frac{\exp(-\pi h/T)}{1-\exp(-\pi h/T)} \le 2C(1+R)^8\exp\left(-\frac{\pi h}{T}\right).$$

Л Е М М А 4. Уравнение

$$f(z+2\pi/T) - f(z) = Q(z), \quad -\frac{1}{2}R \le \frac{2\pi}{T} \le \frac{1}{2}R, \qquad (4.I)$$

в котором $Q(z)$ – функция, голоморфная в круге $|z|\le R$ и удовлетворяет условию $|Q(z)|\le C$, C – постоянная больше 0, имеет в круге $|z|\le(T^{-2}R)^{1/3}$ аналитическое решение $F(z)$, представимое в этом круге в виде $F(z) = b\cdot T\cdot z + \tilde{Q}(z)$; причем для постоянной b и функции $\tilde{Q}(z)$ найдется абсолютная постоянная $a>0$, что имеют место неравенства:

$$|b| \le a\cdot C; \qquad |\tilde{Q}(z)| \le a\cdot C\,(T\cdot R)^{-\frac{1}{3}}, \quad |z| \le (T^{-2}R)^{\frac{1}{3}}.$$

Лемма 4 получается из близкого результата работы [3, стр. I25], если его применить к функции $\tilde{f}(z) = C^{-1}f(T^{-1}z)$.

Л Е М М А 5. Если голоморфная в круге $|z|\le R$ функция $f(z)$ удовлетворяет для некоторого вещественного $\sigma \ge 0$ условию

$$|f(z)| \le C\exp\{\sigma\,\mathrm{Re}\,z + 7\ln(|z|+1)\}, \quad \mathrm{Re}\,z \ge 0, \ |z| \le R,$$

C – постоянная больше 0, и представима в виде:

$$f(z) = \sum_{p=-\infty}^{\infty}(a_p + b_p z)\exp\left(\frac{2\pi pz}{T}\right),$$

где $0 < T \le \frac{1}{6}R$, а ряд сходится абсолютно и равномерно в круге $|z|\le R$, то для $p > \omega = [\sigma T/2\pi]$

$$|b_p| \le 2C/T\cdot\exp\{h(\sigma - 2\pi p/T) + 7\ln(1+R)\}, \qquad (5.I)$$

$$|a_p| \le e^{4\pi p}(C_1 + C(2/T+1))\exp\left\{\frac{1}{2}h(\sigma - 2\pi p/T) + 8\ln(1+R)\right\}, \qquad (5.2)$$

где $C_1 = \sum_{-\infty}^{\omega}(|a_p| + |b_p|)$, $h = \sqrt{(R-T)^2 - T^2}$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Положим $f_1(z)=f(z+iT)-f(z)$. Функция $f_1(z)$ голоморфна в круге $|z|\leqslant R-T$ и удовлетворяет в нем оценке

$$|f_1(z)|\leqslant 2C\exp\{\sigma \operatorname{Re} z+7\ln(|z|+T+1)\},\quad \operatorname{Re} z\geqslant 0,\quad |z|\leqslant R-T,$$

и, кроме того,

$$f_1(iy)=\sum_{-\infty}^{\infty} iTb_p\exp\left(\frac{2\pi i y}{T}\right),\qquad -R+T\leqslant y\leqslant R-T.$$

Этот ряд является рядом Фурье своей суммы $f_1(iy)$. Поэтому, так же, как и в лемме 3, получаем оценку $(p>\omega)$

$$|iTb_p|\leqslant \exp\left(-\frac{2\pi ph}{T}\right)\cdot\max_{0\leqslant y\leqslant T}|f_1(iy+h)|\leqslant 2C\exp\left\{h\left(\sigma-\frac{2\pi p}{T}\right)+7\ln(1+R)\right\},$$

которая дает неравенство (5.1). Рассмотрим функцию

$$f_2(z)=f(z)-\sum_{-\infty}^{\omega}(a_p+b_p z)\exp\left(\frac{2\pi p z}{T}\right).$$

Функция $f_2(z)$ голоморфна в круге $|z|\leqslant R$ и такая, что

$$|f_2(z)|\leqslant (C+C_1)\exp\{\sigma\cdot \operatorname{Re} z+8\ln(|z|+1)\},\quad |z|\leqslant R,\quad \operatorname{Re} z\geqslant 0. \tag{5.3}$$

Отметим, что $f_2(iy)$ представима в виде

$$f_2(iy)=\sum_{\omega+1}^{\infty} a_p\exp\left(\frac{2\pi i p y}{T}\right)+H(iy),\qquad -R\leqslant y\leqslant R, \tag{5.4}$$

где $H(z)$ голоморфна в круге $|z|\leqslant\frac{1}{2}h$, поскольку в силу (5.1) и соотношения $h/T\geqslant 2\sqrt{6}$ при $|z|\leqslant \frac{1}{2}h$ выполняется

$$\begin{aligned}|H(z)|&\leqslant |z|\sum_{\omega+1}^{\infty}|b_p|\exp\left(\frac{2\pi p \operatorname{Re} z}{T}\right)\leqslant \frac{Ch}{T}(1+R)^7\sum_{\omega+1}^{\infty}\exp\left\{h\left(\sigma-\frac{2\pi p}{T}\right)+\frac{\pi p h}{T}\right\}=\\ &=\frac{Ch}{T}(1+R)^7\exp(\sigma h)\sum_{\omega+1}^{\infty}\exp\left(-\frac{\pi p h}{T}\right)\leqslant \frac{2Ch}{T}(1+R)^7\exp(\sigma h/2).\end{aligned} \tag{5.5}$$

Ряд в (5.4) сходится абсолютно, поэтому a_p $(p>\omega)$ являются коэффициентами Фурье для функции $f_2(iy)-H(iy)$ и, следовательно, если учесть, что $h_1=\sqrt{(\frac{1}{2}h-T)^2-T^2}\geqslant\frac{1}{2}h-2T$, то с помощью (5.3) и (5.5) для них следует оценка

$$\begin{aligned}|a_p|&\leqslant \exp\left(-\frac{2\pi p h_1}{T}\right)\cdot\max_{0\leqslant y\leqslant T}|f_2(iy+h_1)-H(iy+h_1)|\leqslant (C_1+C(2/T+1))\times\\ &\times\exp\left\{-\frac{2\pi p h_1}{T}+\frac{\sigma h}{2}+8\ln(1+R)\right\}\leqslant e^{4\pi p}(C_1+C(2/T+1))\exp\left\{\frac{1}{2}h\left(\sigma-\frac{2\pi p}{T}\right)+8\ln(1+R)\right\}.\end{aligned}$$

В круге $|t|\leqslant T_1$ имеет место соотношение (I5), в силу которого функции $\varphi(t;F_j^*)$, $j=1,2$, не имеют в этом круге корней и, следовательно, представимы в виде

$$\varphi(t;F_j^*)=\exp\varphi_j(t),\qquad \varphi_j(0)=0,$$

где $\varphi_j(t)$ – голоморфные в круге $|t|\leqslant T_1$ функции. Положим: $g(z)=\varphi_1(-iz)$, $U(x,y)=\operatorname{Re} g(x+iy)$, (x, y – вещественные).

Пусть $\alpha=(\ln_5\frac{1}{\varepsilon})^2\cdot(\ln_4\frac{1}{\varepsilon})^{-\frac{1}{2}}$, тогда выберем из точек μ_{mr}, удовлетворяющих неравенству $|\mu_{mr}|\geqslant\alpha$, ближайшие к точкам $-\alpha$ и α. Пусть это будут μ_{p2} и μ_{q1}. Определим числа ν_{sr} $(s=0,1,2,\dots,\ r=1,2)$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\text{если } \mu_{q1}<2\alpha, \text{ то: } \nu_{01}=\nu_{11}=\mu_{q1}, && \nu_{s1}=\mu_{q+s-1,1} \quad s\geqslant 2,\\
&\text{если } \mu_{q1}\geqslant 2\alpha, \text{ то: } \nu_{01}=\nu_{11}=\mu_{q1}/[\mu_{q1}\cdot\alpha^{-1}], && \nu_{s1}=\mu_{q+s-2,1} \quad s\geqslant 2,
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
&\text{если } \mu_{p2}>-2\alpha, \text{ то: } \nu_{02}=\nu_{12}=\mu_{p2}, && \nu_{s2}=\mu_{p+s-1,2} \quad s\geqslant 2,\\
&\text{если } \mu_{p2}\leqslant -2\alpha, \text{ то: } \nu_{02}=\nu_{12}=\mu_{p2}/[|\mu_{p2}|\cdot\alpha^{-1}], && \nu_{s2}=\mu_{p+s-2,2} \quad s\geqslant 2.
\end{aligned} \tag{17}$$

По самому выбору ν_{1r} $(r=1,2)$ допускают оценки:

$$\alpha\leqslant|\nu_{1r}|\leqslant 2\alpha, \quad \frac{1}{2}(\ln_3 T_1)^2\cdot(\ln_2 T_1)^{-\frac{1}{2}}\leqslant|\nu_{1r}|\leqslant\frac{3}{2}(\ln_3 T_1)^2(\ln_2 T_1)^{-\frac{1}{2}}, \quad T_1\geqslant\exp_5 3e. \tag{18}$$

Докажем теперь ряд лемм относительно поведения функции $g(z)$.

Л Е М М А 6. При вещественных x и y $(x^2+y^2\leqslant T_1^2)$ и некотором $A>0$ справедливы соотношения

$$0\leqslant U(x,0)-U(x,y)\leqslant A(1+x^2+y^2)\exp(Ax^2), \tag{6.1}$$

$$0\leqslant U(x,0)-U(x,2\pi n/\nu_{sr})\leqslant A(1+\nu_{sr}^{-2}n^2)\exp(\nu_{s-1,r}x),\ s=1,2,$$

$$\begin{aligned}
0\leqslant U(x,0)-U(x,2\pi n/\nu_{sr})&\leqslant 2\frac{1+\nu_{s-1,r}^2}{\nu_{s-1,r}^2}\left\{G(\nu_{s-1,r}+0)-G(\nu_{s-1,r})\right\}\left(\sin\frac{\nu_{s-1,r}\pi n}{\nu_{sr}}\right)^2 e^{\nu_{s-1,r}x}+\\
&+A(1+n^2/\nu_{sr}^2)e^{\nu_{s-2,r}x}=2\lambda_{s-1,r}\left(\sin\frac{\nu_{s-1,r}\pi n}{\nu_{sr}}\right)^2 e^{\nu_{s-1,r}x}+A(1+n^2/\nu_{sr}^2)e^{\nu_{s-2,r}x},
\end{aligned} \tag{6.2}$$

где $s=3,4\dots$; а n – натуральное число такое, что $|2\pi n/\nu_{sr}|\leqslant T_1^{1/2}$, причем правая часть (6.2) при $r=1$ выполняется для $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}T_1$, а при $r=2$ для $-\frac{1}{2}T_1\leqslant x\leqslant 0$ (подчеркнем, что $A>0$ в (6.2) одно для всех s и n).

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Из свойства хребта характеристической функции $\varphi(z;F_1^*)$ и соотношения (15) имеем неравенство

$$1\leqslant\left|\frac{\varphi(-ix;F_1^*)}{\varphi(y-ix;F_1^*)}\right|\leqslant 3\left|\frac{\varphi(-ix;\mathcal{G})}{\varphi(y-ix;\mathcal{G})}\right|. \tag{6.3}$$

Так как $\ln\varphi(-ix;F_1^*)-\ln|\varphi(y-ix;F_1^*)|=U(x,0)-U(x,y)$, то из левой стороны неравенства (6.3) получаем левые стороны неравенств (6.1), (6.2). В силу теоремы 2 и (6.3) имеем для $x^2+y^2\leqslant T_1^2$

$$U(x,0)-U(x,y)\leqslant\ln\varphi(-ix;\mathcal{G})-\ln|\varphi(y-ix;\mathcal{G})|\leqslant A(1+x^2+y^2)\exp(Ax^2),$$

т.е. правую часть (6.1). Воспользовавшись левой частью этого неравенства и представлением (1) для $\varphi(z;\mathcal{G})$, получаем

$$U(x,0)-U(x,y)\leqslant 2\int_{-\infty}^{\infty}e^{xv}\sin^2\frac{vy}{2}\cdot\frac{1+v^2}{v^2}dG(v)+\ln 3.$$

Последнее неравенство перепишем в иной форме, полагая

$$\varkappa_{mr}=\frac{1+\mu_{mr}^2}{\mu_{mr}^2}\left\{G(\mu_{mr}+0)-G(\mu_{mr})\right\},\quad m=0,\pm1,\pm2,\dots;\quad r=1,2;$$

тогда

$$U(x,0)-U(x,y)\leqslant 2\sum_{r=1}^{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\varkappa_{mr}e^{\mu_{mr}x}\sin^2\frac{\mu_{mr}y}{2}+\gamma y^2+\ln 3.$$

Для доказательства правой части соотношения (6.2) подставим сюда сначала $y=2\pi n/\mu_{s+q-1,1}$, $s=1,2,\dots$ (n – натуральное и такое, что $2\pi n/\mu_{s+q-1,1}\leqslant\frac{1}{2}T_1$). Учитывая, что числа $n\mu_{m1}/\mu_{s+q-1,1}$ при $m\geqslant s+q-1$ являются целыми, получаем

$$\mathcal{U}(x,0)-\mathcal{U}(x, 2\pi n/\mu_{s+q-1,1}) \le 2\sum_{m=-\infty}^{s+q-2} \varkappa_{m1} e^{\mu_{m1}x} (\sin \frac{n\mu_{m1}\pi}{\mu_{s+q-1,1}})^2 +$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \varkappa_{m2} e^{\mu_{m2}x} (\sin \frac{n\mu_{m2}\pi}{\mu_{s+q-1,1}})^2 + \gamma(2\pi n/\mu_{s+q-1,1})^2 + \ln 3.$$

При $x>0$

$$\sum_{m=-\infty}^{s+q-3} \varkappa_{m1} e^{\mu_{m1}x} (\sin \frac{n\mu_{m1}\pi}{\mu_{s+q-1,1}})^2 \le e^{\mu_{s+q-3,1}x} \sum_{m=-\infty}^{s+q-3} \frac{2\pi^2 \varkappa_{m1}\mu_{m1}^2}{n^{-2}\mu_{s+q-1,1}^2 + \mu_{m1}^2} \le e^{\mu_{s+q-3,1}x} \int_{-\infty}^{\infty} (1+u^2)dG(u) \frac{2\pi^2 n^2}{\mu_{s+q-1,1}^2};$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \varkappa_{m2} e^{\mu_{m2}x} (\sin \frac{n\mu_{m2}\pi}{\mu_{s+q-1,1}})^2 \le \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi^2 \varkappa_{m2}\mu_{m2}^2}{n^{-2}\mu_{s+q-1,1}^2 + \mu_{m2}^2} \le \int_{-\infty}^{\infty} (1+u^2)dG(u) \frac{2\pi^2 n^2}{\mu_{s+q-1,1}^2}.$$

Объединяя полученные оценки и учитывая (I6), (I7), приходим к правой части (6.2) для $r=1$. Аналогично доказывается это соотношение и для $r=2$.

Перед формулировкой следующей леммы заметим, что существует такое число $A>0$, что $F_j(A)-F_j(-A) \ge \frac{1}{2}$, $j=1,2$. Это соотношение выполняется для $\varepsilon < \varepsilon_3$, где ε_3 достаточно малое, зависящее только от $\mathcal{G}$ число, и доказывается оно по аналогии с рассуждением работы [5, стр. 207-208].

Л Е М М А 7. Функция $g(z)$ допускает в круге $|z| \le T_1 - 1$ следующую оценку для некоторых $A>0$ и $\kappa>0$, зависящих только от $\mathcal{G}$:

$$|g(z)| \le A(|z|^3+1)\exp\{\tfrac{1}{2}\kappa(\operatorname{Re} z)^2\}. \tag{7.1}$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Пусть $A>0$ таково, что $F_2(A)-F_2(-A) \ge \frac{1}{2}$, тогда

$$\varphi(iy; F_2^*) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-yv} dF_2^*(v) \ge \int_{-A}^{A} e^{-yv} dF_2(v) \ge \tfrac{1}{2} e^{-A|y|}. \tag{7.2}$$

В силу (I5) и (7.2) для $|z| \le T_1$ справедливо неравенство $(z=x+iy)$

$$|\varphi(z; F_1^*)| \le \varphi(iy; F_1^*) = \varphi(iy; F^*)/\varphi(iy; F_2^*) \le 3e^{A|y|}\varphi(iy; \mathcal{G}).$$

Применяя соотношение (4) к функции $\varphi(t; \mathcal{G})$, приходим к оценке

$$\ln|\varphi(z; F_1^*)| \le A(1+|z|^2)\exp\{c(\operatorname{Im} z)^2 + A|\operatorname{Im} z|\}. \tag{7.3}$$

Аналогично получаем такую же оценку и для $\ln|\varphi(z; F_2^*)|$. Из этой оценки и (I5) следует

$$\ln(\tfrac{1}{2}|\varphi(z; \mathcal{G})|) < \ln|\varphi(z; F^*)| < \ln|\varphi(z; F_1^*)| + A(1+|z|^2)\exp\{c(\operatorname{Im} z)^2 + A|\operatorname{Im} z|\},$$

откуда, используя (4), получаем

$$\ln|\varphi(z; F_1^*)| \ge -A(1+|z|^2)\exp\{c(\operatorname{Im} z)^2 + A|\operatorname{Im} z|\}. \tag{7.4}$$

Неравенства (7.3) и (7.4) для $\ln|\varphi(z; F_1^*)|$ дают оценку

$$|\ln|\varphi(z; F_1^*)|| \le A(1+|z|^2)\exp\{c(\operatorname{Im} z)^2 + A|\operatorname{Im} z|\}, \quad |z| \le T_1,$$

которую можно переписать иначе

$$|\mathcal{U}(x,y)| \le A(1+x^2+y^2)\exp(cx^2 + A|x|), \quad x^2+y^2 \le T_1^2. \tag{7.5}$$

По формуле Шварца

$$g(z+\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(x+\cos\vartheta,\ y+\sin\vartheta)\frac{e^{i\vartheta}+\zeta}{e^{i\vartheta}-\zeta}\,d\vartheta+i\,\mathrm{Im}\,g(z),\ |\zeta|<1.$$

Продифференцировав эту формулу по переменной ζ, а затем положив в ней $\zeta=0$, придем к выражению

$$g'(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U(x+\cos\vartheta,\ y+\sin\vartheta)e^{-i\vartheta}d\vartheta.$$

Отсюда, используя оценку (7.5), получаем

$$|g'(z)|\leqslant 2\max_{0\leqslant\vartheta\leqslant 2\pi}|U(x+\cos\vartheta,\ y+\sin\vartheta)|\leqslant A(1+|z|^2)\exp\{c(\mathrm{Re}z)^2+(c+A)|\mathrm{Re}z|\}.$$

Но поскольку $g(z)=z\int_0^1 g'(z t)dt$, то

$$|g(z)|\leqslant|z|\cdot\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|g'(z\cdot t)|,$$

откуда и следует утверждение леммы.

Положим теперь $g_r(z)=g(z)\exp(-\nu_{1r}z)$, $U_r(x,y)=\mathrm{Re}\,g_r(x+iy)$, $r=1,2$ (x,y – вещественные).

Л Е М М А 8. Справедливы оценки

$$U_r(x,0)-U_r(x,2\pi/\nu_{1r})\leqslant A(1+\nu_{1r}^{-2}),\quad r=1,2,$$

где первая выполняется для $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}T_1$, а вторая для $-\frac{1}{2}T_1\leqslant x\leqslant 0$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. В самом деле, для $r=1,2$

$$U_r(x,0)-U_r(x,2\pi/\nu_{1r})=g(x)\exp(-\nu_{1r}x)-\mathrm{Re}\{g(x+2\pi i/\nu_{1r})\exp(-\nu_{1r}(x+$$
$$+2\pi i/\nu_{1r}))\}=\exp(-\nu_{1r}x)\cdot\{U(x,0)-U(x,2\pi/\nu_{1r})\}.$$

Используя соотношения (6.2) $(s=1)$, получаем утверждение леммы.

Л Е М М А 9. В круге $|z|\leqslant T_2=\frac{1}{2\sqrt{2}}(T_1-1)$ имеют место соотношения

$$g_r(z)=g_r^{(+)}(z)+g_r^{(-)}(z),\quad r=1,2,$$

где $g_r^{(+)}(z)$ и $g_r^{(-)}(z)$ – аналитические в этом круге функции, вещественные при вещественных z и допускающие при некотором $A>0$ оценки

$$|g_r^{(+)}(z)|\leqslant\begin{cases}A(|z|^5+1)\exp\{\kappa(\mathrm{Re}z)^2\}, & \mathrm{Re}z>0,\quad |z|\leqslant T_2\\ A(|z|^5+1), & \mathrm{Re}z\leqslant 0,\quad |z|\leqslant T_2;\end{cases}$$

$$|g_r^{(-)}(z)|\leqslant\begin{cases}A(|z|^5+1), & \mathrm{Re}z\geqslant 0,\quad |z|\leqslant T_2\\ A(|z|^5+1)\exp\{\kappa(\mathrm{Re}z)^2\}, & \mathrm{Re}z<0,\quad |z|\leqslant T_2.\end{cases}$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Отметим прежде всего, что функция $g_r(z)$ вещественна при вещественных z, $-T_1\leqslant z\leqslant T_1$, и в силу леммы 7 справедлива оценка для $|z|\leqslant T_1-1$

$$|g_r(z)|\leqslant A(|z|^3+1)\exp\{\tfrac{1}{2}\kappa(\mathrm{Re}z)^2-\nu_{1r}\mathrm{Re}z\}.\tag{9.1}$$

Обозначим через D квадрат со сторонами, параллельными координатным осям, вписанный в круг $|z|\leqslant T_1-1$. Определим функцию $g_r^{(+)}(z)$ при $\mathrm{Re}z<1$, $z\in D$ равенством

$$g_r^{(+)}(z)=\frac{z^5}{2\pi i}\int_{1-iH}^{1+iH}\frac{g_r(\zeta)d\zeta}{\zeta^5(\zeta-z)},\quad H=\frac{1}{\sqrt{2}}(T_1-1).\tag{9.2}$$

Проинтегрируем функцию $f(\varsigma,z)=\frac{g_r(\varsigma)}{\varsigma^5(\varsigma-z)}$ вдоль контура прямоугольника с вершинами в точках $(a+iH,\ b+iH,\ b-iH,\ a-iH,\ 0<a<b<H$. По теореме Коши

$$\frac{z^5}{2\pi i}\int_{b-iH}^{b+iH} f(\varsigma,z)d\varsigma-\frac{z^5}{2\pi i}\int_{a-iH}^{a+iH} f(\varsigma,z)d\varsigma+F(z;a,b)=\begin{cases}0, & Re z<a,\ Re z>b,\\ g_r(z), & a<Re z<b,\end{cases}\ z\in D, \quad (9.3)$$

где $$F(z;a,b)=\frac{z^5}{2\pi i}\left(-\int_{a+iH}^{b+iH} f(\varsigma,z)d\varsigma+\int_{a-iH}^{b-iH} f(\varsigma,z)d\varsigma\right)$$

функция, аналитическая в области D. Для $Re z<1$, $z\in D$ и любого b, $1<b<H$ справедливо

$$g_r^{(+)}(z)=\frac{z^5}{2\pi i}\int_{b-iH}^{b+iH} f(\varsigma,z)d\varsigma+F(z;1,b), \qquad (9.4)$$

поэтому функция $g_r^{(+)}(z)$ аналитически продолжается в область D, причем представление (9.4) сохраняется и для $1\le Re z<b, z\in D$. Для $1<Re z<b$, $z\in D$ функцию $g_r^{(+)}(z)$ в силу (9.3) и (9.4) можно представить в виде

$$g_r^{(+)}(z)=\frac{z^5}{2\pi i}\int_{1-iH}^{1+iH} f(\varsigma,z)\,d\varsigma+g_r(z). \qquad (9.5)$$

Из представления (9.4) для $b=3$ следует, что для $Re z\le 2$, $2z\in D$

$$|g_r^{(+)}(z)|\le A(|z|^5+1), \qquad (9.6)$$

а из (9.5), учитывая (9.I), получим для $Re z>2$, $2z\in D$

$$|g_r^{(+)}(z)|\le A(|z|^5+1)\exp\{\kappa(Re z)^2\}.$$

Вещественность функции $g_r^{(+)}(z)$ при вещественных z следует из представлений (9.2) и (9.5). Полагая $g_r^{(-)}(z)=g_r(z)-g_r^{(+)}(z)$, с помощью представления (9.5) и оценок (9.I), (9.6) убеждаемся в справедливости леммы.

При вещественных x и y положим

$$U_r^{(+)}(x,y)=Re\, g_r^{(+)}(x+iy),\quad U_r^{(-)}(x,y)=Re\, g_r^{(-)}(x+iy),\quad x^2+y^2\le T_2^2,\quad r=1,2.$$

Так как при вещественных z, $-T_2\le z\le T_2$, функции $g_r^{(+)}(z)$ и $g_r^{(-)}(z)$ вещественны, то при вещественных x и y, $x^2+y^2\le T_2^2$:

$$U_r^{(+)}(x,y)=\frac{1}{2}\left\{g_r^{(+)}(x+iy)+g_r^{(+)}(x-iy)\right\},\ U_r^{(-)}(x,y)=\frac{1}{2}\left\{g_r^{(-)}(x+iy)+g_r^{(-)}(x-iy)\right\}. \quad (I9)$$

В правой части (I9) стоят аналитические в круге $|x|\le T_2-|y|$ функции от x. Поэтому функции $U_r^{(+)}(x,y)$ и $U_r^{(-)}(x,y)$, $r=1,2$, при каждом фиксированном $y, -\frac{1}{2}T_2\le y\le T_2$ продолжаются аналитически на все комплексные значения x, $|x|\le\frac{1}{2}T_2$. Используя лемму 9, получаем неравенства:

$$|U_r^{(+)}(x,y)|\le\begin{cases}A((|x|^2+y^2)^{5/2}+1)\exp\{\kappa(Re x)^2\}, & Re x>0,\ |x|\le\frac{1}{2}T_2\\ A((|x|^2+y^2)^{5/2}+1), & Re x\le 0,\ |x|\le\frac{1}{2}T_2,\end{cases}$$

$$|U_r^{(-)}(x,y)|\le\begin{cases}A((|x|^2+y^2)^{5/2}+1), & Re x\ge 0,\ |x|\le\frac{1}{2}T_2\\ A((|x|^2+y^2)^{5/2}+1)\exp\{\kappa(Re x)^2\}, & Re x<0,\ |x|\le\frac{1}{2}T_2.\end{cases} \qquad (20)$$

Введем в рассмотрение функции

$$\chi_1(x) = \mathcal{U}_1^{(+)}(x,0) - \mathcal{U}_1^{(+)}(x, 2\pi/\nu_{11}), \ \chi_2(x) = \mathcal{U}_2^{(-)}(x,0) - \mathcal{U}_2^{(-)}(x, 2\pi/\nu_{12}). \quad (21)$$

Из предыдущего следует, что они продолжаются аналитически в круг $|x| \leq \frac{1}{2} T_2$, причем там для них выполняются оценки (20) с $y = 2\pi/\nu_{12}$, $r = 1,2$.

Л Е М М А 10. Функции $\chi_r(x)$ $(r=1,2)$ в круге $|x| \leq \frac{1}{2} T_3^{1/6}$, $T_3 = \left(\frac{\ln(\frac{1}{2}T_2)}{4\ln_2(\frac{1}{2}T_2)}\right)^{\frac{1}{2}}$ имеют вид

$$\chi_r(x) = \sum_{p=0}^{5} c_{pr} x^p + H_r(x),$$

где $|c_{pr}| \leq A|\nu_{1r}|^{-5}$, $p = 0,1,\dots,5$, а для $H_r(x)$ $(r=1,2)$ имеет место оценка $|H_r(x)| \leq A|\nu_{1r}|^{-5}$ в круге $|x| \leq \frac{1}{2} T_3^{1/6}$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Для вещественных $0 \leq x \leq \frac{1}{2} T_2$ в силу определения $\chi_1(x)$ справедливо

$$\chi_1(x) = \left\{\mathcal{U}_1(x,0) - \mathcal{U}_1(x, 2\pi/\nu_{11})\right\} - \left\{\mathcal{U}_1^{(-)}(x,0) - \mathcal{U}_1^{(-)}(x, 2\pi/\nu_{11})\right\}.$$

Отсюда, используя (20) и лемму 8, получаем для $0 \leq x \leq \frac{1}{2} T_2$

$$|\chi_1(x)| \leq A(1+\nu_{11}^{-2}) + A(1+x^5+\nu_{11}^{-5}) \leq A\nu_{11}^{-5}(x^5+1).$$

В полукруге $\operatorname{Re} x \geq 0$, $|x| \leq \frac{1}{2} T_2$ для $\chi_1(x)$ выполняется первая из оценок (20). Мы находимся в условиях леммы I. По этой лемме ($R = \frac{1}{2} T_2$, $a = \ell - 5$, $d = \kappa$, $C = A\nu_{11}^{-5}$) в полукруге $\operatorname{Re} x \geq 0$, $|x| \leq T_3$ справедливо неравенство

$$|\chi_1(x)| \leq A\nu_{11}^{-5}(1+|x|^5). \quad (10.1)$$

В силу (20) эта оценка верна во всем круге $|x| \leq T_3$. В круге $|x| \leq \frac{1}{2} T_3$ функция $\chi_1(x)$ допускает разложение в ряд $\chi_1(x) = \sum_{p=0}^{\infty} c_{p1} x^p$. С помощью неравенств Коши для коэффициентов степенного ряда и оценки (10.1) нетрудно получить, что для $p = 0,1,\dots,5$ $|c_{p1}| \leq A\nu_{11}^{-5}$ и для $p \geq 6$ $|c_{p1}| \leq A \cdot 2^p \nu_{11}^{-5} T_3^{-p+5}$. Положим $H_1(x) = \sum_{6}^{\infty} c_{p1} x^p$, тогда из этих неравенств следует для $|x| \leq \frac{1}{2} T_3^{1/6}$

$$|H_1(x)| \leq \sum_{6}^{\infty} |c_{p1}||x|^p \leq A\nu_{11}^{-5}.$$

Аналогичное рассуждение проводится и для функции $\chi_2(x)$.

Л Е М М А 11. В круге $|z| \leq \frac{1}{10} T_4$, $T_4 = \frac{1}{2} T_3^{1/54}$ справедливы соотношения

$$g_1^{(+)}(z) = \sum_{p=1}^{N_1} (a_{p1} + b_{p1} z) \exp(\nu_{11} p z) + P_1(z) + \tilde{H}_1(z), \quad (11.1)$$

$$g_2^{(-)}(z) = \sum_{p=1}^{N_2} (a_{p2} + b_{p2} z) \exp(\nu_{12} p z) + P_2(z) + \tilde{H}_2(z), \quad (11.2)$$

где a_{pr} и b_{pr} такие вещественные постоянные, что для некоторого $A>0$ и $r = 1,2$

$$|a_{pr}| |b_{pr}| \leq A |\nu_{1r}|^{-15} (p+1)^8 \exp\left(-\frac{\nu_{1r}^2 p^2}{4k}\right), \ p \leq N_r = \left[\frac{2k}{|\nu_{1r}|}\sqrt{T_4^2 - \left(\frac{2\pi}{|\nu_{1r}|}\right)^2}\right], \quad (11.3)$$

$P_r(z)$ $(r=1,2)$ – полиномы степени не выше 7 с вещественными коэффициентами τ_{pr} такими, что $|\tau_{pr}| \leq A|\nu_{1r}|^{-15}$, а $\tilde{H}_r(z)$ $(r=1,2)$ – аналитические в круге $|z| \leq \frac{1}{10} T_4$ функции, допускающие там оценку $|\tilde{H}_r(z)| \leq A\exp(-T_4^{1/2})$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Поскольку в круге $|z| \leq \frac{1}{2} T_3^{1/6}$ имеет место

$$\chi_1(z) = g_1^{(+)}(z) - \frac{1}{2}\left\{ g_1^{(+)}(z + {}^{2\pi i}/\nu_{11}) + g_1^{(+)}(z - {}^{2\pi i}/\nu_{11})\right\},$$

то из леммы I0 следует, что функция $g_1^{(+)}(z)$ удовлетворяет в нем разностному уравнению

$$g_1^{(+)}(z + {}^{2\pi i}/\nu_{11}) - 2g_1^{(+)}(z) + g_1^{(+)}(z - {}^{2\pi i}/\nu_{11}) = -2\sum_{p=0}^{5} c_{p1} z^p - 2H_1(z), \quad (II.4)$$

где c_{p1} $(p = 0, 1, \ldots, 5)$ и $H_1(z)$ удовлетворяют условиям леммы I0.

Прежде всего покажем, что разностное уравнение

$$F(z + {}^{2\pi}/\nu_{11}) - 2F(z) + F(z - {}^{2\pi}/\nu_{11}) = 2H_1(iz) \quad (II.5)$$

имеет в круге $|z| \le T_3^{1/54}$ аналитическое решение вида

$$F(z) = \ell_{11} z + \ell_{21} z^2 + R_1(z), \quad (II.6)$$

где ℓ_{p1} $(p = 1, 2)$ постоянные, для которых $|\ell_{p1}| \le A\nu_{11}^{-5}$, а $R_1(z)$ функция с оценкой $|R_1(z)| \le AT_3^{-1/19}$. Для этого решим сначала разностное уравнение (4.I) с $T = -\nu_{11}$, $Q(z) = -2H_1(iz)$. По лемме 4 $(R = \frac{1}{2}T_3^{1/6}, C = A\nu_{11}^{-5})$ у этого уравнения имеется аналитическое в круге $|z| \le (\frac{1}{2}\nu_{11}^{-2}T_3^{1/6})^{1/3}$ решение, представимое в виде $F_1(z) = -\nu_{11} h_1 z + H_{11}(z)$, где

$$|h_1| \le A\nu_{11}^{-5}, \quad |H_{11}(z)| \le A\nu_{11}^{-5}(\tfrac{1}{2}\nu_{11}T_3^{1/6})^{-1/3} \le AT_3^{-\frac{1}{19}}.$$

При оценке $H_{11}(z)$ мы воспользовались (I8). Аналогично применим лемму 4 $(R = (\frac{1}{2}\nu_{11}^{-2}T_3^{1/6})^{1/3}$, $C = AT_3^{-\frac{1}{19}})$ для решения уравнения (4.I) с $T = \nu_{11}$ и $Q(z) = H_{11}(z)$. Это уравнение имеет в круге $|z| \le (\frac{1}{2}\nu_{11}^{-8}T_3^{1/6})^{1/9}$ аналитическое решение вида $F_2(z) = \nu_{11} h_2 z + H_{21}(z)$, где

$$|h_2| \le A, \quad |H_{21}(z)| \le AT_3^{-\frac{1}{19}}(\tfrac{1}{2}\nu_{11}T_3^{1/6})^{-1/9} \le A\cdot T_3^{-1/19}.$$

Заметим, что $(\frac{1}{2}\nu_{11}^{-8}T_3^{1/6})^{1/9} \ge 2T_3^{1/54}$, тогда, полагая

$$F(z) = \frac{\nu_{11}h_1}{2} z - \frac{\nu_{11}^2 h_1}{4\pi} z^2 + F_2(z),$$

мы получаем, как легко видеть, искомое решение уравнения (II.5).

Выберем постоянные $\tilde{c}_{p1}$ так, чтобы полином $\tilde{P}_1(z) = \tilde{c}_{11}z + \ldots + \tilde{c}_{71}z^7$ удовлетворял разностному уравнению

$$\tilde{P}_1(z + {}^{2\pi i}/\nu_{11}) - 2\tilde{P}_1(z) + \tilde{P}_1(z - {}^{2\pi i}/\nu_{11}) = 2\sum_{p=0}^{5} c_{p1} z^p. \quad (II.7)$$

Из оценок для c_{p1}, даваемых леммой I0, следует, что $|\tilde{c}_{p1}| \le A\nu_{11}^{-7}$. Рассмотрим в круге $|z| \le T_3^{1/54}$ функцию $\tilde{g}_1^{(+)}(z)$

$$\tilde{g}_1^{(+)}(z) = g_1^{(+)}(z) + \tilde{P}_1(z) + F(-iz). \quad (II.8)$$

В силу (II.4) - (II.7) функция $\tilde{g}_1^{(+)}(z)$ в этом круге удовлетворяет разностному уравнению

$$\tilde{g}_1^{(+)}(z + {}^{2\pi i}/\nu_{11}) - 2\tilde{g}_1^{(+)}(z) + \tilde{g}_1^{(+)}(z - {}^{2\pi i}/\nu_{11}) = 0,$$

а значит функция $\tilde{\tilde{g}}_1^{(+)}(z) = \tilde{g}_1^{(+)}(z) - \tilde{g}_1^{(+)}(z - {}^{2\pi i}/\nu_{11})$ является в круге $|z| \le \frac{1}{2}T_3^{1/54}$

аналитической периодической с периодом $iT = 2\pi i/\nu_{11}$ функцией, допускающей в нем в силу леммы 9, (II.6) и (II.8) для некоторого $A>0$ оценку

$$|\tilde{\tilde{g}}_1^{(+)}(z)| \leqslant (1+|z|)|\tilde{\tilde{g}}_1^{(+)}(z)| \leqslant \begin{cases} A\nu_{11}^{-7}(|z|^8+1)\exp\{\kappa(\operatorname{Re} z)^2\}, & \operatorname{Re} z>0, \\ A\nu_{11}^{-7}(|z|^8+1), & \operatorname{Re} z\leqslant 0. \end{cases} \quad \text{(II.9)}$$

Мы находимся в условиях леммы 3 $(R=\frac{1}{2}T_3^{1/54}=T_4,\ C=A\nu_{11}^{-7})$. По этой лемме в круге $|z|\leqslant\frac{1}{5}T_3^{1/54}\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{T_4^2-(2\pi/\nu_{11})^2}$ функция $\tilde{\tilde{g}}_1^{(+)}(z)$ допускает представление

$$\tilde{\tilde{g}}_1^{(+)}(z)=\sum_{p=0}^{\infty}d_{p1}\exp(\nu_{11}pz)+R_{11}(z), \quad \text{(II.10)}$$

где для некоторого $A>0$

$$|d_{p1}| \leqslant \begin{cases} A\nu_{11}^{-15}(p+1)^8\exp\left(-\frac{\nu_{11}p^2}{4\kappa}\right), & \frac{p\nu_{11}}{2\kappa}\leqslant\sqrt{T_4^2-(2\pi/\nu_{11})^2} \\ A\nu_{11}^{-7}T_4^8\exp\left(-\frac{1}{5}\nu_{11}pT_4\right), & \frac{p\nu_{11}}{2\kappa}>\sqrt{T_4^2-(2\pi/\nu_{11})^2}, \end{cases} \quad \text{(II.11)}$$

$$|R_{11}(z)|\leqslant A\nu_{11}^{-7}T_4^8\exp\left(-\frac{1}{5}\nu_{11}T_4\right)\leqslant A\exp(-T_4^{1/2}). \quad \text{(II.12)}$$

Введем функцию $f_1(z)=\tilde{g}_1^{(+)}(z)-\frac{\nu_{11}z}{2\pi i}\tilde{\tilde{g}}_1^{(+)}(z)$. Эта функция аналитична в круге $|z|\leqslant T_4$ и является, как легко видеть, периодической с периодом $iT=2\pi i/\nu_{11}$, а ее модуль не превосходит правой части неравенства (II.9) в круге $|z|\leqslant T_4$. Применим к $f_1(z)$ лемму 3, получаем, что для $|z|\leqslant\frac{1}{5}T_4$

$$f_1(z)=\sum_{p=0}^{\infty}\delta_{p1}\exp(\nu_{11}pz)+R_{21}(z), \quad \text{(II.13)}$$

где для коэффициентов δ_{p1} верны неравенства (II.II), а для $R_{21}(z)$ выполняется оценка (II.I2). Соединяя соотношения (II.8), (II.I3) и (II.I0) приходим к следующему представлению для функции $g_1^{(+)}(z)$ в круге $|z|\leqslant\frac{1}{5}T_4$:

$$g_1^{(+)}(z)=\sum_{p=1}^{\infty}(a_{p1}+b_{p1}z)\exp(\nu_{11}pz)+\sum_{p=0}^{7}\tau_{p1}z^p+H_{31}(z),$$

где коэффициенты a_{p1} и b_{p1} удовлетворяют оценке (II.II), τ_{p1} таковы, что $|\tau_{p1}|\leqslant A\nu_{11}^{-15}$, а $H_{31}(z)$ - аналитическая в круге $|z|\leqslant\frac{1}{5}T_4$ функция, для которой в этом круге выполняется неравенство: $|H_{31}(z)|\leqslant A\exp(-T_4^{1/2})$.

Положим для $|z|\leqslant\frac{1}{5}T_4$

$$H_{N_1,1}(z)=\sum_{p=N_1+1}^{\infty}(a_{p1}+b_{p1}z)\exp(\nu_{11}pz).$$

Тогда, применяя оценки (II.II) для коэффициентов a_{p1} и b_{p1} и пользуясь (I8), получаем для $|z|\leqslant\frac{1}{10}T_4$

$$|H_{N_1,1}(z)|\leqslant\sum_{p=N_1+1}^{\infty}(|a_{p1}|+|b_{p1}|\cdot|z|)\exp(\nu_{11}p\operatorname{Re} z)\leqslant$$

$$\leqslant A\nu_{11}^{-7}T_4^9\sum_{p=N_1+1}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{10}\nu_{11}pT_4\right)\leqslant A\exp(-T_4^{1/2}).$$

Определив функцию $H_{41}(z)=H_{31}(z)+H_{N_1,1}(z)$, мы приходим к представлению (II.I) для функции $g_1^{(+)}(z)$ в круге $|z|\leqslant\frac{1}{10}T_4$, отличающемуся от нужного только невещественностью, вообще говоря, коэффициентов. Нужное представление получается, если заметить, что из вещественности $g_1^{(+)}(z)$ следует

$$g_1^{(+)}(z)=\sum_{p=1}^{N_1}(Re\,a_{p1}+z\cdot Re\,b_{p1})\exp(\nu_{11}pz)+\sum_{p=0}^{7}Re\,\tau_{p1}\cdot z^p+\tilde{H}_1(z),$$

где $\tilde{H}_1(z)=\frac{1}{2}\left(H_{41}(z)+\overline{H_{41}(\bar z)}\right)$. Аналогично получаем (II.2).

Л Е М М А I2. Функция $g(z)$ допускает представление для $|z|\leq\frac{1}{10}T_4$

$$g(z)=\sum_{r=1}^{2}\sum_{p=2}^{N_r+1}(a_{pr}^{(1)}+b_{pr}^{(1)}z)\exp(\nu_{1r}pz)+\mathcal{L}(z)+E(z), \tag{I2.1}$$

где коэффициенты $a_{pr}^{(1)}=a_{p-1,r}$ и $b_{pr}^{(1)}=b_{p-1,r}$ (a_{pr}, b_{pr} и числа N_r $(r=1,2)$ из представлений (II.I), (II.2)); $\mathcal{L}(z)$ – аналитическая в круге $|z|<T_2$ функция, вещественная при вещественных z и допускающая оценку для $|z|\leq T_2$

$$|\mathcal{L}(z)|\leq\begin{cases}A(\nu_{11}^{-15}+|\nu_{12}|^{-15})(|z|^7+1)\exp(\nu_{11}Re\,z), & Re\,z\geq 0,\\ A(\nu_{11}^{-15}+|\nu_{12}|^{-15})(|z|^7+1)\exp(\nu_{21}Re\,z), & Re\,z<0;\end{cases} \tag{I2.2}$$

а для $E(z)$ справедливо

$$|E(z)|\leq A\exp\left\{-T_4^{1/2}+(\nu_{11}-\nu_{12})|z|\right\},\quad |z|\leq\frac{1}{10}T_4. \tag{I2.3}$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Положим для $|z|\leq T_2$

$$\ell(z)=g(z)-g_1^{(+)}(z)e^{\nu_{11}z}-g_2^{(-)}(z)e^{\nu_{12}z}. \tag{I2.4}$$

Используя соотношения, связывающие функции $g_r(z)$ и $g(z)$ и лемму 9, получаем, что

$$\ell(z)=g_1^{(-)}(z)e^{\nu_{11}z}-g_2^{(-)}(z)e^{\nu_{12}z};\quad \ell(z)=g_2^{(+)}(z)e^{\nu_{12}z}-g_1^{(+)}(z)e^{\nu_{11}z}.$$

Из первого представления $\ell(z)$ в силу леммы 9 следует справедливость оценки

$$|\ell(z)|\leq A(|z|^5+1)\exp(\nu_{11}Re\,z),\quad Re\,z\geq 0,\ |z|\leq T_2,$$

аналогично, из второго имеем

$$|\ell(z)|\leq A(|z|^5+1)\exp(\nu_{12}Re\,z),\quad Re\,z\leq 0,\ |z|\leq T_2.$$

Воспользуемся теперь представлениями (II.I), (II.2) и положим

$$\mathcal{L}(z)=\ell(z)+\sum_{r=1}^{2}P_r(z)e^{\nu_{1r}z};\quad E(z)=\sum_{r=1}^{2}\tilde{H}_r(z)e^{\nu_{1r}z}. \tag{I2.5}$$

Тогда, как легко видеть, функции $\mathcal{L}(z)$ и $E(z)$ удовлетворяют соответственно соотношениям (I2.2) и (I2.3), и поэтому из равенства (I2.4) мы приходим к представлению (I2.I)

Л Е М М А I3. Для функции $g(z)$ в круге $|z|\leq 2^{-9}\kappa^{-1}(\ln T_4)^{1/2}=2^{-9}\kappa^{-1}T_5=\frac{1}{8}T_6$ выполняется соотношение

$$g(z)=\sum_{r=1}^{2}\sum_{|\nu_{2r}|\leq|\nu_{mr}|\leq\xi_r|\nu_{1r}|}\tilde{\lambda}_{mr}\exp(\nu_{mr}z)+\mathcal{L}(z)+B(z), \tag{I3.1}$$

где $0\leq\tilde{\lambda}_{mr}\leq\lambda_{mr}$ (λ_{mr} определяются формулой (6.2)), числа $\xi_r=\left[\frac{8(T_5+1)\kappa}{|\nu_{1r}|}\right]+1$; $\mathcal{L}(z)$ из представления (I2.I), а $B(z)$ – функция, допускающая в круге $|z|\leq\frac{1}{8}T_6$ оценку

$$|B(z)|\leq A \tag{I3.2}$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Положим для $|z| \leqslant \frac{1}{10} T_4$

$$h_1(z) = g_1^{(+)}(z) \exp(\nu_{11} z) - P_1(z) \exp(\nu_{11} z),$$
$$h_2(z) = g_2^{(-)}(z) \exp(\nu_{12} z) - P_2(z) \exp(\nu_{12} z), \tag{13.3}$$

$P_r(z)$ $(r=1,2)$ из (II.I), (II.2), тогда для этих z из (I2.I), (I2.5) имеем:

$$g(z) = \sum_{r=1}^{2} h_r(z) + \mathcal{L}(z).$$

Поскольку $P_r(z)$ $(r=1,2)$ полиномы, то функции $h_r(z)$ $(r=1,2)$ можно продолжить аналитически в круг $|z| \leqslant T_2$, так как в этом круге являются аналитическими функции $g_r^{(+)}(z)$ и $g_r^{(-)}(z)$.

Введем функции

$$D_r(x,y) = h_r(x) - \frac{1}{2}\{h_r(x+iy) + h_r(x-iy)\},\ r = 1,2,$$
$$\Lambda(x,y) = \mathcal{L}(x) - \frac{1}{2}\{\mathcal{L}(x+iy) + \mathcal{L}(x-iy)\}. \tag{13.4}$$

При каждом фиксированном y, $-\frac{1}{2}T_2 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}T_2$, эти функции аналитические относительно x в круге $|x| \leqslant \frac{1}{2}T_2$ и в силу лемм 9, II, I2 удовлетворяют таким оценкам для $|x| \leqslant \frac{1}{2}T_2$:

$$|D_1(x,y)| \leqslant \begin{cases} A\nu_{11}^{-15}(1+|x|^7+|y|^7)\exp\{2\kappa(\operatorname{Re}x)^2\}, & \operatorname{Re}x \geqslant 0, \\ A\nu_{11}^{-15}(1+|x|^7+|y|^7), & \operatorname{Re}x < 0, \end{cases} \tag{13.5}$$

$$|D_2(x,y)| \leqslant \begin{cases} A|\nu_{12}|^{-15}(1+|x|^7+|y|^7), & \operatorname{Re}x \geqslant 0, \\ A|\nu_{12}|^{-15}(1+|x|^7+|y|^7)\exp\{2\kappa(\operatorname{Re}x)^2\}, & \operatorname{Re}x < 0, \end{cases} \tag{13.6}$$

$$|\Lambda(x,y)| \leqslant \begin{cases} A(\nu_{11}^{-15} + |\nu_{12}|^{-15})(1+|x|^7+|y|^7)\exp(\nu_{11}\operatorname{Re}x), & \operatorname{Re}x \geqslant 0, \\ A(\nu_{11}^{-15} + |\nu_{12}|^{-15})(1+|x|^7+|y|^7)\exp(\nu_{12}\operatorname{Re}x), & \operatorname{Re}x < 0. \end{cases} \tag{13.7}$$

Из вещественности функций $h_r(z)$ $(r=1,2)$, $\mathcal{L}(z)$ при вещественных x и y следует

$$\mathcal{U}(x,0) - \mathcal{U}(x,y) = \sum_{r=1}^{2} D_r(x,y) + \Lambda(x,y). \tag{13.8}$$

Для любого натурального $n \neq 0$ такого, что $2\pi n/\nu_{m1} \leqslant \frac{1}{80} T_4$ с помощью (I3.8), (6.2), (I3.6), (I3.7) получим, что для вещественных x, $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}T_2$, справедливы для некоторого $A > 0$ неравенства:

$$|D_1(x, 2\pi n/\nu_{m1})| \leqslant A(\nu_{11}^{-15} + |\nu_{12}|^{-15})(1 + 2\pi n/\nu_{m1})^7\{\exp(\nu_{m-1,1}x) + x^7\exp(\nu_{11}x)\}, \tag{13.9}$$
$$m = 2, 3, \ldots .$$

Оценки (I3.5) и (I3.9) показывают, что к функциям $e^{-\nu_{m-1,1}x} D_1(x, \frac{2\pi n}{\nu_{m1}})$ $(m=2,3,\ldots)$ применима лемма 1 ($R = \frac{1}{2}T_2$, $\ell = a = 7$, $d = 2k$, $C = A(\nu_{11}^{-15} + |\nu_{12}|^{-15})(1+2\pi n/\nu_{m1})^7$; подчеркнем, что $A > 0$ здесь для всех m и n одно и то же). Эта лемма в круге $|x| \leqslant T_3$ дает нам для $m = 2, 3, \ldots$, n таких, что $2\pi n/\nu_{m1} \leqslant \frac{1}{80} T_4$, и некоторого $A > 0$ следующие соотношения:

$$|D_1(x, 2\pi n/\nu_{m1})| \leqslant \begin{cases} A(\nu_{11}^{-15} + |\nu_{12}|^{-15})(1 + 2\pi n/\nu_{m1})^7(|x|^7+1)\exp(\nu_{m-1,1}x), & \operatorname{Re}x > 0 \\ A(\nu_{11}^{-15} + |\nu_{12}|^{-15})(1 + 2\pi n/\nu_{m1})^7(|x|^7+1), & \operatorname{Re}x \leqslant 0. \end{cases} \tag{13.10}$$

Из (I3.4) и (I3.3), если воспользоваться для $|z| \leqslant \frac{1}{10} T_4$ представлением (II.I) и тем, что $2\pi n/\nu_{m1} \leqslant \frac{1}{80} T_4$, легко получаем следующие представления для вещественных x, $-\frac{1}{20}T_4 \leqslant x \leqslant \frac{1}{20}T_4$, $y = \frac{2\pi n}{\nu_{m1}}$, $m = 2, 3, \ldots$:

$$D_1(x, \tfrac{2\pi n}{\nu_{m1}}) - e^{\nu_{11}x}\left\{\tilde{H}_1(x) - \operatorname{Re}\left(e^{\frac{2\pi n i \nu_{11}}{\nu_{m1}}} \cdot \tilde{H}_1(x + \tfrac{2\pi i n}{\nu_{m1}})\right)\right\} = \sum_{p=2}^{N_1+1}(a_{p1}^{(m,n)} + b_{p1}^{(m,n)}x)e^{\nu_{11}px}, \tag{13.11}$$

где

$$a_{p1}^{(m,n)} = 2a_{p1}^{(1)}\left(\sin\frac{\nu_{11}p\pi n}{\nu_{m1}}\right)^2 + b_{p1}^{(1)}\frac{2\pi n}{\nu_{m1}}\sin\frac{\nu_{11}2\pi n}{\nu_{m1}};\quad b_{p1}^{(m,n)} = 2b_{p1}^{(1)}\left(\sin\frac{\nu_{11}p\pi n}{\nu_{m1}}\right)^2. \qquad \text{(I3.I2)}$$

В дальнейшем будем обозначать коэффициенты $a_{p1}^{(m,1)}, b_{p1}^{(m,1)}$ через $a_{p1}^{(m)}, b_{p1}^{(m)}$. Отметим также, что в силу соотношений (I3.I2) и (II.3) для некоторого $A>0$ и всех $m=2,3,\dots,$ n, что $2\pi n/\nu_{m1}\leq\frac{1}{80}T_4$ выполняются

$$\left|a_{p1}^{(m,n)}\right| + \left|b_{p1}^{(m,n)}\right| \leq A\left(1+\frac{2\pi n}{\nu_{m1}}\right)\nu_{11}^{-15}p^8\exp\left(-\frac{\nu_{11}^2p^2}{8\kappa}\right), \quad 2\leq p\leq N_1+1. \qquad \text{(I3.I3)}$$

Оценка для функции $\tilde{H}_1(x)$ из леммы II и оценки (I3.I0) позволяют к ряду правой части равенства (I3.II) применить лемму 5 $(R=\frac{1}{20}T_4,\ \sigma=\nu_{m-1,1},\ m=2,3,\dots;\ C=A(\nu_{11}^{-15}+|\nu_{12}|^{-15})(1+2\pi n/\nu_{m1})^7$, причем $A>0$ одно для всех $m,n)$. Если учесть, что $C_1>0$, постоянная в лемме 5, в силу (I3.I3) для всех $m=2,3,\dots;$ n, что $2\pi n/\nu_{m1}\leq\frac{1}{80}T_4$, и некоторого $A>0$ допускает оценку $C_1\leq A(1+2\pi n/\nu_{m1})\nu_{11}^{-24}$, а $\sqrt{(\frac{1}{20}T_4-2\pi/\nu_{11})^2-4\pi^2/\nu_{11}^2}\geq\frac{1}{40}T_4$, то с помощью леммы 5 и (I8) приходим для некоторого одного $A>0$, $m=2,3,\dots;$ $n=1,2,\dots,$ $2\pi n/\nu_{m1}\leq\frac{1}{80}T_4$, и p $(p>\nu_{m-1,1}/\nu_{11})$ к неравенствам:

$$\left|a_{p1}^{(m,n)}\right| \leq Ae^{4\pi p}T_4^{10}\exp\left\{\frac{1}{40}T_4(-\nu_{11}p+\nu_{m-1,1})\right\}\leq Ae^{4\pi p}\exp\left\{\frac{1}{80}T_4(-\nu_{11}p+\nu_{m-1,1})\right\}, \qquad \text{(I3.I4)}$$

$$\left|b_{p1}^{(m,n)}\right| \leq AT_4^{10}\exp\left\{\frac{1}{40}T_4(-\nu_{11}p+\nu_{m-1,1})\right\}\leq A\exp\left\{\frac{1}{80}T_4(-\nu_{11}p+\nu_{m-1,1})\right\}. \qquad \text{(I3.I5)}$$

Из неравенства (I3.I5) с $n=1$ и из того, что $N_1<2\kappa\nu_{11}^{-1}T_4$ следует, что для некоторого $A>0$ и всех p, $\nu_{m-1,1}/\nu_{11}<p<\nu_{m1}/\nu_{11}\leq N_1+1$, $m=2,3,\dots$

$$\left|b_{p1}^{(1)}\right| < A\left(\sin\frac{\nu_{11}p\pi}{\nu_{m1}}\right)^{-2}\exp\left\{\frac{1}{80}T_4(-\nu_{11}p+\nu_{m-1,1})\right\}\leq AT_4^4\exp\left\{\frac{1}{80}T_4(-\nu_{11}p+\nu_{m-1,1})\right\}. \qquad \text{(I3.I6)}$$

Пусть ν_{M1} наименьшее из чисел $\nu_{m1}:\ \nu_{m1}>(N_1+1)\nu_{11}$, положим $n=[\nu_{M1}\nu_{11}^{-1}(N_1+1)^{-1}]$. Тогда для p, $\nu_{M-1,1}/\nu_{11}<p<N_1+1$, как легко видеть, из (I3.I2) и (I3.I5) следуют неравенства (I3.I6). Используя эти соотношения, а также (I3.I2) и (I3.I4), получаем аналогично, что для некоторого $A>0$ и всех p, $\nu_{m-1,1}/\nu_{11}<p<\nu_{m1}/\nu_{11}$, $p<N_1+1$ $(m=2,3,\dots)$

$$\left|a_{p1}^{(1)}\right| \leq A\cdot T_4^8\exp\left\{4\pi p+\frac{1}{80}T_4(-\nu_{11}p+\nu_{m-1,1})\right\}. \qquad \text{(I3.I7)}$$

Обозначим через $\mathcal{N}_1$ множество целых чисел

$$\mathcal{N}_1=\left\{p:\ \nu_{21}/\nu_{11},\ \nu_{31}/\nu_{11},\ \dots,\ \nu_{Q_1,1}/\nu_{11}\leq\xi^{(1)}\right\},\quad \nu_{Q_1+1,1}/\nu_{11}>\xi^{(1)}=\left[\frac{8(T_4^{1/4}+1)\kappa}{\nu_{11}}\right]+1,$$

и составим следующие суммы:

$$S_{1m}(x,N^*)=\sum_{N^*}^{N_1+1}\left(a_{p1}^{(m)}+b_{p1}^{(m)}x\right)\exp(\nu_{11}px);\quad S_{2m}(x,N^*)=\sum_{p\notin\mathcal{N}_1}^{N^*}\left(a_{p1}^{(m)}+b_{p1}^{(m)}x\right)\exp(\nu_{11}px).$$

Функции $S_{1m}(x,\xi^{(1)})$ для всех m, $1\leq m\leq Q_1$ и некоторого $A>0$ так оцениваются для $|x|\leq T_4^{1/4}$ с помощью (I3.I3), (II.3) и (I8)

$$\begin{aligned}\left|S_{1m}(x,\xi^{(1)})\right| &\leq A\nu_{11}^{-16}T_4^{1/4}\sum_{\xi^{(1)}}^{N_1+1}p^8\exp\left(\nu_{11}pT_4^{1/4}-\frac{\nu_{11}^2p^2}{8\kappa}\right)\leq\\ &\leq A\nu_{11}^{-25}T_4^{1/4}(\xi^{(1)})^8\exp\left(\nu_{11}\xi^{(1)}T_4^{1/4}-\frac{\nu_{11}^2(\xi^{(1)})^2}{8\kappa}\right)<A\exp\left(-T_4^{1/4}/2\right).\end{aligned} \qquad \text{(I3.I8)}$$

Из неравенств (I3.I4) – (I3.I7) и (I8) следует, что для функций $S_{2m}(x,N^*)$ при всех $m,N^*:\ 1\leq m\leq Q_1$, $N^*<\xi^{(1)}$ и некотором одном $A>0$ справедливо:

$$\left|S_{2m}(x, N^*)\right| \leqslant A\cdot T_4^8 \exp\left(-\frac{1}{80}\nu_{11}T_4\right)\sum_{\substack{2\\ p\notin \mathcal{H}_1}}^{\xi^{(1)}} \exp\{p(\nu_{11}T_4^{1/4}+4\pi)\} \leqslant \\ \leqslant A\exp(-T_4^{1/4}), \quad |x|\leqslant T_4^{1/4}. \tag{13.19}$$

Используя оценку для функции $\widetilde{H}_1(x)$ в лемме II, а также соотношения (13.18) и (13.19), нетрудно из (13.11) и выражений (13.12) для $a_{p1}^{(m)}$, $b_{p1}^{(m)}$ получить следующие представления для функций $D_1(x, 2\pi/\nu_{m1})$ $2\leqslant m\leqslant Q_1$:

$$D_1(x, 2\pi/\nu_{m1}) = \sum_{p\in\mathcal{H}_1,\ p\leqslant \nu_{m-1,1}/\nu_{11}} (a_{p1}^{(m)}+b_{p1}^{(m)}x)\exp(\nu_{11}px)+\widetilde{H}_{m1}(x),\ |x|\leqslant T_4^{1/4}, \tag{13.20}$$

где $\widetilde{H}_{m1}(x)$ – аналитические в круге $|x|\leqslant T_4^{1/4}$ функции, допускающие в нем для некоторого $A>0$ оценку

$$|\widetilde{H}_{m1}(x)| \leqslant A\exp\left(-\tfrac{1}{2}T_4^{1/4}\right). \tag{13.21}$$

Заметим, что число слагаемых Q_m^* в суммах, стоящих в правой части равенства (13.20) не превосходит

$$Q_m^* \leqslant \log_2\frac{8\kappa(T_4^{1/4}+1)}{\nu_{11}} \leqslant A\log_2 T_4.$$

Рассмотрим те m, $3\leqslant m\leqslant Q_1$, для которых $b_{p1}^{(1)}\neq 0$, $p=\nu_{m-1,1}/\nu_{11}$, а значит и $b_{p1}^{(m)}\neq 0$. Введем для этих m функции

$$S_{3m}(x) = \sum_{p\in\mathcal{H}_1,\ p<\nu_{m-1,1}/\nu_{11}} (|a_{p1}^{(m)}|+|b_{p1}^{(m)}|\cdot x)\exp\{(\nu_{11}p-\nu_{m-1,1})x\}.$$

С помощью (13.13) и (18) получаем, что для них при некотором $A>0$ и всех m выполняется

$$S_{3m}(T_4^{1/4}) \leqslant A\cdot Q_m^*\nu_{11}^{-24}\,T_4^{1/4}\exp\left(-\tfrac{1}{2}\nu_{m-1,1}T_4^{1/4}\right) \leqslant A\exp(-T_4^{1/5}). \tag{13.22}$$

Если теперь положить в (13.20) $x=T_4^{1/4}$ и разделить обе части получившегося равенства на $T_4^{1/4}\exp(\nu_{m-1,1}\,T_4^{1/4})$, то, воспользовавшись оценками (13.9), (13.21), (13.22), (13.13) и (18), получим для некоторого $A>0$ и всех $p\in\mathcal{H}_1$, $p=\nu_{m-1,1}/\nu_{11}$ неравенства:

$$\left|b_{p1}^{(m)}\right| = 2\left(\sin\frac{\nu_{11}p\pi}{\nu_{m1}}\right)^2\cdot\left|b_{p1}^{(1)}\right| \leqslant A\nu_{11}^{-24}\,T_4^{-\frac{1}{4}}. \tag{13.23}$$

Через $\mathcal{H}_2$ обозначим множество p, $p\in\mathcal{H}_1$, $p\leqslant\xi_1=\left[\frac{8(T_5+1)\kappa}{\nu_{11}}\right]+1$, $T_5=(\ln T_4)^{1/2}$. Для всех m, $m=2,\ldots,Q_2$, таких, что $\nu_{m1}/\nu_{11}\in\mathcal{H}_2$ и для $m=1$ образуем функции

$$S_{4m}(x) = \sum_{p\in\mathcal{H}_2}\left(\frac{2\pi}{\nu_{m1}}b_{p1}^{(1)}\sin\frac{2\nu_{11}p\pi}{\nu_{m1}}+b_{p1}^{(m)}x\right)\exp(\nu_{11}px).$$

В силу (13.23) и (18) эти функции для некоторого $A>0$ при $|x|\leqslant 2^{-6}\kappa^{-1}T_5$ оцениваются так:

$$\left|S_{4m}(x)\right| \leqslant A\nu_{11}^{-27}\,T_5^2\,T_4^{-1/4}\sum_{p\in\mathcal{H}_2}\exp(\nu_{11}px) \leqslant A\cdot T_4^{-\frac{1}{16}}. \tag{13.24}$$

Кроме того, пользуясь оценками, аналогичными тем, которые мы проводили при доказательстве (13.18), видим, что функции $S_{1m}(x,\xi_1)$ допускают такие неравенства для всех m, $1\leqslant m\leqslant Q_2$, и некоторого $A>0$:

$$\left|S_{1m}(x,\xi_1)\right| \le A\exp\left(-\tfrac{1}{2}T_5\right), \quad |x| \le 2^{-6}\kappa^{-1}T_5. \tag{13.25}$$

Применяя неравенства (13.24) и (13.25) в круге $|x| \le 2^{-6}\kappa^{-1}T_5$ к представлениям (13.20), мы приходим к тому, что в этом круге функции $D_1(x, 2\pi/\nu_{m1})$, $3 \le m \le Q_2$, имеют вид:

$$D_1(x, 2\pi/\nu_{m1}) = 2\sum_{p\in\mathcal{N}_2,\, p\le\nu_{m-1,1}/\nu_{11}} a_{p1}^{(1)}\left(\sin\frac{\nu_{11}p\pi}{\nu_{m1}}\right)^2 \exp(\nu_{11}px) + \tilde{\tilde{H}}_{m1}(x), \tag{13.26}$$

где функции $\tilde{\tilde{H}}_{m1}(x)$ для всех m и некоторого $A>0$ удовлетворяют неравенствам

$$|\tilde{\tilde{H}}_{m1}(x)| \le A\exp\left(-\tfrac{1}{2}T_5\right), \quad |x| \le 2^{-6}\kappa^{-1}T_5 = T_6. \tag{13.27}$$

Введем функции $S_{5m}(x)$ $(m=3,4,\dots,Q_2)$

$$S_{5m}(x) = 2\sum_{p\in\mathcal{N}_2,\, p<\nu_{m-1,1}/\nu_{11}} a_{p1}^{(1)}\left(\sin\frac{\nu_{11}p\pi}{\nu_{m1}}\right)^2 \exp\left\{(\nu_{11}p-\nu_{m-1,1})x\right\} \tag{13.28}$$

и отметим, что оценивая их аналогично суммам $S_{3m}(x)$, получаем при $0 \le x \le T_6$ для всех m, $3 \le m \le Q_2$, и некоторого $A>0$

$$\left|S_{5m}(x)\right| \le A\cdot Q_2\,\nu_{11}^{-24}\exp\left(-\tfrac{1}{2}\nu_{m-1,1}T_6\right) \le A\exp\left(-\tfrac{1}{4}\nu_{m-1,1}T_6\right). \tag{13.29}$$

Вспомним теперь соотношение (13.8). В объединении с (13.26) и (13.28) оно позволяет написать нам для $0 \le x \le T_6$, $p=\nu_{m-1,1}/\nu_{11}$:

$$-2a_{p1}^{(1)}\left(\sin\frac{\nu_{m-1,1}\pi}{\nu_{m1}}\right)^2 \exp(\nu_{m-1,1}x) = \mathcal{U}(x, 2\pi/\nu_{m1}) - \mathcal{U}(x,0) + D_2(x, 2\pi/\nu_{m1}) +$$
$$+\Lambda(x, 2\pi/\nu_{m1}) + S_{5m}(x)\exp(\nu_{m-1,1}x) + \tilde{\tilde{H}}_{m1}(x).$$

Если бы $a_{p1}^{(1)}<0$, то, положив в этом равенстве $x=T_6$ и разделив обе его части на $(\sin\nu_{m-1,1}\pi/\nu_{m1})^2\exp(\nu_{m-1,1}T_6)$, мы бы получили, учитывая (6.2) с $n=1$, (13.6), (13.7), (13.29), (13.27), что для некоторого $A>0$ и всех $p\in\mathcal{N}_2$ таких, что $a_{p1}^{(1)}<0$

$$|a_{p1}^{(1)}| < A\exp\left(-\tfrac{1}{4}\nu_{m-1,1}T_6\right), \quad p=\nu_{m-1,1}/\nu_{11}. \tag{13.30}$$

Если $a_{p1}^{(1)} > \lambda_p$, $p\in\mathcal{N}_2$, то аналогичные соображения приводят к неравенству для таких $a_{p1}^{(1)}$

$$|a_{p1}^{(1)} - \lambda_p| \le A\exp\left(-\tfrac{1}{4}\nu_{m-1,1}T_6\right), \quad p=\nu_{m-1,1}/\nu_{11}. \tag{13.31}$$

Обозначим через λ_{p1}^*, $p\in\mathcal{N}_2$, такие числа:

$$\lambda_{p1}^* = \begin{cases} a_{p1}^{(1)}, & \text{если } 0 \le a_{p1}^{(1)} \le \lambda_{m1}; \\ 0, & \text{если } a_{p1}^{(1)} \le 0; \qquad (p=\nu_{m1}/\nu_{11}), \\ \lambda_{m1}, & \text{если } a_{p1}^{(1)} > \lambda_{m1}; \end{cases}$$

а через h_{p1} – числа $a_{p1}^{(1)} - \lambda_{p1}^*$. В силу (13.30) и (13.31) для h_{p1} имеет место оценка:

$$|h_{p1}| \le A\exp\left(-\tfrac{1}{4}\nu_{11}pT_6\right), \quad p\in\mathcal{N}_2. \tag{13.32}$$

Рассмотрим функцию

$$S_6(z)=\sum_{p\in\mathcal{N}_2} h_{p1}\exp(\nu_{11}pz).$$

Из (I3.32) вытекает следующее неравенство для $|z|\leq\frac{1}{8}T_6$

$$\left|S_6(z)\right|\leq A\sum_{p\in\mathcal{N}_2}\exp\left\{\nu_{11}\left(\tfrac{1}{8}T_6-\tfrac{1}{4}T_6\right)p\right\}\leq A\exp\left(-\tfrac{1}{4}\nu_{11}T_6\right). \qquad (I3.33)$$

Вернемся теперь к представлению (I2.I). Обозначим через $\tilde{B}(z)$ функцию

$$\tilde{B}(z)=E(z)+S_{11}(z,\xi_1)+S_{21}(z,\xi_1)+S_{41}(z)+S_6(z),\quad |z|\leq\tfrac{1}{8}T_6.$$

Как следует из неравенств (I2.3), (I3.25), (I3.I9), (I3.24), (I3.33) для нее верна оценка (I3.2) при $|z|\leq\frac{1}{8}T_6$. Аналогичные неравенства для коэффициентов $a^{(1)}_{p2}$ и $b^{(1)}_{p2}$ получаются рассуждениями, близкими к вышеприведенным, при рассмотрении функции $D_2(x,y)$. Заметив это, мы приходим к представлению (I3.I).

Продолжим доказательство теоремы. Положим

$$\psi(z)=\sum_{r=1}^{2}\sum_{|\nu_{2r}|\leq|\nu_{sr}|\leq 1}\tilde{\lambda}_{sr}\left(e^{\nu_{sr}z}-1-\frac{\nu_{sr}z}{1+\nu_{sr}^2}\right)+\sum_{r=1}^{2}\sum_{1\leq|\nu_{sr}|\leq\xi_r|\nu_{1r}|}\tilde{\lambda}_{sr}\left(e^{\nu_{sr}z}-1-\frac{\nu_{sr}z}{1+\nu_{sr}^2}\right)=W_1(z)+W_2(z).$$

Так как $0\leq\tilde{\lambda}_{sr}\leq\lambda_{sr}$, $s=2,3,\ldots$, то в силу теоремы 2 для функций $W_j(z)$, $j=1,2$, имеют место оценки (2), (3). Из этих оценок следуют неравенства:

$$|W_2(z)|\leq A(1+|z|+\exp\{\kappa(\operatorname{Re}z)^2\}), \qquad (22)$$

$$|W_1(z)|\leq A\{d_1(|z|)+d_2(|z|)\}(1+|z|^2)\exp(|\operatorname{Re}z|), \qquad (23)$$

где

$$d_j(|z|)=\min_{b>\alpha}\left(\int_{\alpha<(-1)^j x\leq b}(1+x^2)\,dG(x)+\frac{1}{1+|z|}\int_{(-1)^j x\geq b}\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x)\right),\ j=1,2,\ \alpha=\frac{(\ln_5\frac{1}{\varepsilon})^2}{(\ln_4\frac{1}{\varepsilon})^{1/2}}.$$

Нетрудно показать, что $d_j(|z|)\to 0$ $(|z|\to\infty)$, $j=1,2$. Из (22) и (23) получаем:

$$|\psi(z)|\leq\left\{d_1(|z|)+d_2(|z|)+\frac{1}{|z|+1}\right\}(1+|z|^2)\exp\{\kappa(\operatorname{Re}z)^2\},\ z\in C^1. \qquad (24)$$

Рассмотрим теперь функцию $\tilde{\mathcal{L}}(z)=g(z)-\psi(z)$ для $|z|\leq\frac{1}{8}T_6$. Эта функция в круге $|z|\leq\frac{1}{8}T_6$ согласно лемме I3 допускает представление:

$$\tilde{\mathcal{L}}(z)=\sum_{r=1}^{2}\sum_{|\nu_{2r}|\leq|\nu_{sr}|\leq\xi_r|\nu_{1r}|}\tilde{\lambda}_{sr}\left(1+\frac{\nu_{sr}z}{1+\nu_{sr}^2}\right)+\mathcal{L}(z)+B(z),$$

где $\mathcal{L}(z)$ и $B(z)$ из (I3.I). Поскольку

$$\left|\sum_{r=1}^{2}\sum_{|\nu_{2r}|\leq|\nu_{sr}|\leq\xi_r|\nu_{1r}|}\tilde{\lambda}_{sr}\left(1+\frac{\nu_{sr}z}{1+\nu_{sr}^2}\right)\right|\leq\int_{|x|\geq\alpha}\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x)+|z|\int_{|x|\geq\alpha}\frac{1}{x}\,dG(x)\leq A\alpha^{-1}(|z|+\alpha^{-1}),$$

то учитывая оценки для функций $\mathcal{L}(z)$ (I2.2), $B(z)$ (I3.2) и (I8), приходим в круге $|z|\leq\frac{1}{8}T_6$ к неравенству

$$|\tilde{\mathcal{L}}(z)|\leq\begin{cases}A(\nu_{11}^{-15}+|\nu_{12}|^{-15})(|z|^7+1)\exp(\nu_{11}\operatorname{Re}z), & \operatorname{Re}z\geq 0,\\ A(\nu_{11}^{-15}+|\nu_{12}|^{-15})(|z|^7+1)\exp(\nu_{12}\operatorname{Re}z), & \operatorname{Re}z<0.\end{cases} \qquad (25)$$

Кроме того, в силу леммы 7 и (24) при $\operatorname{Re}z=0$, $|z|\leq\frac{1}{8}T_6$ имеем $|\tilde{\mathcal{L}}(z)|\leq A(|z|^3+1)$.
К функции $\tilde{\mathcal{L}}(z)$ применима лемма 2 $(R=\frac{1}{8}T_6,\ b=\nu_{11},\ a=3,\ l=7,\ C_1=A(\nu_{11}^{-15}+|\nu_{12}|^{-15}), C_2=A)$.
По этой лемме для $|z|\leq\frac{1}{16}T_6/\ln(\frac{1}{8}T_6)$, $\operatorname{Re}z\geq 0$ выполняется:

$$|\tilde{\mathcal{L}}(z)| \leqslant A\,|z+1|^3 e^{\nu_{11}\operatorname{Re} z} \exp\left\{\frac{\ln(A(\nu_{11}^{-15}+|\nu_{12}|^{-15}))}{\ln(\frac{1}{8}T_6)}\right\} \leqslant A\,|z+1|^3 e^{\nu_{11}\operatorname{Re} z}.$$

Аналогично получаем в полукруге $|z| \leqslant \frac{1}{16}T_6/\ln(\frac{1}{8}T_6), \operatorname{Re} z \leqslant 0$ неравенство $|\tilde{\mathcal{L}}(z)| \leqslant A|z-1|^3 e^{\nu_{12}\operatorname{Re} z}$. Эти оценки влекут за сооой, если учесть (I8), соотношение

$$|\tilde{\mathcal{L}}(z)| \leqslant A(|z|^3+1), \quad |z| \leqslant T_7 = \frac{1}{16}T_6/(\ln(\frac{1}{8}T_6))^2. \tag{26}$$

Разложим функцию $\tilde{\mathcal{L}}(z)$ в круге $|z| \leqslant T_7$ в ряд Тейлора:

$$\tilde{\mathcal{L}}(z) = \sum_{p=0}^{3} \tilde{c}_p z^p + \sum_{p=4}^{\infty} \tilde{c}_p z^p = \sum_{p=0}^{3} \tilde{c}_p z^p + B_1(z), \quad \tilde{c}_p = \int_{\Gamma_p} \tilde{\mathcal{L}}(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta^{p+1}}, \tag{27}$$

где для $p=0,1,2,3: \Gamma_p = \{\zeta : |\zeta| = 1\}$ и для $p \geqslant 4: \Gamma_p = \{\zeta : |\zeta| = T_7\}$. Из самого определения функции $\tilde{\mathcal{L}}(z)$ следует, что $\tilde{\mathcal{L}}(0)=0$, поэтому $\tilde{c}_0 = 0$. Для остальных $\tilde{c}_p$, $p \geqslant 1$, неравенства Коши и (26) дают такие оценки: $|\tilde{c}_p| \leqslant A$, $p=1,2,3$; $|\tilde{c}_p| \leqslant A T_7^{-p+3}$, $p \geqslant 4$. Из последних легко получаем следующие неравенства:

$$|B_1(z)| \leqslant A\cdot T_7^{1/3}, \quad |z| \leqslant T_7^{1/3}; \quad |B_1(z)| \leqslant A\cdot T_7, \quad |z| \leqslant T_7^{1/2};$$
$$|B_1(z)| \leqslant A\cdot T_7^{-5/9}, \quad |z| \leqslant T_7^{1/9}. \tag{28}$$

Отметим также вещественность коэффициентов $\tilde{c}_p$, $p \geqslant 1$, которая следует из вещественности функции $\tilde{\mathcal{L}}(z)$. Пользуясь представлением (27), определением функции $\tilde{\mathcal{L}}(z)$ и левой частью неравенства (6.I), получаем для вещественных x и y, $x^2+y^2 \leqslant T_7^2$,

$$0 \leqslant U(x,0) - U(x,y) = \psi(x) - \operatorname{Re}\psi(x+iy) + 3\tilde{c}_3 xy^2 + \tilde{c}_2 y^2 + B_1(x) - \operatorname{Re} B_1(x+iy). \tag{29}$$

Положим в этом соотношении $x=0$, тогда получим

$$-\tilde{c}_2 y^2 \leqslant -\operatorname{Re}\psi(iy) - \operatorname{Re} B_1(iy). \tag{30}$$

Если бы коэффициент $\tilde{c}_2$ был отрицательным, то полагая в (30) $y = T_7^{1/3}$ и деля обе части этого неравенства на $T_7^{2/3}$, мы имели бы в силу (24) и первой из оценок (28)

$$-\tilde{c}_2 \leqslant A\{d_1(T_7^{1/3}) + d_2(T_7^{1/3}) + T_7^{-1/3}\}. \tag{31}$$

Если же коэффициент $\tilde{c}_3 \neq 0$ и допустим $\tilde{c}_3 < 0$, то зададимся числом $T_7^{-1/2}$ и из чисел ν_{s1}, $\nu_{s1} \geqslant T_7^{-1/2}$, $(s \geqslant 2)$ выберем ближайшее к $T_7^{-1/2}$. Пусть это будет $\nu_{\omega,1}$; обозначим тогда через n натуральное число $[\nu_{\omega,1}\cdot T_7^{1/2}]$. Проводя рассуждения близкие тем, которые мы вели при доказательстве неравенства (6.2), приходим к неравенству:

$$0 \leqslant \psi(x) - \operatorname{Re}\psi(x+2\pi i n/\nu_{\omega,1}) \leqslant A(1+n^2\nu_{\omega,1}^{-2})\exp(\nu_{\omega-1,1}x), \quad x \geqslant 0. \tag{32}$$

Положим в соотношении (29) $x = n/\nu_{\omega,1}$, $y = n/\nu_{\omega,1}$ и разделим его на $(n/\nu_{\omega,1})^3$, тогда с помощью (32) и второй оценки из (28) приходим к оценке

$$|\tilde{c}_3| = -\tilde{c}_3 \leqslant A\{\nu_{\omega,1}/n + T_7(\nu_{\omega,1}/n)^3\} \leqslant A\cdot T_7^{-1/2}. \tag{33}$$

Если $\tilde{c}_3 > 0$, то чтобы получить (33), нужно, проводя только что приведенное рассуждение, воспользоваться равенством в соотношении (29) и дополнительно к оценкам (28), (32) еще и (6.2). Из третьей оценки (28) и неравенств (31), (33) легко получаем, если вспомнить (27), что в круге $|z| \leqslant \min\{d_1^{-1/3}(T_7^{1/3}), d_2^{-1/3}(T_7^{1/3}), T_7^{1/9}\} = T_8$ функция $\tilde{\mathcal{L}}(z)$ допускает представление:

$$\tilde{\mathcal{L}}(z) = \tilde{\gamma} z^2 + \tilde{\beta} z + \eta(z), \tag{34}$$

где вещественные постоянные $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\beta}$ такие, что $0<\tilde{\gamma}<A$, $|\tilde{\beta}|<A$, а функция $\eta(z)$ $(\eta(0)=0)$ – аналитическая в круге $|z|\le T_8$, для которой выполняется неравенство:

$$|\eta(z)|\le A\cdot T_8^{-1}, \quad |z|\le T_8. \tag{35}$$

Но тогда, поскольку $\varphi(z;F_1^*)=\exp\{g(iz)\}, |z|\le T_1$, для $|z|\le T_8$ выполняется

$$\varphi(z;F_1^*)=\exp\Big\{-\tilde{\gamma}z^2+i\tilde{\beta}z+\sum_{r=1}^{2}\sum_{|\nu_{2r}|\le|\nu_{sr}|\le\xi_r|\nu_{1r}|}\tilde{\lambda}_{sr}\Big(e^{i\nu_{sr}z}-1-\frac{i\nu_{sr}z}{1+\nu_{sr}^2}\Big)+\eta(iz)\Big\}=f(z)e^{\eta(iz)}. \tag{36}$$

Функция $f(z)$, как легко видеть, является характеристической функцией закона $\mathcal{G}_1\in\mathcal{L}_1$.

Обозначим через $\tilde{\eta}(t)=\exp\{\eta(it)\}-1$, где $\eta(t)$ из (34). Функция $\tilde{\eta}(t)$ – аналитическая в круге $|t|\le T_8$ и для нее, как это видно из ее определения, сохранится оценка (35). Так как $\tilde{\eta}(0)=0$, то и функция $\tilde{\eta}(t)t^{-1}$ аналитична в круге $|t|\le T_8$. Поэтому, используя соотношение (36), оценку (35) и принцип максимума модуля, имеем

$$\left|\frac{\varphi(t;F_1^*)-f(t)}{t}\right|=\left|f(t)\cdot\frac{\tilde{\eta}(t)}{t}\right|\le\left|\frac{\tilde{\eta}(t)}{t}\right|\le\max_{0\le\theta<2\pi}\left|\frac{\tilde{\eta}(T_8e^{i\theta})}{T_8e^{i\theta}}\right|\le AT_8^{-2}. \tag{37}$$

Для завершения доказательства теоремы нам понадобится следующая теорема В.М. Золотарева [8].

Пусть $H_j(x)$ $j=1,2$ – произвольные законы, а $\varphi(t;H_j)$ их характеристические функции. Тогда для любых чисел $T>1,3$ справедливо неравенство

$$\mathcal{L}(H_1,H_2)<\frac{1}{\pi}\int_0^T\left|\frac{\varphi(t;H_1)-\varphi(t;H_2)}{t}\right|dt+2e\frac{\log T}{T}.$$

Применим эту теорему с $T=T_8$ к законам $F_1^*(x)$ и $\mathcal{G}_1(x)$ Тогда с помощью неравенства (37) приходим к оценке

$$\mathcal{L}(F_1^*,\mathcal{G}_1)\le AT_8^{-1}\log T_8. \tag{38}$$

Из определения закона $F_1^*(x)$ и соотношения (9) получаем, что оценка (38) сохранится и для $\mathcal{L}(F_1,\mathcal{G}_1)$. Из нее следует утверждение нашей теоремы в предположении, что $\varepsilon<\varepsilon_4$, где ε_4 достаточно мало определяется только законом $\mathcal{G}$, если учесть, что

$$T_7^{1/3}>A\left(\ln_4\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/6}\left(\ln_5\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-2/3}$$

и имеет место оценка

$$A_1d_j\left(\left(\frac{\ln_4\frac{1}{\varepsilon}}{(\ln_5\frac{1}{\varepsilon})^4}\right)^{1/6}-1\right)<d_j(T_7^{1/3})<A_2d_j\left(\left(\frac{\ln_4\frac{1}{\varepsilon}}{(\ln_5\frac{1}{\varepsilon})^4}\right)^{1/6}-1\right),\quad j=1,2.$$

Ограничение достаточной малости ε снимается выбором постоянной $A>0$. Для второй компоненты рассуждения проводятся аналогично.

Автор выражает глубокую благодарность И.В. Островскому за внимание к работе.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ю.В. Линник, И.В. Островский. Разложение случайных величин и векторов. Изд-во "Наука", М., 1972.
2. И.В. Островский. Некоторые теоремы о разложениях вероятностных законов. Труды математического института АН СССР им. В.А. Стеклова, т. 79, 1965, 198-235.
3. Г.П. Чистяков. Об устойчивости для теоремы Ю.В. Линника. Теория функций, функциональный анализ и их приложения, вып. 9, Изд-во ХГУ, 1969, 118-133.
4. Г.П. Чистяков. Об устойчивости для теоремы Ю.В. Линника в метрике Леви. Теория функций, функциональный анализ и их приложения, вып. 11, Изд-во ХГУ, 1970, 93-97.
5. Н.А. Сапогов. Проблемы устойчивости для теории Крамера. ИАН СССР, серия матем., 15, № 3, 1951, 205-218.
6. B.Ramachandran. On the order and type of entire characteristic functions. Ann.Math.Stat., 33, 1962; 1238-1255.
7. В.М. Золотарев. Обобщение теоремы Линдеберга-Феллера. Теория вероятности и ее применения, 12, № 4, 1967, 666-677.
8. В.М. Золотарев. Оценка различия распределений в метрике Леви. Тр. математического института им. В.А. Стеклова, 112, 1971, 224-231.

ON THE STABILITY OF DECOMPOSITION FOR SOME CLASS OF INFINITELY DIVISABLE LAWS

G.P.Chistyakov

The decomposition stability in Levy's metric of some class of infinitely divisable laws F is investigated. This class denoted by $\mathcal{L}_1$ is a class of laws whose characteristic functions are

$$\varphi(t;F)=\exp\left\{i\beta t+\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x)\right\}, \qquad (1)$$

where $\operatorname{Im}\beta=0$, $G(x)$ is a non-decreasing function with the points of growth located in the set

$$\{\mu_{m1}\}_{m=-\infty}^{\infty}\cup\{\mu_{m2}\}_{m=-\infty}^{\infty}, \quad \mu_{m1}>0, \quad \mu_{m2}<0,$$

the numbers $\mu_{m+1,r}/\mu_{mr}$ $(m=0,\pm1,\pm2,\dots;\ r=1,2)$ are natural, unequal to 1 and

$$\int_{|x|<y} dG(x)=O(e^{-My^2}), \quad \exists M>0.$$

The following theorem is the corollary of our main result.

__Theorem.__ Let F, F_1, F_2 be the laws and $F=F_1*F_2$; let $\mathcal{L}(F,\mathcal{G})<\varepsilon$, $0<\varepsilon<e^{-\exp_3 e}$ ($\mathcal{L}(F,\mathcal{G})$ is the distance in Levy's metric), where $\mathcal{G}\in\mathcal{L}_1$ and the function G which appears in representation of $\mathcal{G}$ by (1) has no points of growth, but 0, in some neighbourhood of 0. Then

$$\inf_{\tilde{\mathcal{G}}\in\mathcal{L}_1}\mathcal{L}(F_j,\tilde{\mathcal{G}})<A\left(\ln_5\frac{1}{\varepsilon}\right)^{11/9}\left(\ln_4\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1/18}, \quad j=1,2,$$

where $A>0$ is the constant which depends on the law $\mathcal{G}$ only.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1974 выпуск У

ОБ α- КОМПОНЕНТАХ БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫХ ЗАКОНОВ

А.Е. Фрынтов

Мы будем пользоваться терминологией, принятой в монографии Ю.В. Линника и И.В. Островского [I].

Напомним, что закон F_1 называется α - компонентой закона F_0, если существуют такие законы $F_2, F_3, \ldots, F_n$, положительные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и последовательность действительных чисел $t_k \to 0$, что при $t = t_k$ имеет место равенство

$$\prod_{j=1}^{n} \{\varphi(t, F_j)\}^{\alpha_j} = \varphi(t, F_0), \tag{I}$$

где через $\varphi(t, F_j)$ обозначены характеристические функции (х.ф) законов F_j, $j = 1, 2, \ldots, n$. Будем говорить, что безгранично делимый (б.д.) закон F_0 принадлежит классу I_0^α, если все его α - компоненты являются б.д. Одной из проблем теории разложений вероятностных законов является поставленная Ю.В. Линником проблема описания класса I_0^α. Ее можно сформулировать в таком виде: найти необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять мера ν_0 в представлении х.ф. закона F_0 формулой Леви

$$\varphi(t, F_0) = \exp\left\{i\beta t - \gamma^2 t^2 + \int_{R^1 \setminus \{0\}} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right) \nu_0\{dx\}\right\}, \tag{2}$$

где $\int_{R^1\setminus\{0\}} \frac{x^2}{1+x^2} \nu_0\{dx\} < \infty$, чтобы закон F_0 принадлежал классу I_0^α.

Первым результатом, относящимся к проблеме описания класса I_0^α, является теорема А.А. Зингера и Ю.В. Линника [2] о принадлежности закона Гаусса классу I_0^α. Принадлежность закона Пуассона классу I_0^α была установлена Дюге [3]. Позднее Ю.В. Линник [4] получил более общий результат о принадлежности законов класса $\mathcal{L}$ (определение этого класса см. [I], стр. I29) с ограниченным пуассоновым спектром к классу I_0^α. И.В. Островский [5] показал, что в результате Ю.В. Линника требование ограниченности пуассонова спектра можно заменить требованием: для некоторого $K > 0$ имеет место оценка

$$\int_{|x|>y} \nu_0\{dx\} = O\{\exp(-Ky^2)\}, \quad y \to +\infty. \tag{3}$$

В работе [6] И.В. Островский получил достаточное условие принадлежности классу I_0^α законов, не входящих в класс $\mathcal{L}$. Этот результат формулируется так. Пусть F_0 - б.д. закон без гауссовой компоненты, спектральная мера Леви ν_0 которого вполне конечна и сосредоточена на не более чем счетном множестве A с рационально независимыми точками[I)]. Если выполнено условие (3), то закон F_0 принадлежит классу I_0^α. В работе [7] Р.Кюппан сообщает, что ему удалось усилить теорему И.В. Островского [6], заменив условие (3) следующим: для некоторого $K > 0$ справедлива оценка

I) Множество A называется множеством с рационально независимыми точками, если из равенства $r_1 x_1 + r_2 x_2 + \ldots + r_k x_k = 0$, где r_i - рациональные числа, а $x_i \in A$, следует, что $r_1 = r_2 = \ldots = r_k = 0$.

$$\int\limits_{|x|>y} \nu_0\{dx\} = O\{\exp(-Ky)\}, \quad y \to +\infty, \tag{4}$$

однако доказательства своего результата Р.Кюппан не приводит. Заметим, что во всех этих результатах спектральная мера ν_0 закона F_0 предполагается сосредоточенной на конечном или счетном множестве. В настоящей работе будут получены достаточные условия принадлежности законов классу I_0^α, в которых это предположение отсутствует.

Зарядом мы будем называть конечную σ-аддитивную функцию, определенную на классе всех борелевских множеств действительной прямой R^1. Пусть $A \subset R^1$ – борелевское множество. Выражение "заряд μ сосредоточен на множестве A" или "A является носителем μ" означает следующее: для любого борелевского множества B, не пересекающегося с A, имеем $\mu(B) = 0$. Спектром $S(\mu)$ заряда μ мы будем называть пересечение всех его замкнутых носителей.

Сформулируем наши основные результаты.

Т Е О Р Е М А I. Пусть х.ф. закона F_0 имеет вид

$$\varphi(t, E_0) = \exp\left\{i\beta t + \int\limits_{R^1} (e^{itx} - 1)\,\nu_0\{dx\}\right\}, \tag{5}$$

где ν_0 – вполне конечная мера, и выполнены условия:

а) мера ν_0 сосредоточена на множестве $A = [a, 2a) \cup \{\lambda_m\}_{m=1}^\infty$, где $a > 0$, а числа $\lambda_m \geqslant a$ таковы, что отношения $\lambda_{m+1} / \lambda_m$ – натуральные числа, отличные от единицы;

б) для некоторого $K > 0$ справедлива оценка

$$\int\limits_{|x|>y} \nu_0\{dx\} = O\{\exp(-Ky^2)\}, \quad y \to +\infty.$$

Тогда $F_0 \in I_0^\alpha$.

Т Е О Р Е М А 2. Пусть х.ф. закона F_0 имеет вид (5) и выполнены условия:

а) мера ν_0 сосредоточена на множестве A класса F_σ с рационально независимыми точками; $\inf A \geqslant 0$;

б) для некоторого $K > 0$ справедлива оценка:

$$\int\limits_{|x|>y} \nu_0\{dx\} = O\{\exp(-Ky)\}, \quad y \to +\infty.$$

Тогда $F_0 \in I_0^\alpha$.

Т Е О Р Е М А 3. Пусть х.ф. закона F_0 имеет вид (5) и выполнены условия:

а) мера ν_0 сосредоточена на множестве $A = \{\lambda_{KS}\}_{K,S=1}^\infty$, где $\lambda_{K+1,S}/\lambda_{KS}$ – натуральные числа, отличные от единицы, а точки $\{\lambda_{1S}\}_{S=1}^\infty$ рационально независимы;

б) для некоторого $K > 0$ справедлива оценка

$$\int\limits_{|x|>y} \nu_0\{dx\} = O\{\exp(-Ky)\}, \quad y \to +\infty;$$

в) для любого $S = 1, 2 \ldots$ найдется $K(S) > 0$ такое, что имеет место оценка

$$\int\limits_{A_S \cap \{|x|>y\}} \nu_0\{dx\} = O\{\exp(-K(S)y^2)\}, \quad y \to +\infty,$$

где $A_S = \{\lambda_{KS}\}_{K=1}^\infty$.

Тогда $F_0 \in I_0^\alpha$.

Теорема 3 содержит результаты И.В. Островского [6] (теоремы I и 2) и результат Р. Кюппана [7]. По-видимому, условие б) в теореме 3 не является необходимым, однако без этого условия нам удается доказать только более слабое утверждение, которое анонсировано в работе Р. Кюппана [8].

Т Е О Р Е М А 4. Пусть х.ф. закона F_0 имеет вид (5), а мера ν_0 удовлетворяет условиям а) и в) теоремы 3. Тогда $F_0 \in I_0$.

Для доказательства этих теорем нам понадобятся следующие леммы.

Л Е М М А I. Пусть х.ф. закона F_0 регулярна и не имеет корней в области $D=\{t: |\Im m\, t| < r\}$, тогда х.ф. любой α-компоненты закона F_0 регулярна и не имеет корней в этой области, а разложение (I) имеет место при всех $t \in D$. Лемма I является частным случаем теоремы Ю.В. Линника об α-компонентах законов с аналитическими х.ф. ([I] , стр. 300).

Л Е М М А 2. Пусть F_0 - закон, удовлетворяющий условиям теоремы I, $\psi(t)$ - хребтовая компонента функции $\varphi(t, F_0)$, которая при $t \in R^1$ допускает представление

$$\ln \psi(t) = \int_{R^1} (e^{itx} - 1)\, \lambda\{dx\}, \tag{6}$$

где λ - заряд, сосредоточенный на множестве $[a, \infty)$, $a>0$, и удовлетворяющий условию

$$\lambda(E) \geq 0, \text{ если } E \cap [2a, \infty) = \emptyset.$$

Тогда заряд λ является мерой. Доказательство леммы 2 содержится в [I] , стр.277-280, хотя в явном виде лемма не сформулирована.

Л Е М М А 3. Пусть х.ф. закона F_0 имеет вид (5), где мера ν_0 сосредоточена на не более чем счетном множестве A и выполнено условие (4). Тогда х.ф. любой α-компоненты закона F_0 представима в виде

$$\varphi(t, F_1) = \exp\{i\beta_1 t + \int_{R^1} (e^{itx} - 1)\, \lambda\{dx\}\}, \quad |\Im m\, t| < K,$$

где λ - заряд, сосредоточенный на множестве[2)] $M(A)$. Доказательство леммы 3 можно найти в работе И.В. Островского [6] .

З а м е ч а н и е. Справедливость теорем I и 2 достаточно установить при следующих дополнительных ограничениях:

$$1 \leq \alpha_j \leq d \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \; d \text{ - натуральное число}; \tag{7}$$

$$\nu_0(A) < \ln(1 + 2^{-dn}). \tag{8}$$

Действительно, пусть $F_1, F_2, \ldots, F_n$ - набор, определяющий произвольное α-разложение закона F_0, удовлетворяющего условиям теоремы I (теоремы 2). На основании леммы I при $\Im m\, t > -K$ имеет место равенство

$$\prod_{j=1}^{n} \{\varphi(t, F_j)\}^{\alpha_j} = \varphi(t, F_0).$$

Выберем натуральное число m таким, чтобы выполнялось неравенство $m\alpha_j \geq 1$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Полагая $\beta_j = m\alpha_j$, получим

$$\prod_{j=1}^{n} \{\varphi(t, F_j)\}^{\beta_j} = \varphi(t, F_0^{*m}) \tag{9}$$

и, кроме того, $1 \leq \beta_j \leq d = [\max(m\alpha_j)] + 1$.

Заметим, что оператор $\mathcal{J}_\eta$, определенный на классе законов с аналитическими х.ф. в области $\Im m\, t > -K$ следующим образом ([I] , стр. 274)

$$\varphi(t, \mathcal{J}_\eta F) = \frac{\varphi(i\eta + t, F)}{\varphi(i\eta, F)},$$

---

2) $M(A)$ - наименьший числовой модуль, содержащий A, другими словами, $M(A)$ - множество, состоящее из всевозможных линейных комбинаций чисел множества A с целыми коэффициентами.

переводит безгранично делимые законы в безгранично делимые. Так как спектральная мера закона $\mathcal{J}_\eta F_0^{*m}$ имеет вид $\nu_\eta(E) = m\int_E e^{-\eta x}\nu_0\{dx\}$, то имеем

$$\lim_{\eta\to+\infty} \nu_\eta(A) = 0.$$

Поэтому найдется такое η_0, что $\nu_{\eta_0} < \ln(1+2^{-dn})$. Переписывая разложение (9) в виде

$$\prod_{j=1}^{n}\{\varphi(t,\mathcal{J}_{\eta_0}F_j)\}^{\beta_j} = \varphi(t,\mathcal{J}_{\eta_0}F_0^{*m}),$$

заключаем, что если все α – компоненты закона $\mathcal{J}_{\eta_0}F_0^{*m}$ при условиях (7) и (8) б.д., то также б.д. все α -компоненты закона F_0.

Л Е М М А 4. Пусть х.ф. закона F_0 имеет вид (5), где ν_0 – вполне конечная мера, сосредоточенная на множестве A класса F_σ, $\inf A = a \geqslant 0$, и для некоторого $K>0$ справедлива оценка

$$\int_{|x|>y}\nu_0\{dx\} = O\{\exp(-Ky)\},\ y\to+\infty.$$

Если выполнены условия (7) и (8), то х.ф. любой α– компоненты закона F_0 представима в виде

$$\varphi(t,F_j) = \exp\{i\beta_j t + \int_{R^1}(e^{itx}-1)\nu_j\{dx\}\}, \tag{10}$$

где ν_j – конечный заряд, сосредоточенный на множестве $M^+(A)$ и удовлетворяющий условию

$$\nu_j(E)\geqslant 0\ , \text{ если } E\cap(2)M^+(A) = \emptyset\ .$$

Для доказательства леммы 4 нам понадобится ряд вспомогательных утверждений. Введем некоторые определения и обозначения.

Пусть законы $F_1, F_2, \dots, F_n$ определяют некоторое α– разложение закона F_0, т.е. существуют такие положительные числа $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ и последовательность $t_k\to 0$, что при $t = t_k$ выполнено равенство

$$\prod_{j=1}^{n}\{\varphi(t,F_j)\}^{\alpha_j} = \varphi(t,F_0).$$

Будем говорить, что законы $F_1^{(1)}, F_2^{(1)}, \dots, F_n^{(1)}$ определяют эквивалентное α - разложение, если $F_j^{(1)} = F_j * \varepsilon_{\beta_j}$, где $\sum\alpha_j\beta_j = 0$, ε_{β_j} – единичная мера, сосредоточенная в точке β_j. Очевидно, что равенство (I) сохраняется, если заменить F_j на $F_j^{(1)}$. Если мы говорим, что некоторое утверждение о законах $F_1, F_2, \dots, F_n$ имеет место с точностью до эквивалентности, то под этим подразумеваем следующее: существуют законы $F_1^{(1)}$, $F_2^{(1)}, \dots, F_n^{(1)}$, определяющие эквивалентное α– разложение, для которых справедливо данное утверждение.

В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями:

$$p_j = F_j(\{0\}),\quad j = 0,1,2,\dots,n;$$
$$G_j = F_j - \varepsilon_0 p_j,\quad j = 0,1,2,\dots,n.$$

Л Е М М А 5. Если х.ф. $\varphi(t,F_0)$ допускает представление

$$\varphi(t,F_0) = \exp\{\int_{R^1}(e^{itx}-1)\nu_0\{dx\}\},$$

где ν_0 – мера, сосредоточенная на $[a,\infty)$, $a\geqslant 0$, и выполнено условие (4), то с точностью до эквивалентности для любого набора $F_1, F_2, \dots, F_n$, определяющего некоторое α-разложение закона F_0, имеем

$$S(F_j)\subset\{0\}\cup[a,\infty),\ j=1,2,\dots,n;$$
$$\prod_{j=1}^{n} P_j^{\alpha_j}=P_0 .$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Пусть набор $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ определяет α-разложение

$$\prod_{j=1}^{n}\{\varphi(t,F_j)\}^{\alpha_j}=\varphi(t,F_0),\quad t=t_k\to 0. \tag{11}$$

В силу условия (4) функция $\varphi(t,F_0)$ является регулярной в области $\mathrm{Im}\,t>-K$ и не имеет там корней, поэтому из леммы I следует, что при $j=1,2,\dots,n$ функция

$$\psi_j(t)=\frac{\varphi(t,F_0)}{\{\varphi(t,F_j)\}^{\alpha_j}}$$

является хребтовой в области $\mathrm{Im}\,t>-K$, т.е. при $\mathrm{Im}\,t>-K$ имеет место неравенство

$$|\psi_j(t)|\le\psi_j(i\,\mathrm{Im}\,t).$$

Как известно [I], стр. 45, любая хребтовая функция на мнимой оси допускает оценку

$$\psi_j(i\eta)\ge e^{-D|\eta|},\quad \eta>-K,$$

где $D>0$ некоторая постоянная, зависящая только от функции. Так как $\varphi(i\eta,F_0)\le 1$ при $\eta\ge 0$, то

$$\varphi(i\eta,F_j)=\left\{\frac{\varphi(i\eta,F_0)}{\psi_j(i\eta)}\right\}^{\frac{1}{\alpha_j}}\le\exp\left(\frac{D}{\alpha_j}|\eta|\right)$$

при $\eta\ge 0$. Последнее неравенство означает, что $S(F_j)\subset[-D/\alpha_j,\infty)$, и поэтому для законов $F_j^{(1)}=F_j*\varepsilon_{\beta_j}$, где $\beta_j=-\inf S(F_j)$, имеем $\inf S(F_j^{(1)})=0$. Покажем, что законы $F_1^{(1)},F_2^{(1)},\dots,F_n^{(1)}$ определяют эквивалентное α-разложение. Так как (11) имеет место при всех t в полуплоскости $\mathrm{Im}\,t>-K$, то в этой же полуплоскости выполняется

$$\prod_{j=1}^{n}\{\varphi(t,F_j^{(1)})\}^{\alpha_j}=\varphi(t,F_0)\exp\{it\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\beta_j\}. \tag{12}$$

При $\eta\ge 0$ имеем

$$\varphi(i\eta,F_j^{(1)})=\int_0^\infty e^{-\eta x}F_j^{(1)}\{dx\}\ge\int_0^\varepsilon e^{-\eta x}F_j^{(1)}\{dx\}\ge F_j^{(1)}([0,\varepsilon))e^{-\eta\varepsilon},\ j=1,2,\dots,n.$$

Замечая, что $F_j^{(1)}([0,\varepsilon))>0\ (\forall\varepsilon>0)$, подставляем последнее неравенство в формулу (12). Получаем

$$\prod_{j=1}^{n}\{F_j^{(1)}([0,\varepsilon))\}^{\alpha_j}e^{-\varepsilon\eta\alpha_j}\le\exp\{-\eta\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\beta_j\},\quad \eta\ge 0,\quad \varepsilon>0.$$

Из последнего неравенства следует, что $\sum\alpha_j\beta_j\le\varepsilon\sum\alpha_j$, откуда $\sum\alpha_j\beta_j\le 0$.

Используя представление $F_j^{(1)}=p_j^{(1)}\varepsilon_0+G_j^{(1)}$, $j=0,1,\dots,n$, и учитывая, что $S(F_j^{(1)})\subset[0,\infty)$, имеем оценку

$$\varphi(i\eta,F_j^{(1)})=p_j^{(1)}+o(1),\quad \eta\to+\infty\quad (j=0,1,\dots,n).$$

Так как $\sum\alpha_j\beta_j\le 0$, то переходя к пределу при $t\to+i\infty$ в равенстве (12), заключаем, что

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \beta_j = 0\,, \quad \prod_{j=1}^{n} \{ p_j^{(1)} \}^{\alpha_j} = p_0\,. \tag{13}$$

Но так как $p_0 = e^{-\nu_0(A)} \neq 0$, то заключаем, что $p_j^{(1)} \neq 0$, а следовательно, $\{0\} \in S(F_j^{(1)})$ и $\inf S(F_j^{(1)}) = 0$. Таким образом мы доказали, что с точностью до эквивалентности законы $F_1, F_2, \ldots, F_n$ сосредоточены на множестве $[0,\infty)$. Без ограничения общности можно считать $\inf S(F_j) = 0$.

Покажем теперь, что $F_j((0,a)) = 0$, $j = 1,2,\ldots,n$. Для этого воспользуемся очевидными неравенствами:

$$\varphi(i\eta, F_j) \geq p_j + F_j((0,\lambda_j])e^{-\eta\lambda_j}\,, \quad j = 1,2,\ldots,n;$$
$$\varphi(i\eta, F_0) \leq p_0 + (1-p_0)e^{-\eta a}\,,$$

которые имеют место при всех $\eta \geq 0$. Используя разложение (11), получаем

$$\prod_{j=1}^{n} \{p_j + F_j((0,\lambda_j])e^{-\eta\lambda_j}\}^{\alpha_j} \leq p_0 + (1-p_0)e^{-\eta a}\,, \quad \eta \geq 0.$$

Отсюда, в силу (13), имеем $(\forall \eta \geq 0)$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \ln(1 + \delta_j e^{-\eta\lambda_j}) \leq \ln(1 + \delta e^{-\eta a}),$$

где $\delta_j = F_j((0,\lambda_j])/p_j \geq 0$, $j = 1,2,\ldots,n$; $\delta = \frac{1-p_0}{p_0} > 0$. Но так как все слагаемые в левой части неотрицательны, то при всех $\eta \geq 0$ и $j = 1,2,\ldots,n$ имеет место неравенство

$$0 \leq \alpha_j \ln(1 + \delta_j e^{-\eta\lambda_j}) \leq \ln(1 + \delta e^{-\eta a}).$$

Устремляя $\eta \to +\infty$, видим, что при $\lambda_j < a$

$$\delta_j = F_j((0,\lambda_j])/p_j = 0;$$

т.е. законы F_j, $j = 1,2,\ldots,n$, сосредоточены на множестве $\{0\} \cup [a,\infty)$. Лемма доказана.

Пусть μ – конечный заряд и пусть $\mu = \mu^+ - \mu^-$ – его представление в виде разности мер с непересекающимися носителями. Как известно, это представление единственно. Под нормой заряда μ мы будем понимать величину

$$\|\mu\| = \mu^+(R^1) + \mu^-(R^1). \tag{14}$$

Очевидно, что введенная таким образом норма удовлетворяет всем аксиомам нормы векторного пространства и, кроме того, для любых зарядов μ_1 и μ_2 имеем $\|\mu_1 * \mu_2\| \leq \|\mu_1\|\|\mu_2\|$.

Нам понадобится еще такая лемма.

Л Е М М А 6. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – заряды, сосредоточенные на множестве $(0,\infty)$, и пусть

$$\varphi_j(t) = 1 + \int_{R^1} e^{itx} \lambda_j\{dx\}\,, \quad j = 1,2,\ldots,n.$$

Тогда функция $\varphi(t) = \prod_{j=1}^{n} \varphi_j(t)$ допускает представление

$$\varphi(t) = 1 + \int_{R^1} e^{itx} \lambda\{dx\},$$

где λ – заряд, сосредоточенный на $(0,\infty)$ и $\|\lambda\| \leq n\alpha M^{n-1}$, $(\alpha = \max_j \{\|\lambda_j\|\}$, $M = \max_j \{\|\lambda_j + \varepsilon_0\|\})$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Нетрудно заметить, что имеет место равенство

$$\lambda + \varepsilon_0 = (\lambda_1 + \varepsilon_0) * (\lambda_2 + \varepsilon_0) * \ldots * (\lambda_n + \varepsilon_0),$$

откуда находим, что заряд λ сосредоточен на интервале $(0,\infty)$. С помощью индукции легко доказывается, что

$$\left\| \{(\lambda_1+\varepsilon_0)*(\lambda_2+\varepsilon_0)*\ldots*(\lambda_n+\varepsilon_0)\}^- \right\| \le \sum_{j=1}^{n} \|\lambda_j^-\| \prod_{k\ne j} \|\lambda_k+\varepsilon_0\|.$$

Откуда получаем $\|\lambda^-\| = \|\{\lambda+\varepsilon_0\}^-\| \le n\alpha M^{n-1}$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. Пусть $F_1, F_2, \ldots, F_n$ – набор законов, определяющий α-разложение закона F_0. В силу леммы 5 с точностью до эквивалентности $F_j = p_j\varepsilon_0 + G_j$, где G_j – мера, сосредоточенная на интервале $(0,\infty)$, и $\prod_{j=1} p_j^{\alpha_j} = p_0 = e^{-\nu_0(A)} > (1+2^{-dn})^{-1}$ в силу условия (8). Из (7) имеем

$$p_j \ge p_0 > \frac{1}{2}, \quad j = 1,2,\ldots,n. \tag{15}$$

Учитывая, что разложение (1) имеет место в полуплоскости $\operatorname{Im} t > -K$ и выполнено соотношение (13), получаем, что при всех натуральных m имеет место равенство

$$\prod_{j=1}^{n} \left\{\frac{\varphi(t,F_j)}{p_j}\right\}^{\alpha_j m} = \frac{\varphi(t,F_0^{*m})}{p_0^m}, \qquad t\in R^1,$$

или

$$\prod_{j=1}^{n} \left\{1+\int_{R^1} e^{itx}\frac{G_j}{p_j}\{dx\}\right\}^{m\alpha_j} = 1+\int_{R^1} e^{itx} P_m\{dx\}, \quad t\in R^1, \tag{16}$$

где $P_m = p_0^{-m}(F_0^{*m} - p_0^m\varepsilon_0)$ – мера, сосредоточенная на $M^+(A)$. Используя разложение в ряд Тейлора для функции $(1+z)^{\alpha_j m}$, получаем

$$\left\{1+\int_{R^1} e^{itx}\frac{G_j}{p_j}\{dx\}\right\}^{\alpha_j m} = 1+\sum_{k=1}^{\infty} a_{kj}(m)\int_{R^1} e^{itx}\left(\frac{G_j}{p_j}\right)^{*k}\{dx\};$$

причем, в силу (15), ряд в правой части сходится равномерно по всем $t\in R^1$, а коэффициенты $a_{kj}(m)$ определяются равенством

$$a_{kj}(m) = \frac{\alpha_j m(\alpha_j m-1)\ldots(\alpha_j m-k+1)}{k!}.$$

Замечая, что в силу того, что $\|G_j/p_j\| = \frac{1-p_j}{p_j} < 1$, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{kj}(m)\left(\frac{G_j}{p_j}\right)^{*k}$ сходится по норме к некоторому заряду μ_{jm}, мы имеем

$$\left\{\frac{\varphi(t,F_j)}{p_j}\right\}^{\alpha_j m} = 1+\int_{R^1} e^{itx}\mu_{jm}\{dx\}.$$

Так как меры G_j^{*k} сосредоточены на $(0,\infty)$, то очевидно, что заряд μ_{jm} также сосредоточен на $(0,\infty)$.

Учитывая, что $a_{kj}(m) \ge 0$ при $k \le [\alpha_j m]$ и $|a_{kj}(m)| < 1$ при $k > [\alpha_j m]$, для $\|\mu_{jm}^-\|$ получаем оценку

$$\|\mu_{jm}^-\| \le \sum_{k>[\alpha_j m]} |a_{kj}(m)|\cdot\left\|\left(\frac{G_j}{p_j}\right)^{*k}\right\| \le \sum_{k>[\alpha_j m]} \left\|\frac{G_j}{p_j}\right\|^k \le \frac{q^m}{1-q},$$

$$j = 1,2,\ldots,n,$$

где $q = \max_{1\le j\le n}\left\{\left\|\frac{G_j}{p_j}\right\|\right\} < 1$, откуда находим

$$\|\mu_{jm}^-\| = O(q^m), \quad m\to\infty. \tag{17}$$

Используя тот факт, что $\sum_{k=0}^{\infty} a_{kj}(m)q^k = (1+q)^{\alpha_j m}$, и предыдущую оценку, легко находим, что

$$\|\mu_{jm}+\varepsilon_0\| \le (1+q)^{\alpha_j m} + \frac{2q^m}{1-q} = O\left(((1+q)^{dm}\right), \quad m\to\infty, \tag{18}$$

где d – натуральное число, фигурирующее в условии (7). Применяя теперь лемму 6

$(\lambda=\mu_m;\ \lambda_1=0;\ \lambda_j=\mu_{jm},\ (j=2,3,\dots,n))$ и учитывая (I7) и (I8), получаем

$$\prod_{j=2}^{n}\Big(1+\int_{R^1} e^{itx}\mu_{jm}\{dx\}\Big)=1+\int_{R^1} e^{itx}\mu_m\{dx\},$$

где для $\|\mu_m^-\|$ справедлива оценка

$$\|\mu_m^-\|=O\big(\{q(1+q)^{d(n-1)}\}^m\big),\quad m\to+\infty. \tag{I9}$$

Из (I6) следует, что

$$\mu_{1m}+\mu_m+(\mu_m*\mu_{1m})=P_m. \tag{20}$$

Оценим величину $\|(\mu_m*\mu_{1m})^-\|$. Имеем

$$\|(\mu_m*\mu_{1m})^-\|\le\|\mu_m^-\|\|\mu_{1m}\|+\|\mu_{1m}^-\|\|\mu_m\|,$$

далее $\|\mu_m\|\le\|\mu_m+\varepsilon_0\|\le\prod\limits_{j=2}^{n}\|\mu_{jm}+\varepsilon_0\|=O\{(1+q)^{d(n-1)m}\},\quad m\to\infty,$

$$\|\mu_{1m}\|=O\{(q+1)^{dm}\},\quad m\to+\infty$$

и поэтому, учитывая (I7) и (I9), получаем

$$\|(\mu_m*\mu_{1m})^-\|=O\big(\{q(1+q)^{dn}\}^m\big),\quad m\to\infty. \tag{2I}$$

Пусть B – борелевское множество такое, что $B\cap M^+(A)=\varnothing$. Так как мера P_m сосредоточена на $M^+(A)$, то $P_m(B)=0$ для любого натурального m. Учитывая (20), имеем:

$$\{\|\mu_{1m}^-\|+\mu_{1m}(B)\}+\{\|\mu_m^-\|+\mu_m(B)\}+\{\|(\mu_m*\mu_{1m})^-\|+(\mu_{1m}*\mu_m)(B)\}=$$
$$=\|\mu_{1m}^-\|+\|\mu_m^-\|+\|(\mu_m*\mu_{1m})^-\|.$$

Но с другой стороны, для любого заряда λ выполнено соотношение $\lambda(B)\ge-\|\lambda^-\|$, и поэтому все слагаемые в левой части последнего равенства неотрицательны, откуда немедленно следует оценка

$$|\mu_{1m}(B)|\le\|\mu_{1m}^-\|+\|\mu_m^-\|+\|(\mu_m*\mu_{1m})^-\|.$$

Учитывая (I7), (I9) и (2I), получаем

$$|\mu_{1m}(B)|=O\big(\{q(1+q)^{dn}\}^m\big),\quad m\to\infty. \tag{22}$$

Вспоминая, что

$$\mu_{1m}(B)\ge\sum_{k\le[\alpha_1 m]}a_{k1}(m)\Big(\frac{G_1}{P_1}\Big)^{*k}(B)-\sum_{k>[\alpha_1 m]}|a_{k1}(m)|\Big(\frac{G_1}{P_1}\Big)^{*k}(B),$$

$$\sum_{k>[\alpha_1 m]}|a_{k1}(m)|\Big(\frac{G_1}{P_1}\Big)^{*k}(B)=O(q^m),\quad m\to\infty,$$

заключаем, что

$$\sum_{k\le[\alpha_1 m]}a_{k1}(m)\Big(\frac{G_1}{P_1}\Big)^{*k}(B)=O\big(\{q(1+q)^{dn}\}^m\big),\quad m\to\infty.$$

С другой стороны, все слагаемые в правой части неотрицательны и $a_{11}(m)=\alpha_1 m\ge1$, поэтому имеет место оценка

$$|G_1(B)|=O\big(\{q(1+q)^{dn}\}^m\big),\quad m\to\infty. \tag{23}$$

Замечая, что $q \le \frac{1-p_0}{p_0}$ из условия (8) легко находим, что $0 \le q(1+q)^{dn} - \theta < 1$. Таким образом, переходя в (23) к пределу при $m \to \infty$, заключаем, что

$$G_1(B) = 0, \text{ если } B \cap M^+(A) = \phi .$$

Легко заметить, что $G_j(B)=0$ при всех $j = 1,2,\dots,n$, т.е. все меры G_j сосредоточены на $M^+(A)$.

Для завершения доказательства леммы 4 мы воспользуемся тем фактом, что х.ф. закона $F_j = \varepsilon_0 p_j + G_j$, где $p_j > \frac{1}{2}$, а мера G_j сосредоточена на множестве $M^+(A)$, представима в виде

$$\varphi(t, F_j) = \exp\left\{ \int_{R^1} (e^{itx} - 1) \nu_j \{dx\} \right\}, \quad t \in R^1, \tag{24}$$

где ν_j - заряд, сосредоточенный на $M^+(A)$ и неотрицательный на подмножествах из $R^1 \setminus (2^?) M^+(A)$ ([I], стр. 261-262). Лемма доказана.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О   Т Е О Р Е М Ы I. Можно, не уменьшая общности, считать, что выполнены условия

$$1 \le \alpha_j \le d \qquad (j = 1, 2, \dots, n);$$
$$\nu_0(A) < \ln(1 + 2^{-nd}).$$

На основании леммы 4 х.ф. $\varphi(t, F_j)$ α - компоненты закона F_0 представима в виде (24). Из леммы I и условия (7) следует, что $\varphi(t, F_j)$ - хребтовая компонента функции $\varphi(t, F_0)$. Применяя лемму 2, заключаем, что заряд ν_j в представлении (24) является мерой, т.е. закон F_j является б.д. Теорема I доказана.

Перед тем как перейти к доказательству теоремы 2, заметим, что, каково бы ни было множество $A \subset (0, \infty)$ класса F_σ с рационально независимыми точками, существует множество $B \subset [a, 2a)$, $a > 0$, класса F_σ с рационально независимыми точками той же мощности, что и A.

Один из способов построения такого множества можно найти в [I], стр. 284.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О   Т Е О Р Е М Ы 2. Пусть $A \subset (0, \infty)$ - множество класса F_σ с рационально независимыми точками, фигурирующее в условиях теоремы 2, $B \subset [a, 2a)$ - множество класса F_σ с рационально независимыми точками, эквивалентное A. Как известно [I], стр. 28I, существует взаимно однозначное борелевское отображение $h: A \leftrightarrow B$ такое, что обратное к нему также является борелевским. Отображение h по формуле

$$h\left(\sum_1^n p_k x_k\right) = \sum_1^n p_k h(x_k),$$

где $x_k \in A$, p_k - неотрицательные целые числа, продолжается с сохранением перечисленных свойств до отображения

$$h: M^+(A) \cup \{0\} \leftrightarrow M^+(B) \cup \{0\}$$

([I], стр. 28I, лемма 6.6.I).

Рассмотрим банахову алгебру $\mathcal{D}_{R^1}$ - ограниченных зарядов на вещественной прямой R^1 с нормой

$$\|\nu\| = \nu^+(R^1) + \nu^-(R^1).$$

Операция умножения в алгебре - свертка зарядов, очевидно, что $\|\nu_1\| \|\nu_2\| \ge \|\nu_1 * \nu_2\|$. Легко проверяется, что подмножества $\mathcal{D}_A$ и $\mathcal{D}_B$ из $\mathcal{D}_{R^1}$, состоящие из зарядов, сосредоточенных соответственно на $M^+(A) \cup \{0\}$ и $M^+(B) \cup \{0\}$ являются замкнутыми подалгебрами банаховой алгебры $\mathcal{D}_{R^1}$. Как известно [I], стр. 282, отображение $\Phi: \mathcal{D}_A \to \mathcal{D}_B$, определяемое следующим образом

$$(\Phi\mu)(c) = \tilde{\mu}(c) = \mu(h^{-1}(C)),$$

где $C=\{0\}\cup M^+(B)$, $\mu\in\mathcal{P}_A$, $\tilde\mu\in\mathcal{P}_B$, является алгебраическим изоморфизмом $\mathcal{P}_A$ и $\mathcal{P}_B$, кроме того, это топологический изоморфизм. Действительно, из выкладки

$$\|\tilde\mu\| = \tilde\mu^+(R^1)+\tilde\mu^-(R^1)=\tilde\mu^+(\{0\}\cup M^+(B))+\tilde\mu^-(\{0\}\cup M^+(B))=$$
$$=\mu^+(\{0\}\cup M^+(A))+\mu^-(\{0\}\cup M^+(A))=\|\mu\|$$

следует, что Φ – изометрия.

Пусть $\mathcal{P}_A^+$ и $\mathcal{P}_B^+$ – подмножества из $\mathcal{P}_A$ и $\mathcal{P}_B$, соответственно, состоящие из вероятностных мер. Из определения Φ легко следует, что $\Phi:\mathcal{P}_A^+\leftarrow\mathcal{P}_B^+$. Так как любая компонента меры $\mu\in\mathcal{P}_A^+$ (или $\mathcal{P}_B^+$) с точностью до эквивалентности содержится в классе $\mathcal{P}_A^+$ (соответственно в $\mathcal{P}_B^+$), то легко видим, что справедливо следующее утверждение: мера $\mu\in\mathcal{P}_A^+$ б.д. тогда и только тогда, когда б.д. ее образ при отображении Φ.

Пусть F_0 – закон, удовлетворяющий условиям теоремы 2, и пусть выполнены предположения (7) и (8). Без ограничения общности можно считать, что в представлении (5) имеем $\beta=0$. Пусть $F_1, F_2, \dots, F_n$ – набор законов, определяющий некоторое α-разложение закона F_0. Для доказательства теоремы 2 достаточно показать, что законы $F_1, F_2, \dots, F_n$ безгранично делимы. Как следует из леммы 4, с точностью до эквивалентности для F_j, $j=1,2,\dots,n$, имеет место представление

$$F_j=\varepsilon_0 p_j+G_j,$$

где $\|G_j\|<p_j$ и $F_j\in\mathcal{P}_A^+$. Покажем, что $\tilde F_1, \tilde F_2, \dots, \tilde F_n$ – набор, определяющий α-разложение закона $\tilde F_0$ ($\tilde F_j=\Phi(F_j)$). Для этого достаточно доказать, что если

$$\prod_{j=1}^{n}\{\varphi(t,F_j)\}^{\alpha_j}=\varphi(t,F_0)\,,\quad t\in R^1, \tag{25}$$

то

$$\prod_{j=1}^{n}\{\varphi(t,\tilde F_j)\}^{\alpha_j}=\varphi(t,\tilde F_0)\,,\quad t\in R^1. \tag{26}$$

Рассмотрим операцию

$$F_j^{\alpha_j}\overset{def}{=\!=}\sum_{k=0}^{\infty}c_{kj}\,G_j^{*k}, \tag{27}$$

где c_{kj} – коэффициенты тейлоровского разложения функции $(p_j+z)^{\alpha_j}$. Так как $\|G_j\|<p_j$, то ряд сходится по норме банаховой алгебры $\mathcal{P}_A$, а следовательно, $F_j^{\alpha_j}\in\mathcal{P}_A$. Ряд $(\tilde F_j)^{\alpha_j}=\sum_{k=0}^{\infty}c_{kj}\,\tilde G_j^{*k}$ также сходится по норме $\mathcal{P}_B$, и так как отображение Φ есть непрерывный изоморфизм $\mathcal{P}_A$ и $\mathcal{P}_B$, то, применяя Φ к обеим частям равенства (27), получаем

$$(\tilde F_j)^{\alpha_j}=\Phi(F_j^{\alpha_j}). \tag{28}$$

Нетрудно видеть, что на основании теоремы Леви о непрерывном соответствии между мерами и их преобразованиями Фурье имеют место равенства

$$\{\varphi(t,F_j)\}^{\alpha_j}=\varphi(t,F_j^{\alpha_j}),\quad \{\varphi(t,\tilde F_j)\}^{\alpha_j}=\varphi(t,\tilde F_j^{\alpha_j}). \tag{29}$$

Таким образом, (25) можно переписать в виде

$$F_1^{\alpha_1}*F_2^{\alpha_2}*\dots*F_n^{\alpha_n}=F_0\,.$$

Применяя к этому равенству отображение Φ и используя (28) и (29), получаем:

$$\prod_{j=1}^{n}\{\varphi(t,\tilde F_j)\}^{\alpha_j}=\varphi(t,\tilde F_0)\,,\quad t\in R^1.$$

Нетрудно видеть ([I] , стр. 283), что х.ф. $\varphi(t,\tilde{F}_0)$ допускает представление

$$\varphi(t,\tilde{F}_0)=exp\{\int_{R^1}(e^{itx}-1)\tilde{\nu}_0\{dx\}\},$$

где мера $\tilde{\nu}_0$ сосредоточена на множестве $h(A)=B\subset[a,2a)$, и поэтому, в силу теоремы I, законы $\tilde{F}_1,\tilde{F}_2,\ldots,\tilde{F}_n$, а следовательно, и законы $F_1,F_2,\ldots,F_n$ являются безгранично делимыми. Теорема 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Докажем предварительно следующее утверждение.

ЛЕММА 7. Пусть х.ф. закона F_0 представима в виде (5), где мера ν_0 сосредоточена на множестве $A=\{\lambda_{KS}\}_{K,S=1}^{\infty}$, $\lambda_{KS}>0$; $\lambda_{K+1,S}/\lambda_{KS}$ – натуральные числа, отличные от единицы, а точки $\{\lambda_{1S}\}_{S=1}^{\infty}$ рационально независимы. Пусть имеет место оценка для некоторого $K>0$

$$\int_{|x|>y}\nu_0\{dx\}=O\{exp(-Ky^{\beta})\},\quad y\to+\infty. \tag{30}$$

Тогда $F_0\in I_0^{\alpha}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Повторяя дословно рассуждения, проведенные в замечании, убеждаемся, что лемму 7 достаточно доказать в предположениях (7) и (8). На основании леммы 4 и леммы 3 х.ф. $\varphi(t,F_j)$ α- компоненты закона F_0 в условиях (7) и (8) с точностью до эквивалентности допускает представление

$$\varphi(t,F_j)=exp\{\int_{R^1}(e^{itx}-1)\nu_j\{dx\}\},\quad t\in C^1, \tag{31}$$

где ν_j – заряд, сосредоточенный на $M^+(A)$ и неотрицательный на подмножествах из $R^1\setminus(2)M^+(A)$. Так как в силу (7) имеем $\alpha_j\geqslant 1$, то заключаем, что функция $\varphi(t,F_j)$ является целой хребтовой компонентой функции $\varphi(t,F_0)$. Заметим, что в работе И.В. Островского [6] (доказательство теоремы 2) дано описание всех хребтовых компонент вида (31) х.ф. $\varphi(t,F_0)$, из которого следует, что в представлении (31) заряд ν_j является мерой, а следовательно, функция $\varphi(t,F_j)$ является х.ф. безгранично делимого закона. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 3. Пусть $A=\{\lambda_{KS}\}_{K,S=1}^{\infty}$, $A_S=\{\lambda_{KS}\}_{K=1}^{\infty}$. Выберем $C\subset(0,\infty)$ – всюду плотное в $(0,\infty)$ счетное множество с рационально независимыми точками. Пусть $N(s)$ – наперед заданная положительная последовательность (далее мы уточним ее выбор). Построим отображение $h:A_1\to C$ так, чтобы выполнялись условия

а) $h(\lambda_{1S})\leqslant N(s)\cdot|\lambda_{1S}|$;

б) $h(\lambda_{1S_1})\neq h(\lambda_{1S_2})$, если $\lambda_{1S_1}\neq\lambda_{1S_2}$.

Обозначим через B_1 полный образ множества A_1 при отображении h. Как это делалось в теореме 2, построим отображение $h:M(A_1)\to M(B_1)$, полагая

$$h(\sum_1^n p_K x_K)=\sum_1^n p_K h(x_K),\quad x_K\in A_1,$$

где p_K – целые числа, далее, построим с помощью h отображение

$$\Phi:\mathcal{P}_{A_1}\to\mathcal{P}_{B_1},$$

($\mathcal{P}_{A_1}$ и $\mathcal{P}_{B_1}$ – подалгебры зарядов, сосредоточенных на $M(A_1)$ и $M(B_1)$, соответственно). Легко проверяется, что Φ изометрический изоморфизм. Обозначим через $\mathcal{P}_{A_1}^+$ и $\mathcal{P}_{B_1}^+$ подмножества из $\mathcal{P}_{A_1}$ и $\mathcal{P}_{B_1}$, соответственно, состоящие из вероятностных мер. Заметим, что в условиях теоремы 3 закон F_0 принадлежит $\mathcal{P}_{A_1}^+$. Из леммы 3 следует, что если $F_1,F_2,\ldots,F_n$ – некоторый набор законов, определяющий α- разложение закона F_0, то с точностью до эквивалентности законы F_j $(j=1,2,\ldots,n)$

сосредоточены на $M(A_1)$. Если мы покажем, что из этих условий следует, что законы $\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \dots, \tilde{F}_n$ $(\tilde{F}_j = \Phi(F_j))$ определяют некоторое α-разложение закона $\tilde{F}_0$, то тогда из принадлежности закона $\tilde{F}_0$ классу I_0^α будет следовать, что $F_0 \in I_0^\alpha$.

Из леммы 3 и теоремы единственности для преобразований Фурье следует, что каждому из законов F_j можно поставить в соответствие заряд ν_j $(j = 0, 1, \dots, n)$, фигурирующий в представлении (31), причем будет выполнено соотношение

$$\alpha_1 \nu_1 + \alpha_2 \nu_2 + \dots + \alpha_n \nu_n = \nu_0 . \tag{32}$$

Рассмотрим образы зарядов $\tilde{\nu}_j$ $(j = 0, 1, \dots, n)$. Из (32) и линейности отображения Φ следует, что

$$\alpha_1 \tilde{\nu}_1 + \alpha_2 \tilde{\nu}_2 + \dots + \alpha_n \tilde{\nu}_n = \tilde{\nu}_0 . \tag{33}$$

Нашей задачей является показать, что функции

$$\psi_j(t) = \exp\left\{ \int_{R^1} (e^{itx} - 1)\, \tilde{\nu}_j\{dx\} \right\}, \quad j = 0, 1, \dots, n , \tag{34}$$

являются характеристическими функциями законов $\tilde{F}_j$, соответственно. Действительно, согласно теореме Леви о непрерывном соответствии между зарядами и их преобразованиями Фурье, функция $\psi_j(t)$ является преобразованием Фурье заряда P_j, определяемого из соотношения

$$\exp\{\tilde{\nu}_j(R^1)\} P_j = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{1}{\kappa!} \tilde{\nu}_j^{*\kappa} . \tag{35}$$

Учитывая, что в правой части равенства (35) ряд сходится по норме, и пользуясь непрерывностью отображения Φ^{-1}, получаем из (35)

$$\exp\{\nu_j(R^1)\} \Phi^{-1}(P_j) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{1}{\kappa!} \nu_j^{*\kappa} ,$$

но так как выражение в правой части равно $\exp\{\nu_j(R^1)\} F_j$, то заключаем, что $\Phi^{-1}(P_j) = F_j$, а следовательно, $P_j = \tilde{F}_j$, что и требовалось доказать.

Покажем, что при построении отображения $h: A_1 \to C$, функцию $N(s)$, фигурирующую в условии а), можно выбрать таким образом, чтобы закон $\tilde{F}_0$ удовлетворял условиям леммы 7. Очевидно, что множество $B = h(A)$ удовлетворяет условиям леммы 7. Из условия в) теоремы 3 следует, что при некотором $C(s) > 0$ имеет место неравенство

$$\int_{A_s \cap \{|x| > y\}} \nu_0\{dx\} \le C(s) \exp\{-K(s) y^2\}, \quad y \ge 0,$$

с другой стороны, имеем

$$\int_{A_s \cap \{|x| > |\lambda_{\kappa s}|\}} \nu_0\{dx\} = \int_{B_s \cap \{|x| > h(\lambda_{\kappa s})\}} \tilde{\nu}_0\{dx\} \le C(s) \exp\left\{-K(s) \left(\frac{|\lambda_{\kappa s}|}{h(\lambda_{\kappa s})}\right)^2 h^2(\lambda_{\kappa s})\right\},$$

но так как $K(s)(\lambda_{\kappa s}/h(\lambda_{\kappa s}))^2 = m(s)$ не зависит от κ, то отсюда получаем, при $m(s) \ge 1$

$$\int_{B_s \cap \{|x| > y\}} \tilde{\nu}_0\{dx\} \le C(s) \exp\{-m(s) y^2\} \le \frac{C(s)}{\exp\{m(s) - 1\}} \exp\{-y^2\}, \quad y \ge 1;$$

а так как $K(s)/N(s) \le m(s)$, то мы можем подобрать $N(s)$ таким образом, чтобы выполнялись неравенства:

$$\frac{C(s)}{\exp\{m(s)-1\}} \leq \frac{1}{2^s}, \qquad m(s) \geq 1.$$

Замечая теперь, что

$$\int_{|x|>y} \tilde{\nu}_0\{dx\} = \sum_{s=1}^{\infty} \int_{B_s \cap \{|x|>y\}} \tilde{\nu}_0\{dx\} \leq \exp\{-y^2\} \quad \text{при} \quad y \geq 1,$$

получаем

$$\int_{|x|>y} \tilde{\nu}_0\{dx\} = O\{\exp(-y^2)\}, \qquad y \to +\infty,$$

и следовательно, закон $\tilde{F}_0$ удовлетворяет условиям леммы 7, а поэтому принадлежит классу I_0^α. Но с другой стороны, из принадлежности закона $\tilde{F}_0$ классу I_0^α вытекает принадлежность классу I_0^α закона F_0. Теорема доказана.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О Т Е О Р Е М Ы 4. Как и при доказательстве предыдущей теоремы, построим отображение Φ таким образом, чтобы закон F_0 удовлетворял условиям леммы 7. Замечая, что с точностью до эквивалентности закон F_1 является компонентой закона F_0 тогда и только тогда, когда закон $\Phi(F_1)$ является с точностью до эквивалентности компонентой закона $\Phi(F_0)$, легко получаем, что все компоненты закона F_0, удовлетворяющего условиям теоремы 4, являются б.д. Теорема доказана.

В заключение автор выражает глубокую благодарность И.В. Островскому за предложенную задачу и внимание к работе.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ю.В. Линник, И.В. Островский. Разложения случайных величин и векторов, М., Изд-во "Наука", 1972.

2. А.А. Зингер, Ю.В. Линник. Вестник ЛГУ, № 11, 1955, 51-56.

3. D.Dugue, C.R.Acad.Sci., 244, 715-717, 1957.

4. Ю.В. Линник. Вестник ЛГУ, № 1, 1959, 14-23.

5. И.В. Островский. Труды математического института им. В.А. Стеклова, 79, 1965, 198-235.

6. И.В. Островский. ИАН СССР, сер. матем., 34, 4, 1970, 923-944.

7. R.Cuppens. Z.Wahrscheinlichkeitstheorie verw.Geb., 21, 147-153, 1972.

8. R.Cuppens. C.R.Acad.Sci., 272, 22, 1464-1466, 1971.

ON THE α-COMPONENTS OF THE INFINITELY DIVISIBLE LAWS

A.E.Fryntov

The question of description of the class I_0^α was stated by Yu.V.Linnik. Class I_0^α consists of the infinitely divisible probability laws which have the infinitely divisible α- components only.

On this paper we give some conditions under which the infinitely divisible law with the finite spectral Levy's measure belongs to the class I_0^α. In these conditions we do not suppose that the support of the spectral Lévy's measure is the numerable set.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1974 выпуск У

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ РОСТКОВ ОТОБРАЖЕНИЙ КОНЕЧНОГО КЛАССА ГЛАДКОСТИ

Г.Р. Белицкий

I. Односторонняя эквивалентность.

Пусть $N\subset R^n$, $M\subset R^p$ - ростки в начале координат замкнутых множеств и F, $G:(N,0)\to(M,0)$ - ростки C^k - отображений. Ростки F и G называются ℓ -эквивалентными в классе C^q, если существует такой росток C^q -диффеоморфизма $H:(M,0)\to(M,0)$, что $H_\circ F=G$. Ростки F и G называются z -эквивалентными в классе C^q, если существует такой росток C^q - диффеоморфизма $K:(N,0)\to(N,0)$, что $F_\circ K=G$.

Положим

$$d_\ell(x;F)=\det(F'(x))^t\cdot F'(x),\quad d_z(x;F)=\det F'(x)(F'(x))^t,$$

где значок t означает транспонирование. Кроме того, пусть

$$S_\ell(F)=\{x:d_\ell(x;F)=0\},\quad S_z(F)=\{x:d_z(x;F)=0\}.$$

Тогда матрица $(F'(x))^tF'(x)$ обратима при $x\in N\setminus S_\ell(F)$, а матрица $F'(x)(F'(x))^t$ обратима при $x\in N\setminus S_z(F)$. Положим еще

$$\nu_\ell(x;F)=\|[(F'(x))^tF'(x)]^{-1}\cdot(F'(x))^t\|,\quad x\in N\setminus S_\ell(F),$$

$$\nu_z(x;F)=\|(F'(x))^t[F'(x)\cdot(F'(x))^t]^{-1}\|,\quad x\in N\setminus S_z(F).$$

Если $N=M$, то, очевидно,

$$S_\ell(F)=S_z(F),\quad \nu_\ell(x;F)=\nu_z(x;F)=\|(F'(x))^{-1}\|.$$

О П Р Е Д Е Л Е Н И Е I. Росток F имеет ℓ -особенность порядка $s\geq 0$, если $F:N\setminus S_\ell(F)\to M$ - взаимнооднозначно и существуют такие $c_i>0$, $\alpha\geq 0$, $\beta\geq 0$, что $\alpha\beta=s$, и в некоторой окрестности начала координат справедливы неравенства

$$\nu_\ell(x;F)\leq c_1\rho^{-\alpha}(x;S_\ell(F));\quad \rho(F(x);F(S_\ell(F)))\geq c_2\rho^\beta(x;S_\ell(F)).$$

Росток F имеет z -особенность порядка $s\geq 0$, если существует такое $c>0$, что

$$\nu_z(x;F)\leq c\rho^{-s}(x;F).$$

Для каждого $s\geq 0$ обозначим через $q(s)$ наибольшее из целых чисел q, удовлетворяющих неравенству $q<s$. Таким образом, $q(s)=[s]$, если s -не целое число и $q(s)=s-1$, если s - целое.

Т Е О Р Е М А I. Пусть росток C^k -отображения $F:(N,0)\to(M,0)$ имеет ℓ - особенность порядка $s\geq 0$ и пусть, кроме того,

$$q = \min\left(q\left(\frac{k+s-1}{2s}\right);\ k\right) \geqslant 1.$$

Тогда, если $G: (N,0) \to (M,0)$ – такой росток C^k – отображения, что $G(x) - F(x) = o(\rho^k(x; S_\ell(F)))$, то ростки F и G ℓ- эквивалентны в классе C^q.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть росток C^k – отображения $F: (R^n,0) \to (R^p,0)$ имеет в начале координат изолированную ℓ-особенность (то есть $S_\ell(F) = \{0\}$)порядка $s \geqslant 0$ и пусть, кроме того,

$$q = \min\left(q\left(\frac{k+s-1}{2s}\right);\ k\right) \geqslant 1.$$

Тогда, если $G: (R^n,0) \to (R^p,0)$ – такой росток C^k – отображения, что $G(x) - F(x) = o(\|x\|^k)$, то F и G r - эквивалентны в классе C^q.

ТЕОРЕМА 2. Пусть росток C^k -отображения $F: (N,0) \to (M,0)$ имеет r - особенность порядка $s \geqslant 1$ и пусть, кроме того,

$$q = \min\left(q\left(\frac{k-2s}{2(s-1)^+}\right);\ q\left(\frac{k-s}{1+(s-1)^+}\right)\right) \geqslant 1 \qquad (a^+ = \min(a,0)).$$

Тогда, если $G: (R^n,0) \to (R^p,0)$ – такой росток C^k – отображении, что $G(x) - F(x) = o(\rho^k(x; S_\ell(F)))$, то ростки F и G r - эквивалентны в классе C^q.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть росток C^k - отображении $F: (R^n,0) \to (R^p,0)$ имеет в начале координат изолированную r -особенность (то есть $S_r(F) = \{0\}$) порядка $s \geqslant 1$ и пусть, кроме того,

$$q = \min\left(q\left(\frac{k-2s}{2(s-1)^+}\right);\ q\left(\frac{k-s}{1+(s-1)^+}\right)\right) \geqslant 1.$$

Тогда, если $G: (R^n,0) \to (R^p,0)$ – такой росток C^k - отображения, что $G(x) - F(x) = o(\|x\|^k)$, то ростки F и G r - эквивалентны в классе [I] C^q.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I. Положим $g = G - F$. Достаточно доказать существование такого роста C^q -отображения $h: (M,0) \to (M,0)$, что $h(y) = o(\rho^q(y; F(S_\ell(F)))$ и

$$h(F_x) = g(x). \qquad (1)$$

Левое обратное $F^{(-1)}$ к F отображение, определенное на множестве $L(F) = \operatorname{Im} F \setminus F(S_\ell(F))$, принадлежит классу C^k в каждой точке $y \in L(F)$. При этом

$$(F^{(-1)}(y))' = [(F'(F^{(-1)}(y)))^t \cdot F'(F^{(-1)}(y))]^{-1} \cdot (F'(F^{(-1)}(y)))^t;\quad y \in L(F).$$

Положим

$$h(y) = g(F^{(-1)}(y)),\quad y \in L(F).$$

Тогда h - C^k -отображение и при некоторых $a_\nu > 0$ справедливы неравенства

$$\rho(F^{(-1)}(y); S_\ell(F)) \leqslant a_0 \rho^{\frac{1}{\beta}}(y; F(S_\ell(F)));\quad \|(F^{(-1)}(y))^{(\nu)}\| \leqslant a_\nu \rho^{-(2\nu-1)\alpha}(y; F(S_\ell(F)))$$

при $\nu = 1, 2, \ldots, k$ и $y \in L(F)$. Отсюда вытекает, что если $j \leqslant q$, то

$$h^{(j)}(y) \to 0 \text{ при } y \to F(S_\ell(F)).$$

[I] С помощью леммы из [I] эту оценку класса гладкости можно улучшить.

Поэтому $h(y)=o(\rho^q(y;F(S_\ell(F))))$ — C^q — отображение на $\overline{I(F)}=M$. Продолжим h на все M как C^q — отображение. Это продолжение удовлетворяет уравнению (I). Теорема доказана.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О Т Е О Р Е М Ы 2. Положим $g=G-F$. Достаточно доказать существование такого C^q -отображения $k:(M,0)\to(M,0)$, что $k(x)=o(\rho^q(x;S_2(F)))$ и

$$F(x+k(x))-F(x)=g(x) \qquad (2)$$

или

$$(Tk)(x)+H(k)(x)=g(x),$$

где

$$(Tk)(x)=F'(x)k(x),\quad H(k)(x)=F(x+k(x))-F(x)-F'(x)k(x).$$

Для каждого $\varphi:(N,0)\to(M,0)$ положим

$$(L\varphi)(x)=(F'(x))^t[F'(x)(F'(x))^t]^{-1}\varphi(x),\quad x\in N\setminus S_2(F).$$

Тогда $(TL\varphi)(x)=\varphi(x)$. Воспользуемся теперь техникой работы [2]. Пусть числа $\beta,\ \gamma>0$ таковы, что

$$0<\gamma<k-qs-s,\quad 0<\beta<2\gamma+q,\quad 0<\gamma<\beta-q(s-1)-s.$$

Положим

$$\mathcal{J}^{(1)}=\mathcal{J}^{q,\gamma}_{S_2(F)}(N;p),\quad \mathcal{J}^{(2)}=\mathcal{J}^{q,\beta}_{S_2(F)}(N;p),$$

где $\mathcal{J}^{s,\alpha}_Q(N,m)$ обозначает пространство ростков C^s — отображений

$$\varphi:N\to R^m$$

таких, что $\varphi^{(i)}(x)=0\ \ (x\in Q),\ i=0,1,2,\dots,s$ и, кроме того, $\|\varphi^{(s)}(x)\|\leqslant c\rho^\alpha(x;Q)$ при некоторых $c>0$, $\alpha>0$. "Допредельные" пространства $\mathcal{J}^{s,\alpha}_Q(N,m,\delta)$ снабжены нормой

$$\|\varphi\|=\max_{\|x\|\leqslant\delta}\frac{|\varphi^{(s)}(x)|}{\rho^\alpha(x;Q)},\qquad \varphi\in\mathcal{J}^{s,\alpha}_Q(N,m,\delta).$$

Далее, $Lg\in\mathcal{J}^{(1)}$ и оператор $H:\mathcal{J}^{(1)}\to\mathcal{J}^{(2)}$ является малым, оператор $L:\mathcal{J}^{(2)}\to\mathcal{J}^{(1)}$ ограничен. Поэтому уравнение

$$k+LHk=Lg$$

имеет решение $k\in\mathcal{J}^{(1)}$, которое является решением уравнения

$$Tk+Hk=g.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие теоремы I и 2.

П Р И М Е Р I. Пусть $x=(\xi,\eta)\in R^2$ и

$$F(x)=(\xi^3,\eta).$$

Тогда

$$S_\ell(F)=S_2(F)=\{x:\xi=0\},\quad F(S_\ell(F))=S_\ell(F),$$

$$\nu_\ell(x;F)=\nu_2(x;F)=\|(F'(x))^{-1}\|\leqslant c\,|\xi|^{-2}.$$

Отображение $F:(R^2,0)\to(R^2,0)$ является локальным гомеоморфизмом и, кроме того,

$$\rho(F(x),F(S_\ell(F)))=|\xi|^3=\rho^3(x,S_\ell(F)).$$

Таким образом, F имеет ℓ - особенность порядка $s=6$ и z -особенность порядка $s=2$. Если $G(x)=F(x)+o(|\xi|^k)$ -росток C^k -отображения, то ростки F и G ℓ -эквивалентны в классе C^q, $q=q\left(\frac{k+5}{12}\right)$ и z -эквивалентны в классе C^q, $q=q\left(\frac{k-4}{2}\right)$.

П Р И М Е Р 2. Пусть $x=(\xi,\eta)\in R^2$ и

$$F(x)=(\xi^3-\eta^3,\ \xi+\eta).$$

Тогда

$$S_\ell(F)=S_z(F)=\{0\},\quad \nu_\ell(x;F)=\nu_z(x;F)=\|(F'(x))^{-1}\|\leq c\,\|x\|^{-2}.$$

Отображение F является локальным гомеоморфизмом и, кроме того,

$$\|F(x)\|\geq c\,\|x\|^3.$$

Поэтому F имеет изолированную ℓ -особенность порядка $s=6$ и изолированную z - особенность порядка $s=2$. Если $G(x)=F(x)+o(\|x\|^k)$ - росток C^k - отображения, то ростки F и G ℓ - эквивалентны в классе C^q, $q=q\left(\frac{k+5}{12}\right)$ и z- эквивалентны в классе C^q, $q=q\left(\frac{k-4}{2}\right)$.

П Р И М Е Р 3. Пусть $x=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in R^n$, и отображение $F:(R^n,0)\to(R^p,0)$ $(n\geq p)$ действует по формуле

$$F(x)=\left(\sum_{i=1}^{p}\alpha_{1i}\xi_i^3+\sum_{i=p+1}^{n}\xi_i^3;\ \sum_{i=1}^{p}\alpha_{2i}\xi_i,\ \dots;\ \sum_{i=1}^{p}\alpha_{pi}\xi_i\right)$$

(если $n=p$, то вторая $\sum$ в первой координате отсутствует). Пусть матрица $A=(\alpha_{ij})$ такова, что форма

$$H(x)=\det\begin{pmatrix}\alpha_{11}\xi_1^2, & \dots, & \alpha_{1p}\xi_p^2\\ \alpha_{21}, & \dots\dots, & \alpha_{2p}\\ \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{p1}, & \dots\dots. & \alpha_{pp}\end{pmatrix}$$

положительно определена. Тогда

$$\nu_z(x;F)\leq c\,\|x\|^{-2},$$

то есть F имеет изолированную z -особенность порядка $s=2$. Если $G(x)=F(x)+o(\|x\|^k)$ - росток C^k -отображения, то F и G z -эквивалентны в классе C^q, $q\geq q\left(\frac{k-4}{2}\right)$.

2. Двустороння эквивалентность

Ростки C^k -отображений F, $G:(R^n,0)\to(R^p,0)$ называются ℓz -эквивалентными в классе C^q, если существуют такие ростки C^q -диффеоморфизмов $H:(R^p,0)\to(R^p,0)$ и $K:(R^n,0)\to(R^n,0)$, что $H\cdot F=G\cdot K$.

Пусть $S\subset R^n$ - росток замкнутого множества. Касательным пространством к S в точке $y\in S$ называется линейная оболочка $T(y)$ всех таких векторов $x\in R^n$, что

$$\rho(y+\lambda x;S)=o(\lambda)\qquad(\lambda\to 0).$$

Пусть $L(z)$ $(z\in S)$ - семейство подпространств из R^n.

О П Р Е Д Е Л Е Н И Е 2. Точка $z_0\in S$ называется k -регулярной точкой семейства $L(z)$, если существует такая ее окрестность $U\subset S$, в которой выполняются следующие условия: а) при всех $y\in U$ подпространство $L(y)$ является прямым дополнением к касательному пространству $T(y)$ к S в точке y; б) отображение $P:U\to R^{n^2}$, где $P(y)$ - проектор на $L(y)$ вдоль касательного пространства

$T(y)$, принадлежит классу C^{κ}. Если $\kappa=\infty$, будем называть точку z_0 регулярной точкой семейства $L(z)$.

Пусть теперь $F:(R^n,0)\to(R^p,0)$- росток C^{κ}-отображения. Рассмотрим сужение

$$F_z:(S_z(F),0)\to(R^p,0).$$

Положим

$$S'_{\ell z}(F)=S_{\ell}(F_z).$$

Далее, обозначим через $S''_{\ell z}(F)\subset S_z(F)$ множество точек, не являющихся κ-регулярными для семейства подпространств $Ker\, F'(z)\ (z\in S_z(F))$.

Пусть S - росток замкнутого множества. Обозначим через $\mathcal{J}(S;m\times q)$ пространство ростков непрерывных матриц-функций $t:S\to R^{n^2}$ размера $m\times q$. Рассмотрим линейный оператор

$$A:\mathcal{J}(S_z(F);n\times 1)\oplus\mathcal{J}(S_z(F);n\times n)\to\mathcal{J}(S_z(F);p\times n),$$

определенный следующим образом. Если

$$\tau=(\varphi,\psi),\ \varphi\in\mathcal{J}(S_z(F);n\times 1),\ \psi\in\mathcal{J}(S_z(F);n\times n),$$

то

$$(A\tau)_{i,\kappa}(z)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2F_i(z)}{\partial z_\kappa\partial z_j}\varphi_j(z)+\sum\frac{\partial F_i(z)}{\partial z_j}\psi_{j\kappa}(z),\ i=1,\dots,p;\ \kappa=1,\dots,n.$$

Обозначим через $A(z)\ (z\in S_z(F))$ матрицу-функцию этого оператора. Если $\kappa\geqslant 2$, то $A(z)$ является элементом пространства $\mathcal{J}(S_z(F);pn\times(n^2+n))$.

Обозначим через $P_F(z)\ (z\in S_z(F)\setminus S''_{er}(F))$ проектор на $Ker\, F'(z)$ вдоль касательного пространства $T_F(z)$ к $S_z(F)$ в точке z. При фиксированном z умножение справа на проектор $P_F(z)$ определяет в пространстве $R^{p\times n}$ матриц размера $p\times n$ проектор

$$\overline{P}_F(z)t=tP_F(z)\qquad(t\in R^{p\times n}).$$

Матрица-функция $\overline{P}_F(z)$ принадлежит пространству

$$\mathcal{J}(S_z(F)\setminus S''_{ez}(F);pn\times pn).$$

При фиксированном $z\in S_z(F)\setminus S''_{ez}(F)$ рассмотрим линейный оператор

$$B(z)=\overline{P}_F(z)A(z):R^{n\times 1}\oplus R^{n\times n}\to \mathcal{J}m\,\overline{P}_F(z)\subset R^{p\times n}.$$

Тогда

$$B(z)B^t(z):\mathcal{J}m\,\overline{P}(z)\to\mathcal{J}m\,\overline{P}(z).$$

Положим

$$d_{ez}(z;F)=det\,B(z)B^t(z)$$

и

$$S'''_{ez}(F)=\{z\in S_z(F)\setminus S''_{ez}(F);\ d_{ez}(z;F)=0\}.$$

матрица $B(z)B^t(z)$ обратима при $z\in S_z(F)\setminus S''_{ez}(F)$. Положим

$$\nu_{ez}(z;F)=\|B^t(z)[B(z)B^t(z)]^{-1}\|,\ z\in S_z(F)\setminus S'''_{ez}(F)$$

и $$S_{er}(F)=S'_{er}(F)\cup S''_{er}(F)\cup S'''_{er}(F).$$

О П Р Е Д Е Л Е Н И Е 3. Пусть $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$ – пара чисел. Росток C^{κ} -отображения $F:(R^n,0)\to(R^n,0)$ имеет ℓr – особенность порядка (α,β), если для некоторых $c_i>0$ выполняются неравенства

$$\|P_F(z)\|\leqslant c_1\rho^{-\alpha}(z;S_{er}(F)),\quad \nu_{er}(z;F)\leqslant c_2\rho^{-\beta}(z;S_{er}(F)).$$

ℓr -особенность называется изолированной, если $S_{er}(F)=\{0\}$.

Пусть $S_1\geqslant 0$, $S_2\geqslant 0$, $S_3\geqslant 0$, $S_4\geqslant 0$ – некоторые числа. Определим функцию $R(\kappa,s_1,s_2,s_3,s_4)$ следующим образом. Положим

$$\mu_1=\mu_1(\kappa,s_3,s_4)=\min\Big[q\Big(\frac{\kappa-(s_3+2s_4+1)}{2(s_4-1)^++(s_3-1)^+}\Big);\ q\Big(\frac{\kappa-(s_3+s_4+1)}{(s_4-1)^++(s_3-1)^++1}\Big)\Big],$$

$$\mu=\mu(\kappa,s_2,s_3,s_4)=\min\Big[q\Big(\frac{\mu_1+s_2-1}{2s_2}\Big);\ \mu_1\Big].\qquad \nu=1,2,\ldots$$

Определим теперь рекурентно $a_0=\mu$,

$$a_\nu=\min\Big[q\Big(\frac{a_{\nu-1}-(2s_3+2s_4+1)}{2(s_4-1)^++2(s_3-1)^+}\Big);\ q\Big(\frac{a_{\nu-1}-(2s_3+s_4+1)}{(s_4-1)^++(s_3-1)^++1}\Big)\Big],\ \nu=1,2,\ldots .$$

Теперь положим

$$t=t(\kappa,s_1,s_2,s_3,s_4)=\max_{1\leqslant\nu\leqslant a_0}\ \min(\nu;a_\nu)$$

и, наконец,

$$R(\kappa;s_1,s_2,s_3,s_4)=\min\Big[q\Big(\frac{t-2s_1}{2(s-1)^+}\Big);\ q\Big(\frac{t-s_1}{(s_1-1)^++1}\Big)\Big].$$

Таким образом, если $s_4\leqslant 1$ и $2s_3\leqslant 1$, то имеем асимптотическое неравенство

$$R(\kappa;s_1,s_2,s_3,s_4)\geqslant c(s_1,s_2,s_3,s_4)\cdot\kappa\qquad(\kappa\to\infty).$$

В противном случае

$$R(\kappa,s_1,s_2,s_3,s_4)\geqslant c(s_1,s_2,s_3,s_4)\cdot\ln\kappa\qquad(\kappa\to\infty).$$

Т Е О Р Е М А 3. Пусть росток C^{κ} -отображения $F:(R^n,0)\to(R^p,0)$ имеет r -особенность порядка s_1, ℓr -особенность порядка (s_3,s_4), а сужение $F_r:(S_r(F),0)\to(R^p,0)$ имеет ℓ -особенность порядка s_2. Тогда, если росток C^{κ}-отображения $G:(R^n,0)\to(R^p,0)$ таков, что $G(x)-F(x)=o(\rho^{\kappa}(x;S_{\ell e}(F)))$, то ростки F и G ℓr – эквивалентны в классе C^q, где $q\geqslant R(\kappa,s_1,s_2,s_3,s_4)$.

С Л Е Д С Т В И Е. Пусть росток C^{κ} -отображения $F:(R^n,0)\to(R^p,0)$ имеет r -особенность порядка s_1, изолированную ℓr – особенность порядка (s_3,s_4), а сужение $F_r:(S_r(F),0)\to(R^p,0)$ имеет изолированную ℓ -особенность порядка s_2. Тогда, если росток C^{κ} -отображения $G:(R^n,0)\to(R^p,0)$ таков, что $G(x)-F(x)=o(\|x\|^{\kappa})$, то ростки F и G ℓr – эквивалентны в классе C^q, где $q\geqslant R(\kappa,s_1,s_2,s_3,s_4)$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О Т Е О Р Е М Ы 3. В силу теоремы 2, достаточно доказать существование таких C^t -диффеоморфизмов $H:(R^p,0)\to(R^p,0)$ и $K:(R^n,0)\to(R^n,0)$, что разность $H\circ F-G\circ K$ равна на $S_r(F)$ нулю вместе со всеми производными до порядка t включительно. Доказательство этого утверждения разобъем на два пункта.

1°. Сначала докажем существование таких C^{μ} – диффеоморфизмов $H:(R^p,0)\to(R^p,0)$ и $K:(R^n,0)\to(R^n,0)$, что разность $H\circ F-G\circ K$ равна на $S_r(F)$ нулю вместе с первой производной. Будем искать диффеоморфизмы H и K в виде $H(y)=y+h(y)$, $K(x)=x+k(x)$, где

$$h(y)=o(\rho^{M}(y; F(S_{e_2}(F))), \quad \kappa(x)=o(\rho^{M}(x; S_{e_2}(F))).$$

Это приведет к системе

$$h(Fx)=G(x+\kappa(x))-F(x) \qquad (x\in S_2(F)), \tag{3}$$

$$h'(Fx)F'(x)=G'(x+\kappa(x))(I+\kappa'(x))F'(x) \qquad (x\in S_2(F)). \tag{4}$$

Для выполнении этих равенств достаточно выполнения (3) и

$$0=G'(x+\kappa(x))(I+\kappa'(x))P_F(x)-F'(x)P_F(x) \quad (x\in S_2(F)), \tag{5}$$

где $P_F(x)$ – проектор на $\operatorname{Ker} F'(x)$ вдоль касательного пространства $T_F(x)$ к $S_2(F)$ в точке x. Перепишем уравнение (5) в виде

$$T(\kappa,\varphi)(x)+H(\kappa,\varphi)(x)=g'(x)P_F(x) \quad (x\in S_2(F)), \tag{6}$$

где

$$g(x)=G(x)-F(x), \qquad \varphi(x)=\kappa'(x)P_F(x),$$

$$T(\kappa,\varphi)(x)=F'(x)\varphi(x)+F''(x)P_F(x)\kappa(x).$$

Правая часть уравнения (6) принадлежит пространству $\mathcal{J}^{M_1,\alpha}_{S_{e_2}(F)}(S_2(F); p\times n)$ при любом $\alpha<K-M_1(1+(S_3-1)^+)-S_3-1$. Обозначим это пространство через $\mathcal{J}^{M_1,\alpha}(p\times n)$. Далее, обозначим через $\bar{\mathcal{J}}^{M_1,\alpha}(p\times n)$ подпространство таких матриц-функций $\psi\in\mathcal{J}^{M_1,\alpha}(p\times n)$, которые имеют вид

$$\psi(x)=t(x)P_F(x), \qquad t\in\mathcal{J}^{M_1,\alpha}(p\times n).$$

Положим

$$\tau=(\kappa,\varphi)\in\mathcal{J}^{M_1,\alpha}(n\times 1)\oplus\mathcal{J}^{M_1,\alpha}(n\times n).$$

Тогда оператор T можно записать в виде

$$(T\tau)(x)=B(x)\tau(x),$$

где $B(x)$ -матрица-функция, определенная на стр. 68 . Положим

$$(L\psi)(x)=B^t(x)[B(x)B^t(x)]^{-1}\psi(x), \quad \psi\in\bar{\mathcal{J}}^{M_1,\alpha}(p\times n).$$

Тогда

$$L\psi\in\mathcal{J}^{M_1,\gamma}(n\times 1)\oplus\bar{\mathcal{J}}^{M_1,\gamma}(n\times n)$$

при любом $\gamma<\alpha-M_1(S_4-1)^+-S_4$. Кроме того, $TL\psi=\psi$. Рассмотрим уравнение

$$\tau(x)+(LH\tau)(x)=(Lg'P_F)(x) \tag{7}$$

относительно неизвестного $\tau\in\mathcal{J}^{M_1,\gamma}(n\times 1)\oplus\bar{\mathcal{J}}^{M_1,\gamma}(n\times n)$. Пусть числа β , $\gamma>0$ таковы, что

$$0<\beta<2\gamma+M_1, \quad 0<\gamma<\beta-M_1(S_4-1)^+-S_4.$$

Положим

$$\mathcal{J}^{(1)}=\mathcal{J}^{M_1,\gamma}(n\times 1)\oplus\bar{\mathcal{J}}^{M_1,\gamma}(n\times n); \quad \mathcal{J}^{(2)}=\bar{\mathcal{J}}^{M_1,\beta}(p\times n)$$

и воспользуемся снова техникой работы [2] . Так как $L:\mathcal{J}^{(2)}\to\mathcal{J}^{(1)}$ -ограниченный оператор и $H:\mathcal{J}^{(2)}\to\mathcal{J}^{(1)}$ -малый оператор, то уравнение (7) имеет решение $\tau=(\kappa,\varphi)\in\mathcal{J}^{M_1,\gamma}\times(n\times 1)\oplus\bar{\mathcal{J}}^{M_1,\gamma}(n\times n)$. Так как L – правый обратный к оператору T , то пара (κ,φ)

является решением уравнения (6). Подставим найденное значение $\kappa(x)$ $(x\in S_z(F))$ в уравнение (3). Так как сужение F на $S_z(F)$ имеет по условию ℓ - особенность порядка S_2, то, согласно теореме I, уравнение (3) имеет решение $h\in \mathcal{J}^M_{F(S'_{\ell z}(F))}(F(S_z(F)),P)$. По значениям на $S_z(F)$ отображения κ и его производной $\varphi(x)=\kappa'(x)P_F(x)$ вдоль подпространства $Ker\,F'(x)$, а также по значениям на $F(S_z(F))$ отображения h можно построить C^M-отображения $\kappa:(R^n,0)\to(R^n,0)$ и $h:(R^p,0)\to(R^p,0)$, удовлетворяющие (3) и (4).

$2°$. Согласно $п°1$ можно считать, что F и G - класса C^M и разность $G-F$ равна на $S_z(F)$ нулю вместе с первой производной. В этом предположении докажем существование такого C^t-отображения $\kappa:(R^n,0)\to(R^n,0)$, что $\kappa(x)=o(\rho^t(x;S_{\ell z}(F)))$ и

$$(F(x)-G(x+\kappa(x)))^{(i)}=0,\quad x\in S_z(F),\quad i=0,1,2,\dots,t. \qquad (8)_i$$

Мы рассматриваем $(8)_i$ как систему для нахождения значений на $S_z(F)$ производных $\kappa^{(i)}(x)$ отображения κ. По этим производным, следуя теореме Уитни о продолжении, мы построим отображение κ класса C^t, которое будет удовлетворять условиям $(8)_i$.

Положим $\kappa(x)=0$ $(x\in S_z(F))$. Так как $g(x)=0(x\in S_z(F))$, то такое значение κ удовлетворяет $(8)_0$. Рассмотрим теперь уравнение $(8)_1$. Так как $\kappa(x)=0$ $(x\in S_z(F))$, то уравнение сведется к такому:

$$F'(x)\kappa'(x)=0,$$

то есть $\kappa'(x)\in Ker\,F'(x)$ при каждом $x\in S_z(F)$. При этом $\kappa'(x)$ удовлетворяет $(8)_1$ независимо от значения своей проекции $P_F(x)\kappa'(x)$ на подпространство $Ker\,F'(x)$. Эта проекция будет найдена из следующего уравнения. Рассмотрим теперь уравнение $(8)_2$:

$$F'(x)\kappa''(x)+G''(x)(\kappa'(x)\otimes I+I\otimes\kappa'(x))+G''(x)\kappa'(x)\otimes\kappa'(x)=g''(x)$$

Умножив обе части этого уравнения справа на проектор $P_F(x)\otimes P_F(x)$, рассмотрим его как уравнение относительно проекции $\varphi(x)=P_F(x)\kappa'(x)P_F(x)$ первой производной вдоль подпространства $Ker\,F'(x)$ и второй производной

$$\psi(x)-\kappa''(x)P_F(x)\otimes P_F(x)$$

вдоль подпространства $Ker\,F'(x)$. Заметим, что производная от κ вдоль касательного пространства $T_F(x)$ к $S_z(F)$ равна нулю. Рассуждая так же, как и в $п°1$, мы найдем производные $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, которые будут принадлежать классу C^{a_1}. Продолжая этот процесс, будем последовательно находить производные $\kappa(x),\kappa'(x),\dots,\kappa^{(\nu)}(x)$ $(x\in S_z(F))$. При этом, если $\kappa^{(\nu-1)}(x)$ принадлежит классу $C^{a_{\nu-1}}$, то $\kappa^{(\nu)}(x)$ будет принадлежать классу C^{a_ν}, где a_ν выражается через $a_{\nu-1}$ по рекурентной формуле, участвующей в определении функции $R(\kappa,S_1,S_2,S_3,S_4)$. Таким образом, мы найдем значения на $S_z(F)$ производных $\kappa^{(\nu)}(x)$, $\nu=0,1,2,\dots,t$. Так как $t=\max\limits_{1\le\nu\le a_0}\min(\nu,a_\nu)$, то все эти производные будут принадлежать классу C^t. Пусть теперь $\kappa:(R^n,0)\to(R^n,0)$ C^t-отображение, построенное по найденным значениям на $S_z(F)$ производных. Тогда ростки $F(x)$ и $G_1(x)=G(x+\kappa(x))$ принадлежат классу C^t и, кроме того, $F(x)-G(x)=o(\rho^t(x;S_z(F)))$. В силу теоремы 2, эти ростки z-эквивалентны в классе C^q, где $q\geq R(\kappa,S_1,S_2,S_3,S_4)$. Теорема 3 доказана.

П Р И М Е Р I. Пусть $F_1,F_2:(R^2,0)\to(R^2,0)$ - отображения Уитни:

$$F_1(x)=(\xi^2,\eta),\qquad F_2(x)=(\xi\eta+\xi^3,\eta),\quad x=(\xi,\eta)\in R^2.$$

Отображение F_1 имеет z-особенность порядка $S_1=1$, изолированную ℓz-особенность порядка (0,I), а сужение $F_1:(S_z(F),0)\to(R^2,0)$ имеет ℓ-особенность порядка $S_2=0$. Поэтому, если росток $G:(R^2,0)\to(R^2,0)$ таков, что $G(x)-F(x)=o(\|x\|^\kappa)$ и $G\in C^\kappa$, то F и G ℓz- эквивалентны в классе C^q, где $q\geq c\cdot\kappa$ и c-абсолютная константа. В действительности имеет место более точная оценка класса гладкости [3]. Для особенности F_2 теорема 3 дает еще более грубую оценку: здесь $s_1=1$, $s_2=2$, $s_3=s_4=1$. Поэтому, согласно следствию, C^k -росток $G(x)=F(x)+o(\|x\|^k)$ ℓr - эквивалентен ростку F в классе C^q, где $q \geq c \cdot \ln k$. На самом деле, [3], ростки F и G ℓr -эквивалентны в классе C^q, где $q \geq [\frac{k}{2}]-5$.

П Р И М Е Р 2. Пусть $n=p$ и матрица $A=(\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n-1}$ такова, что форма $\det A(y)$ $(y \in R^{n-1})$, где

$$A(y)=\begin{pmatrix} \alpha_{11}\eta_1^2, \dots, \alpha_{1n-1}\eta_{n-1}^2 \\ \alpha_{21}, \dots\dots, \alpha_{2n-1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{n-1,1}, \dots, \alpha_{n-1,n-1} \end{pmatrix}, \qquad y=(\eta_1, \dots, \eta_{n-1})$$

положительно определена. Рассмотрим росток $F:(R^n,0)\to(R^n,0)$, действующий по формуле

$$F(x)=(\xi^2, \xi^2\eta_1+\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_{1i}\eta_i^3; \quad \xi^2\eta_2+\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_{2i}\eta_i; \dots; \xi^2\eta_{n-1}+\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_{n-1,i}\eta_i),$$

где $x=(\xi,\eta)$, $y=(\eta_1,\dots,\eta_{n-1})$. Тогда имеем:

$$S_r(F)=\{x:\xi=0\}, \quad \nu_{\ell r}(z;F)\leq c\cdot(\det A(z))^{-1}, \ z\in S_r(F).$$

Так как семейство подпространств $\operatorname{Ker} F'(z)=\{x: y=0\}$ - постоянно, то F имеет изолированную ℓr -особенность порядка (0,2). Кроме того, здесь $s_1=2$ и сужение $F:(S_r(F),0)\to(R^n,0)$ имеет изолированную ℓ - особенность порядка $s_2<\infty$. Поэтому, в силу следствия из теоремы 3, всякий C^k -росток $G(x)=F(x)+o(\|x\|^k)$ ℓr-эквивалентен ростку F в классе C^q, где $q\geq c\ln k$ и c -абсолютная константа.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Дж. Мазер. Устойчивость C^∞-отображений, Ш, Математика I4:I, I970, (сб. перев).
2. Г.Р. Белицкий. Функциональные уравнения и сопряженность локальных диффеоморфизмов конечного класса гладкости, Функциональный анализ и его приложения, 7:4, I973.
3. Р. Том и Г. Левин. Особенности дифференцируемых отображений, (в сб. статей " Особенности дифференцируемых отображений"), I968.

EQUIVALENCY OF MAPPING GERMS FROM A FINITE CLASS OF SMOOTHNESS

G.R. Belitsky

The conditions for equivalency have been given for one or another class of smoothness of the C^∞-mapping germs when a left-hand, right-hand or double-sided substitution of variables occurs.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1974 выпуск У

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ, ВСТРЕЧАЮЩЕЙСЯ В ПРИЛОЖЕНИЯХ

Г.В. Щербина

Рассмотрим следующую краевую задачу

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=\psi(x,y,u), \tag{I}$$

$$\lim_{r\to\infty} u(x,y)=0 \qquad \left(p=\frac{\partial u}{\partial x},\ q=\frac{\partial u}{\partial y},\ r=\sqrt{x^2+y^2},\right.$$
$$\psi(x,y,u)\in C^1,\quad \psi(x,y,0)\in N=\{f: \max_{x,y}|f(x,y)|\leqslant M,\ \lim_{r\to\infty} f(x,y)=0\}. \tag{I'}$$

Аналогичные краевые задачи возникают при изучении поведения свободной поверхности жидкости под действием массовых и поверхностных сил. Разрешимость уравнения (I) в конечной области изучалась в работах [I], [2], [3] , осесимметричный случай при $\psi=0$ для внешности кругового цилиндра – в работе [3] .

В настоящей статье будет доказана

Т Е О Р Е М А. Пусть $\psi\in C^1$, $\frac{\partial\psi}{\partial u}\geqslant b>0$, $\psi(x,y,0)\in N$. Тогда существует единственное решение задачи (I), (I′) $u(x,y)\in C^2$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=\psi_i(x,y,u), \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_k}=0, \tag{2'}$$

где $\psi_i\in C^{1+\frac{1}{i}}$, $\psi_i\to\psi$ по норме C^1 в каждой области $(x,y)\in Q_k, |z|<M_k$, Q_k – выпуклая область с гладкой границей, $Q_{k+1}\supset Q_k$, $\sum_k Q_k$ есть вся плоскость x,y . В работе [I] доказано, что краевая задача (2), (2′) имеет решение $u_{ik}(x,y)\in C^{1+\frac{1}{i}}$ и $|u|\leqslant M$, $|\nabla u|\leqslant M$, причем M зависит, в частности, от $mes\, Q_k$. Покажем, что M в действительности не зависит от $mes\, Q_k$. Точнее, справедлива

Л Е М М А I. Пусть Ω – некоторая область (не обязательно односвязная), граница которой Γ – гладкая линия, обладающая тем свойством, что через каждую ее точку x_0, y_0 можно провести окружность $\omega(x_0,y_0)$ радиуса $r(x_0,y_0)$, целиком лежащую в Ω , и пусть $\inf_{x_0,y_0\in\Gamma} r(x_0,y_0)>\frac{1}{L}$. Кроме того, пусть

$$\max_{x,y\in\Omega}|\psi(x,y,0)|\leqslant m,\ \frac{\partial\psi}{\partial u}\geqslant b>0.$$

Тогда

$$\max_{\Omega}|u(x,y)|\leqslant\frac{1}{L}+\frac{m}{b}+\frac{L}{2b}.$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Если $\max_{\Omega}|u|$ достигается внутри области Ω , то в точке $x_0 y_0$ максимума справедливо неравенство

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\psi(x,y,u)\leqslant 0,$$

то есть $u_{max}\leqslant\frac{m}{b}$.

Допустим, что $\max_{\Omega} u$ достигается в точке x^*, y^* , лежащей на границе Γ области Ω , причем

$$u(x^*, y^*) > \frac{1}{L} + \frac{m}{b} + \frac{L}{2b}.$$

Проведем окружность $\omega_\circ$ радиуса $r_\circ = \frac{1}{L}$ и рассмотрим функцию

$$\tilde{u}(x,y) = u(x^*, y^*) - \sqrt{r_\circ^2 - (x-\bar{x}_\circ)^2 - (y-\bar{y}_\circ)^2}.$$

(Здесь $\bar{x}_\circ, \bar{y}_\circ$ – координаты центра окружности $\omega_\circ$). Пусть D – множество точек x, y , в которых выполнено неравенство $u(x,y) > \tilde{u}(x,y)$. D непусто, открыто и лежит внутри круга $\omega_\circ$. На границе множества D имеем

$$u(x,y) = \tilde{u}(x,y),$$

значит, в некоторой внутренней точке $(\xi, \eta) \in D$ разность $u - \tilde{u}$ достигает положительного максимума. При $x = \xi$, $y = \eta$ из уравнения (I) получаем

$$\frac{\partial^2(u-\tilde{u})}{\partial x^2}(1+u_y^2) - 2u_x u_y \frac{\partial^2(u-\tilde{u})}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2(u-\tilde{u})}{\partial y^2}(1+u_x^2) =$$
$$= (1+u_x^2+u_y^2)^{3/2}\left[\psi(x,y,u) - \frac{L}{2}\right] > 0,$$

что невозможно. Лемма доказана.

З А М Е Ч А Н И Е. Если $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ на границе области Ω , то $\max\limits_{\Omega} |u|$ зависит лишь от b и m . В этом случае в точке ξ, η всегда достигается локальный максимум и u_{max} оценивается из неравенства

$$\psi(x, y, u_{max}) < 0.$$

Л Е М М А 2. Если $\psi(x,y,0) \in N$, $u(x,y)$ – решение уравнения (I), определенное при $r^2 = x^2 + y^2 > a_\circ^2$, то

$$\lim_{r \to +\infty} u(x,y) = 0.$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Из леммы I следует, что

$$\max_{x^2+y^2 \geq a_\circ^2} |u(x,y)| < \infty.$$

Введем функции $m^+(a) = \sup\limits_{x^2+y^2 \geq a^2} u(x,y)$, $m^-(a) = \inf\limits_{x^2+y^2 \geq a^2} u(x,y)$. Если мы докажем, что $d^+ = \lim\limits_{a \to +\infty} m^+(a) \leq 0$, $d^- = \lim\limits_{a \to +\infty} m^-(a) \geq 0$, то лемма будет доказана. Пусть, например, $d^+ > 0$. Выберем A столь большим, чтобы выполнялось неравенство $|\psi(x,y,0)| \leq \frac{1}{4} bd$ при $r > A$. По предположению найдется последовательность точек (ξ_i, η_i) $(\xi_i^2 + \eta_i^2 \to +\infty)$, в которых выполнено неравенство

$$u(\xi_i, \eta_i) = d - \varepsilon_i \qquad (\varepsilon_i \to 0).$$

Рассмотрим функции

$$\tilde{u}_i(x,y) = u(\xi_i, \eta_i) + \sqrt{\frac{bd}{2}} - \varepsilon_i - \sqrt{\frac{bd}{2} - (x-\xi_i)^2 - (y-\eta_i)^2}.$$

Так же, как и в лемме I, рассматривая множество точек x, y , в которых $u > \tilde{u}$, приходим к противоречию. Итак, $d^+ \leq 0$. Аналогично $d^- \geq 0$. Лемма доказана.

Теорема 4, доказанная в работе [I] , позволяет теперь получить оценку

$$\max_{\Omega_K} |\nabla u| \leq M,$$

где M зависит от b, m_K и нормы в C^2 функций, определяющих границу Ω_K $(m_K = \sup\limits_{x,y \in \Omega_K} |\psi(x,y,0)|)$.

Выберем в качестве Ω_K круг радиуса K и устремим l, K к бесконечности. (Уравнение (I) на решениях u_{lK} равномерно эллиптично, что позволяет воспользоваться результатами § I, гл. УI книги [4]). Получим решение уравнения (I) $u(x,y)$, которое определено при всех x, y , и потому удовлетворяет условию (I′).

Единственность решения задачи (I), (I′) следует из результатов работы [5]. Теорема доказана.

З А М Е Ч А Н И Е. Если $\psi(x,y,0)\in C^{\alpha}\cap N,\ \alpha<1$, то, как показывает приведенный ниже пример, классическое решение задачи (I) может не существовать.

П Р И М Е Р. Пусть $\psi(x,y,u)=\psi^*=-bu^*+\frac{\partial}{\partial x}\frac{u^*_x}{\sqrt{1+u^{*2}_x+u^{*2}_y}}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{u^*_y}{\sqrt{1+u^{*2}_x+u^{*2}_y}}$

$$u^*=\begin{cases} c_1 z^2+c_2 z^4+c_3 z^6 & (0\leqslant z\leqslant \frac{1}{2})\\ \int\limits_2^z \frac{1-(1-z)^{4/3}}{(1-z)^{2/3}\sqrt{2-(1-z)^{4/3}}}\,dz=\int\limits_2^z \varphi(z)\,dz & (\frac{1}{2}<z<2)\\ -\frac{1}{3}e^{\frac{1}{z-3}+1}\left(1+\frac{2}{z-3}+\frac{1}{(z-3)^2}\right) & (2\leqslant z\leqslant 3)\\ 0 & (z\geqslant 3) \end{cases},$$

где

$$q_1=\int\limits_2^{\frac{1}{2}}\varphi(z)\,dz,\quad q_2=\varphi(\tfrac{1}{2}),\quad q_3=\varphi'(\tfrac{1}{2});$$

c_1, c_2, c_3 определяются, как решения системы

$$c_1\left(\tfrac{1}{2}\right)^2+c_2\left(\tfrac{1}{2}\right)^4+c_3\left(\tfrac{1}{2}\right)^6=q_1;$$

$$c_1+c_2\cdot\tfrac{1}{2}+c_3\cdot\tfrac{3}{16}=q_2;$$

$$2c_1+3c_2+c_3\cdot\tfrac{15}{8}=q_3.$$

Легко убедиться, что $u^*(x,y)$ – единственное обобщенное решение краевой задачи (I), (I′) при $\psi=\psi^*\in C^{\alpha}\cap N$, и что $|\nabla u^*|$ при $z=1$ неограничен.

В заключение приношу благодарность Н.Н. Уральцевой, которая ознакомилась с содержанием работы и сделала ряд полезных замечаний.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Н.Н. Уральцева. Нелинейные краевые задачи для уравнении типа минимальной поверхности. Труды мат. института им. В.А. Стеклова, II6, 7, I97I.
2. Н.Н. Уральцева. Разрешимость задачи о капиллярах. Вестник ЛГУ, № I9, вып. 4, I973, стр. 54–64.
3. W.E.Johnson, L.M.Perko. Interior and Exterior Boundary Value Problems from the Theory of the Capillary Tubl. Arch. Rat. Mech. Anal., 29, I968.
4. О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, изд-во "Наука," М., I964.
5. С.Н. Бернштейн, Sur les surfaces definies au moyen de leur courbure moyenne ou total. Ann. de l'Ec. Norm (3), 27, 233–256, I9I0.

ON A BOUNDARY PROBLEM OCCURRING IN APPLICATIONS

G. V. Shcherbina

The existence of the classical solution for the following boundary problem $\frac{\partial}{\partial x}\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=\psi(x,y,u)\quad \lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} u(x,y)=0 \quad (1)$ is proved for the case when $\psi(x,y,u)\in C^1,\ \frac{\partial\psi}{\partial u}\geqslant b>0,\ \lim\limits_{x^2+y^2\to\infty}\psi(x,y,0)=0$. It is shown that if $\psi\in C^{\alpha}$, $x^2+y^2\to\infty$, then the classical solution of the problem (1) generally does not exist.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1974 выпуск У

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ НЕПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ НАГРУЗКАХ, БЛИЗКИХ К КРИТИЧЕСКИМ

В.И. Бабенко

Предполагая, что деформация тонких строго выпуклых оболочек после потери устойчивости в основном приближении представляет собой геометрическое изгибание, А.В. Погорелов свел рассмотрение вопроса о потере устойчивости оболочек к решению вариационной задачи для функционала, определенного на разрывных бесконечно малых изгибаниях срединной поверхности недеформированной оболочки [1] . В [2] проведен анализ этой вариационной задачи, в результате чего было получено условие устойчивости общего безмоментного напряженного равновесного состояния непологих строго выпуклых консервативных оболочек. Это же условие в [3] было получено непосредственно из общего вариационного принципа теории оболочек при некоторых исходных предположениях. В [3-6] для изучения потери устойчивости строго выпуклых пологих оболочек был применен асимптотический метод М.И.Вишика и Л.А.Люстерника интегрирования дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных [7]. В частности, в этих работах было показано, что асимптотические представления для послекритических деформаций оболочек можно строить так, чтобы их головная часть описывала деформацию оболочки в том же приближении, что и решения уравнений геометрического метода [1] . В [8] метод [7] был применен к исследованию устойчивости непологих сферических оболочек.

В данной работе, исходя из уравнений теории оболочек Кирхгофа-Лява [9] , асимптотическими методами [7, 10] изучается потеря устойчивости безмоментного равновесного состояния непологих несимметричных строго выпуклых, достаточно тонких анизотропных оболочек и их поведение в начальной послекритической стадии. Строятся асимптотические представления для деформации при нагрузках, близких к критическим. Получен критерий устойчивости оболочек, т.е. обобщен результат работы [2] . Рассмотрено влияние закрепления оболочки вдоль края на ее устойчивость.

I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Запишем систему уравнений нелинейной теории оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа-Лява, в следующей безразмерной форме [9] :

$$(n^{\alpha\beta}-\varepsilon^4 a_*^{\alpha\mu} b_{\mu\nu}^* m^{\nu\beta})_{:\beta}-\varepsilon^4 a_*^{\alpha\mu} b_{\mu\nu}^* m^{\nu\beta}{}_{:\beta}+\varepsilon\left(\vec{P}-\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}\right)\sqrt{\frac{a}{a_*}}\; a_*^{\alpha\mu}\vec{r}_\mu^{\,*}=0; \qquad (\mathrm{I.1})$$

$$\varepsilon^4 m^{\alpha\beta}{}_{:\alpha\beta}+b_{\alpha\beta}^*(n^{\alpha\beta}-\varepsilon^4 a_*^{\beta\mu} b_{\mu\nu}^* m^{\alpha\nu})+\varepsilon\left(\vec{P}-\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}\right)\sqrt{\frac{a}{a_*}}\;\vec{n}_*=0; \qquad (\mathrm{I.2})$$

$$\text{а)}\ n^{\alpha\beta}=k^{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu}; \qquad \text{б)}\ m^{\alpha\beta}=D^{\alpha\beta\mu\nu}\varkappa_{\mu\nu}; \qquad (\mathrm{I.3})$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\equiv\frac{a_{\alpha\beta}^*-a_{\alpha\beta}}{2\varepsilon}=e_{\alpha\beta}+\frac{\varepsilon}{2}(\omega_\alpha\omega_\beta+u_{\nu\alpha}u^{\nu}_{.\beta}); \qquad (\mathrm{I.4})$$

$$\varkappa_{\alpha\beta}\equiv\frac{b_{\alpha\beta}-b_{\alpha\beta}^*}{\varepsilon}=-\Big\{E_3(\omega_{\alpha,\beta}+b_\beta^\nu u_{\nu\alpha})+\frac{E_3-1}{\varepsilon}b_{\alpha\beta}+$$
$$+\varepsilon E^\nu(u_{\nu\alpha,\beta}-\omega_\alpha b_{\nu\beta})\Big\}, \qquad (\mathrm{I.5})$$

$$[\vec{u}] = [\vec{u}_{,1}] = [m^{11}] = [m^{\alpha 1}_{:1} + \frac{\partial m^{12}}{\partial x^2}] = [n^{\alpha 1} + \varepsilon^4 a_*^{\alpha\mu}(-2m^{\nu 1} b^*_{\mu\nu} + m^{11} b^*_{1\mu})] = 0. \quad (I.6)$$

Здесь

$$E_\nu = \sqrt{\frac{a}{a_*}} \{ -\omega_\nu (1 + \varepsilon u^{\mu}_{.\mu}) + \varepsilon \omega_\alpha u^{\alpha}_{.\nu} \}, \quad (I.7)$$

$$E_3 = \sqrt{\frac{a}{a_*}} \{ 1 + \varepsilon u^{\mu}_{.\mu} + \frac{\varepsilon^2}{2} (u^{\alpha}_{.\alpha} u^{\beta}_{.\beta} - u^{\mu}_{.\nu} u^{\nu}_{.\mu}) \}, \quad (I.8)$$

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha\beta} + u_{\beta\alpha}); \quad u_{\alpha\beta} = u_{\alpha,\beta} - w b_{\alpha\beta}, \quad (I.9)$$

$$\omega_\alpha = w_{,\alpha} + u^\nu b_{\nu\alpha}; \quad u_\alpha = \vec{u} \cdot \vec{r}_\alpha; \quad w = \vec{u}\vec{n}; \quad \vec{r}_\alpha = \vec{r}_{,\alpha}; \quad (I.10)$$

$$\vec{n}^* = \varepsilon E^\alpha \vec{r}_\alpha + E_3 \vec{n}; \quad \vec{r}^*_\alpha = (a_{\nu\alpha} + \varepsilon u_{\nu\alpha}) \vec{r}^\nu + \varepsilon \omega_\alpha \vec{n};$$

$$a_{\alpha\beta} = \vec{r}_{,\alpha} \vec{r}_{,\beta}; \qquad b_{\alpha\beta} = -\vec{n}_{,\alpha} \vec{r}_{,\beta};$$

(I.I), (I.2) – полевые уравнения; (I.3) – соотношения упругости; $\varepsilon\, \varepsilon_{\alpha\beta}$, $\varepsilon \varkappa_{\alpha\beta}$ – тензоры деформации и изменения кривизны; (I.6) – условия сшивки решений вдоль линии γ их гладкого сопряжения; характерный размер оболочки (например, ее минимальный главный радиус кривизны) принят равным единице; $eK^{\alpha\beta\mu\nu}$, $\varepsilon^4 eD^{\alpha\beta\mu\nu}$ – тензоры упругих постоянных; e – характерная (размерная) упругая постоянная; ε – малый параметр относительной тонкостенности оболочки; предполагается, что при $\varepsilon \to 0$ отличные от нуля физические компоненты тензоров $K^{\alpha\beta\mu\nu}$ и $D^{\alpha\beta\mu\nu}$ являются величинами порядка единицы (в изотропном случае полагаем $\varepsilon = \sqrt{\delta/\sqrt{12}}$, $e = E\delta$, где δ – толщина оболочки, E – модуль Юнга); $n^{\alpha\beta}$ и $m^{\alpha\beta}$ – симметричные тензоры усилий и моментов; $e\varepsilon^2 \vec{P}$ – вектор плотности внешней поверхностной нагрузки; $t\sqrt{m\delta/\varepsilon e}$ – время, m – плотность материала; $\varepsilon\vec{u}$ – вектор смещений точек срединной поверхности F недеформированной оболочки, $\vec{r}(x^\alpha)$ – радиус-вектор точек поверхности F, являющийся вектор-функцией пары гауссовых поверхностных координат x^α; $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$ – коэффициенты I и II квадратичных форм поверхности F; $a = |a_{\alpha\beta}|$; $\vec{n}$ – нормаль к F.

В данной статье всюду: греческие индексы пробегают значения I,2; принято правило суммирования по повторяющимся индексам; величины, описывающие срединную поверхность F^* деформированной оболочки, в отличие от соответствующих величин, описывающих F, снабжены $*$; жонглирование индексами тензоров производится с помощью фундаментального тензора $a_{\alpha\beta}$ (единственное исключение составляют контравариантные компоненты $a_*^{\alpha\beta}$ фундаментального тензора поверхности F^*); индексы после запятой или двоеточия означают ковариантное дифференцирование соответственно в метрике F или F^*; если компоненты тензоров снабжены цифровыми индексами, то это значит, что они вычислены в локальной полугеодезической системе координат (x^1, x^2), введенной на F на базе линии γ (или ∂F – края F), за координаты x^1, x^2 приняты длины дуг соответственно линий γ (∂F) и геодезических, ортогональных γ (∂F), при этом линия $x^1 = 0$ совмещена с γ (∂F), а область $x^1 > 0$ прилегает к γ (∂F) со стороны ее выпуклости на F; $[f] = f(x^1+0) - f(x^1-0)$ – изменение $f(\vec{r})$ при переходе через линию сшивки решения γ.

Рассматриваются согласованные с вариационным принципом [9] комбинации следующих способов закрепления оболочек вдоль края:

$$(a)\, u_1 = 0; \quad (b)\, u_2 = 0; \quad (c)\, w = 0; \quad (d)\, \omega_1 = 0; \quad (I.II)$$

$$(a,b)\, (n^{\alpha 1} - 2\varepsilon^4 m^{\nu 1} b^*_{\nu\mu} a_*^{\mu\alpha})(\delta^\beta_\alpha + \varepsilon u^{\beta}_{.\alpha}) + \varepsilon^5 (m^{\alpha 1}_{:\alpha} + \frac{\partial m^{12}}{\partial x^2}) E^\beta = 0;$$

$$(c)\; w = 0; \quad (d)\, m^{11} = 0; \quad (I.I2)$$

(I.II) соответствует жесткому закреплению края, а (I.I2) – шарнирному опиранию края, свободного от нормальных и касательных усилий.

Пусть при $t<0$ оболочка находится в безмоментном равновесном состоянии T (докритическом). Сообщим при $t=0$ оболочке малые возмущения, в результате чего смещения точек поверхности F и их скорости получат малые приращения ($\delta\vec{u}, \delta\dot{\vec{u}}$). Тогда, если нагрузка близка к критической, оболочка может потерять устойчивость. Описывая ее деформацию (послекритическую) при $t>0$, за начальные условия берем

$$\vec{u}\Big|_{t=+0} = \vec{u}\Big|_{t=-0} + \delta\vec{u}\ ; \quad \frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\Big|_{t=+0} = \delta\dot{\vec{u}}\ . \tag{I.I3}$$

Начальные возмущения $\delta\vec{u}$ и $\delta\dot{\vec{u}}$, вызывающие потерю устойчивости оболочки с описанными ниже начальными послекритическими деформациями, не могут быть совершенно произвольными. Произвол в их задании должен совпадать с произволом, который допускают построенные ниже асимптотические представления.

Следуя [I] , мы предполагаем, что геометрия и упругие свойства рассматриваемых оболочек, их нагружение и закрепление вдоль края таковы, что общий характер их деформации как в докритической, так и в послекритической стадиях в основном следующий . Почти всюду напряжения, возникающие в оболочках, близки к безмоментным, а деформация оболочек близка к их бесконечно малым геометрическим изгибаниям с разрывами непрерывности вдоль линий (γ), которые соответствуют границам вмятин, появляющихся на поверхности оболочки при ее выпучивании. Эта картина нарушается лишь в малой окрестности линий γ и края оболочки ∂F , где имеет место краевой эффект. При построении асимптотических представлений для решений системы (I.I)-(I.I3), соответствующих описанным выше деформациям, мы применяем метод [7] .

2. ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Асимптотические представления для смещений, определяемых системой (I.I)-(I.I3), ищем в виде рядов $[7]_N$ $(t\neq 0)$:

$$u^{\alpha} \sim u^{\alpha}_{(N)} = \sum_{K=0}^{N} \varepsilon^K \tilde{u}^{\alpha}_{(K)} + S(x^{\beta}) \sum_{K=0}^{N-1} \varepsilon^K \tilde{\tilde{u}}^{\alpha}_{K}\ ,$$
$$w \sim w_{(N)} = \sum_{K=0}^{N} \varepsilon^K \tilde{w}_{(K)} + S(x^{\beta}) \sum_{K=0}^{N-1} \varepsilon^K \tilde{\tilde{w}}_{(K)}\ . \tag{2.I}$$

Здесь $S(x^{\beta})$ - сглаживающая функция, равная нулю всюду на F , кроме окрестности линий γ и ∂F , где $x^1 < \frac{1}{4}\rho_S$; $S(x^{\beta})=1$ при $x^1<\frac{1}{8}\rho_S$; $\rho_S = \min\{\rho(\partial F,\gamma), \rho_{\gamma}, \rho_{\partial F}\}$, где $\rho(\partial F, \gamma)$ - наименьшее расстояние между точками линий γ и ∂F на F ; $\rho_{\gamma}(\rho_{\partial F})$ - наибольшая ширина полосы вдоль $\gamma(\partial F)$, которая ограничена двумя эквидистантами и которую можно выделить в окрестности $\gamma(\partial F)$, где введена локальная полугеодезическая параметризация F .

Уравнения для определения функций $\tilde{u}^{\alpha}_{(K)}$, $\tilde{w}_{(K)}$ получим при помощи I итерационного процесса [7] . Именно, подставим ряды (2.I) при $S(x^{\beta})=0$ в уравнения (I.I)-(I.5), (I.7)-(I.I0) и приравняем в них коэффициенты при одинаковых степенях ε :

$$\tilde{n}^{\alpha\beta}_{(0),\beta} = 0\ ; \quad b_{\mu\nu}\tilde{n}^{\mu\nu}_{(0)} = 0\ ; \quad \tilde{\varepsilon}^{(0)}_{\alpha\beta} = \tilde{e}^{(0)}_{\alpha\beta}\ , \tag{2.2}$$

$$\tilde{n}^{\alpha\beta}_{(K),\beta} + \left(\tilde{\vec{P}}_{(K-1)} - \frac{\partial^2 \tilde{\vec{u}}_{(K-1)}}{\partial t^2}\right)\vec{r}^{\alpha} = \tilde{N}^{\alpha}_{(K)}\ , \tag{2.3}$$

$$b_{\alpha\beta}\tilde{n}^{\alpha\beta}_{(K)} + \left(\tilde{\vec{P}}_{(K-1)} - \frac{\partial^2 \tilde{\vec{u}}_{(K-1)}}{\partial t^2}\right)\vec{n} = \tilde{N}_{(K)}\ , \tag{2.4}$$

$$\tilde{\varepsilon}^{(K)}_{\alpha\beta} = \tilde{e}^{(K)}_{\alpha\beta} + \tilde{N}^{(K)}_{\alpha\beta} \qquad (\tilde{N}^{\alpha}_{(1)} = \tilde{N}_{(1)} = 0). \tag{2.5}$$

Здесь $1 \leqslant K \leqslant N$; через $\tilde{f}_{(K)}$ обозначен K -тый коэффициент разложения функции смещений $f(u^{\alpha}_{(N)}, w_{(N)})$ в ряд по степеням ε при $S(x^{\beta})=0$; $\tilde{n}^{\alpha\beta}_{(K)}$ и $\tilde{e}^{(K)}_{\alpha\beta}, \tilde{\omega}^{(K)}_{\alpha}$, $\tilde{u}^{(K)}_{\alpha\beta}$ выражаются соответственно через $\tilde{\varepsilon}^{(K)}_{\alpha\beta}$ и $\tilde{u}^{(K)}_{\alpha}$, $\tilde{w}_{(K)}$ по формулам (I.3) и (I.9), (I.I0); в $\tilde{N}^{\alpha}_{(K)}$ и $\tilde{N}_{(K)}$ включены члены, не содержащие $\tilde{n}^{\alpha\beta}_{(s)}$ и $\tilde{\vec{u}}_{(s-1)}$, а в $\tilde{N}^{(K)}_{\alpha\beta}$ - члены, не содержащие $\tilde{\vec{u}}_{(s)}$, где $s \geqslant K$.

Решение головной системы (2.2), описывающее деформацию оболочки в основном приближении, ищем среди бесконечно малых изгибаний срединной поверхности. Искомые бесконечно малые изгибания могут иметь разрывы непрерывности вдоль линий γ , что соответствует потере устойчивости оболочки с образованием вмятин вдали от края ∂F [I] . Так как $\tilde{n}^{\alpha\beta}_{(0)}=0$, то в основном приближении напряженное состояние описывается усилиями $\tilde{n}^{\alpha\beta}_{(1)}$.

К системам уравнений (2.2)-(2.5), определяющим функции I итерационного процесса при $t>0$, следует присоединить также начальные условия, получаемые из (I.I3), (2.I) ($\kappa\geqslant 0$),

$$\vec{\tilde{u}}_{(\kappa)}\Big|_{t=+0}=\vec{\tilde{u}}_{(\kappa)}\Big|_{t=-0}+\delta\vec{\tilde{u}}_{(\kappa)};\quad \frac{\partial\vec{\tilde{u}}_{(\kappa)}}{\partial t}\Big|_{t=+0}=\delta\vec{\tilde{u}}_{(\kappa)} . \tag{2.5a}$$

С помощью асимптотических представлений (2.I), построенных на базе только функций I итерационного процесса $\tilde{u}^{(\kappa)}_{\alpha}$, $\tilde{w}_{(\kappa)}$ $(S(x^{\beta})\equiv 0)$, нельзя удовлетворить полностью граничным условиям, к тому же они могут быть разрывными. Сглаживание асимптотики и удовлетворение граничным условиям достигается одновременным рассмотрением первых и вторых сумм в (2.I). Погранслойные функции $\overset{\approx}{u}^{(\kappa)}_{\alpha}$, $\overset{\approx}{w}_{(\kappa)}$ из вторых сумм в (2.I) определены в ε - окрестностях линий γ и ∂F . Процесс построения уравнений для $\overset{\approx}{u}^{(\kappa)}_{\alpha}$, $\overset{\approx}{w}_{(\kappa)}$ как в ε-окрестности линии γ , так и в ε - окрестности линии ∂F одинаков, к тому же окончательная форма уравнений в обеих окрестностях также совпадает. Поэтому для определенности будем говорить об окрестности линии $\gamma(x^1=0)$.

Уравнения для погранслойных функций $\overset{\approx}{u}^{(\kappa)}_{\alpha}$, $\overset{\approx}{w}_{(\kappa)}$, определяемых в ε - окрестности линии $x^1=0$, получаем при помощи II итерационного процесса. Именно, полагая $S(x^{\beta})\equiv 1$, подставляем ряды (2.I) в уравнения (I.I)-(I.5), (I.7)-(I.I0) и преобразовываем последние с учетом уравнений (2.2)-(2.5). Рассматривая преобразованные таким образом уравнения в ε-окрестности линий $x^1=0$, отнесенной к полугеодезической системе координат x^1, x^2 , разлагаем все функции, входящие в эти уравнения (кроме погранслойных), в ряды Тейлора по x^1 при $x^1=0$ и полагаем $x^1=\varepsilon s$. Приравнивая, наконец, в рассматриваемых уравнениях коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем искомую систему уравнений II итерационного процесса. Выпишем уравнения, определяющие функции $\overset{\approx}{u}^{(0)}_{\alpha}$, $\overset{\approx}{w}_{(0)}$.

Обозначим через $\overset{\approx}{f}_{(\kappa)}$ коэффициенты разложения в ряд по степеням разности

$$f(u^{\alpha}_{(N)},\, w_{(N)})-\varepsilon^{\kappa}\tilde{f}_{(\kappa)} , \tag{2.6}$$

составленной при $S(x^{\beta})\equiv 1$ для величин f , определяемых смещениями $\vec{u}$. Из уравнений (I.3) следует, что $\overset{\approx}{m}^{\alpha\beta}_{(\kappa)}$ и $\overset{\approx}{n}^{\alpha\beta}_{(\kappa)}$ выражаются соответственно через $\overset{\approx}{\varkappa}^{(\kappa)}_{\alpha\beta}$ и $\overset{\approx}{\varepsilon}^{(\kappa)}_{\mu\nu}$ по формулам вида (I.3). Из уравнений (I.3)-(I.5), (I.7)-(I.I0), (2.I) находим, что разложение в ряд по степеням ε разности (2.6), составленной для $m^{\alpha\beta}$ и $\varkappa_{11}$, начинается со слагаемых порядка ε^{-2} ; для $n^{\alpha\beta}$, ε_{11} , ε_{12} , $\varkappa_{12}$, $\varkappa_{22}$ - со слагаемых порядка ε^{-1} , для ε_{22} - порядка ε . Имеем:

$$\overset{\approx}{\varepsilon}^{11}_{(-1)}=\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{\partial\overset{\approx}{u}^{(0)}_{1}}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial\overset{\approx}{u}^{(0)}_{2}}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial\overset{\approx}{w}_{(0)}}{\partial s}\right)^2-1\right];$$

$$\overset{\approx}{\varepsilon}^{(0)}_{22}=\frac{\overset{\approx}{u}^{(0)}_{1}\cos\varphi+\overset{\approx}{w}_{(0)}\sin\varphi}{\rho};\qquad \varepsilon^{(-1)}_{12}=\frac{1}{2}\,\frac{\partial\overset{\approx}{u}^{(0)}_{2}}{\partial s};$$

$$\overset{\approx}{b}^{*11}_{(-1)}=-\varkappa^{(-2)}_{11}=\left[\left(1+\frac{\partial\overset{\approx}{u}^{(0)}_{1}}{\partial s}\right)\frac{\partial^2\overset{\approx}{w}_{(0)}}{\partial s^2}-\frac{\partial\overset{\approx}{w}_{(0)}}{\partial s}\cdot\frac{\partial^2\overset{\approx}{u}^{(0)}_{1}}{\partial s^2}\right]\sqrt{\frac{a|_{s=0}}{\overset{\approx}{a}^{*}_{(0)}}};$$

$$\overset{\approx}{b}^{*(0)}_{22}=b_{22}\Big|_{s=0}-\varkappa^{(-1)}_{22}=\frac{1}{\rho}\left[\sin\varphi\left(1+\frac{\partial\overset{\approx}{u}^{(0)}_{1}}{\partial s}\right)-\cos\varphi\,\frac{\partial\overset{\approx}{w}_{(0)}}{\partial s}\right]\cdot\sqrt{\frac{a|_{s=0}}{\overset{\approx}{a}^{*}_{(0)}}} . \tag{2.6a}$$

Здесь учтено, что в рассматриваемой локальной полугеодезической параметризации поверхности F при $s=0$ имеют место равенства

$$a_{11}=a_{22}=1;\qquad a_{12}=0;\qquad a=1; \tag{2.6b}$$

а отличные от нуля символы Христофеля [II] имеют вид

$$\Gamma^1_{12} = -\Gamma^1_{22} = \frac{\cos\varphi}{\rho}. \qquad (2.6c)$$

Жонглирование индексами у тензоров типа $\tilde{\tilde{f}}^{(k)}_{\alpha\beta}$ здесь и в дальнейшем производится с помощью $a_{\alpha\beta}$ из (2.6b); φ - угол между бинормалью к линии $s=0$ и нормалью к F ; ρ - радиус кривизны линии $s=0$; $b_{22}\big|_{s=0} = -\frac{\sin\varphi}{\rho}$.

Приравнивая нулю коэффициенты при ε^{-2} в уравнениях (I.I), (I.2), находим

$$\tilde{\tilde{n}}^{11}_{(-1)} = 0; \qquad \tilde{\tilde{n}}^{12}_{(-1)} = 0. \qquad (2.7)$$

Поэтому

$$\tilde{\tilde{\varepsilon}}^{11}_{(-1)} = 0; \qquad \tilde{\tilde{\varepsilon}}^{(-1)}_{12} = 0; \quad \tilde{\tilde{n}}^{22}_{(-1)} = 0. \qquad (2.8)$$

С учетом того, что погранслойные функции $\tilde{\tilde{u}}^{\alpha}_{(k)}$, $\tilde{\tilde{w}}_{(k)}$ должны исчезать при $s=\pm\infty$, из второго уравнения в (2.8) и третьего в (2.6a) находим

$$\tilde{\tilde{u}}^{(0)}_2 = 0. \qquad (2.9)$$

Первое уравнение в (2.8) удовлетворяем тождественно, вводя вспомогательный угол φ_* - функцию смещений по формулам

$$\frac{\partial \tilde{\tilde{w}}_{(0)}}{\partial s} = -\sin(\varphi_* - \varphi); \qquad 1 + \frac{\partial \tilde{\tilde{u}}^{(0)}_1}{\partial s} = \cos(\varphi_* - \varphi), \qquad (2.10)$$

тогда

$$\tilde{\tilde{\varkappa}}^{(-2)}_{11} = \frac{\partial\varphi_*}{\partial s}; \qquad \tilde{\tilde{\varkappa}}^{(-1)}_{22} = \frac{\sin\varphi - \sin\varphi_*}{\rho};$$

$$\frac{\partial \tilde{\tilde{\varepsilon}}^{(0)}_{22}}{\partial s} = \frac{\cos\varphi_* - \cos\varphi}{\rho}. \qquad (2.10a)$$

Приравнивая нулю коэффициенты при ε^{-1}, ε в уравнениях (I.I), (I.2), получаем

$$\tilde{\tilde{n}}^{11}_{(0)} = 0; \qquad \tilde{\tilde{n}}^{12}_{(0)} = 0; \qquad (2.11)$$

$$\frac{\partial \tilde{\tilde{T}}^{11}_{(1)}}{\partial s} + \frac{\partial\varphi_*}{\partial s}\tilde{\tilde{N}}^{1}_{(-3)} - \tilde{\tilde{n}}^{22}_{(0)}\frac{\cos\varphi_*}{\rho} = 0; \qquad (2.11a)$$

$$\frac{\partial \tilde{\tilde{n}}^{21}_{(1)}}{\partial s} + \frac{\partial \tilde{\tilde{n}}^{22}_{(0)}}{\partial s} = 0; \qquad (2.11b)$$

$$\frac{\partial \tilde{\tilde{N}}^{1}_{(-3)}}{\partial s} - \frac{\partial\varphi_*}{\partial s}\left(\tilde{\tilde{T}}^{11}_{(1)} + \tilde{\tilde{n}}^{11}_{(1)}\right) - \tilde{\tilde{n}}^{22}_{(0)}\frac{\sin\varphi_*}{\rho} = 0. \qquad (2.11c)$$

Здесь введены следующие обозначения для нормальных и перерезывающих усилий:

$$\tilde{\tilde{T}}^{11}_{(1)} = \tilde{\tilde{n}}^{11}_{(1)} - \tilde{\tilde{b}}^{*(-1)}_{11}\tilde{\tilde{m}}^{11}_{(-2)}; \qquad \tilde{\tilde{N}}^{1}_{(-3)} = \frac{\partial \tilde{\tilde{m}}^{11}_{(-2)}}{\partial s}.$$

Перепишем систему (2.11a), (2.11c):

$$\frac{\partial \tilde{\tilde{V}}_{(1)}}{\partial s} = 0; \qquad \frac{\partial \tilde{\tilde{H}}_{(1)}}{\partial s} = \frac{n^{22}_{(0)}}{\rho}, \qquad (2.11d)$$

где введены составляющие усилий по бинормали и по главной нормали к линии $s=0$ (на F_*):

$$\tilde{\tilde{V}}_{(1)} = -(\tilde{\tilde{T}}^{11}_{(1)} + \tilde{\tilde{n}}^{11}_{(1)})\sin\varphi_* + \tilde{\tilde{N}}^{1}_{(-3)}\cos\varphi_*,$$

$$\tilde{\tilde{H}}_{(1)} = -(\tilde{\tilde{T}}^{11}_{(1)} + \tilde{\tilde{n}}^{11}_{(1)})\cos\varphi_* - \tilde{\tilde{N}}^{1}_{(-3)}\sin\varphi_*.$$

Введем функцию усилий ψ по формуле

$$\tilde{\tilde{n}}^{22}_{(0)} = \rho\frac{\partial\psi}{\partial s}; \qquad (2.12)$$

тогда система (2.11 b, d) будет допускать три первых интеграла

$$\tilde{\tilde{n}}^{21}_{(1)} = -\frac{\partial}{\partial x^2}(\rho\psi), \tag{2.13}$$

$$\tilde{\tilde{V}}_{(1)}(s) = -\tilde{\tilde{n}}^{11}_{(1)} \sin\varphi = const; \qquad \tilde{\tilde{H}}_{(1)} = -\psi - n^{11}_{(1)}\cos\varphi, \tag{2.13a}$$

откуда

$$\tilde{\tilde{n}}^{11}_{(1)} = -\tilde{n}^{11}_{(1)}[1-\cos(\varphi_* - \varphi)] + \psi\cos\varphi_* - \frac{\partial\varphi_*}{\partial s}\tilde{\tilde{m}}^{11}_{(-2)}. \tag{2.14}$$

Кроме перечисленных выше величин, через φ_* и ψ можно также определить $\tilde{\tilde{\varepsilon}}^{(0)}_{\alpha\beta}$ и $\tilde{\tilde{u}}^{(1)}_2$. Действительно, разрешив первые равенства из (1.3) относительно $\varepsilon_{\mu\nu}$ и обозначив соответствующие коэффициенты при $n^{\alpha\beta}$ через $K^{-1}_{\mu\nu\,\alpha\beta}$, находим с учетом (2.11), (2.12)

$$\tilde{\tilde{\varepsilon}}^{(0)}_{\mu\nu} = K^{-1}_{\mu\nu\,22}\Big|_{s=0}\ \rho\frac{\partial\psi}{\partial s}; \tag{2.14a}$$

с другой стороны,

$$\tilde{\tilde{\varepsilon}}^{(0)}_{12} = \frac{1}{2}\Big[\frac{\partial\tilde{\tilde{u}}^{(1)}_2}{\partial s} + \frac{\partial\tilde{\tilde{u}}^{(0)}_1}{\partial x^2} - 2\frac{\cos\varphi}{\rho}\tilde{\tilde{u}}^{(0)}_1 - 2\tilde{\tilde{w}}_{(0)}b_{12}\Big|_{s=0} +$$
$$+\cos(\varphi_* - \varphi)\big(\tilde{u}^{(0)}_{12}\Big|_{s=0} + \tilde{\tilde{u}}^{(0)}_{12}\big) -$$
$$-\sin(\varphi_* - \varphi)\big(\tilde{\omega}^{(0)}_2\Big|_{s=0} + \tilde{\tilde{\omega}}^{(0)}_2\big)\Big];$$

$$\tilde{\tilde{\varepsilon}}^{(0)}_{11} = \Big[\frac{\partial\tilde{\tilde{u}}^{(1)}_1}{\partial s} - \tilde{\tilde{w}}_{(0)}b_{11}\Big|_{s=0}\Big]\cos(\varphi_* - \varphi) -$$
$$-\Big[\frac{\partial\tilde{\tilde{w}}_{(1)}}{\partial s} + \tilde{\tilde{u}}^{(0)}_1 b_{11}\Big|_{s=0} + \tilde{\omega}^{(0)}_1\Big|_{s=0}\Big]\sin(\varphi_* - \varphi),$$

откуда
$$\tilde{\tilde{u}}^{(1)}_2 = 2K^{-1}_{1222}\Big|_{s=0}\rho\psi + \int_s^\infty\Big[\frac{\partial\tilde{\tilde{u}}^{(0)}_1}{\partial s} -$$
$$-2\frac{\cos\varphi}{\rho}\tilde{\tilde{u}}^{(0)}_1 - 2\tilde{\tilde{w}}_{(0)}b_{12}\Big|_{s=0} +$$
$$+(\tilde{u}^{(0)}_{12}\Big|_{s=0} + \tilde{\tilde{u}}^{(0)}_{12})\cos(\varphi_* - \varphi) - (\tilde{\omega}^{(0)}_2\Big|_{s=0} + \tilde{\tilde{\omega}}^{(0)}_2)\sin(\varphi_* - \varphi), \tag{2.14b}$$

$$\frac{\partial\tilde{\tilde{u}}^{(1)}_1}{\partial s}\cos(\varphi_* - \varphi) - \frac{\partial\tilde{\tilde{w}}_{(1)}}{\partial s}\sin(\varphi_* - \varphi) = K^{-1}_{1122}\Big|_{s=0}\rho\frac{\partial\psi}{\partial s} + \tilde{\tilde{w}}_0 b_{11}\Big|_{s=0}\cos(\varphi_* - \varphi) +$$
$$+\Big[\tilde{\tilde{u}}^{(0)}_1 b_{11}\Big|_{s=0} + \tilde{\omega}^{(0)}_1\Big|_{s=0}\Big]\sin(\varphi_* - \varphi) \tag{2.14c}$$

(2.14b) определяет $\tilde{\tilde{u}}^{(1)}_2$, а (2.14c) является первым соотношением, определяющим $\tilde{\tilde{u}}^{(1)}_1$, $\tilde{\tilde{w}}_{(1)}$ через φ_* и ψ.

Исключая из (2.13a) $\tilde{\tilde{n}}^{11}_{(1)}$, находим первое уравнение для определения φ_* и ψ:

$$\frac{\partial^2\varphi_*}{\partial s^2}D^{1111}\Big|_{s=0} = \psi\sin\varphi_* + \tilde{n}^{11}_{(1)}\sin(\varphi_* - \varphi). \tag{2.15a}$$

Вторым уравнением является условие совместности, получаемое подстановкой $\tilde{\tilde{\varepsilon}}^{(0)}_{22}$ из (2.14a) в третье уравнение (2.10a):

$$\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}K^{-1}_{2222}\Big|_{s=0} = \frac{\cos\varphi_* - \cos\varphi}{\rho}; \tag{2.15b}$$

Для определения введенных выше вспомогательных функций $\varphi_*(s)$ и $\psi(s)$ получается следующая система уравнений:

$$\frac{d^2\Psi}{d\bar{s}^2} + \sin\Phi + 2ctg\,\varphi\cdot\sin^2\Phi/2 = 0\,, \tag{2.15}$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\bar{s}^2} - \Psi + 2\sigma\sin\Phi - ctg\,\varphi\cdot\Psi\cdot\sin\Phi + 2\Psi\sin^2\frac{\Phi}{2} = 0,$$

$$(\Phi(\pm\infty) = \Psi(\pm\infty) = 0).$$

Здесь $\Phi = \varphi_* - \varphi\,; \qquad \Psi = \rho\psi\left(\frac{K^{-1}_{2222}}{D^{1111}}\right)^{1/2}\Big|_{s=0}\,;$

$$\bar{s} = s\left(\frac{\sin^2\varphi}{\rho^2 D^{1111} K^{-1}_{2222}}\right)^{1/4}\Big|_{s=0}\,; \tag{2.16}$$

$$\sigma = \frac{1}{2}\left[\frac{\tilde{n}^{11}_{(1)}}{b_{22}}\left(\frac{K^{-1}_{2222}}{D^{1111}}\right)^{1/2}\right]\Big|_{s=0}\,.$$

Аналогичные уравнения получаются для определения погранслойных функций $\tilde{\tilde{w}}_{(k)}$, $\tilde{\tilde{u}}^{(k)}_{\alpha}$ ($1 \leq k \leq N-1$). Именно:

$$\frac{\partial\tilde{\tilde{u}}^{(k)}_1}{\partial s} = \varphi_k\sin(\varphi_* - \varphi) + (*)\,; \qquad \frac{\partial\tilde{\tilde{w}}_{(k)}}{\partial s} = \varphi_k\cos(\varphi_* - \varphi) + (*)\,; \tag{2.17}$$

$$\tilde{\tilde{\varkappa}}^{(k-1)}_{22} = -\frac{\varphi_k\cos\varphi_*}{\rho} + (*)\,; \qquad \tilde{\tilde{\varkappa}}^{(k-2)}_{11} = \frac{\partial\varphi_k}{\partial s} + (*)\,; \tag{2.18}$$

$$\tilde{\tilde{n}}^{22}_{(k)} = \rho\frac{\partial\psi_k}{\partial s}\,; \qquad \frac{\partial\tilde{\tilde{\varepsilon}}^{(k)}_{22}}{\partial s} = \frac{\varphi_k\sin\varphi_*}{\rho} + (*)\,; \tag{2.18a}$$

$$\tilde{\tilde{n}}^{12}_{(k+1)} = \frac{\partial}{\partial x^2}(\rho\psi_k) + (*)\,; \qquad \tilde{\tilde{n}}^{11}_{(k+1)} = -2\frac{\partial\varphi_*}{\partial s}\tilde{\tilde{m}}^{11}_{(k-2)} + $$
$$+ \varphi_k\frac{\partial\tilde{\tilde{m}}^{11}_{(-2)}}{\partial s} + \psi_k\cos\varphi_* + \tilde{n}^{11}_{(k+1)}\left[\cos(\varphi_* - \varphi) - 1\right] + (*)\,. \tag{2.19}$$

Вспомогательные функции φ_k и ψ_k определяются уравнениями:

$$\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial s^2}D^{1111}\Big|_{s=0} = \left[\tilde{n}^{11}_{(1)}\cos(\varphi_* - \varphi) + \psi\cos\varphi_*\right]\varphi_k - $$
$$- \psi_k\sin\varphi_* - \tilde{n}^{11}_{(k+1)}\sin(\varphi_* - \varphi) + (*)\,; \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial^2\psi_k}{\partial s^2}K^{-1}_{2222}\Big|_{s=0} = -\frac{\sin\varphi_*}{\rho^2}\varphi_k + (*)\,; \qquad (\psi_k(\pm\infty) = \varphi_k(\pm\infty) = 0).$$

Здесь через ($*$) обозначены слагаемые, не содержащие φ_k, ψ_k. Они определяются через $\tilde{\tilde{u}}^{(i)}_1$, $\tilde{\tilde{w}}_{(i)}$, $\tilde{u}_{(i-1)}$, $\tilde{n}^{\alpha\beta}_i$, где $i \leq k-1$. Функции $\tilde{\tilde{u}}^{(k+1)}_2$ определяются через φ_k, ψ_k в квадратурах.

Мы не будем здесь выписывать уравнения для определения погранслойных функций $\tilde{\tilde{u}}^{(k)}_{\alpha}$, $\tilde{\tilde{w}}_{(k)}$ в ϵ - окрестности края ∂F, т.к. они совпадают с уравнениями (2.6а)-(2.20), если в них все величины, определяющие геометрию поверхности F в окрестности линии γ, отнести соответственно к краю ∂F.

Условия сшивки вдоль γ для коэффициентов рядов (2.1) получим, подставляя (2.1) в следующие соотношения, эквивалентные (1.6),

$$[\vec{u}] = [n^{1\alpha}] = \left[\frac{\partial w}{\partial s}\right] = [\varkappa_{11}] = \left[\frac{\partial\varkappa_{11}}{\partial s}\right] = 0.$$

Используя уравнения (2.1)-(2.20), условиям сшивки можно придать следующий вид:

$$[\tilde{n}^{12}_{(1)}] = [\tilde{n}^{11}_{(1)}] = 0, \tag{2.21}$$

$$[\psi]=\left[\frac{\partial\psi}{\partial s}\right]=[\varphi_*]=\left[\frac{\partial\varphi_*}{\partial s}\right]=0\,, \qquad (2.22)$$

$$(a)\quad \tilde{u}^{(0)}_{2}=0 \qquad (b)\quad [\tilde{V}_{(0)}]=-\,[\tilde{\tilde{V}}_{(0)}]\,, \qquad (2.23)$$

$$[\tilde{n}^{12}_{(k+1)}]+(*)=[\tilde{n}^{11}_{(k+1)}]+(*)=0\,, \qquad (2.24)$$

$$[\psi_k]+(*)=\left[\frac{\partial\psi_k}{\partial s}\right]+(*)=$$
$$=[\varphi_k]+(*)=\left[\frac{\partial\varphi_k}{\partial s}\right]+(*)=0\,, \qquad (2.25)$$

$$[\tilde{u}^{2}_{(k)}]+(*)=[\tilde{V}_{(k)}]+[\tilde{\tilde{V}}_{(k)}]=0\,. \qquad (2.26)$$

Здесь $1\le k\le N-1$, V - проекция вектора смещений на бинормаль к γ. Краевые условия на ∂F получаем из условий закрепления края.

3. КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧЕК

Возможность потери устойчивости оболочки с образованием на ее поверхности вмятин вдали от края ∂F при начальных послекритических деформациях связана с возможностью аппроксимации последних в основном приближении разрывными бесконечно малыми изгибаниями ее срединной поверхности F с разрывами непрерывности вдоль линий γ, не совпадающих с краем ∂F и соответствующих границам вмятин [1]. Величина разрывов в начальной послекритической стадии мала, поэтому малыми будут и сглаживающие деформации $\tilde{\tilde{u}}^{(0)}_{\alpha}$, $\tilde{\tilde{W}}_{(0)}$ в ε-окрестности линии γ. При докритических деформациях форма оболочки существенно не изменяется (на ее поверхности не появляются вмятины), поэтому докритические деформации в основном приближении аппроксимируются непрерывными (в частности тождественно равными нулю) бесконечно малыми изгибаниями F. Итак, докритическим деформациям соответствуют тривиальные решения системы (2.15), (2.21), (2.22) в ε-окрестности γ, а начальным послекритическим деформациям - малые нетривиальные решения. Вопрос об определении верхней критической нагрузки сводится таким образом к определению нагрузок (значений параметра σ, при которых система (2.15), (2.21), (2.22) имеет малые нетривиальные решения, и построению этих решений.

Ограничимся исследованием этого вопроса для случая, когда вмятина не мала (не накрывается ε-окрестностью) и в ε-окрестности ее границы γ нет точек ни края ∂F, ни границы соседних вмятин (если таковые имеются). Тогда искомые сглаживающие деформации можно искать среди четных функций $\Phi(\bar{s})$ и $\Psi(\bar{s})$, а задача об их определении сводится к решению системы (2.15) на полуоси $\bar{s}>0$ с граничными условиями

$$(a)\quad \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{s}}=0\,, \qquad (b)\quad \frac{\partial\Psi}{\partial\bar{s}}=0 \qquad \text{при} \qquad \bar{s}=0\,,$$
$$(c)\quad \Phi(+\infty)=0\,, \qquad (d)\quad \Psi(\pm\infty)=0\,. \qquad (3.1a)$$

Эта задача имеет нетривиальные решения тогда, когда линеаризованная в окрестности тривиального решения $\Phi=\Psi=0$ система (2.15), (3.1a) имеет не единственное решение. При положительных [2] σ последнее имеет место только при $\sigma=1$. Таким образом, начальные послекритические деформации возможны только тогда, когда $1-\sigma$ мало, а т.к. при этом нагрузка близка к критической и вклад инерционных членов еще мал в суммарные усилия $\tilde{n}^{\alpha\beta}_{(1)}$, коль скоро малы начальные возмущения (2.3), то при этом должна быть малой разность $1-\sigma|_{t=-0}$.

Итак, рассматриваемое безмоментное равновесное состояние T данной оболочки будет устойчивым, если

$$\min_{(F,\gamma)}(1-\sigma_T)>0\,, \qquad (\sigma_T\equiv\sigma|_{t<0})\,. \qquad (3.1)$$

Минимум берется здесь по внутренним точкам поверхности F и по возможным направлениям линий разрывов γ в этих точках. Оболочка может потерять устойчивость с выпучиванием ее части вдали от края, если

$$\sigma_* = \max_{(F,\gamma)} \sigma_\tau = 1. \tag{3.2}$$

В случае изотропных оболочек условия (3.I), (3.2) упрощаются и переходят в соответствующие условия, полученные в работах [2], [3].

Условие (3.2), вообще говоря, не является достаточным для того, чтобы оболочка потеряла устойчивость с выпучиванием вдали от края, т.к. при достижении (3.2) следует также выяснить вопрос о существовании соответствующего бесконечно малого разрывного изгибания и возможность построения последующих асимптотик, что в конечном счете определяется условиями закрепления оболочки. Прежде чем приступить к выяснению этих вопросов, построим нетривиальное решение системы (2.15), (3.Iа).

4. ПОСТРОЕНИЕ МАЛОГО НЕТРИВИАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ГОЛОВНОЙ СИСТЕМЫ И ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА В ОКРЕСТНОСТИ ЛИНИЙ РАЗРЫВА

В начальной послекритической стадии величина

$$\beta^2 = \sqrt{1-\sigma} \tag{4.I}$$

мала. Это позволяет также, как и в случае пологих оболочек [6], при построении малых решений системы (3.I5), (3.Iа) применить метод [9]. Именно, в (2.I5) представим тригонометрические функции в виде рядов и отбросим в (3.I5) нелинейные члены порядка выше четвертого. Тогда наша задача сведется к решению следующей системы:

$$\frac{d^2\xi}{d\bar{s}^2} + \xi \qquad - 2\beta^2(\eta+\xi) - \beta F = 0, \tag{4.2}$$

$$\frac{d^2\eta}{d\bar{s}^2} + \eta - 2\xi - 2\beta^2(\eta+\xi) - \beta f = 0, \tag{4.3}$$

$$\frac{d\xi}{d\bar{s}} = 0; \qquad \frac{d\eta}{d\bar{s}} = 0; \quad \text{при} \quad \bar{s} = 0, \tag{4.4}$$

$$\xi(\infty) = \eta(\infty) = 0. \tag{4.5}$$

Здесь

$$F = \cos\varphi\,\frac{(\eta+\xi)(3\eta-\xi)}{4} + \beta\sin^2\varphi\,\frac{(\eta+\xi)^2}{6}(-\eta+2\xi) + \beta^2\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi\,\frac{(\eta+\xi)^3}{48}(-5\eta+3\xi) + \ldots, \tag{4.6}$$

$$f = \cos\varphi\,\frac{(\eta+\xi)(\eta-3\xi)}{4} + \beta\sin^2\varphi\,\frac{(\eta+\xi)^2}{2}\xi + \beta^2\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi\,\frac{(\eta+\xi)^3}{48}(-3\eta+5\xi) + \ldots; \tag{4.7}$$

$$\xi = \frac{\Phi-\Psi}{2\beta\sin\varphi}; \qquad \eta = \frac{\Phi+\Psi}{2\beta\sin\varphi}. \tag{4.8}$$

Асимптотическое представление для решений системы (4.2)-(4.5) при малых β ищем в виде рядов

$$\eta = a\cos b + \sum_{k=1} \beta^k \eta_k(a,b),$$
$$\xi = \sum_{k=1} \beta^k \xi_k(a,b), \tag{4.9}$$

где $\eta_k(a,b)$ и $\xi_k(a,b)$ периодические функции аргумента b с периодом 2π. Функции $a(\bar{s})$ и $b(\bar{s})$ определяются дифференциальными уравнениями

$$\frac{da}{d\bar{s}} = \sum_{\kappa=1} A_\kappa(a)\beta^\kappa,$$
$$\frac{d\theta}{d\bar{s}} = 1 + \sum_{\kappa=1} B_\kappa(a)\beta^\kappa. \tag{4.10}$$

Подставляя (4.9), (4.10) в (4.2), (4.3) и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях β, получим систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка для определения η_κ и ξ_κ как функций угла θ. Первую гармонику функций $\xi_\kappa(a,\theta)$ определяем из (4.3) так, чтобы $\eta_\kappa(a,\theta)$ были периодическими функциями угла θ. Имеющийся произвол в определении функций $\eta_\kappa(a,\theta)$ устраняется требованием, чтобы $\eta_\kappa(a,\theta)$ не содержали первых гармоник. Функции $A_\kappa(a)$, $B_\kappa(a)$ определяются из (4.2) так, чтобы $\xi_\kappa(a,\theta)$ были периодическими функциями угла θ. Для определения A_1, B_1 получим систему нелинейных дифференциальных уравнений, а для A_κ, B_κ $(\kappa > 1)$ – линейных уравнений. Появляющиеся две произвольные постоянные при интегрировании системы (4.10) находим из условий (4.4).

Описанным выше способом (см. также [6]) мы нашли асимптотическое представление для η и ξ в третьем приближении

$$\eta = a\cos\theta + \beta\eta_1 + \beta^2\eta_2; \qquad \xi = \beta\xi_1 + \beta^2\xi_2, \tag{4.11}$$

где

$$\frac{da}{d\bar{s}} = \beta A_1 + \beta^3 A_3; \qquad \frac{d\theta}{d\bar{s}} = 1 + \beta^2 B_2;$$
$$\eta_1 = \frac{a^2}{8}(-5 - \cos 2\theta)\cos\varphi; \qquad \xi_1 = \frac{a^2}{8}(3 - \cos 2\theta)\cos\varphi + A_1 \sin\theta;$$
$$\eta_2 = \frac{a^3\cos\varphi}{4\cdot 64}\left(\cos^2\varphi + \frac{\sin^2\varphi}{3}\right)\cos 3\theta + \frac{7}{12}aA_1\cos\varphi\sin 2\theta;$$
$$\xi_2 = \frac{a^3\cos\varphi}{64}\left(\cos^2\varphi + \frac{\sin^2\varphi}{3}\right)\cos 3\theta + \frac{aA_1}{4}\cos\varphi\sin 2\theta -$$
$$- a^3\,\frac{11\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{64}\cos\theta;$$
$$A_1 = -a\sqrt{1 - \frac{7\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{32}a^2};$$
$$A_2 = B_1 = B_3 = 0;$$
$$B_2 = -\frac{1}{2} - \frac{9}{64}a^2\left(\cos^2\varphi + \frac{\sin^2\varphi}{3}\right);$$
$$a(\bar{s}) = a_1(\bar{s}) + \beta^2 a_2(\bar{s}) + O(\beta^4); \qquad \theta = \bar{s} + \beta^2\int_0^{\bar{s}} B_2(a)\,ds + O(\beta^4);$$
$$a_1(\bar{s}) = \frac{\sqrt{32/(7\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}}{ch\beta(\bar{s} + \bar{s}_0)}; \qquad \bar{s}_0 = O(\beta).$$

Используя асимптотическое представление (4.11), была найдена в основном приближении величина разрыва $[\tilde{V}_{(0)}]$. Именно,

$$[\tilde{V}_{(0)}] = -[\tilde{\tilde{V}}_{(0)}] = 16\beta\,\frac{(\rho^2 D^{1111} K^{-1}_{2222}\sin^2\varphi)^{1/4}}{7\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\Bigg|_{\bar{s}=0} + O(\beta^3). \tag{4.12}$$

ВЛИЯНИЕ ЗАКРЕПЛЕНИЯ ОБОЛОЧКИ ВДОЛЬ КРАЯ НА ЕЕ УСТОЙЧИВОСТЬ

5. В дальнейшем для определенности считаем, что оболочка односвязная. Пусть край оболочки ∂F жестко заделан. Подставляя (2.1) в (1.11), получим краевые условия на ∂F для $\tilde{u}_{(0)}$, $\tilde{\tilde{u}}_{(0)}$.

$$(a)\ \tilde{u}_2^{(0)}=0; \quad (b)\ \tilde{V}_{(0)}+\tilde{\tilde{V}}_{(0)}=0; \quad (c)\ \frac{\partial\Psi}{\partial\bar{s}}=0; \quad (d)\ \Phi=0. \tag{5.1}$$

Повторяя рассуждения, приведенные в п. 3 для системы (2.I5), (5.Ic,d) на полуоси $\bar{s}>0$, убеждаемся, что эта система не имеет малых нетривиальных решений при $\sigma>0$; к этому же выводу мы приходим, проводя построения п. 4. Это, по-видимому, означает, что при жесткой заделке исключена потеря устойчивости с образованием вмятин у края ∂F (соприкасание линий γ и ∂F исключено). Из (5.Ia,b) следует, что изгибающие поля $\tilde{\tilde{u}}_{(0)}$ на ∂F равны нулю, тогда они равны нулю всюду в прилегающей к ∂F области F' на F ,где $\tilde{\tilde{u}}_{(0)}$ непрерывно [II] . При докритических деформациях $(t<0)$ $\tilde{\tilde{u}}_{(0)}$ непрерывно, поэтому $\tilde{\tilde{u}}_{(0)}\big|_{t<0}=0$ на F . Для построения нетривиальных изгибаний $\tilde{\tilde{u}}_{(0)}$ при послекритических деформациях $(t>0)$ необходимо потребовать, чтобы линии γ были замкнутыми. Из (2.23) для изгибающего поля $\tilde{\tilde{u}}_{(0)}\big|_{t>0}$, отличного от нуля в области F'' на F , ограниченной линией γ , находим краевое уловие на γ

$$(a)\ \tilde{u}_2^{(0)}=0; \qquad (b)\ \tilde{V}_{(0)}=[\tilde{\tilde{V}}_{(0)}]. \tag{5.2}$$

Отметим, что при заданной форме γ и условии (5.2а) F'' допускает 3 линейно независимые изгибающие поля [II] . В нашем случае форма линии γ - искомая.

Из (I.II), с учетом того, что на F' $\tilde{\tilde{u}}_{(0)}=\tilde{\tilde{u}}_{(0)}\big|_{\partial F}=0$, находим далее для $k\geqslant 1$

$$(a)\ \tilde{u}_2^{(k)}=(*); \quad (b)\ \tilde{u}_1^{(k)}=(*); \quad (c)\ \tilde{\tilde{W}}_{(k)}=-\tilde{W}_{(k)}; \quad (d)\ \varphi_k=(*). \tag{5.3}$$

При $k=1$ условия (a, b, d) однородны. Процесс построения искомых функций при $t<0$ сводится к последовательному, начиная с $k=1$, определению $\tilde{\tilde{u}}_{(k)}$ и $\tilde{\tilde{u}}_{(k)}$ соответственно из систем (2.3)-(2.5),(I.3), (5.3a,b) и (2.I7)-(2.20) (вдоль ∂F), (5.3c,d). При $t>0$ система уравнений I и П (в ε -окрестностях ∂F и γ) итерационных процессов будет, вообще говоря, нерасцепляющейся. Она расцепляется для осесимметричных задач [6] . В общем случае для ее решения можно воспользоваться малостью параметра β , при этом в первом приближении получим $\tilde{\tilde{u}}_{(1)}\big|_{t>0}=\tilde{\tilde{u}}_{(1)}\big|_{t<0}$ (см. п. 3,4).

Бесконечно малые изгибания оболочек вращения при осесимметричном выпучивании сводятся к движению, как целого, ее части F'' вдоль оси симметрии. Из (4.I2) находим,что в основном приближении осесимметричная задача исследования послекритических деформаций оболочек вращения так же, как и в случае пологих оболочек [6] , сводится к изучению следующего уравнения движения для смещений h части оболочки F''.

$$\frac{d^2h}{d\tau^2}=h^2-\Delta p+O(h^4) \tag{5.4}$$

с начальными условиями

$$h\big|_{\tau=+0}=-\delta\tilde{V}_{(0)}=h_0; \quad \frac{dh}{d\tau}\Big|_{\tau=+0}=-\delta\hat{\tilde{V}}_{(0)}=\dot{h}_0,$$

где

$$\tau=t\left(\frac{\pi|b_{22}|(7\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)^2}{32K^{-1}_{2222}\,S_{F''}}\right)^{1/2}\Bigg|_{\bar{s}=0};$$

$$\Delta p=(1-\sigma_T)\frac{128\sin^2\varphi\sqrt{D^{1111}}\,K^{-1}_{2222}}{|b_{22}|(7\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)^2}\Bigg|_{\bar{s}=0};$$

$$h=-\tilde{V}_0\big|_{F''}.$$

Здесь учтено, что $\tilde{n}^{11}_{(1)}\big|_{t<0}=\dfrac{|b_{22}|}{\sin^2\varphi}\iint_{F''}P_h\dfrac{dF}{2\pi}$, где $S_{F''}$ - площадь F'' ; dF - элемент площади F'' ; P_h - осевая составляющая внешней поверхностной нагрузки $\tilde{\tilde{P}}_{(0)}$.

Таким образом, все следствия, полученные в [6] из уравнения (5.4) для пологих оболочек, справедливы в терминах (h, τ) и для рассматриваемых здесь непологих оболочек. Из него, в частности, получаем, что сферическая оболочка, меньшая полусферы, при внешнем давлении, близком к критическому, теряет устойчивость под действием минимально возможного начального импульса выпучиванием достаточно малой области.

Ослабим закрепление края (I.II), заменив (I.II d) на (I.I2 d), тогда вместо (5.I d) и (5.3 d) будем иметь на ∂F $\frac{\partial \Phi}{\partial s}=0$, $\frac{\partial \varphi_\kappa}{\partial s}=(*)$. Это повлечет за собой единственное изменение в предыдущих рассуждениях - в этом случае может произойти появление вмятин у края, так как система $(2.15)\big|_{\partial F}$ (5.Ic), $\frac{\partial \Phi}{\partial s}=0$ имеет нетривиальное решение для $\bar{s}>0$ (п.3). Это произойдет, если $\max\limits_{(\partial F)} \sigma_T = 1$.

6. Рассмотрим закрепление (I.I2). Подставим (2.I) в (I.I2), получим краевые условия на ∂F:

$$(a)\ \psi=-\tilde{n}^{11}_{(1)}\frac{\cos\Phi}{\cos\varphi_*}; \qquad (b)\ \tilde{n}^{12}_{(1)}=\frac{\partial}{\partial x^2}(\rho\psi);$$

$$(c)\ \tilde{W}_{(0)}+\tilde{\tilde{W}}_{(0)}=0; \qquad (d)\ \frac{\partial\Phi}{\partial s}=0; \tag{6.1}$$

$$(a)\ \psi_\kappa=-\frac{\tilde{n}^{11}_{(\kappa+1)}\cos\Phi-\varphi_\kappa\frac{\partial \tilde{m}^{(11)}_{(-2)}}{\partial s}}{\cos\varphi_*}+(*);$$

$$(b)\ \tilde{n}^{12}_{(\kappa+1)}=\frac{\partial}{\partial x^2}(\varphi\psi_\kappa)+(*); \qquad (c)\ \tilde{W}_{(\kappa)}+\tilde{\tilde{W}}_{(\kappa)}=0;\ (d)\frac{\partial\varphi_\kappa}{\partial s}=(*). \tag{6.2}$$

При $t<0$ $\tilde{n}^{\alpha\beta}_{(1)}$, $\tilde{\tilde{u}}_{(0)}$ находим из (2.3), (2.4), (2.I2)-(2.I5) $\big|_{\partial F}$, (6.Ia, b, d), а изгибающее поле строим при краевом условии (6.Ic). Дальнейший процесс построения искомых функций сводится к последовательному, начиная с $\kappa=1$, определению $\tilde{n}^{\alpha\beta}_{(\kappa+1)}$, $\tilde{u}_{(\kappa)}$, $\tilde{\tilde{u}}_{(\kappa)}$ соответственно из систем (2.3), (2.4), (6.2), (I.3a), (2.5), (2.I7)-(2.20) $\big|_{\partial F}$. В данном случае возможна потеря устойчивости с образованием вмятин у края, что связано с существованием критического значения σ_*' параметра $\sigma_T\big|_{\partial F}$, в окрестности которого система (2.I5), (6.Ia, d) имеет два близких решения (для пологих оболочек $\sigma_*'\simeq\frac{1}{5}$, [3, 4, 8]. Как и прежде, при достижении равенства (3.2) оболочка может потерять устойчивость с образованием вмятины вдали от края (если $\sigma_T\big|_{\partial F}<\sigma_*'$). В этом случае добавятся новые искомые функции $\tilde{\tilde{u}}_{(\kappa)}\big|_\gamma$ и форма линии γ , и к рассмотренным выше системам (при $t>0$) на κ-ой итерации следует добавить систему (2.I2)-(2.26) $\big|_\gamma$.

Усилим закрепление края (I.I2) в направлении края ∂F , заменив (I.I2 b) на (I.IIb), а (6.Ib), (6.2b) на (5.Ia), (5.3a). Получаемая задача подобна предыдущей, а при наличии осевой симметрии совпадает с ней. Изгибающее поле $\tilde{u}_{(0)}$ строим при условии (5.Ia); $\tilde{n}^{\alpha\beta}_{(1)}$, $\tilde{\tilde{u}}_{(0)}\big|_{\partial F}$ находим из (2.3), (2.4), (2.9)-(2.I5), (6.Ia,c, d) и т.д. При $\max\limits_{\partial F}\sigma_T=\sigma_*''$, как и ранее, оболочка теряет устойчивость с выпучиванием у края, а при достижении (3.2) - вдали от края.

Усилим теперь закрепление края (I.I2) в направлении ν , касательном к F и нормальном к ∂F , заменив (I.I2a) на (I.IIa) и (6.Ia,c), (6.2a,c) на (5.Ib), (6.3).

$$(a)\ \frac{\partial\psi}{\partial s}=\frac{\vec{\nu}\cdot\vec{\tilde{\tilde{u}}}_{(0)}}{\rho^2K^{-1}_{2222}}\ , \qquad (b)\ \frac{\partial\psi_\kappa}{\partial s}=\frac{\vec{\nu}\,\tilde{\tilde{u}}_\kappa}{\rho^2K^{-1}_{2222}}\ , \tag{6.3}$$

$$(c)\quad \tilde{V}_{(\kappa)}+\tilde{\tilde{V}}_{(\kappa)}=0.$$

При наличии осевой симметрии эта задача совпадает с (I.IIa-c), (I.I2 d). Если $t<0$, то $\tilde{u}_{(0)}=\tilde{\tilde{u}}_{(0)}\equiv 0$; $\tilde{n}^{\alpha\beta}_{(1)}$ находим из (2.5), (2.4), (6.Ib). Далее, начиная с $\kappa=1$, последовательно определяем $\tilde{\tilde{u}}_{(\kappa)}$ из (I.3a), (2.5), (5.3b); $\tilde{\tilde{u}}_{(\kappa)}$ из (2.I7)-(2.20), (6.2c, d); $\tilde{n}^{\alpha\beta}_{(\kappa+1)}$ из (2.3), (2.4), (6.2b). Если достигается (3.2), то при $t>0$ возможно выпучивание вдали от края, при этом по-прежнему $\tilde{u}_{(0)}=\underset{\approx}{u}_{(0)}=0$ на F' ; изгибающее поле $\underset{\approx}{u}_{(0)}$ на F'' , $\tilde{\tilde{u}}_{(0)}$ вдоль γ и $\tilde{n}^{\alpha\beta}_{(1)}$ находим из системы (2.9)-(2.I5), (2.2)-(2.4), (2.2I), (2.22), (5.2), (6.Ib). При построении последующих итераций ($\kappa>1$), в отличие от случая $t<0$, соответствующие системы на каждом шагу приходится теперь рассматривать одновременно, к тому же добавляется искомая вектор-функция $\tilde{\tilde{u}}_{(\kappa)}$ и система (2.I7)-(2.20), (2.24)-(2.26). Если на ∂F достигается $\sigma_*'''=\max\sigma_T=1$, то возможно выпучивание у края. Изгибающее поле $\tilde{u}_{(0)}$, $\tilde{\tilde{u}}_{(0)}$, $\tilde{n}^{\alpha\beta}_{(1)}$ находим из систем (2.9)-(2.I5), (2.3), (2.4), (6.Ib, d), (5.Ib), (6.3a). Далее, начиная с $\kappa=1$, последовательно находим $\tilde{\tilde{u}}_{(\kappa)}$, $\dot{\tilde{\tilde{u}}}_{(\kappa)}$, $\tilde{n}^{\alpha\beta}_{(\kappa+1)}$ из системы (I.3a), (2.5), (2.9)-(2.I5), (2.3), (2.4), (6.2b,d), (6.3 b,c).

$\sigma^{'''}_*$ находим из условия существования нетривиального решения системы (2.9)-(2.I5), (2.3), (2.4), (6.I b,d), (5.I b), (6.3a), линеаризованной относительно докритического решения. Последняя задача расцепляется и σ'' находим из условия существования нетривиального решения Φ , Ψ системы (7.6), (3.I a, b), т.е. приходим к той же задаче, что и в п. 3 при определении σ^* .

7. Неоднородные краевые условия. Проведенные построения в п.п. 5–6 переносятся и на этот случай с соответствующими изменениями. Рассмотрим сначала неоднородную задачу (7.I), (I.I2c,d).

$$(n^{\alpha 1}-2\varepsilon^4 m^{\nu 1} b^*_{\nu\mu} a^{\mu\alpha}_*)[\delta^\beta_\alpha+\varepsilon u^\beta_{.\alpha}]+ \\ +\varepsilon^5\left(m^{\alpha 1}_{:\alpha}+\frac{\partial m^{12}}{\partial x^2}\right)E^\beta=\varepsilon q^\beta. \tag{7.I}$$

Под "безмоментной оболочкой" мы понимаем такие деформации оболочки, при которых вклад неинерционных слагаемых, определяемых изгибом оболочки, в уравнения равновесия (I.I), (I.2) пренебрежимо мал вне зоны краевого эффекта. Рассмотрим частный случай безмоментных оболочек, когда внешняя нагрузка $\vec{P}$ и q^α таковы, что при докритических деформациях усилия $\tilde{n}^{\alpha\beta}_{(1)}$, определяемые уравнениями безмоментной теории (2.3), (2.4) ($\kappa=1$, $\frac{\partial^2\tilde{\tilde{u}}_{(0)}}{\partial t^2}=0$), удовлетворяют одновременно двум краевым условиям на ∂F :

$$(a)\ \tilde{n}^{11}_{(1)}=\tilde{q}^1_{(0)}\ ;\qquad (b)\ \tilde{n}^{12}_{(1)}=\tilde{q}^2_{(0)}\ . \tag{7.2}$$

Условия разрешимости задачи (2.3), (2.4), (7.2) исследованы в [II] , а возможность потери устойчивости вдали от края-в [2] . Исследуем возможность потери устойчивости у края при нагрузках, удовлетворяющих условию (3.I). Эта задача в основном приближении сводится к решению следующей системы уравнений с краевыми условиями на ∂F :

$$(a)\ \tilde{n}^{11}_{(1)}\cos\Phi+\psi\cos\varphi_*=\tilde{q}_{(0)}\ ;\quad (b)\ \tilde{n}^{12}_{(1)}-\frac{\partial}{\partial x^2}(\rho\psi)=\tilde{q}^2_{(0)}\ ; \tag{7.3}$$

Предполагается, что $\tilde{\tilde{\vec{P}}}_{(0)}$, $\tilde{q}^\alpha_{(0)}$ не зависят ни от t , ни от $\tilde{\tilde{u}}_{(\kappa)}$. Возможность потери устойчивости у края в данном случае связана с существованием критического значения $\sigma^{'''}_*$ параметра $\sigma_T|_{\partial F}$, в окрестности значения которого данная система при $t>0$, $\delta\vec{u}_{(0)}=\delta\dot{\vec{u}}_{(0)}=0$ имеет статическое решение, соответствующее равновесным послекритическим состояниям, близким к докритическим ($t<0$), определяемым уравнениями (2.3), (2.4), (7.2):

$$\tilde{n}^{\alpha\beta}_{(1)}\neq 0\ ;\quad \tilde{\tilde{u}}_{(0)}=0\ ;\quad \dot{\tilde{\tilde{u}}}_{(0)}=0.$$

Для отыскания $\sigma^{'''}_*$ линеаризуем систему (7.3) при $t>0$ относительно докритического решения. Получим (в предположении, что вдоль края $\varphi\neq\frac{\pi}{2}$):

$$\tilde{u}^{(0)}_{\alpha,\beta}+\tilde{u}^{(0)}_{\beta,\alpha}-2\tilde{w}_{(0)}b_{\alpha\beta}=0, \tag{7.4}$$

$$\hat{n}^{\alpha\beta}_{,\beta}-\frac{\partial^2\tilde{u}^\alpha_{(0)}}{\partial t^2}=0\ ;\qquad b_{\alpha\beta}\hat{n}^{\alpha\beta}-\frac{\partial^2\tilde{w}_{(0)}}{\partial t^2}=0, \tag{7.5}$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\bar{s}^2}+\Phi=0,\qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial\bar{s}^2}-\Psi+2\sigma_T\big|_{\partial F}\Phi=0, \\ (\Phi(-\infty)=\Psi(-\infty)=0), \tag{7.6}$$

$$(a)\ \hat{n}^{12}=-\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\rho\hat{n}^{11}}{\cos\varphi}\right);\qquad (b)\ \tilde{w}_{(0)}=-\tilde{\tilde{w}}_{(0)}, \\ (c)\ \hat{n}^{11}+\psi\cos\varphi=0\ ;\qquad (d)\ \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{s}}=0, \qquad (\text{на } \partial F) \tag{7.7}$$

где $\hat{n}^{\alpha\beta} = \tilde{n}^{\alpha\beta}\big|_{t>0} - \tilde{n}^{\alpha\beta}\big|_{t<0}$.

Система уравнений для определения $\hat{n}^{\alpha\beta}$, $\tilde{u}_{(0)}$, $\tilde{\tilde{u}}_{(0)}$ распадается. Из (7.5), (7.7) находим

$$\hat{n}^{\alpha\beta} \equiv 0. \qquad (7.8)$$

$\tilde{\tilde{u}}_{(0)}$ определяем из (7.4), (7.7 b) после того, как найдем $\tilde{\tilde{u}}_{(0)}$. Условие существования нетривиального решения системы (7.6), (7.7 d), (7.9) и определяет $\sigma_*^{''}$.

$$\Psi = 0 \quad \text{на} \quad \partial F. \qquad (7.9)$$

Система (7.7 d), (7.9), (7.6) имеет нетривиальное решение при $\sigma_T\big|_{\partial F} > 0$ только тогда, когда $\sigma_T\big|_{\partial F} = \frac{1}{2}$.

Итак, при

$$\max_{(\partial F)} \sigma_T < \frac{1}{2}. \qquad (7.10)$$

рассматриваемые оболочки не теряют устойчивости у края. При

$$\sigma_*^{''} = \max_{(\partial F)} \sigma_T = \frac{1}{2} \qquad (7.11)$$

оболочка может потерять устойчивость у края. Для описания послекритических равновесных форм в основном приближении находим решение нелинейной системы (7.3). При этом Φ и Ψ находим из системы (2.15) методом, предложенным в ([1] стр. 54-56).

В рассмотренном примере мы исключили из рассмотрения случай, когда вдоль края φ принимает значение $\frac{\pi}{2}$, т.к. в этом случае линеаризованная система имеет нетривиальное решение при любых малых $\sigma_T\big|_{\partial F}$. Оболочка не устойчива при любых сколь угодно малых нагрузках, если только $\sigma_T\big|_{\partial F} > 0$.

Рассмотренное закрепление края оболочки можно видоизменить так, чтобы значение критической нагрузки (7.11) сохранялось и в том случае, если на ∂F имеются точки, где φ принимает значения $\frac{\pi}{2}$. Именно, зададим на ∂F вместо нормальных усилий q^1 и смещений w составляющие усилий по главной нормали к $\partial F - v$ и смещений по бинормали к $\partial F - \varepsilon q$, т.е. вместо (7.1 a), (1.12 c) зададимся на ∂F следующими краевыми условиями:

$$\begin{aligned}(a)\quad & H = -\Big\{(n^{\alpha 1} - 2\varepsilon^4 m^{M1} b^*_{\nu M} a^{M\alpha}_*)\big[(\delta^1_\alpha + \varepsilon u^1_{.\alpha})\cos\varphi + \\ & + \varepsilon\omega_\alpha \sin\varphi\big] + \varepsilon^4\big(m^{\alpha 1}_{:\alpha} + \frac{\partial m^{12}}{\partial x^2}\big)(\varepsilon E^1\cos\varphi + E_3\sin\varphi)\Big\} - \varepsilon q; \qquad (7.12)\\ (b)\quad & v = 0.\end{aligned}$$

Кроме того, как и ранее предположим, что до потери устойчивости при $t < 0$ $\tilde{n}^{\alpha\beta}_{(1)}$ удовлетворяют одновременно на ∂F двум краевым условиям (7.2 b) и

$$-\tilde{n}^{11}_{(1)}\cos\varphi = \tilde{q}_{(0)}. \qquad (7.13)$$

Заметим, что в точках ∂F, где $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\tilde{q}_{(0)}$ должна обращаться в нуль. Повторяя предыдущие рассуждения п. 7, заменив предварительно условия (7.3 a), (7.7 a), (6.1 c) и (7.7 b), (7.7 c) соответственно на

$$\psi + \tilde{n}^{11}_{(1)}\cos\varphi + \tilde{q}_{(0)} = 0, \qquad (7.14)$$

$$\begin{aligned}&(a)\ \hat{n}^{12} = -\frac{\partial}{\partial x^2}(\rho\cos\varphi\,\hat{n}^{11}); \qquad (b)\ \tilde{v}_{(0)} = -\tilde{\tilde{v}}_{(0)};\\ &(c)\ \psi + \hat{n}^{11}\cos\varphi = 0,\end{aligned} \qquad (7.15)$$

мы приходим к прежнему результату для критических значений параметра $\sigma_T\big|_{\partial F}$ – к формуле (7.11).

Если в предыдущих двух примерах усилить закрепление края, заменив (1.12 d) на

(I.II d), то критическое значение параметра $\sigma_T|_{\partial F}$ поднимается до единицы.

8. Упругая заделка края. Пусть вдоль края реализуется закрепление (I.II $a-c$). (8.I)- "упругий шарнир".

$$m^{11} = -\frac{k_m^2}{\varepsilon\sqrt{a_*}}\ arctg\left(-\frac{\omega_1}{1+\varepsilon u_{11}}\right). \tag{8.1}$$

Эта задача подобна задаче (I.II), рассмотренной в п. 5. В первом приближении для определения $\vec{u}_{(0)}$ получаем систему (2.I5) на полуоси $\bar{s} < 0$ (в ε - окрестности края ∂F) с граничными условиями на ∂F :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \bar{s}} = 0 ; \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{s}} = -\bar{k}_m^2 \Phi , \tag{8.2}$$

где

$$\bar{k}_m^2 = \frac{k_m^2}{D^{1111}}\left(\frac{\rho^2 D^{1111} K^{-1}{}_{2222}}{\sin^2\varphi}\right)^{1/4}\Bigg|_{\partial F} .$$

Рассматривая линеаризованную систему (2.I5), (8.2) относительно тривиального решения $\Phi = \Psi = 0$, находим, что она имеет нетривиальное решение при положительных $\sigma_T|_{\partial F}$ только тогда, когда $\bar{k}_m = 0$, т.е. как и при жесткой заделке края потеря устойчивости у края при "упругом шарнире" ($k_m^2 > 0$) исключена.

Рассмотрим осесимметричную задачу о выпучивании у края оболочек вращения, шарнирно опертых вдоль края и упруго поджатых в плоскости края. Именно, пусть вдоль края осуществлено закрепление:

$$\begin{aligned} &(a)\quad H = -\varepsilon k_H^2(-u_1\cos\varphi - w\sin\varphi) + \varepsilon q ; \\ &(b)\quad v = 0 ; \qquad (c)\quad m^{11} = 0. \end{aligned} \tag{8.3}$$

В основном приближении построение докритических решений и послекритических решений при выпучивании у края сводится к исследованию системы (2.I5) (вдоль края ∂F), (7.4), (7.5) с краевыми условиями на ∂F

$$\begin{aligned} &(a)\quad \psi + \tilde{n}^{11}_{(1)}\cos\varphi + k_H^2 \rho^2 K^{-1}_{2222}\Big|_{\partial F}\frac{\partial \Psi}{\partial s} + \tilde{q}_{(0)} = 0, \\ &(b)\quad \tilde{v}_{(0)} + \tilde{\tilde{v}}_{(0)} = 0 ; \qquad (c)\quad \frac{d\Phi}{\partial \bar{s}} = 0 . \end{aligned} \tag{8.4}$$

Для получения результата в замкнутом виде предположим, что до потери устойчивости выполняется условие (7.I3). Тогда определение критического значения параметра $\sigma_T|_{\partial F}$, при котором возможно выпучивание у края, сводится к решению однородной системы (2.I5) на полуоси $\bar{s} < 0$ с условиями при $\bar{s} = 0$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \bar{s}} = -\bar{k}_H^2 \Psi , \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{s}} = 0, \tag{8.5}$$

где

$$\bar{K}_H^2 = \frac{1}{K_H^2 \rho^2 K^{-1}_{2222}}\left(\frac{\rho^2 D^{1111} K^{-1}{}_{2222}}{\sin^2\varphi}\right)^{\frac{1}{4}}\Bigg|_{\partial F} .$$

Линеаризуя эту систему в окрестности докритического решения $\Phi = \Psi = 0$, находим, что линеаризованная система имеет нетривиальное решение при положительных $\sigma_T|_{\partial F}$ только при

$$\sigma_T\big|_{\partial F} = \sigma_*^{\overline{V}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1+\sqrt{1+\bar{K}_H^2}} . \tag{8.6}$$

При $\sigma_T|_{\partial F} = \sigma_*^{\overline{IV}}$ оболочка выпучивается у края.

9. Отметим, что построения, проведенные в работе, выполнены без предположения об однородности упругих свойств оболочек, в частности, полученные результаты верны и для оболочек переменной толщины.

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. А.В. Погорелов. Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек, "Наука", М., 1967.

2. В.И. Бабенко. Геометрическое исследование неустойчивости безмоментных оболочек, "Укр. геометр. сб.", вып. I2, ХГУ, Харьков, I972.

3. В.И. Бабенко. Неустойчивость безмоментных консервативных оболочек, Сб. "Математическая физика и функциональный анализ", вып. 3, ФТИНТ АН УССР, Харьков, I972.

4. Л.С. Срубщик. Асимптотический метод определения критических нагрузок пологих строго выпуклых оболочек вращения. ПММ, 36, вып. 4, I972.

5. Л.С. Срубщик. О потере устойчивости несимметричных строго выпуклых тонких пологих оболочек, ПММ, 37, вып. I, I973.

6. В.И. Бабенко. Асимптотический анализ послекритического поведения пологих строго выпуклых оболочек вращения, Сб. "Математическая физика и функциональный анализ", вып. 4, ФТИНТ АН УССР, Харьков, I973.

7. М.И. Вишик, Л.А. Люстерник. Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений, УМН, I5, вып. 3, 1960.

8. М.Ю. Жуков, Л.С, Срубщик, Л.Б. Царюк. Асимптотический метод определения верхних критических нагрузок тонких непологих сферических оболочек. Четвертая Всесоюзная конференция по проблемам устойчивости в строительной механике, Харьков, I2-I5 сентября I972 г, Тезисы докладов, М., I972.

9. W.T.Koiter. On the Nonlinear Theory of Thin Elastic Shells, Proc.Kon., Ned. Ak.Wet., Amsterdam, Ser.B, 69, I966.

IO. Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., I958.

II. Н.Н. Векуа. Обобщенные аналитические функции, Физматгиз, М., I959.

ASYMPTOTIC REPRESENTATIONS OF SOLUTIONS OF EQUATIONS FROM THE THEORY ON UNSHALLOW SHELLS FOR LOADS CLOSE TO THE CRITICAL ONES

V.I.Babenko

Based on the equations from the Kirchhoff -Love shell theory, the stability loss by a momentless equilibrium state for unshallow, nonsymmetric, strictly convex, rather thin anisotropic shells and their behaviour at an initial aftercritical stage are studied using the Vishik-Lyusternik and Bogolyubov-Mitropolsky methods. Asymptotic representations for deformations are built up. The stability criterion for the shells is obtained. The influence of anchoring the shell along the edge on its stability is considered.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1974 выпуск У

АСИМПТОТИКА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В СРЕДЕ С БОЛЬШИМ КОЛИЧЕСТВОМ МЕЛКИХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ

В.Н. Фенченко

I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Будем рассматривать следующую задачу сопряжения для системы уравнений Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E}(x) - ik\mu_0 \vec{H}(x) = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{H}(x) + ik\varepsilon_0 \vec{E}(x) = \vec{J}(x), \quad x \in R_3 \setminus F^{(N)}, \end{cases} \tag{I.1}$$

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E}(x) - ik\mu \vec{H}(x) = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{H}(x) + ik\varepsilon \vec{E}(x) = 0, \quad x \in F^{(N)}, \end{cases} \tag{I.2}$$

$$[\vec{n}, \vec{E}(x)]_+ = [\vec{n}, \vec{E}(x)]_-, \quad x \in \partial F^{(N)}, \tag{I.3}$$

$$[\vec{n}, \vec{H}(x)]_+ = [\vec{n}, \vec{H}(x)]_-, \quad x \in \partial F^{(N)}, \tag{I.4}$$

$$\vec{E}(x),\ \vec{H}(x) \to 0, \quad |x| \to \infty, \tag{I.5}$$

где множество $F^{(N)}$ состоит из N связных компонент $F_i^{(N)}$ $(F^{(N)} = \bigcup_{i=1}^{N} F_i^{(N)})$; $\vec{J}(x)$ – заданная вектор-функция $(\vec{J}(x) \in C^1(R_3) \cap L_2(R_3))$; k, μ_0, μ – вещественные ($k, \mu_0, \mu > 0$), а $\varepsilon_0, \varepsilon$ – комплексные ($\operatorname{Im} \varepsilon_0, \varepsilon > 0$, $\operatorname{Re} \varepsilon_0, \varepsilon > 0$) параметры. Знаки " + ", " – " – отвечают внутреннему и внешнему пределам на поверхности $\partial F^{(N)}$, ограничивающей множество $F^{(N)}$, $\vec{n}$ – внешняя нормаль к $\partial F^{(N)}$.

Как известно, такая задача имеет единственное решение, которое будем обозначать через $\vec{E}^{(N)}(x)$, $\vec{H}^{(N)}(x)$. Функции $\vec{E}^{(N)}(x)$, $\vec{H}^{(N)}(x)$ описывают электромагнитное поле в однородной изотропной среде, содержащей диэлектрические включения. Функция $\vec{J}(x)$ характеризует плотность распределения токов в среде, а параметры $\varepsilon_0, \mu_0, \varepsilon, \mu$ – соответственно диэлектрические и диамагнитные проницаемости среды и включений [I].

Будем изучать асимптотическое поведение решения $\vec{E}^{(N)}(x)$, $\vec{H}^{(N)}(x)$, когда количество компонент множества $F^{(N)}$ возрастает, а их диаметры $\alpha_i^{(N)}$ и расстояния между ними $R_{ij}^{(N)}$ уменьшаются так, что объем $\tau^{(N)}$ множества $F^{(N)}$ стремится к нулю.

Для оценки влияния множества $F^{(N)}$ на решение задачи (I.1) – (I.5) введем в качестве характеристик его компонент величины

$$\mathcal{A}_{jkiN}^{(\alpha)} = (1-\alpha)\delta_{jk}\tau_i^{(N)} + \alpha \int_{F_i^{(N)}} (\nabla v_j^{(\alpha)}, \nabla v_k^{(\alpha)})\,dx + \int_{R_3 \setminus F_i^{(N)}} (\nabla v_j^{(\alpha)}, \nabla v_k^{(\alpha)})\,dx,$$

где δ_{jk} – символ Кронекера, $\tau_i^{(N)}$ – объем множества $F_i^{(N)}$, параметр α принимает значения $\varepsilon/\varepsilon_0$, μ/μ_0, а функции $v_j^{(\alpha)}(x)$ являются решениями следующих задач сопряжения

$$\Delta v_j^{(\alpha)}(x) = 0, \quad x \in R_3 \setminus F_i^{(N)}, \tag{I.6}$$

$$\Delta v_j^{(\alpha)}(x) = 0, \quad x \in F_i^{(N)}, \tag{I.7}$$

$$v_{j+}^{(\alpha)}(x) = v_{j-}^{(\alpha)}(x), \quad x \in \partial F_i^{(N)}, \tag{I.8}$$

$$\alpha \frac{\partial v_j^{(\alpha)}}{\partial n_+}(x) - \frac{\partial v_j^{(\alpha)}}{\partial n_-}(x) = (1-\alpha)\cos(n, x^j), \quad x \in \partial F_i^{(N)}, \tag{I.9}$$

$$v_j^{(\alpha)}(x) \to 0, \quad |x| \to \infty. \tag{I.10}$$

Обозначим через $C_\tau(\partial F_i^{(N)})$ пространство непрерывных вектор-функций, касательных к поверхности $\partial F_i^{(N)}$. Введем интегральные операторы, определенные на вектор-функциях $\vec{p}(x) \in C_\tau(\partial F_i^{(N)})$:

$$(\overset{\circ}{K}{}_{ij}^{(N)} \vec{p})(x) = 2\int_{\partial F_i^{(N)}} [\vec{n}_x [\vec{p}(\xi), \nabla \frac{1}{4\pi |x-\xi|}]] d\Gamma_\xi .$$

Оператор $\overset{\circ}{K}{}_{ij}^{(N)}$ будем рассматривать как оператор, действующий из пространства $C_\tau(\partial F_i^{(N)})$ в пространство $C_\tau(\partial F_j^{(N)})$. Оказывается, что при любом фиксированном N существуют ограниченные операторы $(I + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \overset{\circ}{K}{}_{ii}^{(N)})^{-1}$ (см. р. 2). Их норма, вообще говоря, зависит от вида поверхностей $\partial F_i^{(N)}$. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что поверхности $\partial F_i^{(N)}$ являются диффеоморфными образами единичной сферы, причем соответствующие отображения $\vec{z}_i^{(N)}(Q)$ удовлетворяют условиям

$$\left|\frac{\partial \vec{z}_i^{(N)}(Q)}{\partial q_k}\right| \le c_1 a_i^{(N)}, \qquad \left|\frac{\partial^2 \vec{z}_i^{(N)}(Q)}{\partial q_k \partial q_e}\right| \le c_1 a_i^{(N)},$$

$$|\vec{z}_i^{(N)}(Q') - \vec{z}_i^{(N)}(Q'')| \ge c_2 a_i^{(N)} \rho(Q', Q''),$$

где $\rho(Q', Q'')$ – расстояние между точками Q', Q'' на единичной сфере, а постоянные от i и N не зависят. При таких условиях можно показать, что выполняются неравенства:

$$\sigma_i^{(N)} \le \mathbb{C}_1 a_i^{(N)2} \qquad \|(I + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \overset{\circ}{K}{}_{ii}^{(N)})^{-1}\| \le \mathbb{C}_2, \tag{I.11}$$

где $\sigma_i^{(N)}$ – площадь поверхности $\partial F_i^{(N)}$, а постоянные $\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2$ от i и N не зависят.

Наряду с операторами $\overset{\circ}{K}{}_{ij}^{(N)}$ введем также операторы $\overset{+}{K}{}_{ij}^{(N)}$, $\bar{K}_{ij}^{(N)}$, $M_{ij}^{(N)}$ по формулам

$$(\overset{+}{K}{}_{ij}^{(N)} \vec{p})(x) = 2\int_{\partial F_i^{(N)}} [\vec{n}_x [\vec{p}(\xi), \nabla \frac{e^{ik\sqrt{\varepsilon\mu}|x-\xi|}}{4\pi |x-\xi|}]] d\Gamma_\xi ,$$

$$(\bar{K}_{ij}^{(N)} \vec{p})(x) = 2\int_{\partial F_j^{(N)}} [\vec{n}_x [\vec{p}(\xi), \nabla \frac{e^{ik\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}|x-\xi|}}{4\pi |x-\xi|}]] d\Gamma_\xi ,$$

$$(M_{ij}^{(N)} \vec{p})(x) = [\vec{n}_x, \operatorname{rot}\operatorname{rot}\int_{\partial F_i^{(N)}} \vec{p}(\xi) \left(\frac{e^{ik\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}|x-\xi|} - e^{ik\sqrt{\varepsilon\mu}|x-\xi|}}{4\pi|x-\xi|}\right) d\Gamma_\xi].$$

Операторы $\overset{+}{K}{}_{ij}^{(N)}$, $\bar{K}_{ij}^{(N)}$, $M_{ij}^{(N)}$ будем рассматривать как операторы, действующие из пространства $C_\tau(\partial F_i^{(N)})$ в пространство $C_\tau(\partial F_j^{(N)})$.

Сформулируем теперь основной результат работы.

Т Е О Р Е М А. Пусть при $N \to \infty$ выполняются условия:

1. Каково бы ни было N, множество $F^{(N)}$ содержится в ограниченной области D с гладкой границей ∂D.

2. Для любой области $G \subset D$ существуют пределы

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\tau^{(N)}} \sum_{(G)} \mathcal{A}_{jkiN}^{(\alpha)} = \int_G \mathcal{A}_{jk}^{(\alpha)}(x)\, dx ,$$

где $\mathcal{A}_{jk}^{(\alpha)}(x)$ – дифференцируемые в $\bar{D}$ функции, $\sum_{(G)}$ – суммирование по тем значениям i, для которых $F_i^{(N)} \subset G$.

3. $$\lim_{N\to\infty} \max_{1\le i\le N} \sum \frac{a_j^{(N)2}}{R_{ij}^{(N)2}} = 0 .$$

Тогда решение задачи (I.I)-(I.5) в точках $x \notin \bar{D}$ может быть представлено в виде:

$$\begin{cases} \vec{E}^{(N)}(x) = \vec{E}^{(0)}(x) + \tau^{(N)} \vec{V}_E(x) + o(\tau^{(N)}), \\ \vec{H}^{(N)}(x) = \vec{H}^{(0)}(x) + \tau^{(N)} \vec{V}_H(x) + o(\tau^{(N)}). \end{cases} \tag{I.I2}$$

Здесь функции $\vec{E}^{(0)}(x)$, $\vec{H}^{(0)}(x)$ во всем пространстве R_3 удовлетворяют системе (I.I), а $\vec{V}_E(x)$, $\vec{V}_H(x)$ определены формулами

$$\vec{V}_E(x) = -\operatorname{rot}\operatorname{rot}\int_D \mathcal{A}^{(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0})}(\xi)\, \vec{E}^{(0)}(\xi)\bar{g}(x-\xi)d\xi - ik\mu_0 \operatorname{rot}\int_D \mathcal{A}^{(\frac{\mu}{\mu_0})}(\xi)\vec{H}^{(0)}(\xi)\bar{g}(x-\xi)d\xi,$$
$$\vec{V}_H(x) = ik\varepsilon_0 \operatorname{rot}\int_D \mathcal{A}^{(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0})}(\xi)\vec{E}^{(0)}(\xi)\bar{g}(x-\xi)d\xi - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\int_D \mathcal{A}^{(\frac{\mu}{\mu_0})}(\xi)\vec{H}^{(0)}(\xi)\bar{g}(x-\xi)d\xi, \tag{I.I3}$$

где $\mathcal{A}^{(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0})}(x)$, $\mathcal{A}^{(\frac{\mu}{\mu_0})}(x)$ – матрицы соответственно с элементами $\mathcal{A}_{jk}^{(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0})}(x)$, $\mathcal{A}_{jk}^{(\frac{\mu}{\mu_0})}(x)$, а $\bar{g}(x-\xi) = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}|x-\xi|}}{|x-\xi|}$. Из формул (I.I2), (I.I3) вытекает такое

С Л Е Д С Т В И Е. Решение задачи (I.I)-(I.5) может быть представлено в виде

$$\begin{cases} \vec{E}^{(N)}(x) = \tilde{E}^{(N)}(x) + \vec{z}_E^{(N)}(x), \\ \vec{H}^{(N)}(x) = \tilde{H}^{(N)}(x) + \vec{z}_H^{(N)}(x), \end{cases} \tag{I.I4}$$

где для $\vec{z}_E^{(N)}(x)$, $\vec{z}_H^{(N)}(x)$ в любой области $G \subset R_3 \setminus \bar{D}$ имеет место оценка

$$\| \vec{z}_E^{(N)}(x),\ \vec{z}_H^{(N)}(x) \|_{L_2(G)} = o(\tau^{(N)}),$$

а функции $\tilde{E}^{(N)}(x)$, $\tilde{H}^{(N)}(x)$ во всем пространстве R_3 удовлетворяют (в слабом смысле) следующей системе уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \tilde{E}^{(N)}(x) - ik\mu^{(N)}(x)\, \tilde{H}^{(N)}(x) = 0, \\ \operatorname{rot} \tilde{H}^{(N)}(x) + ik\varepsilon^{(N)}(x)\, \tilde{E}^{(N)}(x) = \vec{J}(x), \end{cases} \tag{I.I5}$$

где

$$\varepsilon^{(N)}(x) = \begin{cases} \varepsilon_0 I, & x \in R_3 \setminus D, \\ \varepsilon_0 (I - \tau^{(N)} \mathcal{A}^{(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0})}(x)), & x \in D, \end{cases} \qquad \mu^{(N)}(x) = \begin{cases} \mu_0 I, & x \in R_3 \setminus D, \\ \mu_0 (I - \tau^{(N)} \mathcal{A}^{(\frac{\mu}{\mu_0})}(x)), & x \in D, \end{cases}$$

I – единичная матрица.

Иными словами, наличие в среде мелких диэлектрических включений можно эффективно учесть соответствующим изменением ее параметров. В [2] было получено представление электромагнитного поля в среде с мелкими проводящими неоднородностями, это представление получается из (I.I2) при $\varepsilon = \infty$, $\mu = 0$.

Заметим, что, как видно из доказательства, условие 3 теоремы может быть ослаблено.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

I. Рассмотрим в пространстве $C_\tau(\partial F_i^{(N)})$ уравнение

$$\vec{\rho}(x) + \frac{1-\alpha}{1+\alpha}(\mathring{K}_{ii}^{(N)} \vec{\rho})(x) = \vec{f}(x) \tag{2.I}$$

и изучим некоторые свойства его решения. Убедимся сначала в том, что оператор $I+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\mathring{K}_{ii}^{(N)}$ отображает пространство $C_\tau(\partial F_i^{(N)})$ на себя взаимнооднозначно и, следовательно, в силу теоремы Банаха, имеет ограниченный обратный оператор $(I+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\mathring{K}_{ii}^{(N)})^{-1}$. Действительно, так как ядро интегрального оператора $\mathring{K}_{ii}^{(N)}$ имеет слабую особенность, то он вполне непрерывен. Поэтому достаточно доказать, что в пространстве $C_\tau(\partial F_i^{(N)})$ однородное уравнение

$$\vec{\rho}(x)+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}(\mathring{K}_{ii}^{(N)}\vec{\rho})(x)=0 \qquad (2.2)$$

имеет лишь тривиальное решение.

Пусть $\vec{\rho}(x)$ – решение уравнения (2.2). Пользуясь свойствами интегралов со слабой особенностью и сингулярных интегралов, можно показать, что функция $\vec{\rho}(x)$ дифференцируема и ее производные удовлетворяют условию Гельдера. Построим функцию

$$\vec{V}(x)=\operatorname{rot}\int_{\partial F_i^{(N)}}\vec{\rho}(\xi)\,\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\,d\Gamma_\xi . \qquad (2.3)$$

В силу уравнения (2.2) на поверхности $\partial F_i^{(N)}$ выполняется условие $\alpha[\vec{n},\vec{V}(x)]_+=[\vec{n},\vec{V}(x)]_-$, а из формулы (2.3) следует, что $[\vec{n},\operatorname{rot}\vec{V}(x)]_+=[\vec{n},\operatorname{rot}\vec{V}(x)]_-$. Воспользуемся векторным аналогом первой формулы Грина [I]:

$$\int_S([\vec{u}(x),\operatorname{rot}\vec{v}(x)]\vec{n})\,d\Gamma_x=\int_V(\operatorname{rot}\vec{u}(x)\cdot\operatorname{rot}\vec{v}(x)-\vec{u}(x)\cdot\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{v}(x)\,dx. \qquad (2.4)$$

Тогда получим

$$\begin{aligned}\alpha\int_{F_i^{(N)}}|\operatorname{rot}\vec{V}(x)|^2dx&=\alpha\int_{\partial F_i^{(N)}}([\vec{V}(x),\overline{\operatorname{rot}\vec{V}(x)}]_+\vec{n})\,d\Gamma_x=\\&=\int_{\partial F_i^{(N)}}([\vec{V}(x),\overline{\operatorname{rot}\vec{V}(x)}]_-\vec{n})\,d\Gamma_x=-\int_{R_3\setminus F_i^{(N)}}|\operatorname{rot}\vec{V}(x)|^2dx.\end{aligned} \qquad (2.5)$$

Так как $\operatorname{Re}\alpha>0$, то из (2.5) вытекает, что функция $\vec{V}(x)$ может быть представлена в виде градиента некоторой скалярной функции $\vec{V}(x)=\operatorname{grad}\varphi(x)$. Из представления (2.3) следует, что $\varphi(x)$ гармонична всюду, кроме, быть может, поверхности $\partial F_i^{(N)}$, а на ней выполняется условие $\frac{\partial\varphi}{\partial n_+}(x)=\frac{\partial\varphi}{\partial n_-}(x)$. Из уравнения (2.2) следует, что на $\partial F_i^{(N)}$ выполняется также условие $\alpha\varphi_+(x)=\varphi_-(x)+C$. Поскольку $\vec{V}(x)=O(\frac{1}{|x|^2})$ при $|x|\to\infty$, то можно показать, что $\varphi(x)=C+o(1)$ при $|x|\to\infty$. Воспользуемся теперь первой формулой Грина, тогда получим

$$\alpha\int_{F_i^{(N)}}|\nabla\varphi(x)|^2dx=\alpha\int_{\partial F_i^{(N)}}\varphi_+(x)\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial n_+}(x)\,d\Gamma_x=\int_{\partial F_i^{(N)}}\varphi_-(x)\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial n_-}(x)\,d\Gamma_x=-\int_{R_3\setminus F_i^{(N)}}|\nabla\varphi(x)|^2dx . \qquad (2.6)$$

Так как $\operatorname{Re}\alpha>0$, то из (2.6) вытекает, что $\varphi(x)$ постоянна в областях $F_i^{(N)}$ и $R_3\setminus F_i^{(N)}$, значит $\vec{V}(x)=0$, а тогда и

$$\vec{\rho}(x)=[\vec{n},\vec{V}(x)]_+-[\vec{n},\vec{V}(x)]_-=0,$$

и утверждение доказано.

Норма оператора $(I+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\mathring{K}_{ii}^{(N)})^{-1}$, вообще говоря, зависит от вида поверхностей $\partial F_i^{(N)}$, но при сделанных предположениях она оказывается ограниченной независимо от i и N, то есть для решения $\vec{\rho}(x)$ уравнения (2.I) имеет место равномерная по i и N оценка:

$$\max_{x\in\partial F_i^{(N)}}|\vec{\rho}(x)|\le C\max_{x\in\partial F_i^{(N)}}|\vec{f}(x)|. \qquad (2.7)$$

Рассмотрим следующую краевую задачу

$$\Delta\vec{p}(x)=0,\quad x\in F_i^{(N)}, \qquad (2.8)$$

$$\operatorname{div} \vec{p}(x) = 0, \quad x \in F_i^{(N)}, \tag{2.9}$$

$$[\vec{n}, \vec{p}(x)]_+ = \vec{\rho}(x), \quad x \in \partial F_i^{(N)}, \tag{2.10}$$

где $\vec{\rho}(x)$ – заданная функция из пространства $C_\tau(\partial F_i^{(N)})$. Задача (2.8)-(2.10) имеет единственное решение. Действительно, будем искать решение в виде

$$\vec{p}(x) = \operatorname{rot} \int_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\theta}(\xi) \frac{1}{4\pi |x-\xi|} d\Gamma_\xi ;$$

тогда (2.8), (2.9) удовлетворяются при любой функции $\vec{\theta}(x)$, а из условия (2.10) для определения $\vec{\theta}(x)$ получаем уравнение

$$\vec{\theta}(x) - (\mathring{K}_{ii}^{(N)} \vec{\theta})(x) = \vec{\rho}(x), \quad x \in \partial F_i^{(N)}. \tag{2.11}$$

Уравнение (2.11) можно рассматривать аналогично (2.1) и доказать его разрешимость [2]. Что касается единственности решения задачи (2.8)-(2.10), то в этом нетрудно убедиться, используя формулу (2.4).

Так как правая часть $\vec{f}(x)$ и решение $\vec{\rho}(x)$ уравнения (2.1) принадлежат пространству $C_\tau(\partial F_i^{(N)})$, то можем определить функции $\vec{P}_f(x)$, $\vec{P}_\rho(x)$, являющиеся решениями задачи (2.8)-(2.10) с краевыми условиями $[\vec{n}, \vec{P}_f(x)]_+ = \vec{f}(x)$, $[\vec{n}, \vec{P}_\rho(x)]_+ = \vec{\rho}(x)$. Введем функцию $\vec{p}(x)$ по формуле

$$\vec{p}(x) = \vec{P}_\rho(x) + (1-\alpha) \operatorname{rot} \int_{\partial F_i^{(N)}} [\vec{n}_\xi \vec{P}_\rho(\xi)] \frac{1}{4\pi |x-\xi|} d\Gamma_\xi - \frac{1}{2} \vec{P}_f(x).$$

Нетрудно убедиться, что она удовлетворяет уравнениям (2.8), (2.9), а так как из (2.1) следует, что $[\vec{n}, \vec{p}(x)]_+ = 0$ на $\partial F_i^{(N)}$, то в силу единственности решения задачи (2.8)-(2.10) $\vec{p}(x) \equiv 0$ в области F_i^N, то есть

$$\vec{P}_\rho(x) + (1-\alpha) \operatorname{rot} \int_{\partial F_i^{(N)}} [\vec{n}_\xi \vec{P}_\rho(\xi)] \frac{1}{4\pi |x-\xi|} d\Gamma_\xi = \frac{1}{2} P_f(x), \quad x \in F_i^{(N)}. \tag{2.12}$$

Применяя к тождеству (2.12) оператор rot получим новое тождество

$$\alpha \operatorname{rot} \vec{P}_\rho(x) + (\alpha - 1) \operatorname{rot} \int_{\partial F_i^{(N)}} [\vec{n}_\xi \operatorname{rot} \vec{P}_\rho(\xi)] \frac{1}{4\pi |x-\xi|} d\Gamma_\xi = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{P}_f(x), \quad x \in F_i^{(N)}. \tag{2.13}$$

Введем обозначения

$$\mathring{\operatorname{rot}} \vec{\rho}(x) = [\vec{n}, \operatorname{rot} \vec{P}_\rho(x)]_+, \qquad \mathring{\operatorname{rot}} \vec{f}(x) = [\vec{n}, \operatorname{rot} \vec{P}_f(x)]_+,$$

тогда из тождества (2.13) вытекает, что функция $\mathring{\operatorname{rot}} \vec{\rho}(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\mathring{\operatorname{rot}} \vec{\rho}(x) + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} (\mathring{K}_{ii}^{(N)} \mathring{\operatorname{rot}} \vec{\rho})(x) = \mathring{\operatorname{rot}} \vec{f}(x), \quad x \in \partial F_i^{(N)}, \tag{2.14}$$

и, следовательно, в силу (2.7) имеет место равномерная по i и N оценка

$$\max_{x \in \partial F_i^{(N)}} |\mathring{\operatorname{rot}} \vec{\rho}(x)| \leq C \max_{x \in \partial F_i^{(N)}} |\mathring{\operatorname{rot}} \vec{f}(x)|. \tag{2.15}$$

Из формулы (2.4) для решения $\vec{\rho}(x)$ уравнения (2.1) следует

$$\int_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\rho}(x) d\Gamma_x = \int_{F_i^{(N)}} \operatorname{rot} \vec{P}_\rho(x) dx = -\sum_{k=1}^{3} \vec{e}_k \int_{\partial F_i^{(N)}} ([\vec{n}, \operatorname{rot} \vec{P}_\rho(x)] \vec{e}_s)(x^m - \mathring{x}_i^m) d\Gamma_x, \tag{2.16}$$

где индексы s, m таковы, что $[\vec{e}_s, \vec{e}_m] = \vec{e}_k$, $\mathring{x}_i$ – фиксированная точка в $F_i^{(N)}$. В силу оценки (2.15) и полученной формулы (2.16) имеем следующую равномерную по i и N оценку для решения $\vec{\rho}(x)$ уравнения (2.1)

$$\Big| \int\limits_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\rho}(x)\, d\Gamma_x \Big| \leq C a_i^{(N)3} \max_{x\in\partial F_i^{(N)}} |\mathring{rot} \vec{f}(x)|. \tag{2.17}$$

Наряду с уравнением (2.1) можно рассмотреть следующие два уравнения

$$\vec{\rho}_+(x) + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} (\overset{+}{K}{}_{ii}^{(N)} \vec{\rho}_+)(x) = \vec{f}(x), \quad \vec{\rho}_-(x) + \frac{1-\alpha}{1+\alpha}(\overset{-}{K}{}_{ii}^{(N)} \vec{\rho}_-)(x) = \vec{f}(x). \tag{2.18}$$

Для их решений, которые будем обозначать через $\vec{\rho}_+(x)$ и $\vec{\rho}_-(x)$, справедливы оценки, аналогичные (2.7) и (2.17):

$$\max_{x\in\partial F_i^{(N)}} |\vec{\rho}_+(x), \vec{\rho}_-(x)| \leq C \max_{x\in\partial F_i^{(N)}} |\vec{f}(x)|, \tag{2.19}$$

$$\Big| \int\limits_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\rho}_+(x)\, d\Gamma_x,\ \int\limits_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\rho}_-(x)\, d\Gamma_x \Big| \leq C a_i^{(N)3} \max_{x\in\partial F_i^{(N)}} |\overset{+}{rot} \vec{f}(x), \overset{-}{rot} \vec{f}(x)|, \tag{2.20}$$

где постоянная C от i и N не зависит, а $\overset{+}{rot} \vec{f}(x)$, $\overset{-}{rot} \vec{f}(x)$ определены аналогично $\mathring{rot} \vec{f}(x)$:

$$\overset{+}{rot} \vec{f}(x) = [\vec{n}, rot \vec{P}_f^+(x)], \qquad \overset{-}{rot} \vec{f}(x) = [\vec{n}, rot \vec{P}_f^-(x)],$$

где функции $\vec{P}_f^+(x)$, $\vec{P}_f^-(x)$ являются решениями следующих краевых задач:

$$(\Delta + k^2 \varepsilon \mu) \vec{P}_f^+(x) = 0, \qquad (\Delta + k^2 \varepsilon_0 \mu_0) \vec{P}_f^-(x) = 0, \quad x\in F_i^{(N)},$$

$$div\, \vec{P}_f^+(x) = 0, \qquad div\, \vec{P}_f^-(x) = 0, \qquad x\in F_i^{(N)},$$

$$[\vec{n}, \vec{P}_f^+(x)]_+ = \vec{f}(x), \qquad [\vec{n}, \vec{P}_f^-(x)]_+ = \vec{f}(x), \qquad x\in\partial F_i^{(N)}.$$

Легко видеть, что

$$\| \overset{+}{K}{}_{ii}^{(N)} - \mathring{K}_{ii}^{(N)},\ \ \overset{-}{K}{}_{ii}^{(N)} - \mathring{K}_{ii}^{(N)} \| \leq C a_i^{(N)2}, \tag{2.21}$$

следовательно,

$$\max_{x\in\partial F_i^{(N)}} |\vec{\rho}_+(x) - \vec{\rho}(x),\ \ \vec{\rho}_-(x) - \vec{\rho}(x)| \leq C a_i^{(N)2} \max_{x\in\partial F_i^{(N)}} |\vec{f}(x)|. \tag{2.22}$$

Из оценок (2.20), (2.22) вытекает обобщение оценки (2.17):

$$\Big| \int\limits_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\rho}(x)\, d\Gamma_x \Big| \leq C a_i^{(N)3} \max_{x\in\partial F_i^{(N)}} |\overset{+}{rot} \vec{f}(x), \overset{-}{rot} \vec{f}(x)| + C a_i^{(N)4} \max_{x\in\partial F_i^{(N)}} |\vec{f}(x)|. \tag{2.23}$$

2. Здесь рассмотрим задачу (1.6)-(1.10). Представим ее решение в виде

$$v_j^{(\alpha)}(x) = \begin{cases} \displaystyle\int\limits_{\partial F_i^{(N)}} \sigma_j^{(\alpha)}(\xi) \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{4\pi|x-\xi|}\, d\Gamma_\xi, & x\in R_3 \setminus F_i^{(N)}, \\ \displaystyle\int\limits_{\partial F_i^{(N)}} \sigma_j^{(\alpha)}(\xi) \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{4\pi|x-\xi|}\, d\Gamma_\xi + \sigma_j^{(\alpha)}(x), & x\in F_i^{(N)}, \end{cases} \tag{2.24}$$

где функция $\sigma_j^{(\alpha)}(x)$ удовлетворяет уравнению

$$(1+\alpha)\sigma_j^{(\alpha)}(x) + (\alpha-1) \int\limits_{\partial F_i^{(N)}} \sigma_j^{(\alpha)}(\xi) \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{4\pi|x-\xi|}\, d\Gamma_\xi = 2(1-\alpha)(x^j - x_0^j). \tag{2.25}$$

и предполагается гармонически продолженной с поверхности $\partial F_i^{(N)}$ в область $F_i^{(N)}$.

Действительно, функция $v_j^{(\alpha)}(x)$, определенная (2.24), удовлетворяет уравнениям (1.6), (1.7) и условиям (1.8), (1.10). Из уравнения (2.25) следует, что

$$\Big[(\alpha-1) \int\limits_{\partial F_i^{(N)}} \sigma_j^{(\alpha)}(\xi) \frac{d}{dn_\xi} \frac{1}{4\pi|x-\xi|}\, d\Gamma_\xi + \alpha\sigma_j^{(\alpha)}(x) \Big]_+ = (1-\alpha)(x^j - x_0^j), \quad x\in\partial F_i^{(N)}, \tag{2.26}$$

$$((I+\frac{\varepsilon_0-\varepsilon}{\varepsilon_0+\varepsilon}\overset{\circ}{K}{}^{(N)}_{ii})\vec{Q}_{2i})(x)=\sum_{j\neq i}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0+\varepsilon}\overset{+}{K}{}^{(N)}_{ij}-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0+\varepsilon}\overset{-}{K}{}^{(N)}_{ij})\vec{Q}_{2j}\right)(x)-$$

$$-\frac{i\varepsilon_0}{k\mu_0(\varepsilon_0+\varepsilon)}\sum_{j\neq i}(M^{(N)}_{ij}\vec{Q}_{1j})(x)+\sum_{j\neq i}\left([\vec{n},\vec{v}_H^{\,(jN)}(x)]_- - [\vec{n},\vec{v}_H^{\,(jN)}(x)]_+\right). \quad (3.29)$$

Очевидно, для $\vec{Q}_{1i}(x)$, $\vec{Q}_{2i}(x)$ справедлива оценка, аналогичная (3.28)

$$\max_i \max_{x\in\partial F_i^{(N)}} |\vec{Q}_{1i}(x),\ \vec{Q}_{2i}(x)| = o(1). \quad (3.30)$$

Воспользовавшись оценками (2.23), (3.23) и условием 3 теоремы, можно показать, что

$$\vec{Q}_{1i}(x)=\vec{Q}^{(1)}_{1i}(x)+\vec{Q}^{(2)}_{1i}(x),\quad \vec{Q}_{2i}(x)=\vec{Q}^{(1)}_{2i}(x)+\vec{Q}^{(2)}_{2i}(x), \quad (3.31)$$

где

$$|\vec{Q}^{(1)}_{1i}(x),\ \vec{Q}^{(2)}_{1i}(x),\ \vec{Q}^{(1)}_{2i}(x),\ \vec{Q}^{(2)}_{2i}(x)| = o(1), \quad (3.32)$$

$$|\overset{-}{\mathrm{rot}}\,\vec{Q}^{(1)}_{1i}(x),\ \overset{+}{\mathrm{rot}}\,\vec{Q}^{(2)}_{1i}(x),\ \overset{-}{\mathrm{rot}}\,\vec{Q}^{(1)}_{2i}(x),\ \overset{+}{\mathrm{rot}}\,\vec{Q}^{(2)}_{2i}(x)| = o(1). \quad (3.33)$$

Из (3.23) и формулы (2.20) следует, что

$$\left|\int_{\partial F_i^{(N)}}\vec{Q}_{1i}(x)\,d\Gamma_x,\ \int_{\partial F_i^{(N)}}\vec{Q}_{2i}(x)\,d\Gamma_x\right| = o(\tau_i^{(N)}). \quad (3.34)$$

Обозначим $\vec{R}_{1i}(x)=\vec{\mathcal{P}}_{1i}(x)-\vec{Q}_{1i}(x)$, $\vec{R}_{2i}(x)=\vec{\mathcal{P}}_{2i}(x)-\vec{Q}_{2i}(x)$, используя (3.27), нетрудно получить оценку, аналогичную (3.20):

$$|\vec{R}_{1i}(x),\ \vec{R}_{2i}(x)| = o(a_i^{(N)}) \quad (3.35)$$

Теперь можем оценить $\vec{Z}_E^{(N)}(x)$, $\vec{Z}_H^{(N)}(x)$, используя оценки (3.30), (3.34), (3.35) и представление (3.21). Эти оценки аналогичны оценкам для функций $\vec{Z}_E^{(iN)}(x)$, $\vec{Z}_H^{(iN)}(x)$, проведенным в лемме 3.1. Лемма 3.2 доказана.

Из лемм 3.1, 3.2 и представления (3.1) вытекает представление (1.12) и тем самым теорема доказана.

Доказательство следствия аналогично доказательству соответствующего следствия в [2], его не приводим.

В заключение рассмотрим простой пример. Пусть включения – шары радиуса a, и пусть они расположены в попавших в область D узлах пространственной периодической решетки. Согласно следствию, наличие в среде таких включений можно учесть изменением параметров среды. Вычислим новые параметры $\varepsilon^{(N)}(x)$, $\mu^{(N)}(x)$.

Как легко убедиться, решением задачи (1.6)-(1.10) служит функция

$$v_j^{(\alpha)}(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\alpha}{2+\alpha}\,\dfrac{a^3}{z^2}\cos(\vec{z},x^j), & x\notin F_i^{(N)}\\[2mm] \dfrac{1-\alpha}{2+\alpha}\,x^j, & x\in F_i^{(N)}\end{cases}.$$

Тогда

$$\mathcal{A}^{(\alpha)}_{jk}=3\,\frac{1-\alpha}{2+\alpha}\,\frac{4}{3}\pi a^3\delta_{jk},$$

и, следовательно,

$$\varepsilon^{(N)}(x)=\begin{cases}\varepsilon_0 I, & x\in R_3\setminus D,\\[2mm] \varepsilon_0\left(I-3\cdot\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{l}\right)^3\frac{\varepsilon_0-\varepsilon}{2\varepsilon_0+\varepsilon}\right), & x\in D,\end{cases}\qquad \mu^{(N)}(x)=\begin{cases}\mu_0 I, & x\in R_3\setminus D,\\[2mm] \mu_0\left(I-3\cdot\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{l}\right)^3\frac{\mu_0-\mu}{2\mu_0+\mu}\right), & x\in D,\end{cases}$$

но функция $x^j - x_0^j$ гармонична в области $F_i^{(N)}$, и потому в силу единственности решения внутренней задачи Дирихле

$$(\alpha-1)\int_{\partial F_i^{(N)}} \sigma_j^{(\alpha)}(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\,d\Gamma_\xi + \alpha\sigma_j^{(\alpha)}(x) = (1-\alpha)(x^j - x_0^j), \quad x\in F_i^{(N)}. \qquad (2.27)$$

Из тождества (2.27) и представления (2.24) получим, что условие (I.9) также выполнено:

$$\alpha\frac{\partial v_j^{(\alpha)}}{\partial n_+}(x) - \frac{\partial v_j^{(\alpha)}}{\partial n_-}(x) = (\alpha-1)\frac{\partial}{\partial n}\int_{\partial F_i^{(N)}} \sigma_j^{(\alpha)}(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\,d\Gamma_\xi + \alpha\frac{\partial}{\partial n}\sigma_j^{(\alpha)}(x) = (1-\alpha)\cos(nx^j).$$

Заметим, что при сделанных относительно поверхностей $\partial F_i^{(N)}$ предположениях имеет место равномерная по i и N оценка

$$\max_{x\in\partial F_i^{(N)}} |\sigma_j^{(\alpha)}(x)| \le C a_i^{(N)}. \qquad (2.28)$$

Определим, решая соответствующую задачу Дирихле, функцию $\theta_j^{(\alpha)}(x)$ такую, что

$$\sigma_j^{(\alpha)}(x) = \int_{\partial F_i^{(N)}} \theta_j^{(\alpha)}(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\,d\Gamma_\xi, \quad x\in F_i^{(N)}.$$

Для $\theta_j^{(\alpha)}(x)$ также справедлива равномерная по i и N оценка, аналогичная (2.28)

$$\max_{x\in\partial F_i^{(N)}} |\theta_j^{(\alpha)}(x)| \le C a_i^{(N)}. \qquad (2.29)$$

Из тождества (2.27) вытекает необходимое в дальнейшем равенство

$$(\alpha-1)\Big[\vec{n},\nabla\int_{\partial F_i^{(N)}} \sigma_j^{(\alpha)}(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\,d\Gamma_\xi\Big]_+ + \alpha[\vec{n},\nabla\sigma_j^{(\alpha)}(x)] = (1-\alpha)[\vec{n},e_j]. \qquad (2.30)$$

Поскольку

$$\Big[\nabla\int_{\partial F_i^{(N)}} \sigma_j^{(\alpha)}(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\,d\Gamma_\xi\Big]_+ = \Big[-\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\int_{\partial F_i^{(N)}} \sigma_j^{(\alpha)}(\xi)\vec{n}_\xi\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\,d\Gamma_\xi\Big]_+ =$$
$$= \Big[\mathrm{rot}\int_{\partial F_i^{(N)}} [\vec{n}_\xi,\nabla\sigma_j^{(\alpha)}(\xi)]\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\,d\Gamma_\xi\Big]_+,$$

то из (2.30) получаем, что функция $[\vec{n},\nabla\sigma_j^{(\alpha)}(x)]$ удовлетворяет уравнению

$$[\vec{n},\nabla\sigma_j^{(\alpha)}(x)] + \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\big(\mathring{K}_{ii}^{(N)}[\vec{n},\nabla\sigma_j^{(\alpha)}]\big)(x) = 2\,\frac{1-\alpha}{1+\alpha}[\vec{n},\vec{e}_j] \qquad (2.31)$$

и, следовательно, имеет место равномерная по i и N оценка

$$\max_{x\in\partial F_i^{(N)}} |[\vec{n},\nabla\sigma_j^{(\alpha)}(x)]| \le C. \qquad (2.32)$$

Оценка, аналогичная (2.32), имеет место и для функции $\theta_j^{(\alpha)}(x)$

$$\max_{x\in\partial F_i^{(N)}} |[\vec{n},\nabla\theta_j^{(\alpha)}(x)]| \le C. \qquad (2.33)$$

Понадобится также следующее представление величин $\mathcal{A}_{jk\,iN}^{(\alpha)}$

$$\mathcal{A}_{jk\,iN}^{(\alpha)} = \int_{\partial F_i^{(N)}} \sigma_j^{(\alpha)}(x)\cos(\vec{n},x^k)\,d\Gamma_x. \qquad (2.34)$$

Действительно,

$$\int_{\partial F_i^{(N)}} \sigma_j^{(\alpha)}(x)\cos(\vec{n},x^k)\,d\Gamma_x = \int_{\partial F_i^{(N)}} x^k\frac{\partial\sigma_j^{(\alpha)}}{\partial n_+}(x)\,d\Gamma_x = \int_{\partial F_i^{(N)}} x^k\Big\{\frac{\partial v_j^{(\alpha)}}{\partial n_+}(x) - \frac{\partial v_j^{(\alpha)}}{\partial n_-}(x)\Big\}\,d\Gamma_x =$$
$$= \int_{\partial F_i^{(N)}} x^k\Big\{(1-\alpha)\frac{\partial v_j^{(\alpha)}}{\partial n_+}(x) + (1-\alpha)\cos(\vec{n}x^j)\Big\}\,d\Gamma_x = (1-\alpha)\delta_{kj}\,\tau_i^{(N)} +$$

$$
+(1-\alpha)\int\limits_{\partial F_i^{(N)}} v_j^{(\alpha)}(x)\cos(\vec{n}x^k)\,d\Gamma_x = (1-\alpha)\delta_{kj}\tau_i^{(N)} + \alpha\int\limits_{\partial F_i^{(N)}} v_j^{(\alpha)}(x)\frac{\partial v_k^{(\alpha)}}{\partial n_+}(x)\,d\Gamma_x -
$$

$$
-\int\limits_{\partial F_i^{(N)}} v_j^{(\alpha)}(x)\frac{\partial v_k^{(\alpha)}}{\partial n_-}(x)\,d\Gamma_x = (1-\alpha)\delta_{kj}\tau_i^{(N)} + \alpha\int\limits_{F_i^{(N)}} (\nabla v_j^{(\alpha)}(x),\ \nabla v_k^{(\alpha)}(x)\,dx +
$$

$$
+\int\limits_{R_3\setminus F_i^{(N)}} (\nabla v_j^{(\alpha)}(x),\ \nabla v_k^{(\alpha)}(x)\,dx = \mathcal{A}_{jkiN}^{(\alpha)}.
$$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Решение задачи (I.2)-(I.5) будем искать в виде

$$
\begin{cases} \vec{E}^{(N)}(x) = \vec{E}^{(0)}(x) + \sum\limits_{i=1}^{N} \vec{v}_E^{(iN)}(x) + \vec{Z}_E^{(N)}(x), \\ \vec{H}^{(N)}(x) = \vec{H}^{(0)}(x) + \sum\limits_{i=1}^{N} \vec{v}_H^{(iN)}(x) + \vec{Z}_H^{(N)}(x), \end{cases} \tag{3.1}
$$

где функции $\vec{v}_E^{(iN)}(x)$, $\vec{v}_H^{(iN)}(x)$ подберем так, чтобы

$$
\begin{cases} \vec{E}_i^{(N)}(x) = \vec{E}^{(0)}(x) + \vec{v}_E^{(iN)}(x), \\ \vec{H}_i^{(N)}(x) = \vec{H}^{(0)}(x) + \vec{v}_H^{(iN)}(x) \end{cases} \tag{3.2}
$$

являлись решением задачи (I.I)-(I.5) для одного тела (т.е. при $F^{(N)} = F_i^{(N)}$).

Л Е М М А 3.I. Функции $\vec{v}_E^{(iN)}(x)$, $\vec{v}_H^{(iN)}(x)$ в (3.I) таковы, что для точек $x \notin \bar{D}$

$$
\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} \vec{v}_E^{(iN)}(x) &= \tau^{(N)}\vec{V}_E(x) + o(\tau^{(N)}), \\ \sum_{i=1}^{N} \vec{v}_H^{(iN)}(x) &= \tau^{(N)}\vec{V}_H(x) + o(\tau^{(N)}), \end{aligned} \tag{3.3}
$$

где функции $\vec{V}_E(x)$, $\vec{V}_H(x)$ определены формулами (I.I3).

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Функции $\vec{v}_E^{(iN)}(x)$, $\vec{v}_H^{(iN)}(x)$ представим в виде

$$
\begin{cases} \vec{v}_E^{(iN)}(x) = \vec{w}_E^{(iN)}(x) + \vec{Z}_E^{(iN)}(x), \\ \vec{v}_H^{(iN)}(x) = \vec{w}_H^{(iN)}(x) + \vec{Z}_H^{(iN)}(x), \end{cases} \tag{3.4}
$$

где

$$
\vec{w}_E^{(iN)}(x) = \begin{cases} E_j^{(0)}(\mathring{x}_i)\,\mathrm{rot}\int\limits_{\partial F_i^{(N)}} [\vec{n}\,\nabla\sigma_j^{(\varepsilon)}(\xi)]\,\bar{g}(x-\xi)\,d\Gamma_\xi + \frac{i}{k\varepsilon_0} H_j^{(0)}(\mathring{x}_i)\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\int\limits_{\partial F_i^{(N)}} [\vec{n},\nabla\sigma_j^{(\mu)}(\xi)]\,\bar{g}(x-\xi)\,d\Gamma_\xi, & x\in R_3\setminus F_i^{(N)}, \\ E_j^{(0)}(\mathring{x}_i)\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0-\varepsilon}\mathrm{rot}\int\limits_{\partial F_i^{(N)}} [\vec{n},\nabla\theta_j^{(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0})}(\xi)]\,\mathring{g}(x-\xi)\,d\Gamma_\xi + \frac{i}{k\varepsilon_0} H_j^{(0)}(\mathring{x}_i)\frac{\mu_0}{\mu_0-\mu}\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\int\limits_{\partial F_i^{(N)}} [n,\nabla\theta_j^{(\frac{\mu}{\mu_0})}(\xi)]\,\mathring{g}(x-\xi)\,d\Gamma_\xi, & x\in F_i^{(N)}; \end{cases} \tag{3.5}
$$

$$
w_H^{(iN)}(x) = \begin{cases} H_j^{(0)}(\mathring{x}_i)\,\mathrm{rot}\int\limits_{\partial F_i^{(N)}} [\vec{n},\nabla\sigma_j^{(\frac{\mu}{\mu_0})}(\xi)]\,\bar{g}(x-\xi)\,d\Gamma_\xi - \frac{i}{k\mu_0} E_j^{(0)}(\mathring{x}_i)\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\int\limits_{\partial F_i^{(N)}} [\vec{n},\nabla\sigma_j^{(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0})}(\xi)]\,\bar{g}(x-\xi)\,d\Gamma_\xi, & x\in R_3\setminus F_i^{(N)}, \\ H_j^{(0)}(\mathring{x}_i)\frac{\mu}{\mu_0-\mu}\mathrm{rot}\int\limits_{\partial F_i^{(N)}} [\vec{n},\nabla\theta_j^{(\frac{\mu}{\mu_0})}(\xi)]\,\mathring{g}(x-\xi)\,d\Gamma_\xi - \frac{i}{k\mu_0} E_j^{(0)}(\mathring{x}_i)\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0-\varepsilon}\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\int\limits_{\partial F_i^{(N)}} [\vec{n}\,\nabla\theta_j^{(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0})}(\xi)]\times \\ \qquad\times\,\mathring{g}(x-\xi)\,d\Gamma_\xi, & x\in F_i^{(N)}, \end{cases}
$$

$$
\bar{g}(x-\xi) = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik\cdot\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,|x-\xi|}}{|x-\xi|}, \quad \mathring{g}(x-\xi) = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik\sqrt{\varepsilon\mu}\,|x-\xi|}}{|x-\xi|}.
$$

Лемма будет доказана, если будет доказана такая оценка для функции $\vec{Z}_E^{(iN)}(x)$, $\vec{Z}_H^{(iN)}(x)$ при $x \notin \bar{D}$

$$|\vec{z}_E^{(iN)}(x),\ \vec{z}_H^{(iN)}(x)| = o(\tau^{(N)}). \tag{3.6}$$

Действительно, раскладывая тогда функцию $\bar{g}(x-\xi)$ в ряд Тейлора и учитывая оценку (2.28) и представление (2.34), из (3.4), имеем

$$\begin{aligned}\vec{v}_E^{(iN)}(x) = {} & E_j^{(0)}(\mathring{x}_i)\,\mathrm{rot}\int_{\partial F_i^{(N)}}[\vec{n},\nabla\sigma_j^{(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0})}(\xi)]\bar{g}(x-\xi)\,d\Gamma_\xi + \frac{i}{k\varepsilon_0}H_j^{(0)}(\mathring{x}_i)\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\int_{\partial F_i^{(N)}}[\vec{n},\\ & \nabla\sigma_j^{(\frac{\mu}{\mu_0})}(\xi)]\bar{g}(x-\xi)\,d\Gamma_\xi + o(\tau_i^{(N)}) = -E_j^{(0)}(\mathring{x}_i)\,\mathrm{rot}\frac{\partial\bar{g}}{\partial x^k}(x-\mathring{x}_i)\times\\ & \times\int_{\partial F_i^{(N)}}[\vec{n}\nabla\sigma_j^{(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0})}(\xi)](\xi^k-\xi_0^k)\,d\Gamma_\xi - \frac{i}{k\varepsilon_0}H_j^{(0)}(\mathring{x}_i)\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\frac{\partial\bar{g}}{\partial x^k}(x-\mathring{x}_i)\times\\ & \times\int_{\partial F_i^{(N)}}[\vec{n}\nabla\sigma_j^{(\frac{\mu}{\mu_0})}(\xi)](\xi^k-\xi_0^k)\,d\Gamma_\xi + o(\tau_i^{(N)}) = -\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\bar{g}(x-\mathring{x}_i)\cdot\mathcal{A}^{(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0})}\vec{E}(\mathring{x}_i) -\\ & -ik\mu_0\,\mathrm{rot}\,\bar{g}(x-\mathring{x}_i)\,\mathcal{A}^{(\frac{\mu}{\mu_0})}\vec{H}^{(0)}(\mathring{x}_i) + o(\tau_i^{(N)}),\end{aligned} \tag{3.7}$$

аналогично

$$\vec{v}_H^{(iN)}(x) = -\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\bar{g}(x-\mathring{x}_i)\,\mathcal{A}^{(\frac{\mu}{\mu_0})}\vec{H}^{(0)}(\mathring{x}_i) + ik\varepsilon_0\,\mathrm{rot}\,\bar{g}(x-\mathring{x}_i)\,\mathcal{A}^{(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0})}\vec{E}^{(0)}(\mathring{x}_i) + o(\tau_i^{(N)}). \tag{3.8}$$

Суммируя теперь (3.7), (3.8) по i и пользуясь условием I теоремы, получим представление (3.3).

Перейдем к доказательству оценки (3.6). Будем искать функции $\vec{z}_E^{(iN)}(x)$, $\vec{z}_H^{(iN)}(x)$ в виде:

$$\vec{z}_E^{(iN)}(x) = \begin{cases}\mathrm{rot}\int_{\partial F_i^{(N)}}\vec{p}_1(\xi)\,\bar{g}(x-\xi)\,d\Gamma_\xi + \frac{i}{k\varepsilon_0}\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\int_{\partial F_i^{(N)}}\vec{p}_2(\xi)\,\bar{g}(x-\xi)\,d\Gamma_\xi, & x\in R_3\setminus F_i^{(N)},\\ \frac{\mu}{\mu_0}\mathrm{rot}\int_{\partial F_i^{(N)}}\vec{p}_1(\xi)\,\vec{g}(x-\xi)\,d\Gamma_\xi + \frac{i}{k\varepsilon_0}\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\int_{\partial F_i^{(N)}}\vec{p}_2(\xi)\,\vec{g}(x-\xi)\,d\Gamma_\xi, & x\in F_i^{(N)};\end{cases}$$

$$\vec{z}_H^{(iN)}(x) = \begin{cases}\mathrm{rot}\int_{\partial F_i^{(N)}}\vec{p}_2(\xi)\,\bar{g}(x-\xi)\,d\Gamma_\xi - \frac{i}{k\mu_0}\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\int_{\partial F_i^{(N)}}\vec{p}_1(\xi)\,\bar{g}(x-\xi)\,d\Gamma_\xi, & x\in R_3\setminus F_i^{(N)},\\ \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\mathrm{rot}\int_{\partial F_i^{(N)}}\vec{p}_2(\xi)\,\vec{g}(x-\xi)\,d\Gamma_\xi - \frac{i}{k\mu_0}\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\int_{\partial F_i^{(N)}}\vec{p}_1(\xi)\,\vec{g}(x-\xi)\,d\Gamma_\xi, & x\in F_i^{(N)}.\end{cases} \tag{3.9}$$

Тогда, учитывая представления (3.2), (3.4), для определения $\vec{p}_1(x)$, $\vec{p}_2(x)$ получим из условий сопряжения (I.3), (I.4) следующую систему уравнений:

$$\begin{cases}((I - \frac{\mu}{\mu_0+\mu}\overset{+}{K}{}_{ii}^{(N)} + \frac{\mu_0}{\mu_0+\mu}\bar{K}_{ii}^{(N)})\vec{p}_1)(x) - \frac{i}{k\varepsilon_0}(M_{ii}^{(N)}\vec{p}_2)(x) = \vec{f}_1^{(iN)}(x),\\ ((I - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0+\varepsilon}\overset{+}{K}{}_{ii}^{(N)} + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0+\varepsilon}\bar{K}_{ii}^{(N)})\vec{p}_2)(x) + \frac{i}{k\mu_0}(M_{ii}^{(N)}\vec{p}_1)(x) = \vec{f}_2^{(iN)}(x),\end{cases} \tag{3.10}$$

где

$$\begin{aligned}\vec{f}_1^{(iN)}(x) &= \frac{2\mu_0}{\mu_0+\mu}([\vec{n}\vec{E}^{(0)}(x)] + [\vec{n},\vec{w}_E^{(iN)}(x)]_- - [\vec{n},\vec{w}_E^{(iN)}(x)]_+),\\ \vec{f}_2^{(iN)}(x) &= \frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon_0+\varepsilon}([\vec{n}\vec{H}^{(0)}(x)] + [\vec{n}\,\vec{w}_H^{(iN)}(x)]_- - [\vec{n}\,\vec{w}_H^{(iN)}(x)]_+).\end{aligned} \tag{3.11}$$

Покажем, что функции $\vec{f}_1^{(iN)}(x)$, $\vec{f}_2^{(iN)}(x)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned}\vec{f}_1^{(iN)}(x) &= \vec{\varphi}_1(x) + \vec{\psi}_1(x),\\ \vec{f}_2^{(iN)}(x) &= \vec{\varphi}_2(x) + \vec{\psi}_2(x),\end{aligned} \tag{3.12}$$

где $\vec{\varphi}_1(x)$, $\vec{\varphi}_2(x)$, $\vec{\psi}_1(x)$, $\vec{\psi}_2(x)$ таковы, что

$$\vec{\varphi}_1(x),\ \vec{\varphi}_2(x) = o(1), \quad \overset{\circ}{rot}\,\vec{\varphi}_1(x),\ \overset{\circ}{rot}\,\vec{\varphi}_2(x) = 0, \qquad \vec{\psi}_1(x),\ \vec{\psi}_2(x) = o(a_i^{(N)}) \tag{3.13}$$

Действительно, возьмем

$$\vec{\varphi}_1(x) = [\vec{n}, \frac{2\mu_0}{\mu_0+\mu}\Big(\frac{\partial E^{(0)}}{\partial x^k}(\overset{\circ}{x}_i)(x^k - x_0^k) - ik\mu_0 H_j^{(0)}(\overset{\circ}{x}_i)\times$$

$$\times\, rot\int_{\partial F_i^{(N)}} \vec{n}\,\sigma_j^{(\frac{\mu}{\mu_0})}(\xi)\,\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\,d\Gamma_\xi + ik\mu H_j^{(0)}(\overset{\circ}{x}_i)\frac{\mu_0}{\mu_0-\mu}\,rot\int_{\partial F_i^{(N)}}\vec{n}\,\theta_j^{(\frac{\mu}{\mu_0})}(\xi)\,\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\,d\Gamma_\xi\,)],$$

тогда, используя оценки (2.28), (2.29) и равенство (2.30), можно показать, что

$$\vec{\psi}_1(x) = \vec{f}_1^{(iN)}(x) - \vec{\varphi}_1(x) = o(a_i^{(N)}).$$

Из оценок (2.32), (2.33) вытекает, что $\vec{\varphi}_1(x) = o(1)$, а используя равенство (2.28), нетрудно проверить, что $\overset{\circ}{rot}\,\vec{\varphi}_1(x) = 0$.

Аналогично можно доказать представление (3.12) и для функции $\vec{f}_2^{(iN)}(x)$.

Пусть функции $\vec{q}_1(x)$, $\vec{q}_2(x)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}&((I + \frac{\mu_0-\mu}{\mu_0+\mu}\overset{\circ}{K}{}_{ii}^{(N)})\vec{q}_1)(x) = \vec{\varphi}_1(x),\\ &((I + \frac{\varepsilon_0-\varepsilon}{\varepsilon_0+\varepsilon}\overset{\circ}{K}{}_{ii}^{(N)})\vec{q}_2)(x) = \vec{\varphi}_2(x).\end{aligned} \tag{3.14}$$

Тогда, в силу (2.7), (3.13), справедлива равномерная по i и N оценка функций $\vec{q}_1(x)$, $\vec{q}_2(x)$:

$$|\vec{q}_1(x),\ \vec{q}_2(x)| = o(1), \tag{3.15}$$

а из (2.15), (2.17) и (3.13) вытекает, что

$$|\overset{\circ}{rot}\,\vec{q}_1(x),\ \overset{\circ}{rot}\,\vec{q}_2(x)| = 0, \quad \Big|\int_{\partial F_i^{(N)}}\vec{q}_1(x)\,d\Gamma_x,\ \int_{\partial F_i^{(N)}}\vec{q}_2(x)\,d\Gamma_x\Big| = 0. \tag{3.16}$$

Пусть теперь

$$\vec{\omega}_1(x) = \vec{p}_1(x) - \vec{q}_1(x), \qquad \vec{\omega}_2(x) = \vec{p}_2(x) - \vec{q}_2(x), \tag{3.17}$$

тогда из (3.10), (3.12), (3.14) для определения $\vec{\omega}_1(x)$, $\vec{\omega}_2(x)$ получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned}&((I - \frac{\mu}{\mu_0+\mu}\overset{+}{K}{}_{ii}^{(N)} + \frac{\mu_0}{\mu_0+\mu}\bar{K}_{ii}^{(N)})\vec{\omega}_1)(x) - \frac{i}{k\varepsilon_0}(M_{ii}^{(N)}\vec{\omega}_2)(x) = \vec{\psi}_1(x) +\\ &+\frac{\mu}{\mu_0+\mu}((\overset{+}{K}{}_{ii}^{(N)} - \overset{\circ}{K}{}_{ii}^{(N)})\vec{q}_1)(x) + \frac{\mu_0}{\mu_0+\mu}((\overset{\circ}{K}{}_{ii}^{(N)} - \bar{K}_{ii}^{(N)})\vec{q}_1)(x) +\\ &+\frac{i}{k\varepsilon_0}(M_{ii}^{(N)}\vec{q}_2)(x),\\ &((I - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0+\varepsilon}\overset{+}{K}{}_{ii}^{(N)} + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0+\varepsilon}\bar{K}_{ii}^{(N)})\vec{\omega}_2)(x) + \frac{i}{k\mu_0}(M_{ii}^{(N)}\vec{\omega}_1)(x) = \vec{\psi}_2(x) +\\ &+\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0+\varepsilon}((\overset{+}{K}{}_{ii}^{(N)} - \overset{\circ}{K}{}_{ii}^{(N)})\vec{q}_2)(x) + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0+\varepsilon}((\overset{\circ}{K}{}_{ii}^{(N)} - \bar{K}_{ii}^{(N)})\vec{q}_2)(x) -\\ &-\frac{i}{k\mu_0}(M_{ii}^{(N)}\vec{q}_1)(x).\end{aligned} \tag{3.18}$$

Как нетрудно убедиться, имеют место следующие равномерные по i и N оценки

$$\|\overset{+}{K}{}_{ii}^{(N)} - \overset{\circ}{K}{}_{ii}^{(N)}\| < Ca_i^{(N)2}, \quad \|\bar{K}_{ii}^{(N)} - \overset{\circ}{K}{}_{ii}^{(N)}\| < Ca_i^{(N)2}, \quad \|M_{ii}^{(N)}\| < Ca_i^{(N)}. \tag{3.19}$$

Операторы $(I + \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\overset{\circ}{K}{}_{ii}^{(N)})$ имеют ограниченные равномерно по i и N обратные операторы, учитывая оценки (3.I9), получим, что система (3.I8) имеет решение, а так как в силу (3.I5) и (3.I9) правые части системы (3.I8) имеют порядок $o(a_i^{(N)})$, то справедлива оценка

$$|\vec{\omega}_1(x),\ \vec{\omega}_2(x)| = o(a_i^{(N)}). \qquad (3.20)$$

Оценим теперь $\vec{Z}_E^{(iN)}(x)$, $\vec{Z}_H^{(iN)}(x)$ при $x \notin \bar{D}$, пользуясь (3.I5), (3.I6), (3.20). Из представления (3.9) имеем

$$\vec{Z}_E^{(iN)}(x) = \operatorname{rot}\int_{\partial F_i^{(N)}} \vec{q}_1(\xi)\,\bar{g}(x-\xi)\,d\Gamma_\xi + \frac{i}{k\varepsilon_0}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\int_{\partial F_i^{(N)}} \vec{q}_2(\xi)\,\bar{g}(x-\xi)\,d\Gamma_\xi +$$
$$+\operatorname{rot}\int_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\omega}_1(\xi)\,\bar{g}(x-\xi)\,d\Gamma_\xi + \frac{i}{k\varepsilon_0}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\int_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\omega}_2(\xi)\,\bar{g}(x-\xi)\,d\Gamma_\xi =$$
$$= \operatorname{rot}\int_{\partial F_i^{(N)}} \vec{q}_1(\xi)\left(\bar{g}(x-\xi) - \bar{g}(x-\overset{0}{\xi}_i)\right) d\Gamma_\xi + \frac{i}{k\varepsilon_0}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\int_{\partial F_i^{(N)}} q_2(\xi)\,\times$$
$$\times\left(\bar{g}(x-\xi) - \bar{g}(x-\overset{0}{\xi}_i)\right) d\Gamma_\xi + o(\tau_i^{(N)}) = o(\tau_i^{(N)}),$$

аналогично $\vec{Z}_H^{(iN)}(x) = o(\tau_i^{(N)})$.

Итак, оценка (3.6) а вместе с ней лемма 3.I доказаны.

Л Е М М А 3.2. Функции $\vec{Z}_E^{(N)}(x)$, $\vec{Z}_H^{(N)}(x)$ в (3.I) допускают оценку

$$|\vec{Z}_E^{(N)}(x),\ \vec{Z}_H^{(N)}(x)| = o(\tau^{(N)})$$

для точек $x \notin \bar{D}$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Будем искать функции $\vec{Z}_E^{(N)}(x)$, $\vec{Z}_H^{(N)}(x)$ в виде

$$\vec{Z}_E^{(N)}(x) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N}\left\{\operatorname{rot}\int_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\mathcal{P}}_{1i}(\xi)\,\bar{g}(x-\xi)\,d\Gamma_\xi + \frac{i}{k\varepsilon_0}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\int_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\mathcal{P}}_{2i}(\xi)\,\bar{g}(x-\xi)\,d\Gamma_\xi\right\}, & x \in R_3\setminus F^{(N)}, \\ \sum\limits_{i=1}^{N}\left\{\frac{\mu}{\mu_0}\operatorname{rot}\int_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\mathcal{P}}_{1i}(\xi)\,\overset{+}{g}(x-\xi)\,d\Gamma_\xi + \frac{i}{k\varepsilon_0}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\int_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\mathcal{P}}_{2i}(\xi)\,\overset{+}{g}(x-\xi)\,d\Gamma_\xi\right\}, & x \in F^{(N)}, \end{cases} \qquad (3.21)$$

$$\vec{Z}_H^{(N)}(x) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N}\left\{-\frac{i}{k\mu_0}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\int_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\mathcal{P}}_{1i}(\xi)\,\bar{g}(x-\xi)\,d\Gamma_\xi + \operatorname{rot}\int_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\mathcal{P}}_{2i}(\xi)\,\bar{g}(x-\xi)\,d\Gamma_\xi\right\}, & x \in R_3\setminus F^{(N)}, \\ \sum\limits_{i=1}^{N}\left\{-\frac{i}{k\mu_0}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\int_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\mathcal{P}}_{1i}(\xi)\,\overset{+}{g}(x-\xi)\,d\Gamma_\xi + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\operatorname{rot}\int_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\mathcal{P}}_{2i}(\xi)\,\overset{+}{g}(x-\xi)\,d\Gamma_\xi\right\}, & x \in F^{(N)}. \end{cases}$$

Тогда из условий сопряжения (I.3), (I.4) для определения $\vec{\mathcal{P}}_{1i}(x)$, $\vec{\mathcal{P}}_{2i}(x)$ получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \left(\left(I - \frac{\mu}{\mu_0+\mu}\overset{+}{K}{}_{ii}^{(N)} + \frac{\mu_0}{\mu_0+\mu}\bar{K}_{ii}^{(N)}\right)\vec{\mathcal{P}}_{1i}\right)(x) + \sum\limits_{j\neq i}\left(\left(\frac{\mu_0}{\mu_0+\mu}\bar{K}_{ij}^{(N)} - \frac{\mu}{\mu_0+\mu}\overset{+}{K}{}_{ij}^{(N)}\right)\vec{\mathcal{P}}_{1j}\right)(x) - \\ -\frac{i\mu_0}{k\varepsilon_0(\mu_0+\mu)}\sum\limits_{j=1}^{N}\left(M_{ij}^{(N)}\vec{\mathcal{P}}_{2j}\right)(x) = \frac{2\mu_0}{\mu_0+\mu}\sum\limits_{j\neq i}\left([\vec{n}\vec{v}_E^{(jN)}(x)]_- - [\vec{n},\vec{v}_E^{(jN)}(x)]_+\right), \\ \left(\left(I - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0+\varepsilon}\overset{+}{K}{}_{ii}^{(N)} + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0+\varepsilon}\bar{K}_{ii}^{(N)}\right)\vec{\mathcal{P}}_{2i}\right)(x) + \sum\limits_{j\neq i}\left(\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0+\varepsilon}\bar{K}_{ij}^{(N)} - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0+\varepsilon}\overset{+}{K}{}_{ij}^{(N)}\right)\vec{\mathcal{P}}_{2j}\right)(x) + \\ +\frac{i\varepsilon_0}{k\mu_0(\varepsilon_0+\varepsilon)}\sum\limits_{j=1}^{N}\left(M_{ij}^{(N)}\vec{\mathcal{P}}_{1j}\right)(x) = \frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon_0+\varepsilon}\sum\limits_{j\neq i}\left([\vec{n}\vec{v}_H^{(jN)}(x)]_- - [\vec{n}\vec{v}_H^{(jN)}(x)]_+\right). \end{cases} \qquad (3.22)$$

Покажем, что имеют место равномерные по i оценки

$$\Big|\sum_{j\neq i}[\vec{n},\vec{v}_E^{\,(jN)}(x)]_-,\ \sum_{j\neq i}[\vec{n},\vec{v}_E^{\,(jN)}(x)]_+,\ \sum_{j\neq i}[\vec{n},\vec{v}_H^{\,(jN)}(x)]_-,\ \sum_{j\neq i}[\vec{n},\vec{v}_H^{\,(jN)}(x)]_+\Big| = o(1). \quad (3.23)$$

Ограничимся доказательством первой оценки, так как остальные получаются аналогичным образом. Из представления (3.4) имеем

$$\sum_{j\neq i}[\vec{n},\vec{v}_E^{\,(jN)}]_- = \sum_{j\neq i}[\vec{n},\vec{w}^{(jN)}(x)]_- + \sum_{j\neq i}[\vec{n},\vec{z}_E^{\,(jN)}(x)]_- . \quad (3.24)$$

Оценим первое слагаемое в (3.24). Воспользовавшись представлением (3.5) и оценками (2.32), (2.33), получаем:

$$\sum_{j\neq i}[\vec{n},\vec{w}_E^{\,(jN)}(x)]_- = \sum_{j\neq i}\Big[\vec{n}\Big\{E_k^{(0)}(\mathring{x}_j)\,\mathrm{rot}\int_{\partial F_i^{(N)}}[\vec{n},\nabla\sigma_k^{(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0})}(\xi)]\,\bar{g}(x-\xi)\,d\Gamma_\xi +$$

$$+\frac{i}{k\varepsilon_0}H_k^{(0)}(\mathring{x}_j)\,\mathrm{rot\,rot}\int_{\partial F_j^{(N)}}[\vec{n}\,\nabla\sigma_k^{(\frac{\mu}{\mu_0})}(\xi)]\,\bar{g}(x-\xi)\,d\Gamma_\xi\Big\}\Big] = \quad (3.25)$$

$$= \sum_{j\neq i}\Big[\vec{n},\Big\{E_k^{(0)}(\mathring{x}_j)\,\mathrm{rot}\int_{\partial F_j^{(N)}}[\vec{n},\nabla\sigma_k^{(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0})}(\xi)]\,\bar{g}(x-\xi)\,d\Gamma_\xi + ik\mu_0 H_k^{(0)}(\mathring{x}_j)\times$$

$$\times\int_{\partial F_j^{(N)}}[\vec{n},\nabla\sigma_k^{(\frac{\mu}{\mu_0})}(\xi)]\,\bar{g}(x-\xi)\,d\Gamma_\xi\Big\}\Big] = O\Big(\sum_{j\neq i}\frac{a_j^{(N)2}}{R_{ij}^{(N)2}}\Big).$$

Оценим теперь второе слагаемое в (3.24). Воспользовавшись представлениями (3. 9), (3.17) и оценками (3.16), (3.20), получаем:

$$\sum_{j\neq i}[\vec{n},\vec{z}_E^{\,(jN)}(x)]_- = \sum_{j\neq i}\Big[\vec{n},\Big\{\mathrm{rot}\int_{\partial F_i^{(N)}}\vec{P}_{1j}(\xi)\,\bar{g}(x-\xi)\,d\Gamma_\xi + \frac{i}{k\varepsilon_0}\,\mathrm{rot\,rot}\times$$

$$\times\int_{\partial F_i^{(N)}}\vec{P}_{2j}(\xi)\,\bar{g}(x-\xi)\,d\Gamma_\xi\Big\}\Big] = \sum_{j\neq i}\Big[\vec{n},\Big\{\mathrm{rot}\int_{\partial F_i^{(N)}}(\vec{q}_{1j}(\xi)+\vec{\omega}_{1j}(\xi))\times$$

$$\times\bar{g}(x-\xi)\,d\Gamma_\xi + \frac{i}{k\varepsilon_0}\,\mathrm{rot\,rot}\int_{\partial F_j^{(N)}}\vec{q}_{2j}(\xi)\Big(\bar{g}(x-\xi)-\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\Big)\,d\Gamma_\xi +$$

$$+\frac{i}{k\varepsilon_0}\,\mathrm{rot\,rot}\int_{\partial F_j^{(N)}}\vec{\omega}_{2j}(\xi)\,\bar{g}(x-\xi)\,d\Gamma_\xi\Big\}\Big] - o\Big(\sum_{j\neq i}\frac{a_j^{(N)2}}{R_{1j}^{(N)2}}\Big). \quad (3.26)$$

Теперь оценка (3.23) следует из представления (3.24), оценок (3.25), (3.26) и условия 3 теоремы.

Нетрудно видеть, что справедливы равномерные по i и N оценки

$$\Big\|\sum_{j\neq i}(\bar{K}_{ij}^{(N)},\ \overset{+}{K}{}_{ij}^{(N)},\ M_{ij}^{(N)})\Big\| \le C\sum_{j\neq i}\frac{a_j^{(N)2}}{R_{ij}^{(N)2}} . \quad (3.27)$$

Поэтому, принимая во внимание (I.II), (3.I9) и условие 3 теоремы, получим, что система (3.22) разрешима, причем в силу (3.23) имеет место оценка:

$$\max_i\ \max_{x\in\partial F_i^{(N)}}|\vec{\mathcal{P}}_{1i}(x),\ \vec{\mathcal{P}}_{2i}(x)| = o(1). \quad (3.28)$$

Пусть функции $\vec{Q}_{1i}(x),\vec{Q}_{2i}(x)$ удовлетворяют системе

$$\Big(\Big(I+\frac{\mu_0-\mu}{\mu_0+\mu}\mathring{K}_{ii}^{(N)}\Big)\vec{Q}_{1i}\Big)(x) = \sum_{j\neq i}\Big(\Big(\frac{\mu}{\mu_0+\mu}\overset{+}{K}{}_{ij}^{(N)}-\frac{\mu_0}{\mu_0+\mu}\bar{K}_{ij}^{(N)}\Big)\vec{Q}_{1j}\Big)(x) +$$

$$+\frac{i\mu_0}{k\varepsilon_0(\mu_0+\mu)}\sum_{j\neq i}(M_{ij}^{(N)}\vec{Q}_{2j})(x) + \sum_{j\neq i}\big([\vec{n},\vec{v}_E^{\,(jN)}(x)]_- - [\vec{n},\vec{v}_E^{\,(jN)}(x)]_+\big),$$

где ℓ - период решетки. Заметим, что эти формулы для $\varepsilon^{(N)}(x)$, $\mu^{(N)}(x)$ совпадают с известными, полученными на физическом уровне [3].

В заключение автор выражает благодарность В.А. Марченко и Е.Я. Хруслову за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

I. В. Стрэттон. Теория электромагнитизма, М.-Л., Гостехиздат, 1948.

2. В.Н. Фенченко. Краевая задача для системы уравнений Максвелла в областях с мелкозернистой границей, Сб."Математическая физика и функциональный анализ", вып. 4, ФТИНТ АН УССР, 1974.

3. Л. Левин. Современная теория волноводов, ИЛ, Москва, 1954.

ASYMPTOTICS OF AN ELECTROMAGNETIC FIELD IN THE MEDIUM WITH A LARGE NUMBER OF SMALL DIELECTRIC INCLUSIONS

V.N.Fenchenko

The conjugation problem for a system of Maxwell equations is considered which describes the electromagnetic field in a medium with dielectric inclusions. The asymptotic behaviour of the problem solution is analysed when a number of inclusions increases infinitely and their diameters decreases so that a net volume of the inclusions $\tau^{(N)}$ tends to zero. The first two terms of the asymptotic expansion of the solution in powers of $\tau^{(N)}$ have been found. It has been shown that the inclusion effect can be taken into account by changing the medium parameters.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1974 выпуск У

МОДУЛЯРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И МНОЖЕСТВО АСИМПТОТИЧЕСКИХ ОТНОШЕНИЙ

В.Я. Голодец

Изучение модулярных операторов и их спектральных свойств важно не только для понимания структуры колец операторов в гильбертовом пространстве, но и имеет определенный физический интерес [1,2]. В настоящей статье мы исследуем связь между спектральными свойствами модулярных операторов и множеством асимптотических отношений, инвариантом алгебр фон Неймана, введенным ранее в [3].

Пусть M – алгебра фон Неймана. Положим $S(M)=\bigcap_{\rho\in I} Spec\,\Delta_\rho$, где Δ_ρ – модулярный оператор [4], построенный по точному нормальному состоянию ρ на M, а I – множество всех таких состояний. Нетривиальность $S(M)$ для факторов типа Ш была, по-видимому, впервые обнаружена в наших работах [5,6] I). В [6] мы выделили подмножество $S'(M)\subseteq S(M)$, указав способ его вычисления. В настоящей работе будет доказано, что $S'(M)$ составляет асимптотически дискретную часть $Spec\,\Delta_\rho$ для всякого $\rho\in I$ (см. формулировку теоремы 2.5.2) и по существу совпадает с множеством асимптотических отношений для M, которое мы будем обозначать через $A(M)$. Мы также приведем простой критерий для того, чтобы число $\lambda\in Spec\,\Delta_\rho$ $(\lambda>0,\ \lambda\neq 1)$ принадлежало $A(M)$ в терминах спектральных свойств оператора Δ_ρ (см. теорему 2.I.I).

Работа состоит из двух разделов. В I изложены предварительные и вспомогательные результаты. Основные исследования приведены в разделе 2. Результаты этих исследований сформулированы в виде двух теорем: 2.I.I и 2.5.2. Конструкция, рассмотренная в разделе 2, имеет самостоятельный интерес и будет использована в следующей нашей работе для изучения спектральных свойств модулярных операторов.

I. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

I.I. Пусть M – неймановская алгебра в сепарабельном гильбертовом пространстве H. (Будем предполагать знакомство с неймановскими алгебрами в объеме [8,9]). Через M' обозначим коммутант M. Пусть ξ – единичный вектор из H, являющийся одновременно циклическим для M и M', т.е. $[M\xi]=[M'\xi]=H$, где через $[M\xi]$ мы обозначим замыкание линейного многообразия $M\xi$ по норме H. Вектор ξ с такими свойствами удобно назвать бициклическим. Стандартное название ξ – циклический отделяющий вектор, поскольку из $[M'\xi]=H$ вытекает, что если $x\in M$ и $x\xi=0$, то $x=0$. Можно показать, что всякая алгебра типа Ш в сепарабельном гильбертовом пространстве обладает таким бициклическим вектором [6].

Оператор b (а также b'), не обязательно ограниченный, называется присоединенным к M (а также к M'), если b (а также b') перестановочен с каждым оператором из M' (а также M), т.е. если $\eta\in D(b)$ (или $\eta\in D(b')$), а $x'\in M'$ (или $x\in M$), то $bx'\eta=x'b\eta$ (или $b'x\eta=xb'\eta$). Таким образом, если $\eta\in H$ и $\eta\in D(b)$, то $M'\eta\subseteq D(b)$, понятно, что если $\eta\in D(b')$, то $M\eta\subseteq D(b')$. Если бициклический вектор $\xi\in D(b)$, то оператор b назовем ξ – нормируемым, присоединенным к M. Легко показать, что для всякого $\eta\in H$ существуют ξ -нор-

I) См. также [7].

мируемые операторы a и $\pi'_{\xi}(a)$, присоединенные к M и M', соответственно, для которых

$$\eta = a\xi = \pi'_{\xi}(a)\xi, \tag{1.I}$$

причем a и $\pi'_{\xi}(a)$ однозначно определены на $M'\xi$ и $M\xi$, соответственно. Ясно, что $a \to \pi'_{\xi}(a)$ есть отображение ξ - нормируемых операторов, присоединенных к M на ξ - нормируемые операторы, присоединенные к M'.

1.2. Напомним определение и основные свойства модулярного оператора (сокращенно МО) [10]. Пусть M - неймановская алгебра в сепарабельном гильбертовом пространстве H, а ξ - бициклический вектор для M. Рассмотрим на линейном многообразии $M\xi$ оператор инволюции S:

$$Sx\xi = x^*\xi, \tag{2.I}$$

а на $M'\xi$ - оператор инволюции F:

$$Fx'\xi = x'^*\xi. \tag{2.2}$$

Легко проверяется, что $(Sx\xi, x'\xi) = (Fx'\xi, x\xi)$. Модулярным оператором называется оператор $\Delta = FS$, который, как показано в [10], является положительно определенным самосопряженным обратимым оператором, действующим в H, причем имеют место следующие полярные разложения для S и F:

$$S = j\Delta^{1/2} = \Delta^{-1/2}j, \tag{2.I'}$$

$$F = j\Delta^{-1/2} = \Delta^{1/2}j, \tag{2.2'}$$

j - антилинейный изометрический оператор в H со свойствами $j^2 = I$, $jMj = M'$, $j\Delta j = \Delta^{-1}$, понятно, что $\Delta\xi = \xi$, $j\xi = \xi$.

Оператор Δ определяет сильно непрерывную однопараметрическую группу $\sigma_t(-\infty < t < \infty)$ автоморфизмов M [10]

$$\sigma_t(x) = \Delta^{it}x\Delta^{-it}, \quad x \in M, \tag{2.3}$$

называемую группой модулярных автоморфизмов M (сокращенно ГМА). Оказывается, что M тогда и только тогда обладает полуконечным следом, когда $\sigma_t(-\infty < t < \infty)$ - группа внутренних автоморфизмов M.

Обозначим через $\rho(x) = (x\xi, \xi)$ $(x \in M)$ - состояние на M, которое в силу свойств вектора ξ является точным и нормальным. В [10] показано, что группа $\sigma_t(-\infty < t < \infty)$, определенная выше, является единственной группой автоморфизмов M, относительно которой ρ удовлетворяет условиям КМШ (Кубо-Мартина-Швингера):

(i) ρ инвариантна относительно σ_t;

(ii) для любых $x, y \in M$ существует функция $F(z)$, голоморфная в полосе $0 < Im z < 1$ и непрерывная на границе с граничными условиями

$$F(t) = \rho(\sigma_t(x)y) \quad \text{и} \quad F(t+i) = \rho(y\sigma_t(x)). \tag{2.4}$$

Обозначим через M_ρ - подалгебру M, состоящую из всех $x \in M$, для которых $\sigma_t(x) = x$ $(-\infty < t < \infty)$, тогда из (2.4) следует, что $\rho(xy) = \rho(yx)$ при $x, y \in M_\rho$, т.е. сужение ρ на M_ρ определяет на M_ρ точный нормальный и конечный след.

В заключение этого пункта заметим, что если Δ имеет собственное значение $\lambda(0 < \lambda < \infty)$, то, как нетрудно показать, в M существует частично изометрический оператор u такой, что

$$\Delta u\xi = \lambda u\xi, \qquad \Delta u^*\xi = \lambda^{-1}u^*\xi. \tag{2.5}$$

Далее, если $x \in M$ и $\Delta x\xi = \lambda x\xi$ $(0<\lambda<\infty)$, то $\lambda^{1/2} x\xi = \Delta^{1/2} x\xi = jx^*\xi$, а значит $\pi'_\xi(x) = \lambda^{-1/2} jx^*j \in M'$. Из аналогичных соображений следует, что $\pi'_\xi(x^*) = \lambda^{1/2} jxj$. Таким образом, если $x \in M$ и $\Delta x\xi = \lambda x\xi$, то

$$\|\pi'_\xi(x)^{\#}\| = \lambda^{-1/2}\|x\|, \quad \|\pi'_\xi(x^*)^{\#}\| = \lambda^{1/2}\|x\|, \tag{2.6}$$

где символ $\#$ здесь и в дальнейшем означает наличие или отсутствие знака сопряжения $*$. В частности, если $\lambda=1$ и если x – проектор (самосопряженный оператор), то $\pi'_\xi(x)$ – также проектор (самосопряженный оператор) из M'.

I.3. Изложим некоторые результаты о центральных последовательностях (сокращенно ЦП), которые будут использованы в дальнейшем.

Пусть M, H, ξ, ρ и Δ те же, что и в п. I.2. Последовательность операторов (x_n) из M называется ЦП, если $\sup \|x_n\| < C$ $(0<C<\infty$ и C не зависит от n) и если для любых $\eta \in H$ и $x \in M^n$

$$\lim_{n\to\infty} \|[x, x_n]\eta\| = 0, \quad [x, x_n] = xx_n - x_n x. \tag{3.I}$$

Ограниченную по норме последовательность операторов (x_n) из M назовем ξ - ЦП, если для любого $x \in M$

$$\lim_{n\to\infty} \|[x, x_n]\xi\| = 0. \tag{3.I$'$}$$

Л Е М М А I.3.I. Всякая ξ - ЦП (x_n) в M является ЦП.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Для любых $x, k \in M$ имеет место

$$\lim_{n\to\infty} \|[x_n, x]k\xi\| = 0, \tag{3.2}$$

так как

$$\|[x_n, x]k\xi\| \leq \|[x_n, xk]\xi\| + \|x\|\,\|[x_n, k]\xi\|.$$

Если теперь $\eta \in H$, то поскольку $[M\xi] = H$, для произвольного числа $\varepsilon > 0$ существует $k \in M$ такое, что

$$\|\eta - k\xi\| < \varepsilon.$$

В силу (3.2) при достаточно больших n

$$\|[x_n, x]k\xi\| < \varepsilon.$$

Следовательно, при достаточно больших n справедливы оценки

$$\begin{aligned}\|[x_n, x]\eta\| &\leq \|[x_n, x](\eta - k\xi)\| + \|[x_n, x]k\xi\|, \\ &\leq \varepsilon(2C\|x\| + 1),\end{aligned}$$

где $C = \sup_n \|x_n\|$. Лемма доказана.

Две ЦП (x_n) и (y_n) называются эквивалентными $((x_n) \sim (y_n))$, если $\lim_{n\to\infty}\|(x_n - y_n)\xi\| = 0$. ЦП (x_n) называется тривиальной, если $(x_n) \sim (\lambda_n I)$, где λ_n – число, а I – единичный оператор, и нулевой, если $(x_n) \sim (\lambda_n I)$, где $\lambda_n = 0$; в противном случае (x_n) называется нетривиальной.

Если (x_n) – ЦП в M, а (y_n) – ограниченная по норме последовательность операторов из M, для которой $\lim_{n\to\infty}\|(x_n - y_n)\xi\| = 0$, то (y_n) – также ЦП в M. Это утверждение легко доказывается с помощью соображений, близких к соображениям, приведенным при доказательстве леммы I.3.I.

Легко проверить, что если (x_n) ограничена по норме и (3.I$'$) выполнено для x из сильно плотного в M подмножества, а $\sup_n \|\pi'_\xi(x_n)\| < C$, то (x_n) – ЦП, т.е. для (x_n) выполнено (3.I$'$) при любом $x \in M$.

Нам понадобится некоторое усиление этого факта.

Л Е М М А I.3.2. Пусть (x_n) - ограниченная последовательность из M, для которой выполнено (3.I′) для x из сильно плотного в M подмножества операторов D. Если существует ограниченная по норме последовательность (x'_n), где $x'_n \in M'$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \|(x_n - x'_n)\xi\| = 0, \tag{3.3}$$

то (x_n) - ЦП в M.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Если $x \in M$, то для числа $\varepsilon > 0$ существует y из D, для которого

$$\|(x-y)\xi\| < \varepsilon. \tag{3.4}$$

Так как $y \in D$, то для достаточно больших n

$$\|[y, x_n]\xi\| < \varepsilon.$$

Следовательно, для достаточно больших n

$$\|[x, x_n]\xi\| \leqslant \|(x-y)x_n\xi\| + \|x_n(x-y)\xi\| + \|[y, x_n]\xi\|$$
$$\leqslant \|(x-y)x_n\xi\| + 2C\varepsilon,$$

где $C = \sup_n(\|x_n\|, \|x'_n\|, 1)$.

Заметим теперь, что

$$\big|\|(x-y)x_n\xi\| - \|(x-y)x'_n\xi\|\big| \leqslant \|(x-y)(x_n - x'_n)\xi\| \leqslant \|x-y\|\|(x'_n - x_n)\xi\|,$$

но тогда в силу (3.3) при достаточно больших n

$$\|(x-y)x_n\xi\| < 2C\varepsilon,$$

так как $\|(x-y)x'_n\xi\| < C\varepsilon$. Следовательно, для достаточно больших n

$$\|[x, x_n]\xi\| < 4C\varepsilon.$$

Лемма доказана.

В нашей работе [5] доказана следующая

Т Е О Р Е М А I.3.3. Пусть M, H, ξ, ρ и Δ_ρ - такие же, как и в п. I.2 и пусть (a_n) и (a_n^*) нетривиальные ЦП из M со свойствами:

$$\sup_n(\|\pi'_\xi(a_k)\|, \|\pi'_\xi(a_n^*)\|) < C, \tag{3.5}$$
$$a_n\xi, \ a_n^*\xi \in D(\Delta_\xi),$$
$$\lim_{n\to\infty}\|(\Delta - \lambda)a_n\xi\| = \lim_{n\to\infty}\|(\Delta - \lambda^{-1})a_n^*\xi\| = 0, \tag{3.6}$$

где λ - вещественное число >0. Тогда λ и λ^{-1} принадлежат $Spec\,\Delta_\eta$, где Δ_η -МО, построенный для произвольного циклического отделяющего вектора η для M, более того

$$\lim_{k\to\infty}\|(\Delta_\eta^{1/2} - \lambda^{1/2})a_k\eta\| = \lim_{k\to\infty}\|(\Delta^{1/2} - \lambda^{-1/2})a_k^*\eta\| = 0. \tag{3.7}$$

Если обозначить через $S'(M)$ множество всех точек λ и λ^{-1} $(0<\lambda<\infty)$, для которых выполнено условие теоремы, то можно показать, что $S'(M)$ - подгруппа мультипликативной группы вещественных чисел. Ясно, что замыкание $S_c(M)$ множества $S'(M)$ является алгебраическим инвариантом M, а поскольку $S_c(M)\setminus 0$-замкнутая подгруппа $[0,\infty)$, то $S_c(M)$ есть одно из следующих множеств: $[0,\infty)$; $(\lambda^n, \ n=0,\pm1,\dots)\cup 0$, где $0<\lambda\leqslant 1$ [2].

[2] Из результатов настоящей статьи следует, что $S'(M) = S_c(M)\setminus 0$.

Положим $S(M)=\bigcap_{\rho\in I} Spec\Delta_\rho$, где I - множество всех точных нормальных состояний на M . $S(M)$, очевидно, также является алгебраическим инвариантом фактора M , причем $S_c(M)\subseteq S(M)$.

I.4. Напомним определение множества асимптотических отношений, инварианта Х. Араки, Е.Дж. Вудса [3] для фактора M , которое мы будем обозначать через $A(M)$.

Пусть R - C^* - алгебра, являющаяся равномерным замыканием алгебры $\overset{\infty}{\underset{i=1}{\otimes}} N_2^i$, где N_2^i - I_2 - фактор (более точно, R является равномерным замыканием алгебры $\bigcup_{n=1}^{\infty}(\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} N_2^i)$) [II] . Пусть λ - число из $(0,I]$. Определим на каждом N_2^n состояние μ_λ:

$$\mu_\lambda(e^n_{ij})=0\ (i\neq j)\ ,\qquad \mu_\lambda(e^n_{11})=\frac{1}{1+\lambda}\quad ,\quad \mu_\lambda(e^n_{22})=\frac{\lambda}{1+\lambda}\ ,$$

где e^n_{ij} - матричные единицы N_2^n . Зададим теперь на R состояние ρ_λ , которое определим как $\rho_\lambda=\prod_{i=1}^{\infty}\mu^i_\lambda$, где $\mu^i_\lambda=\mu_\lambda$ - состояние на N_2^i [II] . Если Π_λ - представление R , построенное по ρ_λ согласно конструкции ГНС, то положим $R_\lambda=\Pi_\lambda(R)''$. Хорошо известно [I0] , что R_λ - фактор типа III при $0<\lambda<1$ и типа II_1 при $\lambda=1$.

Если теперь M произвольный фактор, то $A(M)$ определяется как множество λ , λ^{-1} $(0<\lambda\leqslant 1)$, для которых $M\otimes R_\lambda\approx M$. Оказывается, что если $\lambda\in A(M)$, то $(\lambda^n, n=0,\pm 1,\ldots)\subseteq A(M)$ [3)] [3] . Более того, всякий фактор M , представимый в виде бесконечного тензорного произведения факторов типа I_n (БТПФ I_n), у которого $A(M)=(\lambda^n, n=0,\pm1,\ldots)$, где $0<\lambda<1$, * - изоморфен R_λ . Далее, все факторы, представимые в виде БТПФI, у которых $A(M)=[0,\infty)$, * - изоморфны между собой. Если обозначить такой фактор через R_∞ , то $R_\infty\approx R_{\lambda_1}\otimes R_{\lambda_2}$, где $\lambda_1^{m_1}\neq\lambda_2^{m_2}$ для любых целых $m_1, m_2, |m_1|+|m_2|\neq 0$, а $\lambda_1,\lambda_2\neq 0,1$. Существуют факторы M , представимые в виде БТПФI, у которых $A(M)=\langle 0,1\rangle$ [3] .

Укажем некоторые свойства R_λ . Если Δ_λ - МО для R_λ , построенный по состоянию ρ_λ (см. п. I.2), то, очевидно, $Spec\,\Delta_\lambda=(\lambda^n, n=0,\pm1,\ldots)\cup 0$. Следовательно, $S(R_\lambda)\subseteq(\lambda^n, n=0,\pm1,)\cup 0$. С другой стороны, (e^n_{12}) и (e^n_{21}) — ЦП в R_λ , причем

$$\Delta_\lambda e^n_{21}\xi_\lambda=\lambda e^n_{21}\xi_\lambda\ ,\qquad \Delta_\lambda e^n_{12}\xi_\lambda=\lambda^{-1}e^n_{12}\xi_\lambda\ ,$$

где ξ_λ - циклический отделяющий вектор состояния ρ_λ . Отсюда легко следует, что (e^n_{12}) и (e^n_{21}) - ЦП, удовлетворяющие теореме I.3.3. Но тогда $(\lambda^n, n=0,\pm1,\ldots)\subseteq S(R_\lambda)$, а значит $S(R_\lambda)=(\lambda^n, n=0,\pm1,\ldots)\cup 0=A(R_\lambda)$. Более того, вспоминая определение $A(M)$, отсюда и из теоремы I.3.3 выводим, что $A(M)\subseteq S_c(M)\cup 0$. В настоящей статье мы покажем, что $A(M)=S_c(M)\cup 0$ для любого фактора M , если $\langle 0,1\rangle\in A(M)$.

В заключение пункта докажем важную для дальнейшего лемму

Л Е М М А I.4.I. Пусть M - фактор типа III в сепарабельном гильбертовом пространстве H , ξ - циклический отделяющий вектор, Δ_ξ - модулярный оператор для M , построенный по ξ .

Пусть в M существует нетривиальная ξ - ЦП (x_n) со свойствами:

а) (x_n^*) - ξ - ЦП в M ;

б) x_n - частично изометрический оператор и $x_n^*x_n+x_nx_n^*=I$ $x_nx_n=0$;

в) существуют ограниченные по норме последовательности операторов (x'_n) и (y'_n) из M' , обладающие свойствами

$$(i)\quad \lim_{n\to\infty}\|(x'_n-x_n)\xi\|=\lim_{n\to\infty}\|(x^*_n-y'_n)\|=0,$$

$$(ii)\quad \lim_{n\to\infty}\|(y'^*_n-\lambda x'_n)\xi\|=\lim_{n\to\infty}\|(x'^*_n-\lambda^{-1}y'_n)\xi\|=0.$$

Тогда M обладает свойствами L'_q и L_q , где $\lambda=\frac{q}{1-q}$, $0<q<1$ [I2] , а λ

3) $0\in A(M)$, если $R_0\otimes M\approx M$, где R_0 - I_∞ - фактор.

принадлежит множеству асимптотических отношений M (т.е. $\lambda\in A(M)$).

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. В силу результатов [I2] достаточно доказать, что для произвольного числа $\varepsilon>0$ и любого состояния ω на M вида $\omega(x)=(x\eta,\eta)$, где $\eta\in H$, $\|\eta\|=1$, при достаточно больших n $(n\geqslant N(\varepsilon,\omega))$ и произвольного $Q\in M$ выполнены соотношения

$$|(1-q)\omega(x_nQ)-q\omega(Qx_n)|<\varepsilon\|Q\|. \tag{4.I}$$

Так как $[M\xi]=H$, то всякое состояние вида $\omega(x)=(x\eta,\eta)$ можно аппроксимировать сколь угодно точно состоянием вида $\omega_1(x)=(x\eta_1,\eta_1)$, где $\eta_1=k_1\xi$ при $k_1\in M$, $\|k_1\xi\|=1$. Таким образом, достаточно доказать (4.I) для состояния вида $\omega(x)=(x\eta,\eta)$, у которого $\eta=k\xi$, $k\in M$.

Для этого заметим, что поскольку (x_n) и (x_n^*) – ξ – ЦП из M, то при достаточно больших n должны выполняться неравенства

$$\|[x_n,k]\xi\|<\varepsilon_1, \tag{4.2}$$

$$\|[x_n^*,k]\xi\|<\varepsilon_1, \tag{4.2'}$$

где число $\varepsilon_1>0$ будет выбрано позднее.

Таким образом, при достаточно больших n имеем

$$|(Qx_n\eta,\eta)-(Qkx_n\xi,\eta)|<\varepsilon_1\|Q\|. \tag{4.3}$$

В силу (i) при достаточно больших n

$$|(Qkx_n\xi,\eta)-(Qkx_n'\xi,\eta)|<\varepsilon_1\|Q\|. \tag{4.4}$$

Заметим теперь, что

$$(Qkx_n'\xi,\eta)=(Qk\xi,x_n'^*k\xi)=(Q\eta,kx_n'^*\xi). \tag{4.5}$$

В силу (ii) находим, что при достаточно больших n

$$|(Q\eta,kx_n'^*\xi)-\lambda^{-1}(Q\eta,ky_n'\xi)|<\varepsilon_1\|Q\|. \tag{4.6}$$

Воспользовавшись опять (i), получим, что

$$\lambda^{-1}|(Q\eta,ky_n'\xi)-(Q\eta,kx_n^*\xi)|<\varepsilon_1\|Q\|. \tag{4.7}$$

Из (4.2′) следует, что при достаточно больших n выполнено неравенство

$$\lambda^{-1}|(Q\eta,kx_n^*\xi)-(Q\eta,x_n^*\eta)|<\varepsilon_1\|Q\|\lambda^{-1}. \tag{4.8}$$

Теперь, учитывая (4.3)-(4.8), получим, что при достаточно больших n

$$|(Qx_n\eta,\eta)-\lambda^{-1}(x_nQ\eta,\eta)|<4\varepsilon_1\|Q\|\frac{1}{q}.$$

Так как $q/1-q=\lambda$, то для $\varepsilon_1\leqslant\varepsilon/4$ получим (4.I) для достаточно больших n.
Лемма доказана.

2. ОПИСАНИЕ ОСНОВНОЙ КОНСТРУКЦИИ

2.I. В этом параграфе мы укажем связь между множеством асимптотических отношений $A(M)$ фактора M (см. начало п. I.4) и спектральными инвариантами модулярных операторов $S_c(M)$ и $S(M)$ (см. конец п. I.3) в предположении, что $\lambda \in S_c(M)$, где $\lambda \neq 0, 1$.

ТЕОРЕМА 2.I.I. Пусть M – фактор типа III в сепарабельном гильбертовом пространстве H, ξ – циклический отделяющий вектор для M в H, ρ – точное нормальное состояние на M вида $\rho(x) = (x\xi, \xi)$, где $x \in M$, Δ – МО для M, построенный по ξ (см. п. I.2), σ_t $(-\infty < t < \infty)$ – соответствующая группа модулярных автоморфизмов (ГМА) для M. Если M содержит ненулевую ЦП операторов (a_n), для которой

$$\lim_{n\to\infty} \|(\Delta^{1/2} - \lambda^{1/2}) a_n \xi\| = 0 \qquad (\lambda \neq 0, 1),$$

то $(\lambda^n, n = 0, \pm 1, \dots) \subseteq A(M) \subseteq S_c(M)$, т.е. $R_{\lambda^n} \otimes M \approx M$ $(n = 0, \pm 1, \dots)$. (Мы полагаем, что $R_{\lambda^{-1}} \approx R_\lambda$).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.I.2. Требование теоремы 2.I.I о том, чтобы (a_n) была ЦП можно ослабить. Достаточно, чтобы $\sup_n \|a_n\| < C$, где C – конечная постоянная, и $\lim_{n\to\infty} \|[x, a_n]\xi\| = 0$ для x из сильно плотного в M подмножества. Это вытекает из леммы I.3.2 и соотношения $\lim_{n\to\infty} \|(\Delta^{1/2} - \lambda^{1/2}) a_n \xi\| = \lim_{n\to\infty} \|J a_n^* \xi - \lambda^{1/2} a_n \xi\| = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 2.I.3. Если M – фактор типа III и $1 \in A(M)$, то $S_c(M) \cup 0 = A(M)$.

Для доказательства теоремы достаточно доказать существование ξ – ЦП (x_n) и (x_n^*) в M, рассмотренных в лемме I.4.I. С этой целью проделаем ряд вспомогательных построений, к изложению которых мы сейчас перейдем. Эти построения были подсказаны работами [I3] и [I4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.I.4. Через $\overline{M}$ обозначим C^*– алгебру, элементами которой являются всевозможные ограниченные по норме последовательности $\bar{x} = (x_n)$, где $x_n \in M$. Аналогично определим $\overline{M}'$. Через $\overline{M}_d$ обозначим C^* – подалгебру $\overline{M}$, содержащую все последовательности вида $\bar{x} = (x_k)$, где $x_1 = x_2 = \dots$ Аналогично определим $\overline{M}'_d$.

Зададим ограниченный позитивный функционал на $\overline{M}$. Пусть U – свободный ультрафильтр на множестве натуральных чисел $\mathbb{Z}_+$ (см. стр. 42 [I5]). Если $\bar{x} = (x_n) \in \overline{M}$, то $(\rho(x_n))$ принадлежит пространству ограниченных числовых последовательностей ℓ^∞. Положим

$$\bar{\rho}(\bar{x}) = \lim_U \rho(x_n) \qquad (\rho(x_n) = (x_n\xi, \xi)). \tag{I.I}$$

Предел по ультрафильтру U понимается следующим образом. Для всякого числа $\varepsilon > 0$ существует подмножество $U_\varepsilon \in U$ такое, что для всех $n \in U_\varepsilon$ выполнено неравенство $|\bar{\rho}(\bar{x}) - \rho(x_n)| < \varepsilon$. Из определения ультрафильтра легко следует, что предел в (I.I) существует и является единственным. Понятно, $\bar{\rho}$ – позитивный линейный функционал на $\overline{M}$, $|\bar{\rho}(\bar{x})| \leq \|\bar{x}\|$, где $\|\bar{x}\| = \sup_n \|x_n\|$. Поэтому согласно конструкции Гельфанда, Наймарка, Сигала (ГНС) с помощью $\bar{\rho}$ можно построить представление Π алгебры $\overline{M}$ в гильбертовом пространстве $\overline{H}$. Тогда $\bar{\rho}$ представим в виде $\bar{\rho}(\bar{x}) = \langle \Pi(\bar{x})\bar{\xi}, \bar{\xi} \rangle$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $\overline{H}$, а $\bar{\xi}$ – единичный вектор из $\overline{H}$, циклический для $\Pi(\overline{M})$, т.е. $[\Pi(\overline{M})\bar{\xi}] = \overline{H}$.

2.2. Исследуем свойства представления Π. Иногда полезной оказывается следующая простая

ЛЕММА 2.2.I. Пусть R – C^* – подалгебра $\overline{M}$, содержащая счетное всюду плотное подмножество S. Тогда

$$\bar{\rho}(\bar{x}) = \lim_{k\to\infty} \rho(x_{i_k}) \tag{2.I}$$

для некоторой фиксированной последовательности индексов (i_K) и всех $\bar{x}=(x_i)\in R$. Иными словами, функционал $\bar{\rho}$, суженый на R, является слабым пределом последовательности функционалов $\tau_{i_k}[(\rho(x_n))]=\rho(x_{i_k})$ на M, суженных на R, где τ_n - функционал на ℓ^∞ вида $\tau_n(\alpha)=\alpha_n$, $\alpha=(\alpha_n)\in\ell^\infty$. Доказательство очевидно.

Л Е М М А 2.2.2. Для всякого оператора $A\in\Pi(\bar{M})''$ существует последовательность $\bar{z}=(z_n)\in\bar{M}$ такая, что $A\bar{\xi}=\Pi(\bar{z})\bar{\xi}$ и $A^*\bar{\xi}=\Pi(z^*)\bar{\xi}$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Согласно теореме Капланского о плотности [9], единичный шар эрмитовых операторов $\Pi(\bar{M})$ сильно плотен в единичном шаре эрмитовых операторов из $\Pi(\bar{M})''$. Поэтому существует последовательность $\bar{x}^n\in\bar{M}$ такая, что $\sup_n\|\Pi(\bar{x}^n)\|<C_0<\infty$ и

$$\lim_{n\to\infty}\langle\!\langle(A^{\#}-\Pi(\bar{x}^n)^{\#})\bar{\xi}\rangle\!\rangle=0. \tag{2.2}$$

Символ $\#$ здесь и в дальнейшем означает наличие или отсутствие знака сопряжения $*$. Заметим, что если $\bar{x}^n=(x^n_k)$, где $x^n_k\in M$, то можно предполагать выполненным неравенство

$$\sup_{n,k}\|x^n_k\|<C \qquad (0<C<\infty). \tag{2.3}$$

Действительно, если I - ядро представления Π, то

$$\|\Pi(\bar{x})\|=\inf_{\bar{a}\in I}\|\bar{x}+\bar{a}\|\left(=\inf_{\bar{a}\in I}\langle\sup_k\|x_k+a_k\|\rangle\right). \tag{2.4}$$

Напомним доказательство (2.4), предположив, что $\bar{x}\in\bar{M}_+$ ($\bar{M}_+$ - множество эрмитовых позитивных элементов $\bar{M}$). Это ограничение, очевидно, не существенно. Пусть K - максимальное коммутативное подкольцо $\bar{M}$, порожденное $\bar{x}$. K - вполне регулярно и представимо в виде кольца всех непрерывных функций на множестве его максимальных идеалов [8], $K\cap I$ - идеал в K. Для кольца всех непрерывных функций на хаусдорфовом компакте равенство в (2.4) легко проверяется.[4] Итак, (2.4) имеет место. Тогда для некоторого $\bar{a}^n\in I$

$$\sup_k\|x^n_k+a^n_k\|=\|\bar{x}^n+\bar{a}^n\|\le\|\Pi(\bar{x}^n)\|+1/2^n<C_0+1,$$

и (2.3) можно считать выполненным для $C=C_0+1$.

Будем предполагать, что последовательность $\bar{x}^n$ $(\bar{x}^n\in\bar{M})$ выбрана таким образом, что при $m,n\geq s$

$$\langle\!\langle(A-\Pi(\bar{x}^m))^{\#}\bar{\xi}\rangle\!\rangle<\frac{1}{2^{s+1}}, \tag{2.5}$$

$$\langle\!\langle(\Pi(\bar{x}^n)-\Pi(\bar{x}^m))^{\#}\bar{\xi}\rangle\!\rangle\left(=\lim_U\|(x^n_k-x^m_k)^{\#}\xi\|\right)<\frac{1}{2^{s+1}}. \tag{2.6}$$

Рассмотрим подмножества $\mathbb{Z}_+$ вида

$$V_k=\left\{t\in\mathbb{Z}_+:\|(x^i_t-x^j_t)^{\#}\xi\|<\frac{1}{2^{i+1}},\ i<j;\ i,j=1,\dots,k\right\}\quad(k\geq 2).$$

Из (2.6) и определения ультрафильтра следует, что V_k - убывающая последовательность подмножеств из U. Положим

$$\begin{array}{lll} z_t=x^1_t & \text{при} & t\in\mathbb{Z}_+-V_2, \\ z_t=x^2_t & \text{при} & t\in V_2-V_3, \\ \dots\dots & & \\ z_t=x^k_t & \text{при} & t\in V_k-V_{k+1} \end{array}$$

---

[4] см. [8], гл. Ш, § 16, следствие 10.

Тогда в силу (2.3) $\bar{z}=(z_n)\in\bar{M}$. Пусть V - произвольное подмножество U, согласно определению ультрафильтра множества $V\cap V_k$, где $k\geqslant m$, не являются пустыми и при $t\in V\cap V_k$ выполнено неравенство $\|(z_t-x_t^m)^{\#}\xi\|<\frac{1}{2^{m+1}}$. Следовательно,

$$\langle\langle(\Pi(\bar{z})-\Pi(\bar{x}^m))^{\#}\bar{\xi}\rangle\rangle=\lim_U\|(z_t-x_t^m)^{\#}\xi\|<\frac{1}{2^{m+1}}. \qquad (2.7)$$

Сравнивая (2.5) и (2.7), получаем равенство $A^{\#}\bar{\xi}=\Pi(\bar{z})^{\#}\bar{\xi}$. Лемма доказана.

В заключение пункта докажем еще одну полезную лемму

Л Е М М А 2.2.3 *(i)* Если P - проектор из $\Pi(\bar{M})$, то в $\bar{M}$ существует последовательность проекторов $\bar{p}=(p_n)$ такая, что $P=\Pi(\bar{p})$.

(ii) Если W - частичная изометрия из $\Pi(\bar{M})$, то в $\bar{M}$ существует последовательность частично изометрических операторов $\bar{w}=(w_n)$ такая, что $W=\Pi(\bar{w})$.

(iii) Если, дополнительно, начальный P и конечный Q проекторы W таковы, что $PQ=0(P+Q=I)$, то последовательность $\bar{w}=(w_n)$ можно подобрать таким образом, чтобы $p_nq_n=0$ $(p_n+q_n=1)$, где p_n, q_n - начальный и конечный проекторы w_n, т.е. $w_n^*w_n=p_n$, $w_nw_n^*=q_n$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. *(i)*. Заметим, что $\bar{M}$ можно рассматривать как неймановскую алгебру, так как $\bar{M}$ является прямой суммой счетного числа экземпляров алгебры M. Тем более, $\bar{M}$ является AW^* - алгеброй [16]. Если I - ядро представления Π, то $\Pi(\bar{M})=\bar{M}/I$, и из теоремы 3.2 [16] следует *(i)*.

Более того, пусть $P=\Pi(\bar{z})$, где $\bar{z}\in\bar{M}$. Положим $t_n=\frac{1}{2}(z_n+z_n^*)$ и рассмотрим $\bar{t}=(t_n)\in\bar{M}$. Ясно, что $\Pi(\bar{t})=\frac{1}{2}(\Pi(\bar{z})+\Pi(\bar{z}^*))=\frac{1}{2}(P+P^*)=P$. Рассмотрим в $\bar{M}$ слабозамкнутую коммутативную алгебру K, порожденную $\bar{t}=(t_n)$. Так как K порождена своими проекторами, которые имеют вид $\varphi(\bar{t})=(\varphi(t_n))$, где φ - характеристическая функция борелевского множества на вещественной оси [8], то из доказательства теоремы 3.2 [16] следует, что $P=\Pi(\bar{p})$, где $\bar{p}=\varphi(\bar{t})=(\varphi(t_n))$ для некоторой функции φ.

(ii). Пусть $W=\Pi(\bar{z})$, где $\bar{z}=(z_n)\in\bar{M}$, а $z_n=u_n|z_n|$ - полярное разложение z_n. Тогда $P=\Pi(|\bar{z}|)$, где $|\bar{z}|=(|z_n|)$ - начальный проектор W. Понятно, что $\bar{u}=(u_k)\in\bar{M}$ и $\Pi(\bar{u})P=W$. Из доказательства *(i)* следует, что P можно представить в виде $P=\Pi(\bar{q})$, где $\bar{q}=(q_n)$, а $q_n=\varphi(|z_n|)$. Положим $w_n=u_nq_n$, тогда w_n - частичная изометрия с начальным проектором q_n, $\bar{w}=(w_n)\in\bar{M}$, а $\Pi(\bar{w})=\Pi(\bar{u}\bar{q})=\Pi(\bar{u})\Pi(\bar{q})=\Pi(\bar{u})P=W$. *(ii)* доказано.

(iii). Пусть $W=\Pi(\bar{v})$, где $\bar{v}=(v_n)\in\bar{M}$, а v_n - частично изометрический оператор согласно *(ii)*. Докажем сначала, что $\bar{v}=(v_n)$ можно подобрать таким образом, чтобы начальные и конечные проекторы v_n были ортогональными. Положим для этого $g_n=v_n^*v_n$, $h_n=v_nv_n^*$. Тогда если $\bar{g}=(g_n)$, $\bar{h}=(h_n)$, то $P=\Pi(\bar{g})$, $Q=\Pi(\bar{h})$. Обозначим $e_n=I-g_n$. Ясно, что $Q=\Pi(\bar{e})$, где $\bar{e}=(e_n)$. Рассмотрим далее операторы $x_n=e_nh_n$. Если $\bar{x}=(x_n)$, то $\Pi(\bar{x})=\Pi(\bar{e}\bar{h})=Q$. Пусть $x_n=u_n|x_n|$ - полярное разложение x_n. Из доказательства *(i)* следует, что $Q=\Pi(\bar{z})$, где $\bar{z}=(z_n)$, а $z_n=\varphi(|x_n|)$. Положим $o_n=u_nz_n$, тогда o_n - частичная изометрия с начальным проектором $h_n'\leqslant h_n$ и конечным $e_n'\leqslant e_n$, причем если $\bar{o}=(o_n)$, то $\Pi(\bar{o})=\Pi(\bar{u}\bar{z})=\Pi(\bar{u})Q=\Pi(\bar{u})\Pi(|\bar{x}|)=\Pi(\bar{x})=Q$, где $|\bar{x}_n|=(|x_n|)$.

Положим теперь $w_n'=o_nv_n$, тогда w_n^1 - частичная изометрия с начальным проектором $p_n'\leqslant g_n$ и конечным - $q_n'\leqslant e_n=1-g_n$, т.е. $p_n'q_n'=0$. Более того, если $\bar{w}^1=(w_n^1)$, то $\Pi(\bar{w}')=\Pi(\bar{o})\Pi(\bar{v})=W$, поэтому $P=\Pi(\bar{p}')$, $Q=\Pi(\bar{q}')$, где $\bar{p}'=(p_n')$, а $\bar{q}'=(q_n')$. Рассмотрим проектор $f_n=I-p_n'-q_n'$. Так как $\Pi(\bar{p}')+\Pi(\bar{q}')=P+Q-I$, то $\Pi(\bar{f})=0$, где $\bar{f}=(f_n)$. Пусть теперь w_n^2 - произвольный частично изометрический оператор из M с начальным проектором $p_n^2\neq 0$ и конечным - $q_n^2\neq 0$, удовлетворяющими соотношениям $p_n^2q_n^2=0$, $p_n^2+q_n^2=f_n$. Так как M - фактор типа III в сепарабельном гильбертовом пространстве, то такие w_n^2 всегда существуют для любых заданных проекторов $p_n^2, q_n^2\neq 0$ [8]. Если $\bar{w}^2=(w_n^2)$, то учитывая равенство $f_nw_n^2=w_n^2$, найдем, что $\bar{w}^2=\bar{f}\bar{w}^2$, а значит $\Pi(\bar{w}^2)=\Pi(\bar{f})\Pi(\bar{w}^2)=0$.

Положим теперь $w_n=w_n^1+w_n^2$, тогда w_n - частичная изометрия с начальным проектором $p_n=p_n^1+p_n^2$ и конечным - $q_n=q_n'+q_n^2$. Из построения следует, что $p_n q_n = 0$, $p_n + q_n = I$. Наконец, если $\overline{w} = (w_n)$, то $\Pi(\overline{w}) = \Pi(\overline{w}') = W$. Лемма доказана.

2.3. В этом пункте введена в рассмотрение и исследована неймановская алгебра C_M^U, ответственная, как это будет видно из дальнейшего, за алгебраические свойства фактора M.

Л Е М М А 2.3.I. Пусть Π — представление C^* - алгебры $\overline{M}$, построенное в п. 2.I с помощью функционала $\overline{\rho}$, тогда всякой последовательности $\overline{B}' = (B'_n)$ из $\overline{M}'$ отвечает оператор $\Pi(\overline{B}')$ из $\Pi(\overline{M})'$ (см. определение 2.I.4).

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Пусть $\overline{B}' = (B'_n)$ — ограниченная по норме последовательность позитивных эрмитовых операторов из $\overline{M}'_1$. Очевидно, что позитивный функционал $\overline{\rho}_{\overline{B}'}(\overline{x}) = \overline{\rho}(\overline{B}'\overline{x}) = \lim(\rho(B'_n x_n))$, где $\overline{x} = (x_n)$ на $\overline{M}$, подчинен функционалу $\overline{\rho}$, т.е. $\overline{\rho}_{\overline{B}'}(\overline{x}^*\overline{x}) \leq \|\overline{B}^U\|\overline{\rho}(\overline{x}^*\overline{x})$, где $\|\overline{B}'\| = \sup_n \|B'_n\|$. Согласно результатам [8] последовательности $\overline{B}' = (B'_n)$ из $\overline{M}'$ отвечает оператор $\Pi(B')$ из $\Pi(\overline{M})'$. Легко видеть, что тогда любой последовательности $\overline{x}' = (x'_n) \in \overline{M}'$ отвечает оператор $\Pi(\overline{x}')$ из $\Pi(\overline{M})'$. Лемма доказана.

Не ясно, однако, является ли построенное в лемме отображение $\overline{x}' \to \Pi(\overline{x}')$, где $\overline{x}' \in \overline{M}'$, представлением $\overline{M}'$, хотя бы для некоторых функционалов ρ.

З А М Е Ч А Н И Е 2.3.2. Пусть E — ортогональный проектор на подпространство $[\Pi(\overline{M})'\overline{\xi}]$. Понятно, что $E \in \Pi(\overline{M})''$. Обозначим через R — неймановскую алгебру в пространстве $\widetilde{H} = E\overline{H}$, порожденную операторами вида EAE, где $A \in \Pi(\overline{M})''$. Тогда $R' = E\Pi(\overline{M})' = \Pi(\overline{M})'E$ [8], а вектор $\overline{\xi}$ является циклическим отделяющим для R, так как $[R\overline{\xi}] = [E\Pi(\overline{M})''E\overline{\xi}] = E[\Pi(\overline{M})''\overline{\xi}] = E\overline{H}$ и $[R'\overline{\xi}] = E[\Pi(\overline{M})'\overline{\xi}] = \widetilde{H}$. Обозначим через $\overline{\Delta}$ и $\overline{\sigma}_t$ $(-\infty < t < \infty)$ -МО и ГМА алгебры R, отвечающие вектору $\overline{\xi}$.

Л Е М М А 2.3.3. Пусть $\widetilde{N}$ — множество всех последовательностей $\overline{x} = (x_n)$ из $\overline{M}$, для которых $\Pi(\overline{x}^*)E \in R$. Тогда $E\Pi(\overline{x}) = \Pi(\overline{x})E$, $\widetilde{N} - C^*$ - подалгебра $\overline{M}$ и $\Pi(\widetilde{N})E = R$, кроме того

$$I = \{\overline{x} = (x_n) \in \widetilde{N} : \lim_U(\rho(x_n^* x_n)) = 0\}$$

— двусторонний идеал в $\widetilde{N}$ и $\Pi(\widetilde{N})E = \widetilde{N}/I$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Пусть $\Pi(\overline{x})$ — самосопряженный оператор и $\Pi(\overline{x})E \in R$, тогда $\Pi(\overline{x})E = E\Pi(\overline{x})E = (E\Pi(\overline{x})E)^* = (\Pi(\overline{x})E)^* = E\Pi(\overline{x})$, т.е. $\Pi(\overline{x})E = E\Pi(\overline{x})$. Если $x_n = x'_n + ix_n^2$, где x'_n, x_n^2 — самосопряженные операторы и $\|x_n^i\| \leq \|x_n\|$, то $\Pi(\overline{x}) = \Pi(\overline{x}') + i\Pi(\overline{x}^2)$, где $\overline{x}^1 = (x_n^1)$ и $\overline{x}^2 = (x_n^2)$. Поэтому если $\Pi(\overline{x}^*)E \in R$, то $\Pi(\overline{x}^i)E \in R$ $(i = 1,2)$, а значит, $\Pi(\overline{x})E = E\Pi(\overline{x})$.

Понятно, что $\widetilde{N}$ — $*$ - алгебра. Легко видеть, что $\widetilde{N}$ равномерно замкнута, т.е. $\widetilde{N} - C^*$- подалгебра $\overline{M}$. Далее, если $A \in R$, то $EAE \in \Pi(\overline{M})''$, и согласно лемме 2.2.2 существует последовательность $\overline{z} \in \overline{M}$ такая, что $\Pi(\overline{z}^*)\overline{\xi} = EA^*\overline{\xi} = A^*\overline{\xi}$. Следовательно, $\Pi(\overline{z})E = A \in R$ и $\overline{z} \in \widetilde{N}$. Ввиду произвольности $A \in R$ заключаем, что $\Pi(\widetilde{N})E = R$. Наконец, если $\overline{x} \in \widetilde{N}$ и $\lim_U(\rho(x_n^* x_n)) = \langle \Pi(\overline{x})\overline{\xi}, \Pi(\overline{x})\overline{\xi} \rangle = 0$, то $\Pi(\overline{x})\overline{\xi} = 0$, а значит $E\Pi(\overline{x}) = \Pi(\overline{x})E = 0$. Но тогда если $\overline{y} \in \widetilde{N}$, то $\Pi(\overline{y}\overline{x})E = \Pi(\overline{y})\Pi(\overline{x})E = 0 = \Pi(\overline{x})E\Pi(\overline{y}) = \Pi(\overline{x}\overline{y})E$. Лемма доказана.

Л Е М М А 2.3.4. Пусть $\widetilde{N}' - C^*$ - подалгебра $\overline{M}'$, элементами которой являются всевозможные последовательности вида $\overline{x}' = (jx_n j)$, где $\overline{x} = (x_n) \in \widetilde{N}$, а j — антиунитарный оператор в H, введенный в .п. I.2. Тогда $[\Pi(\widetilde{N}')\overline{\xi}] = [\Pi(\widetilde{N})\overline{\xi}] = \widetilde{H}$. Более того, оператор j в H индуцирует антиунитарный оператор $\widetilde{j}$ в $\widetilde{H}$ со следующими свойствами $\widetilde{j}\overline{\xi} = \overline{\xi}$, $\widetilde{j}^2 = I$, $\widetilde{j}\Pi(\overline{x})\overline{\xi} = \Pi(\overline{x}')\overline{\xi}$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Положим $\widetilde{j}\Pi(\overline{x})\overline{\xi} = \Pi(\overline{x}')\overline{\xi}$, где $\overline{x} = (x_n) \in \widetilde{N}$, $\overline{x}' = (jx_n j) \in \widetilde{N}'$. Ясно, что $\widetilde{j}\overline{\xi} = \overline{\xi}$. Так как $\langle\langle \widetilde{j}\Pi(\overline{x})\overline{\xi} \rangle\rangle = \lim_U(\|jx_n\xi\|) = \lim_U(\|x_n\xi\|) = \langle\langle \Pi(\overline{x})\overline{\xi} \rangle\rangle$, то $\widetilde{j}$ — антиизометрический оператор, поэтому $Ker\, \widetilde{j} = 0$. Докажем, что $[\Pi(\widetilde{N}')\overline{\xi}] = \widetilde{H}$. Пусть $\overline{\eta}$ — единичный вектор из $\widetilde{H}$, ортогональный $\Pi(\widetilde{N}')\overline{\xi}$, т.е. $\langle \overline{\eta}, \Pi(\overline{x}')\overline{\xi} \rangle = 0$ для $\overline{x}' \in \widetilde{N}'$. Если последовательность $\overline{x}^n \in \widetilde{N}$ такова, что

$$\langle\langle \Pi(\overline{x}^n)\overline{\xi} \rangle\rangle = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \langle\langle \overline{\eta} - \Pi(\overline{x}^n)\overline{\xi} \rangle\rangle = 0,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \langle \Pi(\bar{x}^n)\bar{\xi}\ ,\ \Pi(\bar{x}')\bar{\xi}\rangle = 0,$$

но при $\bar{x}' = (jy_n j)$

$$\langle \Pi(\bar{x}^n)\bar{\xi}\ ,\ \Pi(\bar{x}')\bar{\xi}\rangle = \lim_U ((x^n_k\xi\ ,\ jy_k\xi)) = \lim_U ((y_k\xi, jx^n_k\xi)) = \\ = \langle \Pi(\bar{y})\bar{\xi}\ ,\ \Pi(\bar{x}'^n)\bar{\xi}\rangle,$$

где $\bar{x}'^n = (jx^n_k j)\in\bar{N}'$, $\bar{y} = (y_n)\in\bar{N}$, а

$$\lim_{n\to\infty} \langle\!\langle \tilde{j}\bar{\eta} - \Pi(\bar{x}'^n)\bar{\xi}\rangle\!\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle\!\langle \bar{\eta} - \Pi(\bar{x}^n)\bar{\xi}\rangle\!\rangle = 0.$$

Следовательно, для любого $\bar{y}\in\bar{N}$

$$0 = \lim_{n\to\infty} \langle \Pi(\bar{y})\bar{\xi},\ \Pi(\bar{x}'^n)\bar{\xi}\rangle = \langle \Pi(\bar{y})\bar{\xi}, \tilde{j}\bar{\eta}\rangle \quad (\langle\!\langle \tilde{j}\bar{\eta}\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\bar{\eta}\rangle\!\rangle = 1),$$

что исключено, так как $[\Pi(\bar{N})\bar{\xi}] = \tilde{H}$. Итак, $[\Pi(\bar{N}')\bar{\xi}] = \tilde{H}$, и поэтому $Coker\,\tilde{j} = 0$, а значит $\tilde{j}$ – антиунитарный оператор. Понятно, что $\tilde{j}^*\Pi(\bar{x}')\bar{\xi} = \Pi(\bar{x})\bar{\xi}, \tilde{j}^*\bar{\xi} = \bar{\xi}$. Если $\bar{x} = (x_n)\in\bar{N}$, $\bar{y}' = (y'_n)\in\bar{N}'$, то

$$\langle \tilde{j}^2\Pi(\bar{x})\bar{\xi},\ \Pi(\bar{y}')\bar{\xi}\rangle = \langle \tilde{j}^*\Pi(\bar{y}')\bar{\xi},\ \tilde{j}\Pi(\bar{x})\bar{\xi}\rangle = \lim_U ((jy'_n\xi, jx_n\xi)) \\ = \lim_U ((x_n\xi\ ,\ y'_n\xi)) = \langle \Pi(\bar{x})\bar{\xi}, \Pi(\bar{y}')\bar{\xi}\rangle.$$

Так как $[\Pi(\bar{N}')\bar{\xi}] = \tilde{H}$, то $\tilde{j}^2\Pi(\bar{x})\bar{\xi} = \Pi(\bar{x})\bar{\xi}$, а следовательно $\tilde{j}^2 = I$, ввиду того, что $[\Pi(\bar{N})\bar{\xi}] = \tilde{H}$. Лемма доказана.

Заметим, что всякому вектору $\Pi(\bar{x})\bar{\xi}$ из $\tilde{H}$, где $\bar{x} = (x_n)\in\bar{N}$, можно поставить в соответствие последовательность векторов $(x_n\xi)$ из H $(\Pi(\bar{x})\bar{\xi} \sim (x_n\xi))$. Аналогично $\Pi(\bar{x}')\bar{\xi} \sim (x'_n\xi)$, где $\bar{x}' = (x'_n)\in\bar{N}'$, причем если $\Pi(\bar{x})\bar{\xi}\sim(x_n\xi)$, $\Pi(\bar{y})\bar{\xi}\sim(y_n\xi)$, то $\langle \Pi(\bar{x})\bar{\xi}, \Pi(\bar{y})\bar{\xi}\rangle = \lim_U ((x_n\xi, y_n\xi))$.

Л Е М М А 2.3.5. Для любого $\bar{x} = (x_n)\in\bar{N}$ справедливы соотношения

$$\bar{\Delta}^{1/2}\Pi(\bar{x})\bar{\xi} \sim (\Delta^{1/2}x_n\xi) \qquad (\Delta^{1/2}x_n\xi = jx^*_n\xi), \tag{3.1}$$

$$\bar{\sigma}_t(\Pi(\bar{x})) = \Pi(\sigma_t(\bar{x})) \qquad (-\infty < t < \infty), \tag{3.2}$$

где $\bar{\Delta}$ и $\bar{\sigma}_t$ –МО и ГМА алгебры $R = \Pi(\bar{N})E$ (см. замечание 2.3.2), отвечающие состоянию $\bar{\rho}$, а $\sigma_t(\bar{x}) = (\sigma_t(x_n))$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Поскольку $\Delta^{1/2}x_n\xi = jx^*_n\xi$ (см. п. 1.2), а $(jx^*_n j)\in\bar{N}'$, так как $\bar{x} = (x_n)\in\bar{N}$, то учитывая сделанное выше замечание, находим, что самосопряженный позитивный оператор $\Delta^{1/2}$ в H индуцирует позитивный симметричный оператор $\tilde{\Delta}^{1/2}$ в $\tilde{H}$, определенный на $\Pi(\bar{N})\bar{\xi}$: $\tilde{\Delta}^{1/2}\Pi(\bar{x})\bar{\xi} \sim (\Delta^{1/2}x_n\xi) = (jx^*_n\xi)$.

Пусть, далее, $\bar{S}$ – оператор инволюции в $\tilde{H}$, определенный на линейном многообразии $\Pi(\bar{N})\bar{\xi} = R\bar{\xi}$ (см. лемму 2.3.3) согласно формуле

$$\bar{S}\Pi(\bar{x})\bar{\xi} = \Pi(\bar{x})^*\bar{\xi} = \Pi(\bar{x}^*)\bar{\xi}.$$

Принимая во внимание замечание 2.3.2 и учитывая (2.1) р. I, можно записать

$$\bar{S} = \bar{j}\bar{\Delta}^{1/2} = \bar{\Delta}^{-1/2}\bar{j},$$

где $\bar{j}$ – антиунитарный оператор в $\tilde{H}$ со свойствами $\bar{j}\bar{\xi} = \bar{\xi}$, $\bar{j}^2 = I$, $\bar{j}\Pi(\bar{N})\bar{j} = R'$, $\bar{j}\bar{\Delta}\bar{j} = \bar{\Delta}^{-1}$, а $\bar{\Delta}$ –МО для $\Pi(\bar{N})E = R$. Поскольку

$$\bar{S}\Pi(\bar{x})\bar{\xi} = \Pi(\bar{x}^*)\bar{\xi} \sim (x^*_n\xi) = (j\Delta^{1/2}x_n\xi) \sim \tilde{j}\tilde{\Delta}^{1/2}\Pi(\bar{x})\bar{\xi}$$

(см. лемму 2.3.4), то на $\Pi(\bar{N})\bar{\xi}$ выполнено соотношение

$$\bar{S} = \bar{j}\bar{\Delta}^{1/2} = \tilde{j}\tilde{\Delta}^{1/2}.$$

Но $\Pi(\bar N)\bar\xi$ – область определения самосопряженного оператора $\tilde\Delta^{1/2}$ [4], поэтому из единственности полярного разложения для замкнутого оператора $\tilde S$ выводим, что $\bar J = \tilde J$, а $\bar\Delta^{1/2} = \tilde\Delta^{1/2}$. Но тогда и однопараметрические группы $\bar\Delta^{it}$ и $\tilde\Delta^{it}$ также совпадают. Лемма доказана. По поводу доказательства (3.2) см. приложение.

С Л Е Д С Т В И Е 2.3.6. Так как $\bar J = \tilde J$, то $\bar J\Pi(\bar x)\bar J = \Pi(\bar x')$, где $\bar x = (x_n) \in N$, а $\bar x' = (jx_nj) \in \bar N'$, и $\bar x' \to \Pi(\bar x')$ есть представление алгебры $\bar N'$ в пространстве $\tilde H$ (см. лемму 2.3.4).

Л Е М М А 2.3.7. $\bar M_d$ – подалгебра $\bar N$ (см. определение 2.I.4), а $\Pi(\bar M_d)$ – инвариантна относительно $\bar\sigma_t$ $(-\infty < t < \infty)$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Заметим, что $\bar M_d$, $\Pi(\bar M_d)$ – $*$ – изоморфны M, а $\bar M_d'$ $\Pi(\bar M_d')$ – M'. Из конструкции следует, что $[\Pi(\bar M_d)\bar\xi] = [\Pi(\bar M_d')\bar\xi]$. Пусть F – проектор на $[\Pi(\bar M_d')\bar\xi]$ в $\tilde H$. Так как $\Pi(\bar M_d') \cong \Pi(\bar M)'$, то $F \leqslant E$. Следовательно, если $\bar x \in \bar M_d$, то $E\Pi(\bar x)\bar\xi = E\Pi(\bar x)F\bar\xi = EF\Pi(\bar x)\bar\xi = F\Pi(\bar x)\bar\xi = \Pi(\bar x)\bar\xi$, или $E\Pi(\bar x)E = \Pi(\bar x)E$. Из леммы 2.3.3 тогда следует, что $\bar x \in \bar N$. Понятно, что $\bar\sigma_t$ $(-\infty < t < \infty)$ действует на $\Pi(\bar M_d)$ так же, как и σ_t $(-\infty < t < \infty)$ на M. Отсюда вытекает инвариантность $\Pi(\bar M_d)$ относительно $\bar\sigma_t$ $(-\infty < t < \infty)$. Лемма доказана.

С Л Е Д С Т В И Е 2.3.8. Пусть $C_M^{\upsilon} = R \cap \Pi(\bar M_d)'$, тогда C_M^{υ} инвариантна относительно $\bar\sigma_t$ $(-\infty < t < \infty)$, и $\bar\sigma_t (-\infty < t < \infty)$ является модулярной группой для C_M^{υ} относительно состояния $\bar\rho$, суженного на C_M^{υ}.

Л Е М М А 2.3.9. Если $\bar a = (a_n)$ – ЦП теоремы 2.I.I, то $\Pi(\bar a)E \in C_M^{\upsilon}$ и $\bar\sigma_t = (\Pi(\bar a)) = \lambda^{it}\Pi(\bar a)$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Перепишем $\lim\limits_{n\to\infty}\|(\Delta^{1/2} - \lambda^{1/2})a_n\xi\| = 0$ в виде $\lim\limits_{n\to\infty}\|(ja_n^*j - \lambda^{1/2}a_n)\xi\| = 0$. Но это означает, что $\Pi(\bar a)\bar\xi = \lambda^{-1/2}\Pi(\bar a)\bar\xi$, где $\bar a' = (ja_n^*j)$. Так как $E\Pi(\bar x') = \Pi(\bar x')E$ для $\bar x' \in \bar M'$ (см. замечание 2.3.2), то $E\Pi(\bar a)\bar\xi = \lambda^{-1/2}\Pi(\bar a')\bar\xi = \Pi(\bar a)\bar\xi$, или $E\Pi(\bar a)E = \Pi(\bar a)E$ [5]. Следовательно, $\Pi(\bar a) \in \Pi(\bar N)$. Так как $\bar a = (a_n)$ – ЦП, то $[\Pi(\bar a), \Pi(\bar x)]\bar\xi = 0$ для $\bar x \in \bar M_d$. Но $\bar\xi$ – отделяющий вектор в $\tilde H$, поэтому $[\Pi(\bar a), \Pi(\bar x)]E = 0$ и $\Pi(\bar a)E \in C_M^{\upsilon}$. Лемма доказана.

2.4. В этом пункте мы установим справедливость следующего предложения

П Р Е Д Л О Ж Е Н И Е 2.4.I. Если M – фактор типа III со свойствами, перечисленными в теореме 2.I.I, то в $\bar M$ существует последовательность (w_n) со следующими свойствами:

а) $\lim\limits_{\upsilon}(\|[x, w_n^*]\xi\|^2) = 0$ для любого $x \in M$,

б) w_n – частичная изометрия, $w_n^* w_n + w_n w_n^* = I$, $w_n w_n = 0$ $\lim\limits_{\upsilon}(\|w_n\xi\|) = \frac{1}{1+\lambda}$,

в) существуют ограниченные по норме последовательности операторов (w_n') и (u_n') из $\bar N' \cong \bar M'$, для которых

$$(i)\quad \lim_{\upsilon}(\|(w_n' - w_n)\xi\|) = \lim_{\upsilon}(\|(u_n' - w_n^*)\xi\|) = 0,$$

$$(ii)\quad \lim_{\upsilon}(\|(u_n'^* - \lambda w_n')\xi\|) = \lim_{\upsilon}(\|(w_n'^* - \lambda^{-1}u_n')\xi\|) = 0.$$

Докажем сначала три леммы.

Л Е М М А 2.4.2. Пусть $A \in C_M^{\upsilon}$ и $\bar\Delta A\bar\xi = \lambda^{k}A\bar\xi$, ($k$ = 0 или I) тогда для всякой последовательности $\bar z = (z_n)$ из $\bar N \cong \bar M$, для которой $A = \Pi(\bar z)E$, существуют ограниченные по норме последовательности $\bar x' = (x_n')$ и $\bar y' = (y_n')$ из $\bar N' \cong \bar M'$, обладающие свойствами:

---

[5] Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\|ja_n\xi - \lambda^{-1/2}a_n^*\xi\| = 0$, то $\Pi(\bar a^*)\bar\xi = \lambda^{1/2}\Pi(\bar a'^*)\bar\xi$ и, следовательно, $E\Pi(\bar a^*)E = \Pi(\bar a^*)E$.

$$\lim_{U}(\|(x'_n-z_n)\xi\|)=\lim_{U}(\|(y'_n-z^*_n)\xi\|)=0;$$

$(ii)\ \Pi(\bar{x}'^*)=\lambda^{-1}\Pi(\bar{y}'),\ \Pi(\bar{y}'^*)=\lambda\Pi(\bar{x}')$, или $\lim_{U}(\|(x'^*_n-\lambda^{-1}y'_n)\xi\|)=\lim_{U}(\|(y'^*_n-\lambda x'_n)\xi\|)=0.$

Доказательство (i). Пусть $k=1$. Так как $A\in C^U_M=\Pi(\bar{N})E$, то согласно замечанию в конце п. I.2 $\pi'_\xi(A)$, $\pi'_\xi(A^*)$ – ограниченные операторы из $R'=(\Pi(\bar{N})E)'$. Но $(\Pi(\bar{N})E)'=J\Pi(\bar{N})EJ=\Pi(\bar{N}')E$ (см. лемму 2.3.4 и следствие 2.3.6). Поэтому $\pi'_\xi(A)=\Pi(\bar{x}')$, $\pi'_\xi(A^*)=\Pi(\bar{y}')$, где $\bar{x}'=(x'_n)$ и $\bar{y}'=(y'_n)\ \in\bar{N}'\equiv\bar{M}'$, т.е. (i) имеет место. Далее, из $\bar{\Delta}A\xi=\lambda A\xi$, $\bar{\Delta}A^*\xi=\lambda^{-1}A^*\xi$ легко вытекает, что $\pi'_\xi(A^*)^*=\lambda\pi'_\xi(A)$ и $\pi'_\xi(A)^*=\lambda^{-1}\pi'_\xi(A^*)$. Учитывая (i), отсюда легко выводим (ii). Лемма доказана.

ЛЕММА 2.4.3. В C^U_M существует частично изометрический оператор V такой, что $\bar{\Delta}V\xi=\lambda V\xi$, у которого проекторы $P=VV^*$ и $Q=V^*V$ *попарно ортогональны* и принадлежат $(C^U_M)_{\bar{\rho}}$, где через $(C^U_M)_{\bar{\rho}}$ мы обозначим неймановскую подалгебру C^U_M, элементы A которой удовлетворяют равенству $\bar{\Delta}A\xi=A\xi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 2.3.9 $\Pi(\bar{a})\in C^U_M$ и $\bar{\Delta}\Pi(\bar{a})\xi=\lambda\Pi(\bar{a})\xi$. В силу результатов, приведенных в конце п. I.2 в C^U_M существует частично изометрический оператор W, для которого $\bar{\Delta}W\xi=\lambda W\xi$, а проекторы $Q_1=W^*W$ и $P_1=WW^*$ принадлежат $(C^U_M)_{\bar{\rho}}$. Пусть $\bar{P}_1$ и $\bar{Q}_1$ – центральные носители P_1 и Q_1 в $(C^U_M)_{\bar{\rho}}$, соответственно. Тогда возможны два случая $\bar{P}_1\neq\bar{Q}_1$ и $\bar{P}_1=\bar{Q}_1$. Рассмотрим сначала случай $\bar{P}_1\neq\bar{Q}_1$ и предположим для определенности, что $\bar{P}_1\neq\bar{P}_1\bar{Q}_1$. Если через P_2 обозначим подпроектор P_1 из $(C^U_M)_{\bar{\rho}}$ с носителем $\leqslant\bar{P}_1-\bar{P}_1\bar{Q}_1$, то легко проверить, что $V=P_2W$ является искомым частично изометрическим оператором.

Перейдем к случаю $\bar{P}_1=\bar{Q}_1$. Здесь возможны следующие варианты а) $\bar{P}_1>P_1$, б) $\bar{Q}_1>Q_1$, в) $\bar{P}_1=P_1$, $\bar{Q}_1=Q_1$. Варианты а) и б) рассматриваются аналогично, поэтому для определенности рассмотрим случай а). Тогда в $(C^U_M)_{\bar{\rho}}$ существует подпроектор $Q_3\leqslant\bar{P}_1-P_1$, эквивалентный подпроектору $Q_2\leqslant Q_1$, $Q_2\neq 0$, т.е. в $(C^U_M)_{\bar{\rho}}$ существует частичная изометрия U, для которой $UU^*=Q_2$, $U^*U=Q_3$. Но тогда $V=WU$ является искомым частично изометрическим оператором. Если $\lambda\neq 1$, то легко показать, что случай в) исключается. Если $\lambda=1$ и имеет место в), то простые рассуждения показывают, что в $(C^U_M)_{\bar{\rho}}$ существуют ортогональные проекторы P_2 и $Q_2\leqslant P_1$ такие, что если положить $V=WQ_2$, то $V^*V=Q_2$, $VV^*=P_2$. Лемма доказана.

При доказательстве леммы 2.4.3 мы существенно использовали следующее свойство $(C^U_M)_{\bar{\rho}}$: $(C^U_M)_{\bar{\rho}}$ не содержит минимальных проекторов. Это свойство легко усмотреть из доказательств лемм 2.4.2 и 2.4.4.

ЛЕММА 2.4.4. В C^U_M существует частично изометрический оператор U такой, что $\bar{\Delta}U\xi=\lambda U\xi$, а $UU^*=Q$, $U^*U=P$ – ортогональные проекторы из $(C^U_M)_{\bar{\rho}}$, причем $P+Q=I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предыдущей лемме в C^U_M существует частичная изометрия U_1 со свойствами: $\bar{\Delta}U_1\xi=\lambda U_1\xi$, $U_1U_1^*=Q_1$, $U_1^*U_1=P_1$, $P_1Q_1=0$, $P_1Q_1\in(C^U_M)_{\bar{\rho}}$. Если $E_1=P_1+Q_1<I$, то рассмотрим алгебру $(C^U_M)_{I-E_1}$ в пространстве $(I-E_1)\bar{H}$, порожденную операторами $(I-E_1)A(I-E_1)$, где $A\in C^U_M$. Так как $E_1\in(C^U_M)_{\bar{\rho}}$, то $(C^U_M)_{I-E_1}$ инвариантна относительно $\bar{\sigma}_t(-\infty<t<\infty)$, а из условий КМШ (см. п. I.2 и [4]) следует, что $\bar{\sigma}_t$ определяет ГмА алгебры $(C^U_M)_{I-E_1}$ для состояния $\bar{\rho}$ (вернее сужения $\bar{\rho}$ на $(C^U_M)_{I-E_1}$).

Согласно лемме 2.2.3 (i) проектору $I-E_1\in(C^U_M)_{\bar{\rho}}$ отвечает последовательность $\bar{e}=(e_n)\in\bar{N}$, где e_n – проекторы из $\bar{M}$ и $\lim_{U}(\rho(e_n))=\bar{\rho}(I-E_1)$. Если теперь (a_n) – ЦП из M теоремы 2.I.1, то существует последовательность номеров n_k, для которой

$$\left|\|e_k a_{n_k} e_k\xi\|^2-\|a_{n_k}e_k\xi\|^2\right|<\frac{1}{3k}. \tag{4.I}$$

Действительно, так как (a_n) – ЦП в M, $\sup_n(\|a_n\|, \|e_n\|) < C$ $(1<C<\infty)$, то можно выбрать последовательность номеров n_k таким образом, чтобы $\|(e_k a_{n_k} e_k - a_{n_k} e_k)\xi\| = \|[e_k, a_{n_k}]e_k \xi\| < \frac{1}{6kC^3}$.

Далее, заметим, что $\Pi(\bar{a}^*\bar{a})E \in (C_M^U)_{\bar{\rho}}$, $\Pi(\bar{a}^*\bar{a}) \neq 0$, поскольку $\Pi(\bar{a})E \in C_M^U$ и $\Pi(\bar{a}) \neq 0$. Но тогда из доказательства леммы 2.5.I следует, что из $\bar{a}^*\bar{a} = (a_n^* a_n)$ можно выделить подпоследовательность $(a_{n_s}^* a_{n_s})$, являющуюся ЦП в M. Следовательно, существуют номера n_k, для которых выполнено (4.1) и

$$|\rho(e_k a_{n_k}^* a_{n_k} e_k) - \rho(a_{n_k}^* a_{n_k} e_k)| < \frac{1}{3k}. \tag{4.2}$$

Наконец, поскольку $(a_{n_s}^* a_{n_s})$ – ЦП в M, то для любого b из M выполнено соотношение

$$\lim_{s\to\infty} |\rho(a_{n_s}^* a_{n_s} b) - \rho(a_{n_s}^* a_{n_s})\rho(b)| = 0.$$

Поэтому номера n_k можно выбрать таким образом, чтобы для них одновременно выполнялись (4.1), (4.2) и

$$|\rho(a_{n_k}^* a_{n_k} e_k) - \rho(a_{n_k}^* a_{n_k})\rho(e_k)| < \frac{1}{3k}. \tag{4.3}$$

Сравнивая (4.I)-(4.3), находим, что

$$|\|e_k a_{n_k} e_k \xi\|^2 - \|a_{n_k}\xi\|^2 \|e_k \xi\|^2| < \frac{1}{k}. \tag{4.4}$$

Без ограничения в общности можно предполагать, что

$$\|a_{n_k}\xi\| = 1.$$

Но тогда из (4.4) следует

$$\lim_U (\|e_k a_{n_k} e_k \xi\|) = \bar{\rho}(I - E_1). \tag{4.5}$$

Положим $b_k = a_{n_k}$, тогда $\bar{b} = (b_k)$ -ЦП в M, для которой $\lim_{k\to\infty} \|(\Delta^{1/2} - \lambda^{1/2})b_k\xi\| = 0$. Пусть $\Pi(\bar{b})$ – оператор в $\bar{H}$, отвечающий $\bar{b} = (b_k)$. Из леммы 2.3.9 находим, что $\Pi(\bar{b})E \in C_M^U$ и $\bar{\Delta}\Pi(\bar{b})\bar{\xi} = \lambda\Pi(\bar{b})\bar{\xi}$, более того, $\Pi(\bar{e}\bar{b}\bar{e}) = (I-E_1)\Pi(\bar{b})(I-E_1) \neq 0$, благодаря (4.5). Поскольку $I - E_1 \in (C_M^U)_{\bar{\rho}}$, то $\Pi(\bar{e}\bar{b}\bar{e})E \in (C_M^U)_{I-E_1}$ и $\bar{\Delta}\Pi(\bar{e}\bar{b}\bar{e})\bar{\xi} = \lambda\Pi(\bar{e}\bar{b}\bar{e})\bar{\xi}$. Но тогда согласно лемме 2.4.3 в $(C_M^U)_{I-E_1}$ существует ненулевой частично изометрический оператор V со свойствами: $\bar{\Delta}V\bar{\xi} = \lambda V\bar{\xi}$, $VV^* = Q$, $V^*V = P$, $PQ = 0$, $F = P + Q < I - E_1$.

Рассмотрим теперь частично изометрический оператор $U_2 = U_1 + V$. Ясно, что $\bar{\Delta}U_2\bar{\xi} = \lambda U_2\bar{\xi}$, $U_2^* U_2 = P_2$, $U_2 U_2^* = Q_2$, $P_2 Q_2 = 0$, $P_2 + Q_2 = E_1 + F$, где $P_2 = P_1 + P$, $Q_2 = Q_1 + Q$. Таким образом, с помощью трансфинитной индукции можно построить искомый частично изометрический

З А М Е Ч А Н И Е 2.4.5. Для того, чтобы закончить доказательство предложения 2.4.I нам понадобится применить аналог леммы 2.2.3 к операторам из $R=\Pi(\bar N)E$. Докажем аналог леммы 2.2.3 (i), т.е. докажем, что если P - проектор из R, то существует проектор $\bar p=(p_n)$ из $\bar N$, для которого $P=\Pi(\bar p)$.

Пусть I_0 - ядро представления Π, I_1 - левый идеал $\bar M$, элементы $\bar x$ которого удовлетворяют условию $\bar\rho(\bar x^*\bar x)=0$ или $\Pi(\bar x)\xi=0$, или еще $\Pi(\bar x)E=0$. Поскольку $P\in R=\Pi(\bar N)E$, то согласно лемме 2.3.3 $P=\Pi(\bar z)E$ для некоторого $\bar z\in\bar N$. Можно предполагать, что $\bar z^*=\bar z$, в противном случае мы заменили бы $\bar z$ на $\frac12(\bar z+\bar z^*)$. Пусть теперь K - коммутативное слабозамкнутое кольцо в $\bar M$, порожденное $\bar z$. Обозначим $J_0=K\cap I_0$, $J_1=K\cap I_1$, очевидно $J_0\subseteq J_1$. Так как $P=\Pi(\bar z)E$ - проектор, то $\Pi(\bar z^2-\bar z)E=0$, т.е. $\bar z^2-\bar z=\bar a\in J_1$. Но J_1 -двусторонний идеал в коммутативной AW^* - алгебре K, поэтому из теор. 3.2 [16] следует существование проектора $\bar p\in K$, для которого $\bar p=\bar z+\bar b$, где $\bar b\in J_1$, т.е. $\Pi(\bar p)E=\Pi(\bar z)E$. Итак, $P=\Pi(\bar p)E$ и аналог леммы 2.2.3 (i) для $R=\Pi(\bar N)E$ справедлив. Аналоги (ii) и (iii) леммы 2.2.3 с учетом сделанного замечания доказываются точно так же, как и в п. 2.2. Обсуждение замечания закончено.

Доказательство предложения 2.4.I. Если W - частичная изометрия леммы 2.4.4, то согласно лемме 2.2.3 (iii) $W=\Pi(\bar w)E$, где $\bar w=(w_n)\in\bar N$ и w_n - частично изометрический оператор, удовлетворяющий условию б) предложения. Так как $W^\#\in C_M^U$, то из определения C_M^U (см. следствие 2.3.8) вытекает справедливость а), условие в) является следствием $\bar\Delta W\xi=\lambda W\xi$ и леммы 2.4.2. Предложение доказано.

2.5. В этом пункте мы закончим доказательство теоремы 2.I.I, доказав, что в M существует ξ -ЦП, удовлетворяющая условиям леммы I.4.I, и подведем итог исследованиям настоящего параграфа.

Л Е М М А 2.5.I. В M содержится ξ - ЦП (x_n), удовлетворяющая условиям а), б) и в) леммы I.4.I.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Пусть (b^n) - счетное всюду плотное в M множество относительно сильной топологии. Через $\bar b^n$ обозначим элемент $\bar b^n=(b^n,b^n,\dots)$ из $\bar M_d\subset\bar M$, а через D - C^* - алгебру, порожденную I, $\bar b^n$ $(n=1,2,\dots)$, $\bar w=(w_n)$, $\bar w'=(w_n')$ и $\bar u'=(u_n')$, где $\bar w,\bar w'$ и $\bar u'$ - ограниченные по норме последовательности, существование которых гарантирует предложение 2.4.I. Понятно, что $\bar\rho(\bar x)=\langle\Pi(\bar x)\xi,\xi\rangle$ есть функционал на D, который является слабой предельной точкой функционалов вида $\tau_k[(\rho(x_n))]=\rho(x_k)$, где $\bar x=(x_n)\in D$. Поскольку условие леммы 2.2.I, очевидно, выполнено для D, то для элементов $\bar x\in D$ имеет место (2.I). Но тогда согласно предложению 2.4.I, учитывая (2.I), можно написать

$$0=\lim_U(\|[b^n,w_k^\#]\xi\|)=\lim_{k\to\infty}\|[b^n,w_{i_k}^*]\xi\|;\qquad\qquad (5.I)$$
$$\frac{1}{1+\lambda}=\lim_U(\|w_n\xi\|)=\lim_{k\to\infty}\|w_{i_k}\|;$$
$$\lim_{k\to\infty}\|(w_{i_k}'-w_{i_k})\xi\|=\lim_{k\to\infty}\|(u_{i_k}'-w_{i_k}^*)\xi\|=0;\qquad (5.2)$$
$$\lim_{k\to\infty}\|(u_{i_k}'-\lambda w_{i_k}')\xi\|=\lim_{k\to\infty}\|(w_{i_k}'^*-\lambda^{-1}u_{i_k}')\xi\|=0.\qquad (5.3)$$

Положим $x_k=w_{i_k}$ и рассмотрим последовательности $\bar x^*=(x_k^*)$. Из (5.I) и (5.2) в силу леммы I.3.2 следует, что $\bar x^*=(x_k^*)$ - ЦП в M, т.е. условие а) леммы I.4.I выполнено. Условие б) - следствие условия б) предложения 2.4.I, а условие в) вытекает из (5.2) и (5.3). Лемма доказана. Доказательство теоремы 2.I.I закончено.

Результаты исследования, проведенного в настоящем параграфе, позволяют, наряду с теоремой 2.I.I, сделать следующее заключение:

Т Е О Р Е М А 2.5.2. Пусть M - фактор в сепарабельном гильбертовом пространстве H с точным нормальным состоянием ρ и модулярным оператором Δ_ρ. По M,ρ и Δ_ρ можно каноническим образом построить неймановскую алгебру C_M^U с точным нормальным состоянием $\bar\rho$ и модулярным оператором $\bar\Delta$ (см. п. 2.I и следствие 2.3.8).

Для того, чтобы число $\lambda(\lambda>0, \lambda\neq 1)$ принадлежало $A(M)$ необходимо и достаточно, чтобы λ являлось дискретным собственным значением $\bar{\Delta}$. Для того, чтобы $1\in A(M)$ необходимо и достаточно, чтобы подалгебра $(C_M^{\upsilon})_{\bar{\rho}}\subset C_M^{\upsilon}$, состоящая из элементов $A\in C_M^{\upsilon}$, для которых $\bar{\sigma}_t(A)=A\ (-\infty<t<\infty)$, где $\bar{\sigma}_t\ (-\infty<t<\infty)$ - группа модулярных автоморфизмов C_M^{υ}, была некоммутативной.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Докажем соотношение (3.2) леммы 2.3.5. Сделаем сначала несколько замечаний. Всякий ограниченный (самосопряженный) оператор A в пространстве H определяет ограниченный (самосопряженный) оператор $\bar{A}$ в пространстве $\bar{H}$ согласно формуле

$$\bar{A}\Pi(\bar{x})\bar{\xi}\sim(Ax_n\,\xi)\qquad(\bar{x}=(x_n)\in\bar{M}), \tag{П.I}$$

причем если $A\geqslant 0$, то и $\bar{A}\geqslant 0$. Более того, при этом соответствии оператор $P(A)$ в H, где P - полином, определяет оператор $P(\bar{A})$ в $\bar{H}$. Следовательно, оператор $\varphi(A)$, где A - самосопряженный ограниченный оператор в H, а φ - непрерывная функция на спектре A, определяет оператор $\varphi(\bar{A})$ в $\bar{H}$.

Рассмотрим ограниченные самосопряженные операторы $A_1=(I+\Delta^{1/2})^{-1}$ и $A_2=(I-A_1)=\Delta^{1/2}(I+\Delta^{1/2})^{-1}$ в H. Очевидно $0<A_i<I$. Докажем, что $\bar{A}_1$ отображает пространство $\tilde{H}-E\bar{H}$ в себя. Поскольку $\bar{\Delta}$ -МО для $R=\Pi(\bar{N})E$ в $\tilde{H}$, то оператор $I+\bar{\Delta}^{1/2}$ обратим,и множество векторов вида $(I+\bar{\Delta}^{1/2})\Pi(\bar{x})\bar{\xi}$, где $\bar{x}\in\bar{N}$, плотно в $\tilde{H}$. Следовательно, при $\bar{x}\in\bar{N}$

$$\bar{A}_1(I+\bar{\Delta}^{1/2})\Pi(\bar{x})\bar{\xi}=\bar{A}_1(\Pi(\bar{x})+\bar{j}\Pi(\bar{x}^*)\bar{j})\bar{\xi}\sim\left(\frac{I}{I+\Delta^{1/2}}(x_n+jx_n^*j)\xi\right)=\left(\frac{I}{I+\Delta^{1/2}}(I+\Delta^{1/2})x_n\xi\right)\sim\Pi(\bar{x})\bar{\xi}.$$

Отсюда можно сделать вывод, что $\tilde{H}$ инвариантно относительно $\bar{A}_1$, а сужение $\bar{A}_1$ на $\tilde{H}$ совпадает с $(I+\bar{\Delta}^{1/2})^{-1}$, ввиду того, что $(I+\bar{\Delta}^{1/2})^{-1}$ существует. Поскольку всякий полином от $\bar{A}_1$ отображает $\tilde{H}$ в себя, то всякий оператор вида $\varphi(\bar{A}_1)$, где φ - непрерывная функция на $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, также отображает $\tilde{H}$ в себя. Пусть $\varphi(\lambda)$ - произвольная непрерывная функция на $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, равная нулю в окрестности точек 0 и I. (Только такие $\varphi(\lambda)$ и будут рассматриваться ниже). Тогда $\lambda^{is}\varphi(\lambda)$ и $(1-\lambda)^{is}\varphi(\lambda)(-\infty<s<\infty)$- также непрерывные функции на $0\leqslant\lambda\leqslant 1$. Поэтому операторы $\bar{A}_1^{is}\varphi(A_1)$ и $(I-A_1)^{is}\cdot\varphi(A_1)$ в $\bar{H}$ определяют ограниченные операторы $\bar{A}_1^{is}\varphi(\bar{A}_1)$ и $(I-\bar{A}_1)^{is}\varphi(\bar{A}_1)$ в $\bar{H}$, сужение которых на $\tilde{H}=E\bar{H}$ есть $(I+\bar{\Delta}^{1/2})^{-is}\varphi((I+\bar{\Delta}^{1/2})^{-1})$ и $(\bar{\Delta}^{1/2}(I+\bar{\Delta}^{1/2})^{-1})^{is}\varphi((I+\bar{\Delta}^{1/2})^{-1})$.

Перейдем к доказательству (3.2). Пусть унитарный оператор $\Delta^{is}\ (-\infty<s<\infty)$ в H определяет изометрический оператор U_s в $\bar{H}$ согласно (П.I). Так как $(I-A_1)^{is}\varphi(A_1)=A_1\varphi(A_1)\Delta^{is}$, то при $\bar{x}=(x_n)\in\bar{N}$ получим, что

$$\bar{A}_1^{is}\varphi(\bar{A}_1)U_{s/2}\Pi(\bar{x})\bar{\xi}\sim(A_1^{is}\varphi(A_1)\Delta^{is/2}x_n\,\xi)\sim(I-\bar{A}_1)^{is}\varphi(\bar{A}_1)\Pi(\bar{x})\bar{\xi}.$$

Но $\Pi(\bar{x})\bar{\xi}\in\tilde{H}\ (\bar{x}\in\bar{N})$, поэтому

$$(I-\bar{A}_1)^{is}\varphi(\bar{A}_1)\Pi(\bar{x})\bar{\xi}=(\bar{\Delta}^{1/2}(I+\bar{\Delta}^{1/2})^{-1})^{is}\varphi((I+\bar{\Delta}^{1/2})^{-1})\Pi(\bar{x})\bar{\xi}=\bar{A}_1^{is}\varphi(\bar{A}_1)\bar{\Delta}^{is/2}\Pi(\bar{x})\bar{\xi}$$

и,таким образом,

$$\bar{A}_1^{is}\varphi(\bar{A}_1)U_{s/2}\Pi(\bar{x})\bar{\xi}=\bar{A}_1^{is}\varphi(\bar{A}_1)\bar{\Delta}^{is/2}\Pi(\bar{x})\bar{\xi}\quad,\quad(\bar{x}\in\bar{N}). \tag{П.2}$$

Пусть P - минимальный спектральный проектор $\bar{A}_1$ в $\tilde{H}$, для которого $P\varphi(\bar{A}_1)=\varphi(\bar{A}_1)$. Тогда $P\bar{A}_1^{is}(=\bar{A}_1^{isP})$ - частично изометрический оператор в $\tilde{H}$, удовлетворяющий условию $\bar{A}_1^{is}P\bar{A}_1^{-is}=\bar{A}_1^{-is}P\bar{A}_1^{is}=P$. Поэтому из (П.2) вытекает соотношение

$$\varphi(\bar{A}_1)U_{s/2}\Pi(\bar{x})\bar{\xi}=\varphi(\bar{A}_1)\bar{\Delta}^{is/2}\Pi(\bar{x})\bar{\xi}\qquad(\bar{x}\in\bar{N}) \tag{П.3}$$

Согласно определению $U_{s/2}$ перестановочно с $\varphi(A_1)$, поэтому из (П.3) получаем следующее соотношение

$$U_{s/2}\,\varphi(\bar{A}_1)\,\Pi(\bar{x})\bar{\xi} = \bar{\Delta}^{is/2}\,\varphi(\bar{A}_1)\,\Pi(\bar{x})\bar{\xi} \qquad (\bar{x}\in\bar{N}). \qquad (П.4)$$

Заметим теперь, что векторы вида $\varphi(\bar{A}_1)\Pi(\bar{x})\bar{\xi}$, где $\bar{x}\in\bar{N}$, а φ - функция на $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, указанного выше типа, плотны в $\tilde{H}$. Следовательно, $U_s=\bar{\Delta}^{is}(-\infty<s<\infty)$, т.е. $\bar{\sigma}_s(\Pi(\bar{x}))\bar{\xi}=\bar{\Delta}^{is}\Pi(\bar{x})\bar{\xi}=U_s\Pi(\bar{x})\bar{\xi}\sim(\sigma_s(x_n)\xi)$, что и означает (3.2).

ЛИТЕРАТУРА

I. D.W.Robinson.Statistical mechanics of quantum spin systems I,Comm.math.phys., 6,151-160,1967;II Comm.math.phys.,7,337-348,1968.

2. H.Araki.Gibbs states of one dimensional quantum lattice,Comm.math.phys.,14, 120-157,1969.

3. H.Araki,E.I.Woods,A classifications of factors Publ.RIMS,Kyoto Univ.,Ser.A, 51-130,3,1968.

4. M.Takesaki.Tomita's theory of modular hilbert algebras and its applications, Lecture Notes in Math.,128,Springer-Verlag,Berlin,1970.

5. В.Я. Голодец. Спектральные свойства модулярных операторов, Функциональный анализ и его приложения, т. 6, вып. I, 1972, стр. 70-72.

6. В.Я. Голодец. Условные ожидания, модулярные автоморфизмы и скрещенные произведения алгебр типа Ш, Препринт ФТИНТ АН УССР, Харьков, 1971.

7. A.Connes.Un nowel invariant pour les algebres de von Neumann.C.R.Acad.Sc., 273,ser.A,900-903,1971.E.Stormer.Spectra of states and asymptotically abelian C*-algebras,Comm.math.phys.,28,279-294,1972.

8. М.А. Наймарк. Нормированные кольца, М., "Наука", 1969.

9. I.Dixmier.Les algebres d'operators dan's l'espase hilbertien,Gauthier-Villars, Paris,1969.

10. R.T.Powers.Representation of uniformly hyperfinite algebras and their associated von Neumann rings,Ann.Math.,86,N1,138-171,1967.

11. A.Guichardet.Produits tensoriels infinis et representations des relations d'anticommutation,Ann.Scient.Ec.Norm,83,1-52,1966.

12. H.Araki.Asymptotic ratio set and property L',Publ.RIMS,Kyoto Univ.,Ser;A,6,443-460,1970.

13. D.McDuff.Centrall sequences and the hyperfinite factors,Proc.London Math.Soc., 21,N3,443-461,1970.

14. Ю.И. Любич. О спектре представления топологической абелевой группы, ДАН СССР, 200, №4, 777-780, 1971.

15. Н. Данфорд, Дж. Шварц. Линейные операторы, т. I, М. ИЛ., 1962.

16. F.B.Wright.A reduction for algebras if finite type,Ann.Math.,60,560-570,1954.

MODULAR OPERATORS AND ASYMPTOTIC RATIO SET

V.Ya.Golodets

Using modular operators,the asymptotic ratio set,an algebraic invariant for the von Neumann algebras,earlier introduced by H.Araki and E.J.Woods, is studied.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1974 выпуск У

О ВОЗМУЩЕНИИ СПЕКТРА САМОСОПРЯЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ МАТРИЧНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В.И. Храбустовский

ВВЕДЕНИЕ

Для скалярного самосопряженного оператора Хилла

$$\ell y = -y^{(2)} + q(t)y = \lambda y, \qquad q(t+1) = q(t), -\infty < t < \infty. \tag{0.I}$$

достаточный признак конечности числа дискретных уровней, вносимых в полубесконечную спектральную лакуну исчезающим при $|t| \to \infty$ возмущением $\eta(t)$ $(\Im m\, \eta(t) = 0)$ периодического потенциала, установил М.Ш. Бирман [1] (см. также книгу [2]). Достаточное условие конечности числа дискретных уровней оператора $\ell + \eta$ в каждой из конечных спектральных лакун оператора ℓ (0.I) получил Ф.С. Рофе-Бекетов [3], используя принцип расщепления и установленные им в [3] асимптотические свойства решений возмущенного уравнения Хилла $(\ell + \eta)y = \lambda y$. Дальнейшее исследование дискретного спектра возмущенного оператора Хилла проводилось в [4–6].

В настоящей работе установлен достаточный признак конечности числа дискретных уровней, вносимых возмущением $\eta(t) = \eta^*(t)$ в каждую из спектральных лакун самосопряженных дифференциальных операторов в $\mathcal{L}^2_m(-\infty, \infty)$ произвольного четного $2n$ либо нечетного $2n+1$ порядка

$$\begin{aligned} L_{2n} y = \sum_{k=0}^{n} (p_{2k} y^{(k)})^{(k)} &+ \\ + i\sum_{k=1}^{n} \left((p_{2k-1} y^{(k-1)})^{(k)} + (p_{2k-1} y^{(k)})^{(k-1)}\right) &= \lambda y, \end{aligned} \tag{0.2}$$

$$p_j(t) = p_j^*(t), \qquad j = \overline{0, 2n}, \quad \det p_{2n}(t) \neq 0,$$

$$\begin{aligned} L_{2n+1} y = \sum_{k=0}^{n} \Big(i\left((p_{2k+1} y^{(k)})^{(k+1)} + (p_{2k+1} y^{(k+1)})^{(k)}\right) &+ \\ + (p_{2k} y^{(k)})^{(k)} \Big) &= \lambda y, \end{aligned} \tag{0.3}$$

$$p_j(t) = p_j^*(t), \qquad j = \overline{0, 2n+1}, \quad \det p_{2n+1}(t) \neq 0$$

с периодическими (периода I) $m \times m$ - матричными коэффициентами I).

Для возмущений $\eta(t) = \eta^*(t)$ операторов L_2 (при $p_2 < 0$), L_1 достаточные условия конечности числа дискретных уровней, возникающих в полубесконечной спектральной лакуне оператора L_2 и в каждой из спектральных лакун оператора L_1, получены автором в [7].

I) Как известно, спектр таких операторов чисто непрерывен, и если возмущение $\eta(t)$ достаточно мало на бесконечности в интегральном смысле, то предельный спектр $C(L_j + \eta) = C(L_j)$, $j = 2n, 2n+1$. Например, методом пробных функций [2], легко показать, что $C(L_j + \eta) = C(L_j)$, $j = 2n, 2n+1$, если $\eta^2(t) \in K$, то есть, $\lim\limits_{|x| \to \infty} \int_x^{x+1} |\eta^2(t)| dt = 0$.

Для случая, когда нижняя грань оператора L_{2n} (0.2) равна $\lambda_0 > -\infty$, в данной работе установлены достаточные признаки конечности числа дискретных уровней оператора $L_{2n} + T_{2s}$ в лакуне $(-\infty, \lambda_0)$, где

$$T_{2s}\, y = \sum_{k=0}^{s} (\eta_{2k}\, y^{(k)})^{(k)} + i\sum_{k=1}^{s}((\eta_{2k-1}\, y^{(k-1)})^{(k)} + (\eta_{2k-1}\, y^{(k)})^{(k-1)}), \quad \eta_j(t) = \eta_j^*(t), \quad j = \overline{0,2s}, \quad s = \overline{0,n}, \quad T_0 y = \eta_0 y^{2)} \tag{0.4}$$

(здесь не предполагается, что коэффициент $\eta_{2s}(t)$ возмущения T_{2s} отличен от нуля). Для пояснения этих признаков рассмотрим два полуограниченных оператора с периодическими коэффициентами:

I) Оператор, порождаемый в $\mathcal{L}_2^2(-\infty,\infty)$ распадающейся системой

$$-y^{(2)} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y = \lambda y. \tag{0.5}$$

2) Оператор, порождаемый в $\mathcal{L}_1^2(-\infty,\infty)$ скалярным уравнением

$$y^{(4)} - y^{(2)} = \lambda y. \tag{0.6}$$

Для каждого из этих операторов существуют неположительные возмущения вида (0.4), не меняющие нижней грани этих операторов, но, тем не менее, содержащие не исчезающие на бесконечности коэффициенты 3). Легко видеть, что при $\lambda = \lambda_0 = 0$ (нижней грани операторов (0.5), (0.6)) и у системы (0.5), и у уравнения (0.6) имеются неунимодулярные (отличные по модулю от единицы) мультипликаторы.

Оказывается, что в общем случае можно с помощью некоторого преобразования Ляпунова выделить части возмущения, отвечающие соответственно унимодулярным и неунимодулярным мультипликаторам уравнения $L_{2n} y = \lambda_0 y$, и что для конечности числа дискретных уровней возмущенного оператора $L_{2n} + T_{2s}$ в лакуне $(-\infty, \lambda_0)$ достаточно потребовать, чтобы первая часть удовлетворяла условию типа существования некоторого момента, а вторая часть на бесконечности имела бы лишь достаточно малое интегральное среднее на периоде.

Проводимое в работе исследование дискретного спектра, возникающего в спектральных лакунах операторов (0.2), (0.3), опирается на замену Ляпунова в преобразованных специальным образом квадратичных формах, связанных с возмущенными операторами, и на принцип расщепления Глазмана. Подобный метод, являющийся обобщением [I, 2], использовался в [7].

Для построения требуемой замены Ляпунова оказалось необходимым перенести на комплексные канонические системы некоторые результаты, установленные для вещественного случая в работах В.Б. Лидского [9] и В.А. Якубовича [10].

В заключение автор выражает искреннюю благодарность Ф.С. Рофе-Бекетову за руководство этой работой, а также за предоставленную автору возможность ознакомиться в рукописи с подробными доказательствами предложений, анонсированных в [3].

Обозначения

$\langle x, y\rangle_r = \sum_{i=1}^{r} x_i \overline{y_i}$ – скалярное произведение векторов $x = (x_1, \dots, x_r)$, $y = (y_1, \dots, y_r)$ в унитарном пространстве E^r; $(x, y)_r = \int_a^b \langle x(t), y(t)\rangle_r dt$ – скалярное произведение в гильбертовом пространстве $\mathfrak{h} = \mathcal{L}_r^2(a,b)$.

---

2) Методами [I], [2], [8] можно показать, что $C(L_{2n} + T_{2n}) = C(L_{2n})$ при $(-1)^n p_{2n} > 0$, если выполнены условия

I°. $0 < \gamma 1_m < (-1)^n (p_{2n} + \eta_{2n}) < \delta 1_m < \infty$, $|\eta_{2n-1}| < \alpha < \infty$.

2°. $\eta_j \in K$, $j = \overline{0,2n}$.

3) Для оператора (0.5) таким возмущением, например, является $T_0 y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon \end{pmatrix} y$, а для оператора (0.6), например, $T_2 y = \varepsilon y^{(2)}$, где $0 < \varepsilon \leqslant 1$.

Нормы векторов и матриц в E^r обозначаем через $|x|_r$ и $|T|$, нормы элементов в $\mathfrak{H}$ – через $\|x(t)\|_r$.

Если T – матрица, то $Re\,T - \frac{1}{2}(T+T^*)$.

$\mu(A)$ – наименьшее собственное значение эрмитовой матрицы A, $A^+, A^- \geq 0$ – ее положительная и отрицательная части: $A = A^+ - A^-$. 1_r – единичная $r\times r$ -матрица; $C_0^\kappa(a,b)$ – класс вектор функций κ -кратно непрерывно дифференцируемых и равных нулю в окрестности концов интервала (a,b), $D(L)$ – область определения оператора L, действующего в $\mathfrak{H}$.

§ I. КОМПЛЕКСНЫЕ КАНОНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим систему

$$x' = \mathcal{J}_{2N}\,\mathcal{H}(t)x, \tag{I.I}$$

где

$$\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}^*(t) = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h_3 & h_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}^1_{loc} \tag{I.2}$$

– эрмитова матрица – функция (h_j – $N\times N$ – матрицы),

$$\mathcal{J}_{2N} = \begin{pmatrix} 0 & 1_N \\ -1_N & 0 \end{pmatrix}. \tag{I.3}$$

Вместе с системой (I.I) будем рассматривать систему

$$\mathcal{U}' = h_3\mathcal{U} + h_4 V, \qquad V' = -(h_1\mathcal{U} + h_2 V), \tag{I.4}$$

где $\mathcal{U}(t)$, $V(t)$ – $N\times N$ – матрицы. Как известно, если $(\mathcal{U}, V)$ – решение системы (I.4), то $\mathcal{U}^*V - V^*\mathcal{U} = K$, где K – постоянная матрица. Если $K=0$, решение $(\mathcal{U}, V)$ называется самосопряженным.

Известно ([II, стр.47I], [I2]), что система $2n$ -ого порядка (0.2)[4] при $\mathcal{J}m\,\lambda = 0$ сводится к системе (I.I)-(I.3) ($N = mn$). именно, $2mn$ – мерная вектор-функция $x(t) = \hat{y}(t) \oplus \hat{\hat{y}}(t)$, где

$$\hat{y}(t) = \sum_{\kappa=0}^{n-1} \oplus\, y^{(\kappa)}, \tag{I.5}$$

$$\hat{\hat{y}}(t) = \sum_{\kappa=1}^{n} \oplus \Big\{ \sum_{j=\kappa}^{n} (-1)^\kappa \big[p_{2j}\, y^{(j)} + i\big(p_{2j-1}\, y^{(j-1)} + p_{2j+1}\, y^{(j+1)}\big)\big]^{(j-\kappa)} \Big\}, \quad p_{2n+1} = 0, \tag{I.6}$$

удовлетворяет системе (I.I) при

$$h_1 = \begin{pmatrix} -p_0 + \lambda 1_m & -ip_1 & 0 \;\dots\; 0 & 0 \\ ip_1 & p_2 & ip_3 \;\dots\; 0 & 0 \\ 0 & -ip_3 & -p_4 \;\dots\; 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots \\ 0 & 0 & 0 \;\dots\; (-1)^{n-1}p_{2(n-2)} & -i(-1)^n p_{2(n-1)-1} \\ 0 & 0 & 0 \;\dots\; i(-1)^n p_{2(n-1)-1} & (-1)^n\big(p_{2(n-1)} + p_{2n-1}p_{2n}^{-1}p_{2n-1}\big) \end{pmatrix} \tag{I.7}$$

---

4) В § I предполагается, что в системе (0.2) коэффициенты $p_{2\kappa}$, $p_{2\kappa-1} \in C^\kappa$ (т.е., элементы матриц $p_{2\kappa}$, $p_{2\kappa-1}$ κ – кратно непрерывно дифференцируемы).

$$h_3 = h_2^* = \begin{pmatrix} 0 & 1_m & & & & \\ & 0 & 1_m & & 0 & \\ & & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \\ & 0 & & & 0 & 1_m \\ & & & & & -ip_{2n}^{-1} p_{2n-1} \end{pmatrix}, \tag{I.8}$$

$$h_4 = diag\,(0, \ldots, 0, (-1)^n\, p_{2n}^{-1}) \tag{I.9}$$

Всюду ниже, когда мы говорим о системах (I.I), (I.4), отвечающих уравнению (0.2) четного порядка, мы имеем в виду системы (I.I), (I.4) с коэффициентами (I.2), (I.3), (I.7)-(I.9).

Рассмотрим функционал

$$\Phi[y] = \int_a^b \Big\{ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \langle p_{2k} y^{(k)}, y^{(k)} \rangle_m - \lambda \langle y, y \rangle_m - -2 \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \, \mathrm{Im} \langle p_{2k-1} y^{(k-1)}, y^{(k)} \rangle_m \Big\} dt.$$

Обозначив

$$P = diag\,(0, \ldots, 0, (-1)^n p_{2n}),$$
$$Q = diag\,(p_0 - \lambda 1_m, -p_2, \ldots, (-1)^{n-1} p_{2(n-1)}),$$
$$R = i\,diag\,(-p_1, p_3, \ldots, (-1)^n p_{2n-1}),$$

получаем

$$\Phi[y] = \Phi[\hat{y}] = \int_a^b \Big\{ \langle P\hat{y}', \hat{y}' \rangle_{mn} + + 2 Re \langle R\hat{y}, \hat{y}' \rangle_{mn} + \langle Q\hat{y}, \hat{y} \rangle_{mn} \Big\} dt, \tag{I.IO}$$

$\hat{y}(t)$ см. (I.5).

Известно [II, упр. II.2, II.5, стр. 469], что если $(\mathcal{U}, V)$ является самосопряженным решением системы (I.4), (I.7)-(I.9) и $\det \mathcal{U}(t) \neq 0$ при $a \leq t \leq b$, то подстановка $\hat{y}(t) = \mathcal{U}(t) u(t)$ преобразует функционал $\Phi[\hat{y}]$ (I.IO) для вектор-функции $\hat{y}(t)$ (I.5), удовлетворяющей условию $\hat{y}(a) = \hat{y}(b) = 0$, к виду

$$\Phi[\hat{y}] = \int_a^b \langle P\mathcal{U}u', \mathcal{U}u' \rangle_{mn} dt,$$

причем, $M\mathcal{U}u' = 0$, где $m(n-1) \times mn$ - матрица M равна

$$M = \begin{pmatrix} 1_m & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1_m & \ldots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1_m & 0 \end{pmatrix}. \tag{I.II}$$

Непосредственной проверкой отсюда легко выводится следующая

Л Е М М А I.I. Пусть $(\mathcal{U}, V)$ является самосопряженным решением системы (I.4), (I.7)-(I.9), $\det \mathcal{U}(t) \neq 0$ при $a \leq t \leq b$, $\mathcal{U}(t)$ представлена в виде

$$\mathcal{U}(t) = Z(t) e^{\Lambda t},$$

где Λ - постоянная матрица, а вектор-функция $\hat{y}(t)$ (I.5) абсолютно непрерывна, $\hat{y}'(t) \in \mathcal{L}^2_{mn}(a, b)$, $\hat{y}(a) = \hat{y}(b) = 0$.

Тогда подстановка $\hat{y}(t) = Z(t) u(t)$ преобразует функционал $\Phi[\hat{y}]$ (I.IO) к виду

$$\Phi[\hat{y}] = \int_a^b \langle PZ(u' - \Lambda u), \; Z(u' - \Lambda u) \rangle_{mn} dt,$$

причем, $MZ(u'-\Lambda u)=0$ (M (см. I.II)).

В дальнейшем нам понадобится следующая

ЛЕММА I.2. (В.Б. Лидский [9], [I3, стр. 350]). Пусть

$$X_0(t)=\begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ V_1 & V_2 \end{pmatrix} \qquad (I.I2)$$

- произвольное $\mathcal{J}_{2N}$ - унитарное решение[5)] системы (I.I)-(I.3) (U_j, V_j - $N\times N$ - матрицы). Тогда:

I°. Для всех t $\det((U_1-iU_2)(V_1-iU_1))\neq 0$ и матрицы

$$W_1=(U_1-iU_2)^{-1}(U_1+iU_2), \qquad (I.I3)$$

$$W_2=(V_1+iU_1)(V_1-iU_1)^{-1} \qquad (I.I4)$$

- унитарны.

2°.

$$W_1'=ir_1W_1, \qquad (I.I5)$$

$$W_2'=iW_2r_2, \qquad (I.I6)$$

где

$$r_1=2(U_1-iU_2)^{-1}h_4(U_1^*+iU_2^*)^{-1},$$

$$r_2=2(V_1^*+iU_1^*)^{-1}(U_1^*h_1U_1+U_1^*h_2V_1+$$

$$+V_1^*h_3U_1+V_1^*h_4V_1)(V_1-iU_1)^{-1}.$$

3°. а) $U_1f=0$ (соответственно $U_2f=0$) тогда и только тогда, когда $W_1f=-f$ (соответственно $W_1f=f$);

в) $U_1f=0$ тогда и только тогда, когда $W_2g=g$, где $g=(V_1-iU_1)f$

Утверждения леммы I.2, относящиеся к матрице W_1 (I.I3), сформулированы и доказаны в [9] в предположении вещественности $\mathcal{H}(t)$ и решения $X_0(t)$. Однако они верны и в общем случае, так как все они могут быть доказаны, минуя специфические для вещественного случая соображения, используя только соотношения

$$U_1U_2^*=U_2U_1^*,\quad V_2U_1^*-V_1U_2^*=1_N,$$

которые получены в [9] и верны в общем случае. Например, унитарность матрицы W_1 вытекает из равенства

$$(U_1-iU_2)(U_1^*+iU_2^*)=(U_1+iU_2)(U_1^*-iU_2^*),$$

являющегося прямым следствием первого из этих соотношений.

Утверждения леммы I.2, относящиеся к матрице W_2 (I.I4), доказаны в [I3, стр.350] для случая системы (I.I)-(I.3) с $h_2=h_3=0$. В общем случае они доказываются аналогично.

ЛЕММА I.3. Пусть (U_1,V_1) является самосопряженным решением системы (I.4) и $U_1^*U_1+V_1^*V_1>0$. Тогда у системы (I.4) существует решение (U_2,V_2) такое, что матрица-функция $X_0(t)$ (I.I2) является $\mathcal{J}_{2N}$- унитарной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $U_1^*U_1=V_1^*U_1$, $U_1^*U_1+V_1^*V_1>0$, то существуют [I4, I5] матрицы $C=C^*$ и K $(\det K\neq 0)$ такие,

---

5) То есть, такое решение, что $X_0^*(t)\mathcal{J}_{2N}X_0(t)=\mathcal{J}_{2N}$.

что $\mathcal{U}_1(0)=(\cos C)K$, $V_1(0)=(\sin C)K$. Легко видеть, что решение $(\mathcal{U}_2, V_2)$ системы (I.4), удовлетворяющее начальным данным $\mathcal{U}_2(0)=-(\sin C)K^{*-1}$, $V_2(0)=(\cos C)K^{*-1}$ является искомым. Лемма доказана.

В случае, когда существует точка t_0 такая, что матрицы $\mathcal{U}_1(t_0), V(t_0)$ вещественны, лемма I.3 доказана в [10, стр. I9].

Л Е М М А I.4. Пусть $(\mathcal{U}_1, V_1)$ является самосопряженным решением системы (I.4), (I.7)-(I.9) с $p_{2n}(t)>0$ либо $p_{2n}(t)<0$ и пусть $\mathcal{U}_1^*\mathcal{U}_1+V_1^*V_1>0$. Тогда на любом интервале оси t $\det \mathcal{U}_1(t)\neq 0$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Допустим противное, то есть, что существует интервал Δ такой, что $\det \mathcal{U}_1(t)\equiv 0$ при $t\in\Delta$.

Построим по лемме I.3 $\mathcal{J}_{2mn_0}$ - унитарное решение $X_0(t)$ (I.I2) системы (I.I)-(I.3), (I.7)-(I.9) и рассмотрим унитарные матрицы W_1 (I.I3), W_2 (I.I4). В силу пункта 3° а) леммы I.2 существует интервал $\Delta'\subseteq\Delta$ такой, что при $t\in\Delta'$ матрица W_1 имеет изолированное собственное значение равное -1. Обозначим его кратность через d.

Так как $W_1\in C^{n+1}$, то существуют [I6, стр. 2I9] d ортонормированных вектор-функций $f_j\in C^{n+1}(\Delta')$ таких, что при $t\in\Delta'$

$$W_1 f_j=-f_j\ ,\quad j=\overline{1,d}. \tag{I.I7}$$

Все дальнейшие рассмотрения проводим при $t\in\Delta'$. В силу пункта 3° леммы I.2 из (I.I7) выводим

$$W_2 g_j=g_j\ ,\quad g_j\overset{def}{=}(V_1-i\mathcal{U}_1)f_j\in C'(\Delta')\ ,\quad j=\overline{1,d}. \tag{I.I8}$$

Продифференцированное j-тое из тождеств (I.I8) умножаем скалярно на g_j и, учитывая (I.I6), получаем $h_4V_1^*f_j=0$, $j=\overline{1,d}$. В силу пункта 3 а) леммы I.2 и в силу первого уравнения системы (I.4) имеем

$$\mathcal{U}_1 f_j=0\ ,\quad \mathcal{U}_1' f_j=0\ ,\quad j=\overline{1,d}. \tag{I.I9}$$

Отсюда вытекает, что $\mathcal{U}_1 f_j'=0$, $j=\overline{1,d}$. Но тогда

$$f_j'=\sum_{k=1}^{d}\langle f_j', f_k\rangle_{mn} f_k\ ,\quad j=\overline{1,d}, \tag{I.20}$$

а следовательно $\mathcal{U}_1 f_j''=0$, $j=\overline{1,d}$. Учитывая тождества

$$\mathcal{U}_1'' f_j+2(\mathcal{U}_1 f_j')'-\mathcal{U}_1 f_j''=(\mathcal{U}_1 f_j)''=0\ ,\quad j=\overline{1,d},$$

имеем

$$\mathcal{U}_1 f_j=0\ ,\quad \mathcal{U}_1'' f_j=0\ ,\quad j=\overline{1,d}.$$

Повторяя проведенные рассуждения нужное число раз, получаем окончательно

$$\mathcal{U}_1 f_j=0\ ,\quad \mathcal{U}_1^{(m)} f_j=0\ ,\quad j=\overline{1,d}.$$

Отсюда в силу (I.5) (I.6) имеем $\mathcal{U}_1 f_j=0$, $V_1 f_j=0$, $j=\overline{1,d}$. Мы пришли к противоречию с условием леммы. Следовательно на любом интервале оси t $\det \mathcal{U}_1(t)\neq 0$. Лемма доказана.

В скалярном случае $(m=1)$ лемма I.4 следует из одной теоремы Фробениуса [I7, стр. I57].

Всюду ниже предполагаем, что система (I.I)-(I.3) нормальна [II, стр. 469], [I8, стр. 93], то есть, что, если решение $x(t)=u(t)\oplus v(t)$ (u, v - N - мерные вектор-функции) системы (I.I) таково, что $u(t)\equiv 0$ на некотором интервале, то

$u(t)=0=v(t)$. Заметим, что система (I.I), (I.7)-(I.9) нормальна.

Следующие два определения относятся к системам (0.2), (I.I)-(I.3), рассматриваемым на полуоси $0\leq t<\infty$.

О П Р Е Д Е Л Е Н И Е 1 [18]. Система (I.I)-(I.3) называется осцилляторной, если при любом t_0 найдется решение этой системы $x(t)=u(t)\oplus v(t)$ (u, v - N - мерные вектор-функции) такое, что $u(t)$ имеет правее точки t_0 более одного нуля. В противном случае система (I.I) называется неосцилляторной.

О П Р Е Д Е Л Е Н И Е 2 [2, стр. 74]. Система (0.2) называется осцилляторной, если при любом t_0 найдется решение этой системы, имеющее правее точки t_0 более одного n - кратного нуля. В противном случае система (0.2) называется неосцилляторной.

Л Е М М А I.5. Пусть система (I.I)-(I.3) является неосцилляторной и при достаточно больших $t>0$ $h_4(t)\geq 0$ или $h_4(t)\leq 0$. Пусть для самосопряженного решения (U,V) системы (I.4) не существует t° такого, что при $t>t^\circ$ $\det U(t)=0$. Тогда для достаточно больших $t>0$ $\det U(t)\neq 0$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Предположим противное, то есть, что существуют сколь угодно большие $t>0$ такие, что $\det U(t)=0$, и выведем отсюда, что система (I.I)-(I.3) является осцилляторной.

Пусть для определенности $h_4\geq 0$ при достаточно больших $t>0$. Для любого t_0 выберем $t_1>t_0$ такое, что $\det U(t_1)\neq 0$, и рассмотрим решение (U_2, V_2) системы (I.4), удовлетворяющее начальным данным $U_2(t_1)=0$, $V_2(t_1)=1_N$. Легко видеть, что матрица-функция

$$X_0(t)=\begin{pmatrix} U(t)U^{-1}(t_1) & U_2(t) \\ V(t)U^{-1}(t_1) & V_2(t)\end{pmatrix}$$

является J_{2N} - унитарным решением системы (I.I)-(I.3). Воспользуемся теперь леммой I.2. По матрицам $U_1(t)=U(t)U^{-1}(t_1), U_2(t)$ построим унитарную матрицу W_1 (I.13). Как показано в [9], [13, стр. 526] ее собственные числа $\omega_\kappa(t), \kappa=\overline{1,N}$, могут рассматриваться как N непрерывных функций, аргументы которых непрерывны и

$$\arg\omega_1(t)\leq\ldots\leq\arg\omega_N(t)<\arg\omega_1(t)+2\pi . \tag{I.21}$$

Эти аргументы определяются однозначно, если зафиксировать их начальные значения в некоторой точке, не нарушая условия (I.21). В нашем случае это можно сделать, полагая, например, $\arg\omega_\kappa(t_1)=0, \kappa=\overline{1,N}$. В силу (I.15) $\arg\omega_\kappa(t)$, $\kappa=\overline{1,N}$, являются неубывающими функциями, начиная с некоторого $t>0$. Так как не существует t° такого, что при $t>t^\circ$ $\det U(t)=0$, отсюда в силу пункта 3° а) леммы I.2, проводя известные рассуждения [9], [10, стр. 22], [13, стр. 356], получаем, что $\det U_2(t)$ обращается в нуль при сколь угодно больших $t>0$. Выберем $t_2>t_1$ такое, что $\det U_2(t_2)=0$ и рассмотрим решение $x(t)=U_2(t)f\oplus V_2(t)f$, где вектор $f\neq 0$, $U_2(t_2)f=0$. Так как вектор-функция $U_2(t)f$ имеет правее точки t_0 два нуля t_1, t_2, то система (I.I)-(I.3) является осцилляторной. Полученное противоречие и доказывает лемму.

Для вещественных самосопряженных решений (U,V) системы (I.I) с вещественными $h_j(t)$, $j=\overline{1,4}$, $h_4(t)\geq 0$, $\operatorname{rg} h_4(t)=\mathrm{const}$ лемму I.5 можно вывести из теоремы Штернберга-Якубовича [10, стр. 25] и леммы 2.2 работы [10, стр. 27].

Л Е М М А I.6. Для неосцилляторности системы (0.2) с $(-1)^n p_{2n}(t)>0$ необходимо, чтобы у любого самосопряженного решения (U,V) с $U^*U+V^*V>0$ системы (I.4), (I.7)-(I.9) при больших $t>0$ $\det U(t)\neq 0$, и достаточно, чтобы у системы (I.4), (I.7)-(I.9) существовало самосопряженное решение (U,V) с $\det U(t)\neq 0$ при больших $t>0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО необходимости непосредственно вытекает из лемм I.4, I.5.

Докажем достаточность. Пусть $\det U(t)\neq 0$ при $t^\circ<t<\infty$, $y(t)$ - финитная вектор-функция из $D(L_{2n})$, $\operatorname{supp} y(t)\subset(t_0,\infty)$. В силу леммы I.I (при $\Lambda=0$)

$$((L_{2n}-\lambda 1_m)y, y))_m=(PUu', Uu')_{mn},$$

где $mn \times mn$ - матрица $P = diag(0, \dots, 0, (-1)^n p_{2n})$, $u(t) = U^{-1}(t)\hat{y}(t), \hat{y}(t)$ см. (I.5). Поэтому $((L_{2n} - \lambda 1_m) y, y)_m \geqslant 0$ и следовательно в силу [2, стр. 60, 69, 74] система (0.2) является неосцилляторной. Лемма доказана.

В скалярном случае $(m = 1)$, если в уравнении (0.2) коэффициенты $p_{2k-1} = 0$, $k = \overline{1, n}$, лемма I.6 вытекает из теорем 3I, I4 книги [2, стр. 69, 2I9].

Коэффициенты рассматриваемых до сих пор систем не предполагались периодическими. Рассмотрим теперь систему

$$\frac{i}{2}\left((C(t)x)' + C(t)x'\right) = \left(\mathcal{H}_0(t) + \lambda \mathcal{H}_1(t)\right)x \qquad (I.22)$$

с периодическими (периода I) $\ell \times \ell$ - матричными коэффициентами

$$C^*(t) = C(t), \quad \mathcal{H}_j^*(t) = \mathcal{H}_j(t), \quad j = 0, 1 \qquad (I.23)$$

($C(t)$ локально абсолютно непрерывен, $\mathcal{H}_j(t) \in \mathcal{L}^1_{loc}$, $j = 0, 1$).

Обозначим $X(t, \lambda)$ матричное решение системы (I.22) такое, что $X(0, \lambda) = 1_\ell$. Матрица $X(1, \lambda)$ называется матрицей монодромии (м.м.) системы (I.22), а ее собственные числа $\rho_j(\lambda)$ - мультипликаторами системы (I.22).

Система (I.I)-(I.3), (I.7)-(I.9), отвечающая уравнению (0.I) четного порядка, является системой вида (I.22), (I.23) $(\ell = 2mn,\ C(t) = i\mathcal{J}_{2mn})$, причем, в этом случае $\mathcal{H}_1(t) \geqslant 0$ и для любого решения $x(t) \neq 0$ системы (I.22)

$$\int_0^1 \langle \mathcal{H}_1(t)x(t), x(t)\rangle_\ell \, dt > 0. \qquad (I.24)$$

Известно [I2], что уравнение (0.3) нечетного порядка также сводится к системе вида (I.22), (I.23). Именно, $(2n+1)m$ - мерная вектор-функция

$$x(t) = y \oplus y^{[1]} \oplus, \dots, \oplus y^{[n-1]} \oplus y^{[2n]} \oplus, \dots, \oplus y^{[n+1]} \oplus \tilde{y}^{(n)}, \qquad (I.25)$$

где

$$y^{[j]} = y^{(j)}, \quad j = \overline{1, n-1},$$
$$\tilde{y}^{(n)} \stackrel{def}{=} -iy^{(n)},$$
$$y^{[n+k+1]} = -\frac{d}{dt} y^{[n+k]} + (-1)^{n-k}\left(p_{2(n-k)}\, y^{(n-k)} + \right.$$
$$\left. + i\left(p_{2(n-k)+1}\, y^{(n-k+1)} + p_{2(n-k-1)+1}\, y^{(n-k-1)}\right)\right),$$
$$k = \overline{0, n}, \qquad p_{-1} \equiv 0,$$

удовлетворяет системе (I.22), (I.23) $(\ell = (2n+1)m)$ с

$$C(t) = \left(\begin{array}{c|c} i\mathcal{J}_{2mn} & 0 \\ \hline 0 & 2(-1)^n p_{2n+1} \end{array}\right) \qquad (I.26)$$

и коэффициентом $\mathcal{H}_1(t) \geqslant 0$, обладающим свойством (I.24).

Матрицей монодромии уравнения (0.2) (соответственно уравнения (0.3)) будем называть м.м. системы (I.22), получаемой из уравнения (0.2) (соответственно из уравнения (0.3)) введением новой неизвестной $2mn$ -мерной (соответственно $(2n+1)m$ -мерной) вектор-функции $x(t) = \hat{y}(t) \oplus \hat{\hat{y}}(t)$ (I.5), (I.6) (соответственно $x(t)$ (I.25)).

Так как

$$X^*(1,\lambda)C(0)X(1,\lambda) - C(0) = 2\,\mathrm{Im}\,\lambda \int_0^1 X^*(t,\lambda)\mathcal{H}_1(t)X(t,\lambda)\,dt,$$

то в силу [16, стр. 64] из (I.26) и теоремы Флоке [11, стр. 78] вытекает следующее

ЗАМЕЧАНИЕ I.I. Индексы дефекта операторов, порождаемых в $\mathcal{L}^2_m(0,\infty)$ системами (0.2), (0.3) с периодическими коэффициентами $P_j(t)=P_j(t+1)$, равны соответственно (mn, mn) и $(mn+\nu_+,\ mn+\nu_-)$, где ν_+, ν_- – соответственно число положительных и число отрицательных собственных чисел матрицы $(-1)^n P_{2n+1}(t)$.

Для оператора L_{2n+1} (0.3) при $n=0$ замечание I.I вытекает из [19].

Обозначим $\mathfrak{N}_\rho(X)$ корневое подпространство оператора X, отвечающее собственному значению ρ. Пусть жорданова нормальная форма $X|_{\mathfrak{N}_\rho}$ (сужения оператора X на $\mathfrak{N}_\rho$) состоит из d клеток порядка $q_1,\dots,q_d$ и, таким образом, $\mathfrak{N}_\rho(X)$ разлагается в прямую сумму d простых циклических подпространств $\mathfrak{N}^s_\rho(X)$, $s=\overline{1,d}$, размерностей q_s соответственно. Ниже нам понадобится следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. В случае, когда числа q_s четны, обозначим $\mathfrak{M}_\rho(X)$ линейную оболочку инвариантных подпространств $\mathfrak{M}^s_\rho(X)$, $s=\overline{1,d}$, оператора X таких, что

$$\mathfrak{M}^s_\rho(X)\subset\mathfrak{N}^s_\rho(X),\quad \dim\mathfrak{M}^s_\rho(X)=\tfrac{1}{2}q_s,\quad s=\overline{1,d}.$$

Через $\mathfrak{M}(X)$ обозначим прямую сумму подпространств $\mathfrak{M}_\rho(X)$, отвечающих унимодулярным собственным числам оператора X:

$$\mathfrak{M}(X)=\sum_{|\rho|=1}\dot{+}\,\mathfrak{M}_\rho(X). \tag{I.27}$$

Пусть точка μ является граничной точкой спектральной лакуны Δ оператора L_{2n} (0.2) с периодическими коэффициентами $P_j(t)=P_j(t+1)$. Следовательно, у уравнения $L_{2n}y=\mu y$ обязательно имеются унимодулярные мультипликаторы, в то время как при любом $\lambda\in\Delta$ модули всех мультипликаторов уравнения (0.2) отличны от единицы [20], [21]. В силу леммы I.2 из [7] отсюда вытекает, что порядки жордановых клеток, отвечающих унимодулярным мультипликаторам уравнения $L_{2n}y=\mu y$, являются четными, а подпространство $\mathfrak{M}(X(1,\mu))$ (I.27) – J_{2mn} – нейтральным, то есть,

$$\langle J_{2mn}f,g\rangle_{2mn}=0\qquad \forall f,\ g\in\mathfrak{M}(X(1,\mu)).$$

ТЕОРЕМА I. Пусть $\lambda_0>-\infty$ является нижней гранью оператора L_{2n} (0.2) с периодическими коэффициентами $P_j(t)=P_j(t+1)$ 6). Тогда:

I°. У системы (I.4), (I.7)-(I.9), $(\lambda=\lambda_0)$, отвечающей уравнению $L_{2n}y=\lambda_0 y$, существует невырожденное самосопряженное решение (U,V) типа Флоке (н.с.Ф. -решение), то есть, решение (U,V) со свойствами:

$$\det U(t)\neq 0,\qquad -\infty<t<\infty, \tag{I.28}$$

$$U^*V=V^*U, \tag{I.29}$$

$$\begin{aligned}U(t)&=Z(t)e^{\Lambda t}, & Z(t+1)&=Z(t),\\ V(t)&=Z_1(t)e^{\Lambda t}, & Z_1(t+1)&=Z_1(t),\end{aligned} \tag{I.30}$$

где Λ – постоянная матрица. При этом, инвариантное подпространство $\mathcal{L}$ оператора $X(1,\lambda_0)|_{\mathfrak{A}}$ (сужения $X(1,\lambda_0)$ на подпространство $\mathfrak{A}\overset{\text{def}}{=}\{U(0)x\oplus V(0)x\mid x\in E^{mn}\}$), отвечающее унимодулярным собственным числам, совпадает с $\mathfrak{M}(X(1,\lambda_0))$ (I.27):

$$\mathcal{L}=\mathfrak{M}(X(1,\lambda_0))^{7)}. \tag{I.31}$$

6) Следовательно, $(-1)^n P_{2n}(t)>0$.

7) Очевидно, если решение (U,V) системы (I.4), (I.7)-(I.9), $(\lambda=\lambda_0)$ обладает свойствами (I.28)-(I.31), то и решение (UK, VK), где K – любая постоянная невырожденная матрица, обладает этими свойствами.

2^0. Если у уравнения $L_{2n}y = \lambda_0 y$ имеются неунимодулярные мультипликаторы, то у системы (I.4), (I.7)-(I.9), $(\lambda = \lambda_0)$ существуют, по крайней мере, два решения $(\mathcal{U}_i, V_i)$, $(\mathcal{U}_e, V_e)$ со свойствами (I.28)-(I.31) такие, что $\mathcal{U}_i \neq \mathcal{U}_e C$ при любой постоянной матрице C.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (ср. [7]). I^0 Обозначим

$$\begin{pmatrix} A_i \\ B_i \end{pmatrix}$$

$2mn \times mn$ - матрицу, столбцы которой образуют базис в $M_i \dot{+} \mathfrak{M}(X(1,\lambda_0))$, где M_i - инвариантное подпространство оператора $X(1,\lambda_0)$, отвечающее собственным значениям по модулю меньшим единицы. Так как корневые подпространства $\mathcal{J}_{2mn}$ - унитарной матрицы $X(1,\lambda_0)$, отвечающие таким собственным числам ρ_1, ρ_2, что $\rho_1 \bar{\rho}_2 \neq 1$, являются $\mathcal{J}_{2mn}$ - ортогональными [22], то подпространство $M_i \dot{+} \mathfrak{M}(X(1,\lambda_0))^{2mn}$ является $\mathcal{J}_{2mn}$-нейтральным.

Решение $(\mathcal{U}_i, V_i)$ системы (I.4), (I.7)-(I.9), $(\lambda = \lambda_0)$, удовлетворяющее начальным данным $\mathcal{U}_i(0) = A_i$, $V_i(0) = B_i$, является искомым н.с.Ф.- решением. Действительно, из того, что $M_i \dot{+} \mathfrak{M}(X(1,\lambda_0))$ есть $\mathcal{J}_{2mn}$- нейтральное инвариантное подпространство оператора $X(1,\lambda_0)$, вытекает, что $(\mathcal{U}_i, V_i)$ является самосопряженным решением типа Флоке. В силу теоремы 3I из [2, стр. 69, 74] и леммы I.6 $\det \mathcal{U}_i(t) \neq 0, \ -\infty < t < \infty$. И, наконец, последнее утверждение пункта I^0 следует непосредственно из построения решения $(\mathcal{U}_i, V_i)$.

2^0. Рассмотрим решение $(\mathcal{U}_e, V_e)$ системы (I.4), (I.7)-(I.9), $(\lambda = \lambda_0)$, удовлетворяющее начальным данным $\mathcal{U}_e(0) = A_e$, $V_e(0) = B_e$, где столбцы $2mn \times mn$ - матрицы

$$\begin{pmatrix} A_e \\ B_e \end{pmatrix}$$

образуют базис в $M_e \dot{+} \mathfrak{M}(X(1,\lambda_0))$ (M_e - инвариантное подпространство оператора $X(1,\lambda_0)$, отвечающее собственным числам по модулю большим единицы). Аналогично тому, как это делалось для решения $(\mathcal{U}_i, V_i)$, можно показать, что и $(\mathcal{U}_e, V_e)$ обладает свойствами (I.28)-(I.31). Так как $M_i \cap M_e = \{0\}$, то, при наличии у уравнения $L_{2n}y = \lambda_0 y$ неунимодулярных мультипликаторов, $\mathcal{U}_i \neq \mathcal{U}_e C$ при любой постоянной матрице C. Теорема доказана.

Рассуждения аналогичные использованным при доказательстве теоремы I позволяют доказать следующее

З А М Е Ч А Н И Е I.2. Теорема I остается в силе для любого $\lambda < \lambda_0$ (нижней грани оператора L_{2n} (0.2)). Если λ принадлежит замкнутой конечной спектральной лакуне оператора L_{2n} (0.2), то все утверждения теоремы I, за исключением (I.28), также остаются в силе; в этом случае утверждение (I.28) нужно заменить следующим: если $(-1)^n p_{2n}(t) > 0$, то $\det \mathcal{U}(t) \neq 0$ на любом интервале оси t и $\det \mathcal{U}(t)$ осциллирует при $t \to \pm\infty$.

§ 2. НЕПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ВИДА T_{2s} (0.4) ОПЕРАТОРА L_{2n}(0.2)[8]

Пусть нижняя грань оператора L_{2n} (0.2) с периодическими коэффициентами $p_j(t) = p_j(t+1)$ равна $\lambda_0 > -\infty$, $(\mathcal{U}, V)$ $(\mathcal{U}(t) = Z(t)e^{\Lambda t})$- любое из построенных в теореме I н.с.Ф.- решений системы (I.4), (I.7)-(I.9), $(\lambda = \lambda_0)$, отвечающей уравнению $L_{2n}y = \lambda_0 y$.

Занумеруем чисто мнимые собственные числа матрицы Λ с учетом их геометрической

---

8) В настоящем параграфе предполагается, что в уравнении (0,2) коэффициенты p_{2k}, $p_{2k-1} \in C^k$. Кроме того, предполагается (для удобства изложения), что у возмущения T_{2s} (0.4) коэффициенты $q_{2k}, q_{2k-1} \in C^k$ (последнее требование можно ослабить, рассматривая возмущенный оператор $L_{2n} + T_{2s}$ как квазидифференциальный).

кратности $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ и обозначим через $q_1, \cdots, q_d$ порядки соответствующих им жордановых клеток.

Пусть $q = \sum_{j=1}^{d} q_j$, $r = mn - q$ и матрица S приводит Λ к следующей блочно-диагональной форме

$$S^{-1}\Lambda S = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix}, \tag{2.I}$$

где

$$\Lambda_1 = diag\,(C_{q_j}(\lambda_j))_{j=1}^{d}, \quad Re\,\lambda_j = 0. \tag{2.2}$$

Здесь $C_e(\lambda)$ - $e\times e$ жорданова клетка:

$$C_e(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \lambda\ 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Сопоставим блоку Λ_1 диагональные $q\times q$ - матрицы:

$$G(t) = diag\,(e^{\lambda_j t} 1_{q_j})_{j=1}^{d}, \quad Re\,\lambda_j = 0, \tag{2.4}$$

$$B = \sum_{j=1}^{d} \oplus\, diag\,((2q_j - 1)^{-1}, (2(q_j - 1) - 1)^{-1}, \ldots, 1) \tag{2.5}$$

и обозначим

$$W(t) = diag\,(G(t), 1_r). \tag{2.6}$$

Еще сопоставим блоку Λ_1 семейство диагональных $q\times q$ - матриц

$$A_\varepsilon(t) = \mathcal{E}\,(\sum_{j=1}^{d} \oplus\, diag\,(t^{q_j-1}, t^{q_j-2}, \ldots, 1)), \tag{2.7}$$

где $\mathcal{E}$ - любая диагональная $q\times q$ - матрица

$$\mathcal{E} = diag\,(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q), \tag{2.8}$$

удовлетворяющая условию:

Для любой q-мерной вектор-функции $\vec{u}_1(t)$ такой, что

$$\exists \vec{u}_2 : \vec{u}_1 \oplus \vec{u}_2 = u(t), \ Z(t)SW(t)u(t) = \hat{y}(t), \tag{2.9}$$

$\hat{y}(t)$ - mn - мерная абсолютно непрерывная финитная вектор-функция вида (I.5), $\hat{y}' \in \mathcal{L}^2_{mn}(-\infty,\infty)$, $supp\,\hat{y}(t) \cap (-1,1) = \phi$, выполняется неравенство

$$\|\vec{u}_1' - \tilde{\Lambda}_1 \vec{u}_1\|_q \geq \|A_\varepsilon^{-1}(t)\vec{u}_1'\|_q, \tag{2.I0}$$

где

$$\tilde{\Lambda}_1 = \Lambda_1 - (\sum_{j=1}^{d} \oplus\, \lambda_j 1_{q_j}). \tag{2.II}$$

Оценки, близкие к проведенным в [7], показывают, что неравенство (2.I0) имеет место для любой q-мерной абсолютно непрерывной финитной вектор-функции $\vec{u}_1(t)$ (не обязательно вида (2.9)) такой, что $\vec{u}_1' \in \mathcal{L}^2_q(-\infty,\infty)$, $supp\,\vec{u}_1(t) \cap (-1,1) = \phi$, если, например, $\mathcal{E} = 6\sqrt{3}\,1_q$.

В силу леммы I.2 из [7] и теоремы I порядки жордановых клеток, отвечающих унимодулярным мультипликаторам уравнения $L_{2n}y = \lambda_0 y$, являются четными и числа $q_1, \cdots, q_d$ равны половинам этих порядков.

Т Е О Р Е М А 2. Пусть нижняя грань оператора L_{2n} (0.2) с периодическими коэффициентами $p_j(t) = p_j(t+1)$ равна $\lambda_0 > -\infty$, $(U,V)(U(t) = Z(t)e^{\Lambda t})$ какое-нибудь из построенных в теореме I н.с.Ф.- решений системы (I.4), (I.7)-(I.9), $(\lambda = \lambda_0)$, отвечающей уравнению $L_{2n}y = \lambda_0 y$.

Тогда оператор $L_{2n}+T_{2(n-1)}$ (0.2), (0.4) имеет не более конечного числа собственных значений левее λ_0, если при некотором $\alpha \geq 0$

$$\sup_{|x|\geq a} |xA_\varepsilon(x)\int_x^{\infty\,\mathrm{sgn}\,x} G^*(t)(\tilde\Theta_{11}(t)-|\tilde\Theta_{12}(t)|1_q - \tag{2.12}$$
$$-2\tilde H_{11}^-(t))G(t)dt\,A_\varepsilon(x)B| \leq \frac{1}{4}\mu_0,$$

$$\sup_{|x|\geq a} |\int_x^{x+1}(\tilde\Theta_{22}(t)-|\tilde\Theta_{12}(t)|1_r-2\tilde H_{22}^-(t))^- dt| \leq \frac{1}{3}\alpha\mu_0. \tag{2.13}$$

Здесь $\tilde H_{11}^-(t), \tilde\Theta_{11}(t)$ и $\tilde H_{22}^-(t), \tilde\Theta_{22}(t)$ такие $q\times q$ и соответственно $r\times r$ – матрицы, что

$$S^*Z^*(t)H^-(t)Z(t)S=\begin{pmatrix}\tilde H_{11}^-(t) & \tilde H_{12}^-(t)\\ \tilde H_{21}^-(t) & \tilde H_{22}^-(t)\end{pmatrix}, \tag{2.14}$$

$$S^*Z^*(t)\Theta(t)Z(t)S=\begin{pmatrix}\tilde\Theta_{11}(t) & \tilde\Theta_{12}(t)\\ \tilde\Theta_{21}(t) & \tilde\Theta_{22}(t)\end{pmatrix}, \tag{2.15}$$

где $$H(t)=\mathrm{diag}(\eta_0, -\eta_2, \ldots, (-1)^{n-1}\eta_{2(n-1)}),$$

$$\Theta(t)=i\begin{pmatrix} 0 & \eta_1 & & 0\\ -\eta_1 & 0 & -\eta_3 & \\ & \eta_3 & \ddots & -(-1)^{n-1}\eta_{2(n-1)-1}\\ 0 & & (-1)^{n-1}\eta_{2(n-1)-1} & 0\end{pmatrix},$$

под нормой $|\tilde\Theta_{12}|$ $q\times r$ – матрицы $\tilde\Theta_{12}$, определяемой (2.15), понимается

$$\sup_{f\in E^r, |f|_r=1}|\tilde\Theta_{12}f|_q.$$

Матрица S приводит Λ к блочно-диагональной форме специального вида (2.1), (2.2), (2.3), q – половина суммарной алгебраической кратности унимодулярных мультипликаторов уравнения $L_{2n}y=\lambda_0 y$, $r=mn-q$.

$A_\varepsilon(x)$ – какая-нибудь матрица вида (2.7), (2.8), удовлетворяющая условиям (2.10), (2.6), (2.9), (2.11).

Матрицы $G(t)$, B определены (2.4), (2.5);

$$\mu_0=\min_{0\leq t\leq 1}\{\mu(S^*Z^*(t)Z(t)S)\mu((-1)^n p_{2n}(t))\}>0,$$

$$\alpha=\inf_{-\infty<\xi<\infty}\frac{|\det(\Lambda_2+i\xi 1_r)|^2}{(\xi^2+1)|\Lambda_2+i\xi 1_r|^{2(r-1)}}>0.$$

С Л Е Д С Т В И Е 3.1. Оператор $L_{2n}+T_{2(n-1)}$ (0.2) (0.4) имеет не более конечного числа собственных значений левее λ_0 (нижней грани L_{2n}), если

$$\lim_{x\to\infty} x^{2p-1}\int_{|t|\geq x}|H^-(t)+\Theta(t)|dt=0, \tag{2.16}$$

где $2p$ равняется максимальному из порядков жордановых клеток, отвечающих унимодулярным мультипликаторам уравнения $L_{2n}y=\lambda_0 y$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О Т Е О Р Е М Ы 2. В силу принципа расщепления, теоремы 28 из [2, стр. 60, 74] для доказательства достаточно показать, что при некотором $N>0$ для любой финитной вектор-функции $y(t)\in D(L_{2n}+T_{2(n-1)})$ такой, что $\mathrm{supp}\,y(t)\cap(-N,N)=\phi$, будет неотрицательным функционал

$$F[y]=((L_{2n}+T_{2(n-1)}-\lambda_0 1_m)y,y)_m. \tag{2.17}$$

Докажем неотрицательность $F[y]$ (2.17) для $y(t)$ с $supp\, y(t) = [N,\infty)$. Общий случай расположения $supp\, y(t)$ рассматривается аналогично.

Легко видеть, что

$$F[y] = F[\hat{y}] = \Phi[\hat{y}] + (H\hat{y},\hat{y})_{mn} + (\Theta\hat{y},\hat{y})_{mn}, \tag{2.18}$$

где $\hat{y}$, $\Phi[\hat{y}]$ определены (1.5), (1.10) $(\lambda = \lambda_0,\ a = N,\ b = \infty)$.

Оценим снизу $F[\hat{y}]$ (2.18), предварительно положив $\hat{y} = Z(t)SW(t)u(t)$. Пусть $u(t) = (u_1,\dots,u_{mn})$. Полагая $\vec{u}_1 = (u_1,\dots,u_q)$, $\vec{u}_2 = (u_{q+1},\dots,u_{mn})$, имеем в силу леммы 1.1 и неотрицательности матрицы $H^-(t)$:

$$\begin{aligned} F[\hat{y}] \geqslant{}& \mu_0 \| u' - \tilde{\Lambda} u \|^2_{mn} - 2(\tilde{H}^-_{11} G\vec{u}_1, G\vec{u}_1)_q - \\ &-2(\tilde{H}^-_{22}\vec{u}_2, \vec{u}_2)_z + (\tilde{\Theta}_{11} G\vec{u}_1, G\vec{u}_1)_q + \\ &+(\tilde{\Theta}_{22}\vec{u}_2, \vec{u}_2)_z + 2\mathrm{Re}\,(\tilde{\Theta}_{12}\vec{u}_2, G\vec{u}_1)_q, \end{aligned} \tag{2.19}$$

где

$$\tilde{\Lambda} = diag\,(\tilde{\Lambda}_1, \Lambda_2), \tag{2.20}$$

Λ_2, $\tilde{\Lambda}_1$, см. (2.1), (2.11).

В силу (2.10), леммы 2.1 из [7] и неравенства

$$|(\Theta_{12}\vec{u}_2, G\vec{u}_1)_q| \leqslant \frac{1}{2}\int |\Theta_{12}|(|\vec{u}_1|^2_q + |\vec{u}_2|^2_z)\,dt \tag{2.21}$$

выводим из (2.19):

$$\begin{aligned} F[\hat{y}] \geqslant{}& \mu_0 (\| A^{-1}_\varepsilon \vec{u}_1{}' \|^2_q + \alpha(\|\vec{u}_2{}'\|^2_z + \|\vec{u}_2\|^2_z)) + \\ &+ (C_1\vec{u}_1, \vec{u}_1)_q - (C_2\vec{u}_2, \vec{u}_2)_z, \end{aligned} \tag{2.22}$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= G^*(\tilde{\Theta}_{11} - |\tilde{\Theta}_{12}|1_q - 2\tilde{H}^-_{11})G, \\ C_2 &= (\tilde{\Theta}_{22} - |\tilde{\Theta}_{12}|1_z - 2\tilde{H}^-_{22})^-. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Интегрируя квадратичную форму $(C_1\vec{u}_1, \vec{u}_1)_q$ по частям, получаем

$$(C_1\vec{u}_1, \vec{u}_1)_q = - 2\mathrm{Re}\int_N^\infty \langle xA_\varepsilon(x)\int_x^\infty C_1(t)\,dt\,A_\varepsilon(x)Bx^{-1}A^{-1}_\varepsilon(x)B^{-1}\vec{u}_1(x),\ A^{-1}_\varepsilon(x)\vec{u}_1{}'(x)\rangle_q\,dx. \tag{2.24}$$

Следовательно, так как

$$\|(xA_\varepsilon B)^{-1}\vec{u}_1\|_q \leqslant 2\|A^{-1}_\varepsilon \vec{u}_1{}'\|_q,$$

то в силу (2.24) имеем

$$|(C_1\vec{u}_1, \vec{u}_1)_q| \leqslant 4\sup_{x\geqslant N}|xA_\varepsilon(x)\int_x^\infty C_1(t)\,dt\,A_\varepsilon(x)B|\,\|A^{-1}_\varepsilon \vec{u}_1{}'\|^2_q. \tag{2.25}$$

Кроме того, в силу неравенства Мартынова [8, стр. 1585] получаем

$$(C_2\vec{u}_2, \vec{u}_2)_z \leqslant 3\sup_{x\geqslant N}|\int_x^{x+1} C_2(t)\,dt|\,(\|\vec{u}_2{}'\|^2_z + \|\vec{u}_2\|^2_z). \tag{2.26}$$

Сравнивая (2.22), (2.23), (2.25), (2.26) из (2.12), (2.13) выводим неотрицательность $F[y]$ для достаточно большого $N > 0$. Теорема доказана.

З А М Е Ч А Н И Е 2.1. Утверждение теоремы 2 имеет место, если для некоторого $a \geqslant 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что выполняются два условия, получаемые из (2.12), (2.13) заменой $|\tilde{\Theta}_{12}(t)|1_q$ на $\delta\tilde{\Theta}_{12}(t)\tilde{\Theta}_{21}(t)$ и $|\tilde{\Theta}_{12}(t)|1_z$ на $\delta^{-1}1_z$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится аналогично доказательству теоремы 2 с использованием вместо неравенства (2.21) неравенства

$$|(\tilde{\theta}_{12}\vec{u}_2, G\vec{u}_1)_q| \leqslant \frac{1}{2}\left(\delta(G^*\tilde{\theta}_{12}\tilde{\theta}_{21}G\vec{u}_1, \vec{u}_1)_q + \delta^{-1}\|\vec{u}_2\|_2^2\right).$$

Обозначим $T_\Omega y$ формально самосопряженное в $\mathcal{L}^2_m(-\infty,\infty)$ дифференциальное выражение

$$T_\Omega y = \sum_{i,k=0}^{n-1}(-1)^i(\omega_{ik}(t)y^{(k)})^{(i)}, \tag{2.27}$$

где $m\times m$ - матрицы $\omega_{ik}(t)\in C^i$ таковы, что

$$(\omega_{ik}(t))_{i,k=0}^{n-1} \overset{def}{=} \Omega(t) = \Omega^*(t). \tag{2.28}$$

Рассуждения аналогичные использованным при доказательстве теоремы 3.I позволяют доказать следующее

З А М Е Ч А Н И Е 2.2. Оператор $L_{2n}+T_\Omega$ (0.2), (2.27), (2.28) имеет не более конечного числа собственных значений левее λ_0 (нижней грани L_{2n}), если для некоторого $N>0$ найдется неположительная $mn\times mn$ - матрица-функция $\Xi(t)\in\mathcal{L}^1_{loc}$, удовлетворяющая следующим двум условиям:

I^0 $(\Xi(t)\hat{y}(t),\ \hat{y}(t))_{mn} \leqslant (\Omega(t)\hat{y}(t), \hat{y}(t))_{mn}$.

Здесь $\hat{y}(t)$ - любая mn - компонентная финитная вектор-функция вида $\hat{y}(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\oplus y^{(k)}(t)$, где

$$y(t)\in D(L_{2n}+T_\Omega),\quad supp\, y(t)\cap(-N,N)=\emptyset.$$

2^0 $\Xi(t)$ удовлетворяет условиям (2.I2)-(2.I4) теоремы 2, если положить в (2.I4) $H^-(t)=\Xi(t)$, а в (2.I2), (2.I3) $\tilde{H}^-_{ii}(t)=\tilde{\Xi}_{ii}(t)$, $\tilde{\theta}_{ik}(t)=0$, $i,k=1,2$.

В заключение рассмотрим случай, когда возмущения вносятся и в коэффициенты P_{2n}, P_{2n-1} оператора L_{2n} (0.2). Для того, чтобы получить достаточные признаки конечности числа дискретных уровней оператора $L_{2n}+T_{2n}$ (0.2), (0.4) в полубесконечной спектральной лакуне $(-\infty,\lambda_0)$ оператора L_{2n} (0.2) нужно исследовать функционал, получаемый прибавлением к функционалу $F[\hat{y}]$ (2.I8) слагаемого $(\hat{H}\hat{y}', \hat{y}')_{mn} + 2Re(\hat{\theta}\hat{y}, \hat{y}')_{mn}$, где $mn\times mn$ - матрицы $\hat{H}, \hat{\theta}$ равны соответственно

$$\hat{H}(t) = diag(0,\dots,0,(-1)^n\eta_{2n}),$$
$$\hat{\theta}(t) = i\, diag(0,\dots,0,(-1)^n\eta_{2n-1}).$$

Преобразовав этот функционал с помощью подстановки (2.9), можно получить достаточные признаки конечности числа дискретных уровней оператора $L_{2n}+T_{2n}$ (0.2), (0.4) в лакуне $(-\infty,\lambda_0)$. Одним из таких признаков является следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.I. Оператор $L_{2n}+T_{2n}$ (0.2), (0.4) имеет левее λ_0 не более конечного числа собственных значений, если выполнено (2.I6) и

I^0 $(-1)^n(P_{2n}(x)+\eta_{2n}(x))>0$,

2^0 $\varliminf_{|x|\to\infty}\mu\left((-1)^nP_{2n}(x) - 2((-1)^n\eta_{2n}(x))^-\right)>0$,

3^0 $\lim_{|x|\to\infty}|x^{2p-1}\eta_{2n-1}(x)|=0$,

4^0 $\lim_{x\to\infty}x^{2p-1}\int_{|t|\geqslant x}\left(|((-1)^n\eta_{2n}(t))^-|+|\eta_{2n-1}(t)|\right)dt=0.$

§ 3. НЕПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ $\eta(t)-\eta^*(t)$ ОПЕРАТОРОВ L_{2n}, L_{2n+1} (0.2), (0.3)

ТЕОРЕМА 3. Количество дискретных уровней, вносимых возмущением $\eta(t)-\eta^*(t)\in\mathcal{L}^2_{loc}$ в конечную спектральную лакуну (α,β) оператора L_{2n} (0.2) (соответственно L_{2n+1} (0.3)) с периодическими (периода I) коэффициентами $p_{2k}\in C^{2(n+k)}$, $p_{2k-1}\in C^{2(n+k)-1}$ (соответственно $p_{2k+1}\in C^{2(n+k)+2}$, $p_{2k}\in C^{2(n+k)+1}$)[9], конечно, если

$$\lim_{x\to\infty} x^{2p-1}\int_{|t|\geq x}\left(|\eta(t)|+|\eta(t)|^2\right)dt=0, \tag{3.1}$$

где $2p$ равно максимальному из порядков жордановых клеток, отвечающих унимодулярным мультипликаторам уравнений $L_{2n}y=\alpha y$, $L_{2n}y=\beta y$ (соответственно $L_{2n+1}y=\alpha y$, $L_{2n+1}y=\beta y$)[10].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем теорему для случая возмущений оператора L_{2n} (0.2) четного порядка (в случае возмущений оператора L_{2n+1} (0.3) нечетного порядка доказательство проводится аналогично). Не нарушая общности, считаем $\alpha=-\beta<0$.

В силу принципа расщепления, теоремы 9 и леммы 5 из [2, стр. 28, 62, 74] для доказательства достаточно показать, что при достаточно большом $N>0$ для любой вектор-функции $\varphi(t)$ такой, что $\varphi(t)\in C_0^{4n}(-\infty,\infty)$, $supp\,\varphi(t)\cap(-N,N)=\phi$, будет неотрицательным функционал

$$\Phi_\eta[\varphi]=\|(L_{2n}+\eta)\varphi\|^2_m-\beta^2\|\varphi\|^2_m. \tag{3.2}$$

Повторяя преобразования аналогичные проделанным в § I для случая оператора L_{2n} (0.2), имеем

$$\begin{aligned}\|L_{2n}\varphi\|^2_m-\beta^2\|\varphi\|^2_m&=\Phi[\hat\varphi]=\\&=(P^2\hat\varphi',\hat\varphi')_{2mn}+2Re(R\hat\varphi,\hat\varphi')_{2mn}+(Q\hat\varphi,\hat\varphi)_{2mn},\end{aligned} \tag{3.3}$$

где $\hat\varphi=\sum\limits_{k=0}^{2n-1}\oplus\varphi^{(k)}$, $2mn\times 2mn$ - матрица P равна

$$P=diag(0,\ldots,0,p_{2n})$$

(конкретный вид блочно-диагональных $2mn\times 2mn$ -матриц Q,R нам не понадобится).

Записывая выражение $L_{2n}\varphi$ в недивергентной форме $L_{2n}\varphi=p_{2n}\varphi^{(2n)}+\sum\limits_{k=0}^{2n-1}\tilde p_k\varphi^{(k)}$, получаем

$$(L_{2n}\varphi,\eta\varphi)_m=((I_{2mn}P\hat\varphi'+\tilde P\hat\varphi),H\hat\varphi)_{2mn},$$

где $2mn\times 2mn$ - матрицы I_{2mn}, $\tilde P$, H равны соответственно

---

9) Из замечания I.I вытекает, что лакуны в спектре оператора L_{2n+1} (0.3) с периодическими коэффициентами $p_j(t)=p_j(t+1)$ могут быть только тогда, когда сигнатура матрицы $p_{2n+1}(t)$ равна нулю.

10) Порядки жордановых клеток, отвечающих унимодулярным мультипликаторам этих уравнений, являются четными. Доказательство вытекает из [20], [21] и леммы I.2 работы [7]; следует еще воспользоваться тем, что нижняя грань оператора $Ly=((L_{2n+1}-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)1_m)^2-\frac{1}{4}(\alpha-\beta)^2 1_m)y=\lambda y$ в $\mathcal{L}^2_m(-\infty,\infty)$ равна нулю, и м.м. уравнения $Ly=0$ подобна матрице $X_\alpha\oplus X_\beta$, где X_α, X_β - м.м. уравнений $L_{2n+1}y=\alpha y$ и $L_{2n+1}y=\beta y$, соответственно.

$$I_{2mn}=\begin{pmatrix} 0 & & & 1_m \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} 1_m & \\ & 1_m & & \\ 1_m & & & 0 \end{pmatrix}, \qquad I_{2mn}^{-1}=I_{2mn}^{*},$$

$$\tilde{P}=\begin{pmatrix} \tilde{P}_0 & \tilde{P}_1 & \dots & \tilde{P}_{2n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$H=diag\,(\eta, 0, \dots, 0).$$

Следовательно,

$$\Phi_\eta[\varphi]=\Phi_\eta[\hat{\varphi}]=\Phi[\hat{\varphi}]+ + 2Re((I_{2mn}P\hat{\varphi}'+\tilde{P}\hat{\varphi}), H\hat{\varphi})_{2mn}+(H^2\hat{\varphi},\hat{\varphi})_{2mn}. \qquad (3.4)$$

Рассмотрим существующее в силу теоремы I н.с.Φ_2.-решение $(U(t)=Z(t)e^{\Lambda t}, V(t))$ (I.28)-(I.3I) системы (I.4), отвечающей уравнению $L_{2n}^2 y=\beta^2 y$. Вводя матрицы S, $W(t)$, $\tilde{\Lambda}$, аналогичные введенным в § 2 матрицам (2.I), (2.6), (2.20), преобразуем функционал $\Phi_\eta(\hat{\varphi})$ (3.4) с помощью подстановки $\varphi(t)=Z_0(t)u(t)$, где $Z_0(t)=Z(t)SW(^l t)$. В силу леммы I.I такая замена преобразует функционал $\Phi[\hat{\varphi}]$ (3.3) к виду

$$\Phi[\hat{\varphi}]=\|PZ_0(u'-\tilde{\Lambda}u)\|^2_{2mn}=\|I_{2mn}PZ_0(u'-\tilde{\Lambda}u)\|^2_{2mn},$$

причем, $MZ_0(u'-\tilde{\Lambda}u)=0$, $(2n-1)m\times 2nm$ -матрицу M см. (I.II). Учитывая это, получаем

$$\Phi_\eta[\hat{\varphi}]=\|I_{2mn}PZ_0(u'-\tilde{\Lambda}u)\|^2_{2mn}+$$
$$+2Re(I_{2mn}PZ_0(u'-\tilde{\Lambda}u), HZ_0u)_{2mn}+\|HZ_0u\|^2_{2mn}+$$
$$+2Re((I_{2mn}P(Z_0'Z_0^{-1}+Z_0\tilde{\Lambda}Z_0^{-1})+\tilde{P})Z_0u, HZ_0u)_{2mn}=$$
$$=\|I_{2mn}PZ_0(u'-\tilde{\Lambda}u)+HZ_0u\|^2_{2mn}+2Re(\Omega Z_0u, HZ_0u)_{2mn},$$

где $$\Omega(t)=\Omega(t+1)=I_{2mn}P(Z_0'+Z_0\tilde{\Lambda})Z_0^{-1}+\tilde{P}.$$

Так как $MZ_0(u'-\tilde{\Lambda}u)=0$, отсюда в силу элементарного неравенства $\|a+b\|^2\geqslant\frac{1}{2}\|a\|^2-\|b\|^2$ получаем

$$\Phi_\eta[\varphi]-\Phi_\eta[\hat{\varphi}]\geqslant\mu_0\|u'-\tilde{\Lambda}u\|^2_{2mn}+(\Xi u, u)_{2mn}, \qquad (3.5)$$

где $$\mu_0=\frac{1}{2}\min_{0\leqslant t\leqslant 1}\{\mu(p_{2n}^2)\,\mu(S^*Z^*ZS)\}>0,$$

$$\Xi=Z_0^*(2Re(H\Omega)-H^2)Z_0.$$

Поскольку м.м. системы $L_{2n}^2 y=\beta^2 y$ подобна матрице $X_\beta\oplus X_{-\beta}$, где X_β (соответственно $X_{-\beta}$) - м.м. системы $L_{2n}y=\beta y$ (соответственно $L_{2n}y=-\beta y$), то (в силу свойства (I.3I) решения (U,V)) из лемм 2.I, 2.2 работы [7] вытекает, что при $N \geq 1$

$$\exists \gamma(\tilde{\lambda}) > 0 : \| u' - \tilde{\lambda} u \|^2_{2mn} \geq \gamma(\tilde{\lambda}) \| t^{-(p-1)} u' \|^2_{2mn} . \quad (3.6)$$

С другой стороны, как легко видеть,

$$|(\Xi u, u)_{2mn}| \leq \frac{4}{2p-1} \sup_{|x| \geq N} |x^{2p-1} \int_x^{\infty \operatorname{sgn} x} |\Xi(t)| dt| \| t^{-(p-1)} u' \|^2_{2mn} . \quad (3.7)$$

Сравнивая (3.5), (3.6), (3.7), из (3.I) выводим неотрицательность $\Phi_\eta[\varphi]$ для достаточно большого $N > 0$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.I. Как видно из доказательства, в теореме 3.I условие (3.I) можно заменить условием $\lim\limits_{|x| \to \infty} \int_x^{\infty \operatorname{sgn} x} (|\eta| + |\eta|^2) dt < C$, где константа $C = C(L_{2n}, \alpha, \beta) > 0$ (соответственно $C = C(L_{2n+1}, \alpha, \beta) > 0$).

ЛИТЕРАТУРА

I. М.Ш. Бирман. О спектре сингулярных граничных задач. Математический сборник, 55 (97):2, I25-I74, I96I.

2. И.М. Глазман. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М., I963.

3. Ф.С. Рофе-Бекетов. Признак конечности числа дискретных уровней, вносимых в лакуны непрерывного спектра возмущениями периодического потенциала. ДАН СССР, I56, № 3, 5I5-5I8, I964.

4. В.А. Желудев. О собственных значениях возмущенного оператора Шредингера с периодическим потенциалом. Сб. "Проблемы математической физики", ЛГУ, вып. 2, I967.

5. В.А. Желудев. О возмущении спектра одномерного самосопряженного оператора Шредингера с периодическим потенциалом. Сб. "Проблемы математической физики", ЛГУ, вып. 4, 6I-82, I970.

6. Ф.С. Рофе-Бекетов. Возмущение оператора Хилла, имеющее первый момент и отличный от нуля интеграл, вносит в далекие спектральные лакуны по одному дискретному уровню. Сб. "Математическая физика и функциональный анализ", ФТИНТ АН УССР, вып. 4, I973.

7. В.И. Храбустовский. О возмущении спектра самосопряженных дифференциальных операторов с периодическими матричными коэффициентами. Сб. "Математическая физика и функциональный анализ", ФТИНТ АН УССР, вып. 4, I973.

8. В.В. Мартынов. Условия дискретности и непрерывности спектра в случае самосопряженной системы дифференциальных уравнений четного порядка. Дифференциальные уравнения, I, № I2, I965, I578-I59I.

9. В.Б. Лидский. Осцилляционные теоремы для канонической системы дифференциальных уравнений. ДАН СССР, I02, № 5, 877-880, I955.

I0. В.А. Якубович. Осцилляторные свойства решений канонических уравнений. Математический сборник, 56 (98):I, 3-42, I962.

II. Ф. Хартман. Обыкновенные дифференциальные уравнения. "Мир", М., I970.

I2. В.И. Коган, Ф.С. Рофе-Бекетов. О квадратично интегрируемых решениях симметрических систем дифференциальных уравнений произвольного порядка. Препринт ФТИНТ АН УССР, I973.

I3. Ф. Аткинсон. Дискретные и непрерывные граничные задачи. "Мир", М., I968.

I4. Ф.С. Рофе-Бекетов. Самосопряженные расширения операторов в пространстве вектор-функций. ДАН СССР, I84, № 5, I034-I037, I969.

I5. Ф.С. Рофе-Бекетов. О самосопряженных расширениях операторов в пространстве вектор-функций. Теория функций, функциональный анализ и их приложения, вып. 8, Харьков, 3-24, I969.

16. Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., 1970.

17. Айнс. Обыкновенные дифференциальные уравнения. ДНТВУ, 1939.

18. **W.T.Reid. Oscillation criteria for self-adjoint differential systems. Trans.Amer.Math.Soc., 101, 91-106, 1961.**

19. Л.Б. Зеленко. Индекс дефекта и спектр самосопряженной системы дифференциальных уравнений первого порядка. ДАН СССР, 181, № 2, 278-281, 1968.

20. И.М. Гельфанд. Разложение по собственным функциям уравнения с периодическими коэффициентами. ДАН СССР, 73, 1117-1120, 1950.

21. Ф.С. Рофе-Бекетов. О спектре несамосопряженных дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами, ДАН СССР, 152, № 6, 1312-1315, 1963.

22. А.И. Мальцев. Основы линейной алгебры. ГТТИ, 1956.

ON PERTURBATION OF THE SPECTRUM OF ARBITRARY ORDER SELF-ADJOINT DIFFERENTIAL OPERATORS WITH PERIODIC MATRIX COEFFICIENTS

V.I.Khrabustovsky

A sufficient condition is obtained for the finiteness of the number of discrete levels caused by the perturbation $\eta(t)=\eta^*(t)$ in each spectral lacuna of self-adjoint differential operators L_{2n} and L_{2n+1}(of the order of 2n and 2n+I, respectively) with periodic (of the unit period) matrix coef - ficients that act in the Hilbert space $\mathcal{L}^2_m(-\infty,\infty)$ of m-component vector functions. Besides when the operator L_{2n} is semi-bounded, sufficient conditions are obtained for the finiteness of the number of discrete levels caused by the perturbation of all the coefficients of the operator L_{2n} in the lacuna $(-\infty,\lambda)$ where λ_o is the lower bound of the operator L_{2n}.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1974 выпуск У

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА СО СЛУЧАЙНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Л.А. Пастур

Рассмотрим уравнение Шредингера

$$-\frac{1}{2}\Delta\psi + q\psi = \lambda\psi \tag{I}$$

в кубе $V \subset R^m$ с некоторыми самосопряженными условиями на его границе и предположим, что потенциал $q(x)$ – случайная функция точки $x \in R^m$. Для каждой реализации этой случайной функции определим величину

$$N_V(\lambda) = \frac{1}{V}\sum_{\lambda_k < \lambda} 1 ,$$

где λ_k $(k=1,2,\dots)$ – собственное значение оператора H_V, определяемого в $L_2(V)$ левой частью (I) и граничными условиями.

Справедлива следующая

Т Е О Р Е М А I [I]. Пусть $q(x)$ – стационарное в узком смысле метрически транзитивное поле с кусочно непрерывными реализациями и при каждом $t>0$ $M\{e^{-tq(0)}\}<\infty$ I). Тогда существует такая неубывающая функция $N(\lambda)$, что с вероятностью I во всех точках ее непрерывности $\lim_{V\to\infty} N_V(\lambda) = N(\lambda)$ и

$$k(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t} dN(\lambda) = M\{K(t,0,0)\},$$

где $K(t,x,y)$ – ядро оператора e^{-tH} $(t>0)$, а оператор H определяется уравнением (I) в R^m.

В настоящей статье мы найдем асимптотику $\ln N(\lambda)$ при $\lambda \to -\infty$ для случайного потенциала $q(x)$ вида

$$q(x) = \sum_j \varphi(x - x_j),$$

где $\varphi(x)$ – непрерывная суммируемая в R^m функция такая, что $\varphi(0)<0$, а случайные точки x_j распределены в R^m по закону Пуассона с плотностью c [2].

В силу тауберовой теоремы из работы [3] (см. также [4])

$$\ln N(\lambda) = \max_{t>0}\{-\lambda t - \ln k(t)\}(1+o(1)), \quad \lambda \to -\infty. \tag{2}$$

Поэтому наша задача сводится к нахождению асимптотики $\ln k(t)$ при $t \to +\infty$, которая вытекает из неравенства

$$|f|_1^{-2} e^{-t(H_0 f,f)} M\{e^{-(qf,f)}\} \le M\{K(t,0,0)\} \le (2\pi t)^{-\frac{m}{2}} M\{e^{-tq(0)}\}, \tag{3}$$

I) Символом $M\{\dots\}$ здесь и ниже обозначена операция взятия математического ожидания.

где $f(x)$ - гладкая быстро убывающая функция с L_2 -нормой, равной I, $|f|_1$ - ее L_1 -норма,

$$(H_0 f, f) = \frac{1}{2}\int_{R^m} |\nabla f|^2 dx, \quad (qf, f) = \int_{R^m} q(x) f^2(x)\, dx.$$

Правая часть неравенства (3) доказана в [I]. Докажем левую. В силу однородности поля $q(x)$ и неравенства Шварца

$$M\{K(t,0,0)\}^2 = M\{K(t,x,x)\} M\{K(t,y,y)\} \geq M^2\{K^{\frac{1}{2}}(t,x,x)K^{\frac{1}{2}}(t,y,y)\}. \qquad (4)$$

Но так как e^{-tH} - положительно определенный оператор, то $K(t,x,x)\cdot K(t,y,y) \geq K^2(t,x,y)$, а тогда из (4) вытекает, что

$$M\{K(t,0,0)\} \geq M\{K(t,x,y)\}.$$

Умножим теперь это неравенство на $f(x)f(y)$ и проинтегрируем по x и y. В результате получим

$$|f|_1^2\, M\{K(t,0,0)\} \geq M\{(e^{-tH} f, f)\}. \qquad (5)$$

Но

$$(e^{-tH} f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t} d\sigma(\lambda),$$

где $\sigma(\lambda) = (E_\lambda f, f)$ и E_λ - разложение единицы оператора H. Поэтому в силу неравенства Иенсена [2] имеем

$$(e^{-tH} f, f) \geq \exp\{-t\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d\sigma(\lambda)\} = e^{-t(Hf,f)},$$

что после подстановки в (5) и дает левую часть (3).

Величина $M\{e^{-t(qf,f)}\}$ для потенциала $q(x)$, указанного выше вида, может быть вычислена [2] и равна

$$\exp\{c\int_{R^m} dx\, (e^{-t\int_{R^m} \varphi(x+y) f^2(y) dy} - 1)\}. \qquad (6)$$

Выберем теперь $f(x) = (2\pi d)^{-\frac{m}{4}} e^{-\frac{|x|^2}{4d}}$, где $d(t) = o(\frac{1}{t})$ при $t \to \infty$. Тогда нетрудно показать, что при $t \to +\infty$ логарифм выражения (6) асимптотически совпадает с

$$\int_{|x|<\varepsilon} e^{-t\varphi(0)} dx, \qquad (7)$$

где ε - любое фиксированное число (напоминаем, что $\varphi(0) < 0$). С другой стороны, так как $M\{e^{-tq(0)}\}$ равно (6) при $f(x) = \delta(x)$, где $\delta(x)$ - дельта-функция Дирака, то и правая часть (3) при $t \to \infty$ асимптотически равна (7).

Таким образом

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln k(t)}{\int_{|x|<\varepsilon} e^{t\varphi(x)} dx}.$$

Рассмотрим для простоты случай, когда $\varphi(x)$ есть функция $\sigma - |x|$ и дважды непрерывно дифференцируема в нуле. Тогда при $t \to \infty$ вместо (7) можем написать

$$\left(\frac{2\pi}{t|\varphi''(0)|}\right)^{\frac{m}{2}} e^{t|\varphi(0)|};$$

откуда в силу тауберовой теоремы (2)

$$\ln N(\lambda) = -\frac{\lambda}{\varphi(0)} \ln \frac{\lambda}{\varphi(0)} (1+o(1)), \quad \lambda \to -\infty.$$

Пусть теперь $q(x)$ - гауссовское случайное поле $M\{q(x)\} = 0$, $M\{q(0)q(x)\} = B(x)$. Тогда

$$M\{e^{-t(qf,f)}\} = \exp\left\{\frac{t^2}{2}\int_{R^m \times R^m} B(x-y) f^2(x) f^2(y) dx dy\right\},$$

что после подстановки в (3) дает, в силу произвольности функции $f(x)$,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln k(t)}{t^2} = \frac{B(0)}{2} = \frac{M\{q^2(0)\}}{2}.$$

Это в свою очередь приводит к такой асимптотике для $N(\lambda)$:

$$N(\lambda) = e^{-\frac{\lambda^2}{2B(0)}(1+o(1))}, \qquad \lambda \to -\infty. \tag{8}$$

Асимптотика (8) более сложным путем была получена в [5]. На физическом уровне строгости ее получали многие авторы (см. [6] и цитируемую там литературу).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л.А. Пастур, УМН, 28, 3, 1973.
2. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2, М., "Мир", 1967.
3. В.С. Виденский. Математический сборник, 62, 121, 1963.
4. Р.А. Минлос, А.Я. Повзнер. Труды Московского математического общества, XVII, 243, 1968.
5. Л.А. Пастур. Функциональный анализ и его приложения, 6, 93, 1972.
6. В.Л. Бонч-Бруевич. Сб. "Статистическая физика и квантовая теория поля", М., "Наука", 1973.

ON THE EIGENVALUE DISTRIBUTION OF THE SCHRODINGER EQUATION WITH A RANDOM POTENTIAL

L.A. Pastur

The asymptotic behaviour for the eigenvalue distribution function of the Schrodinger equation with a random metrically transitive potential is found. The class of potentials for which the results are obtained contains the Gaussian random fields and the fields of the form

$$q(x) = \sum_j \varphi(x - x_j),$$

where $\varphi(x)$ is the integrable function with $\varphi(0) < 0$ and the points x_j are distributed in the space according to the Poisson law.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА и ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1974 выпуск У

О СУЩЕСТВОВАНИИ ГОЛОМОРФНОЙ В КОНУСЕ ФУНКЦИИ С ЗАДАННЫМ ИНДИКАТОРОМ ПРИ УТОЧНЕННОМ ПОРЯДКЕ

П.З. Агранович

Пусть $C_T=\left\{z;\frac{z}{|z|}\in T\right\}$, где T - открытое множество на единичной сфере в пространстве $\mathbb{C}^n$. Мы предполагаем, что конус псевдовыпуклый и каждое его непустое сечение комплексно одномерной плоскостью, проходящей через начало координат, является углом раствора меньше чем $min(\frac{\pi}{\rho},2\pi)$.

Пусть K - произвольный компакт в T, обозначим тогда

$$M_f(r;K)=\max_{|z|=r,\ \frac{z}{r}\in K}|f(z)|.$$

Будем говорить, что голоморфная в C_T функция $f(z)$ есть функция уточненного[I)] (сильного уточненного) порядка, если $\rho(r)$ является уточненным (сильным уточненным) порядком, и величина

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{ln^+M_f(r;K)}{r^{\rho(r)}}$$

положительна и конечна для любого компакта $K\subset T$ [2)].

Назовем радиальным индикатором функции $f(z)$ при уточненном порядке $\rho(r)$ величину

$$\mathcal{L}_{\rho(r)}(z;f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{ln|f(rz)|}{r^{\rho(r)}},\quad z\in C_T,$$

а ее регуляризацию $\mathcal{L}^*_{\rho(r)}(z;f)$ назовем регуляризованным радиальным индикатором функции $f(z)$ при уточненном порядке $\rho(r)$.

Нетрудно видеть, что индикатор $\mathcal{L}^*_{\rho(r)}(z;f)$ позитивно однородная порядка ρ плюрисубгармоническая функция в конусе C_T.

Естествен вопрос: являются ли эти свойства индикатора характеристическими? Если $n=1$ и $\rho=1$, то из теоремы Полиа о связи роста целой функции с распределением особенностей ассоциированной функции следует утвердительный ответ на этот вопрос;если $n=1$ и $\rho(r)$ - произвольный сильный уточненный порядок или уточненный порядок, стремящийся при $r\to\infty$ к нецелому $\rho>0$, то утвердительный ответ получен В.Бернштейном [2,3] и Б.Я. Левиным [I]; справедливость этого результата для $n=1$ и уточненного порядка $\rho(r)$, стремящегося к целому $\rho>0$, доказана В.Н. Логвиненко [4].

Методы, используемые для решения указанного вопроса при $n=1$, оказались непригодными в многомерном случае ($n>1$). Сравнительно недавно для случая индикатора при обычном порядке ($\rho(r)\equiv\rho$), заданного во всем пространстве $\mathbb{C}^n$, утвердительный

I) Определения уточненного и сильного уточненного порядков см. в [I].

2) Как обычно функция ln^+x определяется равенством

$$ln^+x=max(ln\,x,0).$$

ответ был получен при $\rho=1$ Кизельманом [5], а при произвольном ρ Мартино [6,7].

Нами получен следующий результат.

Т Е О Р Е М А. Для любой позитивно однородной порядка ρ плюрисубгармонический в конусе C_T функции $\varphi(z)$ и любого сильного уточненного порядка $\rho(r)$ ($\rho(r)\to\rho$ при $r\to\infty$) существует голоморфная в C_T функция $f(z)$ порядка $\rho(r)$, индикатор которой совпадает с $\varphi(z)$.

При доказательстве этой теоремы, которое проводится в общих чертах по той же схеме, что и доказательство теоремы Мартино, основную трудность представляет построение плюрисубгармонической функции $u(z)$, для которой

$$\mathcal{L}^{*}_{\rho(r)}(z;u)=\varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ - радиальный индикатор плюрисубгармонической функции при сильном уточненном порядке. В случае, рассмотренном Мартино, факт существования такой функции тривиален.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Б.Я. Левин. Распределение корней целых функций, М., Гостехиздат, 1956.
2. V.Bernstein. Sur les propriétes caracteristiques des indicatrices de croissance. C.R. 202, 108-110, 1936.
3. V.Bernstein. Sulla proprietà carttestiche delle indicatrici di crescénza delle transcendenti intere d'ordine finito. Mem. Reale Acc. d'Italia, 7, 131-189, 1936.
4. В.Н. Логвиненко. Построение целой функции с заданным индикатором при заданном целом уточненном порядке, "Функциональный анализ и его приложения", 6, № 6, 1972, 87-88.
5. C.O.Kiselman. On entiere functions of exponential type and indicators of analytic functionals, Acta Math. Uppsala, 117, 1-35, 1967.
6. A.Martineau. Indicatrices de croissance des fonctions entières de N variables, Invent. Math., Berlin, 2, 81-86, 1966.
7. A.Martineau. Indicatries de croissance des fonctions entières de N variables (Correction et complément), Invent Math. Berlin, 3, 16-19, 1967.

ON THE EXISTENCE OF THE HOLOMORPHIC-IN-CONE-FUNCTION WITH A GIVEN INDICATOR FOR A PRECISE ORDER

P.Z. Agranovich

Let $C_T=\{z:\frac{z}{|z|}\in T\}$, where T is the open set on a unit sphere in the space C^n. The cone is assumed to be pseudoconvex and its every nonvoid inter section with a complex one-dimension plane through the origin to be an angle whose opening is less than min $(\frac{\pi}{\rho}, 2\pi)$.

We have obtained the following result.

T h e o r e m. For any positive homogeneous ρ-order function C_T, which is plurisubharmonic in a cone $\varphi(z)$, and any strong precise order $\rho(r)$ ($\rho(r)\to\rho$ at $r\to\infty$) there is the $\rho(r)$-order function $f(z)$ which is holomorphic in C_T and whose indicator coincides with $\varphi(z)$.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1974 выпуск У

ОБ ОДНОМ УТОЧНЕНИИ ОЦЕНКИ СУММЫ ДЕФЕКТОВ ДЛЯ ГОЛОМОРФНЫХ КРИВЫХ НИЖНЕГО ПОРЯДКА $\lambda \leq \frac{1}{2}$

С.В. Львова

Пусть $\mathcal{X}(z) = \{x_1(z), x_2(z), \ldots, x_n(z)\}$ – целая кривая в n-мерном комплексном пространстве C^n. Тогда k – вектор $\mathcal{X}^k(z) = [\mathcal{X}(z)\mathcal{X}'(z)\ldots\mathcal{X}^{(k-1)}(z)]$ ($\mathcal{X}^k \in \Lambda^k C^n$, где Λ^k – обозначает k – внешнюю степень) определяет голоморфную кривую ранга k [I].

Если $A^k = [a^0 a^1 \ldots a^{k-1}]$ – постоянный k-вектор из $\Lambda^k C^n$ ($a_i \in C^n$), то скалярное произведение $\langle \mathcal{X}^k A^k \rangle$ – целая функция (см. [I]). Величины $N(r, \mathcal{X}^k)$, $m(r, \mathcal{X}^k)$, $T(r, \mathcal{X}^k)$, $\delta(A^k)$ определяются по аналогии с соответствующими величинами для целых кривых (см. [4]).

Пространство $\Lambda^k C^n$ можно естественным образом отождествить с пространством $C^{\ell(k)}$, где $\ell(k) = C_n^k$. Если λ и ξ два вектора из $C^{\ell(k)}$, соответствующие векторам $\mathcal{X}^k$ и A^k из $\Lambda^k C^n$, тогда скалярное произведение $\langle \mathcal{X}^k A^k \rangle$ в точности совпадает с обычным скалярным произведением векторов (λ, ξ) в $C^{\ell(k)}$.

Учитывая сказанное выше и используя метод, изложенный в [2], можно показать, что справедливо следующее утверждение

ТЕОРЕМА. Если нижний порядок голоморфной кривой ранга k $\lambda \leq \frac{1}{2}$, то

$$\sum_{A^k} \delta(A^k) \leq C_n^k - 1,$$

где A^k – система k-мерных проективных подпространств в общем положении [2].

Эта теорема уточняет известную оценку для голоморфных кривых нижнего порядка $\lambda \leq \frac{1}{2}$ (см. [3] стр. 216).

В заключение автор благодарит профессора В.П. Петренко за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

I. L.V.Ahlfors. The theory of meromorphis curves, Acta Soc.Sci.Fenn., Ser.A, 3, N4, 1941.

2. М. Хуссайн, "исследование роста целых кривых", Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук, ХГУ, 1973.

3. Х.Ву. "Теория равнораспределения для голоморфных кривых", Мир, 1973.

4. А.А. Гольдберг. "Некоторые вопросы теории распределения значений", Дополнение к книге Г. Виттиха "Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям", 1960.

ON SOME SPECIFICATION TO THE ESTIMATE OF A SUM OF DEFECTS FOR LOWER ORDER HOLOMORPHIC CURVES

S.V.L'vova

The estimate obtained

$$\sum_{A^k} \delta(A^k) \leq C_n^k - 1$$

specifies the earlier known one (L.V.Ahlfors."The theory of meromorphis curves", Acta Soc.Sci.Fenn., Ser.3A, N4, 1941) for low order holomorphic curves of the rank k.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1974 выпуск У

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЛОКАЛЬНОГО C^∞-РЕШЕНИЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Л.П. Кучко

Пусть

$$G_i : (R^n \times R^p, 0) \to (R^n, 0), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

и

$$\mathcal{H} : (R^n \times \underbrace{R^p \times \dots \times R^p}_{m \text{ раз}}, 0) \to (R^p, 0) -$$

C^∞ - отображения. Всюду в дальнейшем будем считать, что

$$G_i(z) = \Lambda_i x + g_i(z), \quad g_i(z) = O(z^2), \quad z = (x, y) \in R^n \times R^p,$$
$$\mathcal{H}(u) = \sum_{i=1}^{m} \tilde{\Lambda}_i y_i + h(u), \quad h(u) = O(u^2), \ u = (x, y_1, \dots, y_m) \in R^n \times R^p \times \dots R^p.$$

Рассмотрим оператор

$$(\mathcal{A}\varphi)(x) = \mathcal{H}(x, \varphi(G_1(x, \varphi(x))), \dots, \varphi(G_m(x, \varphi(x)))),$$

действующий в пространстве C^∞-отображений $\varphi : (R^n, 0) \to (R^p, 0)$. Мы будем изучать условия существования в окрестности точки $x = 0$ C^∞- решения функционального уравнения

$$\varphi(x) = (\mathcal{A}\varphi)(x). \tag{I}$$

Различные аспекты этого вопроса рассматривались в [1], [2]. Мы установим достаточные условия существования решения этого уравнения, более широкие, чем в [3].

Уравнение (I) называется формально разрешимым, если существует такое C^∞ -отображение $\varphi_0(x)$, что отображение

$$\varphi_0(x) - (\mathcal{A}\varphi_0)(x)$$

является плоским в точке $x = 0$. Отображение $\varphi_0(x)$ называется формальным решением уравнения (I). Ясно, что для локальной разрешимости уравнения (I) необходима его формальная разрешимость. С другой стороны, формальная разрешимость еще не обеспечивает локальной разрешимости. Мы дадим условия, при которых из существования формального решения $\varphi_0(x)$ уравнения (I) следует существование локального C^∞-решения уравнения (I), формальный ряд которого в начале координат совпадает с формальным рядом $\varphi_0(x)$.

Предположим, что пространство R^n разложено в прямую сумму подпространств: $R^n = \mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_-$. Отображение $G : R^n \times R^p \to R^n$ назовем квазисжатием порядка $K \geq 0$ по переменной x_+, если можно указать такие константы $C_i > 0$, что выполняются следующие неравенства:

$$\| G_+(x_+, x_-, 0) \| \leq \| x_+ \| (1 - C_1 \| x \|^K), \quad x = (x_+, x_-),$$
$$\| G'_x(z) \| \leq 1 + C_2 \| z \|^K, \ \| G'_y(z) \| \leq C_3 \| z \|^K, \quad z = (x, y).$$

Квазисжатие порядка $K = 0$ назовем сжатием.

Отображение $G : R^n \times R^p \to R^n$ назовем квазирастяжением порядка $K \geq 0$ по переменной x_- , если можно указать такие константы $D_i > 0$, что выполняются следующие неравенства:

$$\|x_-\|(1+D_1\|x\|^\kappa) \leqslant \|G_-(x_+,x_-,0)\| \leqslant \|x_-\|(1+D_2\|x\|^\kappa),\quad x=(x_+,x_-),$$

$$\|G'_x(z)\| \leqslant 1+D_3\|z\|^\kappa,\quad \|G'_y(z)\| \leqslant D_4\|z\|^\kappa,\quad z=(x,y).$$

Квазирастяжение порядка $\kappa=0$ назовем растяжением.

Обозначим через $\mathcal{P}_1$ ортопроектор на подпространство $\mathcal{L}_+$, $\mathcal{P}_2$ - ортопроектор на подпространство $\mathcal{L}_-$, а через β - оператор, сопоставляющий произвольному C^∞-отображению его формальный ряд в начале координат.

Т Е О Р Е М А I. Предположим, что выполнено одно из следующих двух условий:

I) отображения $G_i(x,y)$, $i=1,2,\ldots,m$ являются квазисжатиями порядка $\kappa>0$ по переменной x_+ и квазирастяжениями порядка $\kappa>0$ по переменной x_- и, кроме того,

$$\sum_{i=1}^{m}\|\mathcal{H}'_{y_i}(0)\| < 1;$$

2) отображения $G_i(x,y)$, $i=1,2,\ldots,m$ являются сжатиями по переменной x_+ и растяжениями по переменной x_- и, кроме того,

$$\inf\sum_{i=1}^{m}\|\mathcal{H}'_{y_i}(0)\| = 0,$$

где $\inf$ берется по всем нормам матриц в R^p .

Предположим также, что существует такой номер j ($j=1,2$), что выполняется условие

$$\mathcal{H}(\mathcal{P}_j x, 0, 0, \ldots, 0) = 0,$$

и существует такое формальное решение $\varphi_0(x)$ уравнения (I), что $\varphi_0(x_+,0)=\varphi_0(0,x)=\varphi_0'(0)=0$.

Тогда в некоторой окрестности нуля существует C^∞-решение уравнения (I), формальный ряд которого в начале координат равен $\beta(\varphi_0(x))$.

Если $\dim\mathcal{L}_- = 0$, то утверждение теоремы I можно усилить. Справедлива

Т Е О Р Е М А 2. Предположим, что отображения $G_i(x,y)$, $i=1,2,\ldots,m$ являются квазисжатиями порядка $\kappa \geqslant 0$ по переменной x , а отображение $\mathcal{H}(u)$ удовлетворяет условию

$$\sum_{i=1}^{m}\|\mathcal{H}'_{y_i}(u)\| \leqslant 1+d\|u\|^\kappa,\qquad u=(x,y_1,\ldots,y_m),$$

при некотором $d>0$. *Предположим также*, что существует такое формальное решение $\varphi_0(x)$ уравнения (I), что $\varphi_0(0)=\varphi_0'(0)=0$.

Тогда в некоторой окрестности нуля существует C^∞-решение уравнения (I), формальный ряд которого в начале координат равен $\beta(\varphi_0(x))$.

В уравнении вида (I) в аргумент неизвестного отображения φ снова входит неизвестное отображение φ , т.е., по терминологии [4], уравнение (I) обладает "индексом кручения"[I], равным единице, относительно неизвестного отображения φ . Применяемый при доказательстве теоремы I метод позволяет устанавливать теоремы существования локального C^∞-решения для функциональных уравнений с любым неотрицательным индексом кручения. Уравнения с нулевым кручением возникают в задаче о сопряженности отображений [3]. Уравнения с индексом кручения, равным I, возникают в связи с задачей о существовании инвариантных многообразий у локальных отображений.

Пусть $\mathcal{F}(x)=\Lambda(x)+f(x)$ - росток в начале координат отображения класса C^∞ из R^n в R^n с неподвижной точкой $x=0$ и линейным приближением $\Lambda=\mathcal{F}'(0)$.

I) В оригинале **"wskaźnik uwiklania"**.

Обозначим через $\mathcal{L}_+$ инвариантное относительно Λ подпространство, отвечающее той части ненулевого спектра матрицы Λ, которая лежит внутри единичного круга. Через $\mathcal{L}_-$ (соответственно $\mathcal{L}_1$, соответственно $\mathcal{L}_0$) обозначим инвариантное подпространство, отвечающее части спектра матрицы Λ, которая лежит вне замкнутого единичного круга (соответственно на единичной окружности, соответственно в начале координат). Рассмотрим вопрос о существовании локально инвариантных относительно $\mathcal{F}$ многообразий с касательными пространствами $\mathcal{L}_+$, $\mathcal{L}_-$, $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_0$.

Пусть $\mathcal{M}$ инвариантный относительно $\mathcal{F}$ росток C^∞-многообразия, касательное пространство к которому в начале координат равно $\mathcal{L}$. Это означает, что существует такое C^∞- отображение $G(x)=\Lambda(x)+g(x)$, $g(0)=g'(0)=0$, и такой C^∞- диффеоморфизм $\Phi(x)=x+\varphi(x)$, $\varphi(0)=\varphi'(0)=0$, что

$$\mathcal{F}(\Phi(x))=\Phi(G(x)), \qquad \mathcal{P}_2 G(\mathcal{P}_1 x)=0 \tag{2}$$

в некоторой окрестности начала координат. Здесь $\mathcal{P}_1$ -ортопроектор на $\mathcal{L}$, $\mathcal{P}_2$ - ортопроектор на ортогональное дополнение к $\mathcal{L}$. Из условий (2) получаем уравнение для $\varphi(x)$ и $g(x)$:

$$\varphi(\Lambda x+g(x))=\Lambda\varphi(x)+f(x+\varphi(x))-g(x).$$

Сужая это уравнение на подпространство $\mathcal{L}$, получаем:

$$\begin{cases}\varphi_1(\Lambda_1 x_1+g_1(x_1))=\Lambda_1\varphi_1(x_1)+f_1(x_1+\varphi_1(x_1),\varphi_2(x_1))-g_1(x_1),\\ \varphi_2(\Lambda_1 x_1+g_1(x_1))=\Lambda_2\varphi_2(x_1)+f_2(x_1+\varphi_1(x_1),\varphi_2(x_1)).\end{cases} \tag{3}$$

Здесь $x_i=\mathcal{P}_i x$, $\Lambda_i=\mathcal{P}_i\Lambda$, $i=1,2$.

Таким образом, для существования локально инвариантного относительно $\mathcal{F}$ ростка C^∞- многообразия $\mathcal{M}$ с касательным пространством $\mathcal{L}$ необходимо и достаточно, чтобы система (3) имела локальное C^∞- решение.

Положим в системе (3) $\varphi_1(x_1)=0$. Это приводит к уравнению

$$\varphi_2(\Lambda_1 x_1+f_1(x_1,\varphi_2(x_1)))=\Lambda_2\varphi_2(x_1)+f_2(x_1,\varphi_2(x_1)), \tag{4}$$

вообще говоря, не эквивалентному системе (3). Но локальная C^∞- разрешимость уравнения (4) является достаточной для существования локально инвариантного относительно $\mathcal{F}$ ростка C^∞- многообразия с касательным пространством $\mathcal{L}$.

Таким образом, устанавливая с помощью теоремы I существование локального C^∞- решения уравнения (4), можно получить достаточные условия существования локально инвариантных относительно $\mathcal{F}$ C^∞-многообразий с касательными пространствами $\mathcal{L}_+$, $\mathcal{L}_-$, $\mathcal{L}_1$, и $\mathcal{L}_0$.

Например, при $\dim\mathcal{L}_-=\dim\mathcal{L}_0=0$ справедлива

Т Е О Р Е М А 3. Пусть $\mathcal{F}:(R^n,0)\to(R^n,0)$ - росток C^∞ -отображения вида

$$\mathcal{F}(x)=\begin{cases}\Lambda_+x_++f_+(x_+,x_1)\\ \Lambda_1x_1+f_1(x_+,x_1)\end{cases},$$

где Λ_+ - сужение матрицы Λ на подпространство $\mathcal{L}_+$, а Λ_1 - сужение матрицы Λ на подпространство $\mathcal{L}_1$, и пусть, кроме того, существуют такие константы $C>0$, $\kappa>0$, что выполняются оценки

$$\|\Lambda_1x_1+f_1(0,x_1)\|\leqslant\|x_1\|(1-C\|x_1\|^\kappa), \qquad f_1(0,x_1)=O(x_1^{\kappa+1}).$$

Тогда существует C^∞ - замена координат, приводящая $\mathcal{F}$ к такому отображению, относительно которого подпространства $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_1$ локально инвариантны.

В заключение автор выражает благодарность Г.Р. Белицкому за руководство работой.

I. A.Smajdor,W.Smajdor. On the existence and uniqueness of analytic solutions of a linear functional equation, Math. Z., 98, N3, 235-242, 1967.

2. W.Smajdor. Local analytic solutions of the functional equation in multidimensional spaces, Aequat. Math., I, NI-2, 20-36, 1968.

3. Г.Р. Белицкий. Функциональные уравнения и локальная сопряженность отображений класса C^∞, Математический сборник, I33, № 8, 1973, 582-596.

4. B.Choczewski. Przegląd osiągnieć krakowskiej szkoły równań funkcyjnych, Zesz. nauk. Akad. górn.-huth., N 207, I5-29, 1969.

CONDITIONS FOR EXISTENCE OF LOCAL C^∞-SOLUTION FOR A CERTAIN CLASS OF FUNCTIONAL EQUATIONS

L.P.Kuchko

The conditions have been given for the existence of local C^∞-solution $\varphi:(R^n,0)\to(R^r,0)$ of a functional equation of the type:

$$\varphi(x) = \mathcal{H}(x, \varphi(G_1(x,\varphi(x))), \dots, \varphi(G_m(x,\varphi(x)))),$$

where $\mathcal{H}, G_i$ $(i=1,2,\dots,m)$ - C^∞-mappings. As a sequel the author obtains several results similar to the Hadamard-Perron theorem on invariant manifolds of a germ of the C^∞-mapping F when the linear approximation has spectrum points on the unit circumference.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1974 выпуск У

О ЛОКАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ

краткое сообщение

В.Я. Голодец

I. В [I] исследовалась проблема возвращения системы к равновесию. Для C^* - алгебры $\mathfrak{A}$ наблюдаемых системы рассматривались две однопараметрические группы σ_t и σ_t^P $(-\infty<t<\infty)$ автоморфизмов $\mathfrak{A}$, определяющие невозмущенную и локально возмущенную динамики системы. По аналогии с теорией рассеяния были приведены достаточные условия для существования эпиморфизмов $\gamma_\pm$ алгебры $\mathfrak{A}$, аналогов волновых операторов, сплетающих невозмущенную σ_t и возмущенную σ_t^P динамики, а также изучалось асимптотическое поведение состояний.

В настоящей работе рассмотрена C^* - алгебра $\mathfrak{A}$, являющаяся асимптотически абелевой по отношению к σ_t, на которой задано состояние ω, удовлетворяющее условиям КМШ относительно σ_t^P. Один из основных результатов статьи состоит в следующем. Если существуют эпиморфизмы $\gamma_\pm$ алгебры $\mathfrak{A}$ (не обязательно обратимые), сплетающие σ_t и σ_t^P, т.е. $\gamma_\pm\sigma_t=\sigma_t^P\gamma_\pm$, то $\gamma_\pm$ можно расширить до автоморфизмов неймановской алгебры $M=\pi_\omega(\mathfrak{A})''$, где π_ω - представление $\mathfrak{A}$, построенное по состоянию ω согласно конструкции ГНС. Кроме того, мы докажем, что $\omega_+=\omega_-$, где $\omega_\pm(x)=\lim\limits_{t\to\pm\infty}\omega(\sigma_t(x))$, а также $\omega(x)=\lim\limits_{|t|\to\infty}\omega_\pm(\sigma_t^P(x))$ для $x\in\mathfrak{A}$.

2. Напомним некоторые определения и результаты работы [I]. $\mathfrak{A}$ - C^*-алгебра с единицей, $\sigma_t(-\infty<t<\infty)$ - сильно непрерывная однопараметрическая группа автоморфизмов $\mathfrak{A}$, т.е. $\|\sigma_t(A)-A\|\to 0$ для $A\in\mathfrak{A}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I [I]. Для заданной пары $(\mathfrak{A},\sigma_t)$ и $P=P^*\in\mathfrak{A}$ возмущенная эволюция σ_t^P определяется как сильно непрерывная однопараметрическая группа автоморфизмов $\mathfrak{A}$, задаваемая равномерно сходящимся рядом

$$\sigma_t^P(A)=\sigma_t(A)+\sum_{n\geq 1} i^n\int\limits_{0\leq S_1\leq\ldots\leq S_n<t} ds_1\ldots ds_n[\sigma_{s_1}(P),[\ldots[\sigma_{s_n}(P),\sigma_t(A)]]]$$

и

$$\sigma_t^P(A)=\sigma_t(A)+\sum_{n\geq 1} i^n\int\limits_{t\leq s_n\leq\ldots\leq s_1\leq 0} ds_1\ldots ds_n[\sigma_{s_1}(P),[\ldots[\sigma_{s_n}(P),\sigma_t(A)]]]$$

для всех $A\in\mathfrak{A}$ при $t\geq 0$ и $t\leq 0$ соответственно. Из этих рядов легко подсчитать, что

$$\frac{d}{dt}\sigma_t^P\sigma_{-t}(A)=i\sigma_t^P\sigma_{-t}([\sigma_t(P),A]),$$

откуда легко выводится соотношение

$$\sigma_{t_2}^P\sigma_{-t_2}(A)-\sigma_{t_1}^P\sigma_{-t_1}(A)=i\int\limits_{t_1}^{t_2}ds\,\sigma_s^P\sigma_{-s}([\sigma_s(P),A]). \qquad (I)$$

Напомним, что C^* - алгебра $\mathfrak{A}$ называется асимптотически абелевой относительно $\sigma_t(-\infty<t<\infty)$, если

$$\|[A,\sigma_t(B)]\|\underset{|t|\to\infty}{\longrightarrow}0\,,\quad A,B\in\mathfrak{A}.$$

О П Р Е Д Е Л Е Н И Е 2 [I]. Пара $(\mathfrak{A}, \sigma_t)$ называется асимптотически интегрируемой по отношению к $P \in \mathfrak{A}$, если функция

$$t \in R \to \| [P, \sigma_t(A)] \| \in \mathbb{R},$$

интегрируема на бесконечности для всех A из равномерно плотного подмножества $\hat{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{A}$

Т Е О Р Е М А 3 [I]. Пусть $P = P^* \in \mathfrak{A}$ и $(\mathfrak{A}, \sigma_t)$ – асимптотически интегрируема по отношению к P. Тогда пределы

$$\gamma_\pm(A) = \lim_{t \to \pm\infty} \sigma_{-t}^P \sigma_t(A), \quad A \in \mathfrak{A} \tag{2}$$

существуют относительно равномерной топологии в $\mathfrak{A}$ и определяет эпиморфизмы $\mathfrak{A}$, обладающие сплетающими свойствами

$$\gamma_\pm \sigma_t = \sigma_t^P \gamma_\pm \qquad (-\infty < t < \infty). \tag{3}$$

Действительно, согласно (I)

$$\| \sigma_{-t_2}^P \sigma_{t_2}(A) - \sigma_{-t_1}^P \sigma_{t_1}(A) \| \leqslant \int_{t_1}^{t_2} ds \, \| [P, \sigma_t(A)] \|.$$

Отсюда и из асимптотической интегрируемости следует существование эпиморфизмов $\gamma_\pm$ алгебры $\mathfrak{A}$, сохраняющих алгебраические операции, но необязательно обратимых.

Пусть ω – состояния на $\mathfrak{A}$, положим

$$\omega_{\gamma_\pm}(A) = \omega(\gamma_\pm(A)), \quad A \in \mathfrak{A}.$$

Тогда $\omega_{\gamma_\pm}$ – состояния на $\mathfrak{A}$, причем, если $\omega - \sigma_t^P$ – инвариантно, то

$$\omega_{\gamma_\pm}(A) = \lim_{t \to \pm\infty} \omega(\sigma_t(A)), \quad A \in \mathfrak{A} \tag{4}$$

и $\omega_{\gamma_\pm}$ – σ_t – инвариантное состояние.

3. Перейдем к изложению наших результатов.

Л Е М М А 4. Пусть ρ – КМШ – состояние на C^* – алгебре $\mathfrak{A}$ относительно однопараметрической группы автоморфизмов $\sigma_t (-\infty < t < \infty)$. Предположим, что $\mathfrak{A}$ является асимптотически абелевой по отношению к σ_t $(-\infty < t < \infty)$. Через π_ρ обозначим представление $\mathfrak{A}$, построенное согласно конструкции ГНС I) с помощью ρ и положим $M = \pi_\rho(A)''$. Пусть $\mathfrak{Z}$ – центр M, а ω – точное нормальное (т.н.) состояние на M такое, что сужение ω на $\mathfrak{Z}$, т.е. $\omega|\mathfrak{Z}$, совпадает с $\rho|\mathfrak{Z}$ $(\omega|\mathfrak{Z} = \rho|\mathfrak{Z})$. Тогда для $A \in \mathfrak{A}$

$$\lim_{|t| \to \infty} \omega[\pi_\rho(\sigma_t(A))] = \rho(A). \tag{5}$$

Доказательство леммы основывается на следующих фактах: I) $\sup_t \| \pi_\rho(\sigma_t(A)) \| \leqslant \|A\|$ $(A \in \mathfrak{A})$; 2) слабые предельные точки $\{\pi_\rho(\sigma_t(A))\}$ при $t \to \pm\infty$ принадлежат $\mathfrak{Z}$ в силу асимптотической абелевости $\mathfrak{A}$ относительно σ_t.

Л Е М М А 5. Пусть M и $\mathfrak{Z}$ – такие же, как и в лемме 4, ω_i $(i=1,2)$ – т.н. состояния на M, σ_t^i $(-\infty < t < \infty)$ – отвечающие ω_i группы модулярных автоморфизмов (ГМА) алгебры M [4]. Тогда существует т.н. состояние ω_3 на M вида $\omega_3(A) = \omega_2(z^* A z)/\omega_2(z^* z)$, где z присоединен к $\mathfrak{Z}$, удовлетворяющее условиям КМШ относительно σ_t^2 $(-\infty < t < \infty)$ и $\omega_1|\mathfrak{Z} = \omega_3|\mathfrak{Z}$.

Лемма – следствие того факта, что элементы центра $\mathfrak{Z}$ неподвижны относительно любой ГМА $\sigma_t (-\infty < t < \infty)$ неймановской алгебры M [4].

Сформулируем теперь одну из наших основных теорем.

I) ГНС – Гельфанд, Наймарк, Сигал.

ТЕОРЕМА 6. Пусть для $(\mathfrak{A},\sigma_t)$ и $P=P^*\in\mathfrak{A}$ выполнены предположения теоремы 3, $\mathfrak{A}$ – асимптотически абелева относительно σ_t $(-\infty<t<\infty)$, а ω – КМШ состояние на $\mathfrak{A}$ по отношению к σ_t^P $(-\infty<t<\infty)$. Тогда (с . (4))

$$\omega_{\gamma_+} = \omega_{\gamma_-} .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть π_ω – представление $\mathfrak{A}$, построенное с помощью ω согласно конструкции ГНС, а $M=\pi_\omega(\mathfrak{A})''$. Через H обозначим пространство представления π_ω. Согласно [4] ω расширяется до т.н. состояния на M, представимого в виде $\omega(x)=(x\eta,\eta)$, где η – единичный вектор из H, являющийся циклическим отделяющим для M в H, а $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в H. Пусть Δ_ω – модулярный оператор (МО) для M, отвечающий состоянию ω [4]. Тогда при $A\in\mathfrak{A}$

$$\pi_\omega(\sigma_t^P(A)) = \Delta_\omega^{it}\pi_\omega(A)\Delta_\omega^{-it} \qquad (-\infty<t<\infty).$$

и σ_t^P расширяется до ГМА алгебры $M=\pi_\omega(\mathfrak{A})''$. Но тогда ввиду [2] группа σ_t $(-\infty<t<\infty)$ автоморфизмов $\mathfrak{A}$, которую можно рассматривать как возмущенную по отношению к σ_t^P, расширяется до ГМА алгебры M и существует т.н. состояние $\rho(x)=(x\xi,\xi)$ $(x\in M)$ на M, где ξ – циклический отделяющий вектор для M в H, которое является КМШ – состоянием для σ_t $(-\infty<t<\infty)$. В силу леммы 5 можно считать, что $\rho/\mathfrak{Z}=\omega/\mathfrak{Z}$, где $\mathfrak{Z}=M\cap M'$. Но тогда согласно лемме 4 $\lim_{|t|\to\infty}\omega(\sigma_t(A))=\rho(A)$ для $A\in\mathfrak{A}$, или (см. (4))

$$(\pi_\omega[\gamma_\pm(A)]\eta,\eta) = \omega_{\gamma_\pm}(A) = \rho(A) = (\pi_\omega(A)\xi,\xi). \tag{6}$$

Теорема доказана.

Сформулируем еще один наш результат.

ТЕОРЕМА 7. Пусть выполнены предположения теоремы 6, тогда эпиморфизмы $\gamma_\pm$ алгебры $\mathfrak{A}$ расширяются до автоморфизмов $M=\pi_\omega(\mathfrak{A})''$, где π_ω – представление $\mathfrak{A}$, построенное по состоянию ω. Более того, $\gamma_\pm$, как автоморфизмы M, связаны соотношением $\gamma_+=\sigma\gamma_-$, где σ – автоморфизм M, сохраняющий расширение состояния ω на M.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, приведем несколько вспомогательных фактов.

ЗАМЕЧАНИЕ 8 (i). В силу соображений, приведенных в начале доказательства теоремы 6, удобно отождествить $\mathfrak{A}$ с подалгеброй $\pi_\omega(\mathfrak{A})$ алгебры $M=\pi_\omega(\mathfrak{A})''$. Тогда, вчастности, соотношение (6) можно переписать в виде (для $A\in\mathfrak{A}$)

$$(\gamma_\pm(A)\eta,\eta) = \omega_{\gamma_\pm}(A) = \rho(A) = (A\xi,\xi). \tag{6'}$$

В дальнейшем будем предполагать, что это отождествление выполнено (ii). Пусть $f(t)$ – вещественная функция, преобразование Фурье $\hat f$ которой принадлежит пространству $\mathcal{D}$. Если $A\in\mathfrak{A}$, то $\int f(t)\sigma_t(A)dt$ существует относительно равномерной топологии и принадлежит $\mathfrak{A}$. Так как $\int f(t)\sigma_t(A)\xi dt=\int f(t)\Delta_\rho^{it}A\xi dt = \hat f(\ln\Delta_\rho)A\xi$, где $\sigma_t(A)=\Delta_\rho^{it}A\Delta_\rho^{-it}$ и $\Delta_\rho\xi=\xi$ [4], то для всякого комплексного числа α вектор $\hat f(\ln\Delta_\rho)A\xi$ принадлежит области определения оператора Δ^α, и, более того, $\Delta^\alpha\hat f(\ln\Delta_\rho)A\xi\in M\xi$. Назовем элемент $\int f(t)\sigma_t(A)dt$ из $\mathfrak{A}$ аналитическим по отношению к σ_t $(-\infty<t<\infty)$. Нетрудно показать, что множество аналитических элементов плотно в M относительно слабой топологии [4]. Далее, если $\int f(t)\sigma_t(A)dt$ – аналитический элемент из $\mathfrak{A}$ по отношению к σ_t, то $\gamma_\pm[\int f(t)\sigma_t(A)dt]=\int f(t)\sigma_t^P\gamma_\pm(A)dt$ – аналитический элемент по отношению к σ_t^P (iii). Если A – аналитический элемент из $\mathfrak{A}$ по отношению к $\sigma_{t-i\alpha}$, то согласно [4] $A\xi=SA^*\xi=J_\rho\Delta_\rho^{1/2}A^*\xi=J_\rho\sigma_{-i/2}(A^*)\xi$, где $\sigma_\alpha(A)=\Delta_\rho^{i\alpha}A\Delta_\rho^{-i\alpha}$, а J_ρ – антиунитарный оператор в H (см. [4]), обладающий свойствами: $j_\rho^2 = I$, $j_\rho \Delta_\rho j_\rho = \Delta_\rho^{-1}, j_\rho M j_\rho = M'$. Таким образом, поскольку $\sigma_{-i/2}(A^*) \in M$, то $\pi'_\xi(A) = j_\rho \sigma_{-i/2}(A^*) j_\rho \in M'$ и $A\xi = \pi'_\xi(A)\xi$.

Л Е М М А 9. Пусть выполнены предположения теоремы 7, тогда существует отображение $\theta_\pm$ из M' в M', обладающее следующими свойствами: I) $\theta_\pm$ - линейно; 2) если $a \in M'$, то $\theta_\pm(a^*) = \theta_\pm(a)^*$; 3) $\theta_\pm$ - нормально; 4) $\theta_\pm$ - отображение на M'; 5) если $a, b \in M'$, то $\theta_\pm(ab) = \theta_\pm(a)\theta_\pm(b)$; 6) $\theta_\pm$ - * - автоморфизм M'; 7) $\sigma_t \theta_\pm = \theta_\pm \sigma_t^\rho$ $(-\infty < t < \infty)$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Пусть $b' \in M'_+$, где M'_+ - множество всех позитивных элементов M', тогда $\omega_\gamma^{b'}(a) = (\gamma_\pm(a) b' \eta, \eta)$ - позитивный функционал на $\mathfrak{A}$ $(a \in \mathfrak{A})$, подчиненный $\omega_{\gamma_\pm}(a) = (\gamma_\pm(a)\eta, \eta)^{\gamma_\pm}$ (см. [5]). Но тогда $\omega_\gamma^{b'}$ подчинен ρ (см. (6')) и, следовательно, существует элемент $\theta(b') \in M'_+$, для которого

$$(\gamma(a) b' \eta, \eta) = (a \theta(b') \xi, \xi) \qquad (a \in \mathfrak{A}) \ [5] \quad . \tag{7}$$

Отсюда следует, что θ обладает свойствами I) и 2), Свойство 3) вытекает из (7) при $a = I$, если заметить, что $(b'\eta, \eta)$ и $(b'\xi, \xi)$ - нормальные функционалы на M'. Пусть теперь $a, b \in \mathfrak{A}$, а $c' \in M'$, тогда

$$(\gamma(ab) c' \eta, \eta) = (ab\, \theta(c') \xi, \xi) . \tag{8}$$

Предположим, что b - аналитический элемент из $\mathfrak{A}$ относительно σ_t (см. замечание 8 *(ii)*). Тогда $\gamma(b)$ - также аналитический элемент из $\mathfrak{A}$ относительно σ_t^ρ и согласно замечанию 8 *(iii)*

$$b\xi = \pi'_\xi(b)\xi \quad , \qquad \pi'_\xi(b) \in M' ; \tag{9}$$

$$\gamma(b)\eta = \pi'_\eta(\gamma(b))\eta \ , \qquad \pi'_\eta(\gamma(b)) \in M'. \tag{9'}$$

Так как $\gamma(ab) = \gamma(a)\gamma(b)$, то с учетом (9) и (9') мы получим из (7) следующее соотношение

$$(a\theta[c'\pi'_\eta(\gamma(b))]\xi, \xi) = (a\theta(c')\pi'_\xi(b)\xi, \xi)$$

или ввиду произвольности $a \in \mathfrak{A}$

$$\theta[c'\pi'_\eta(\gamma(b))] = \theta(c')\pi'_\xi(b). \tag{I0}$$

Если $c' = I$, то

$$\theta(\pi'_\eta(\gamma(b))) = \pi'_\xi(b). \tag{II}$$

Так как операторы вида $\pi'_\xi(b)$, где b - аналитический элемент из $\mathfrak{A}$, плотны в M', то из (II) в силу нормальности θ вытекает справедливость 4). Если мы подставим (II) в (I0) и учтем 3), то получим 5). Пусть теперь $\theta(b') = 0$ $(b' \in M')$, тогда $\theta(b'^*) = \theta(b')^* = 0$ и $\theta(b'^* b') = 0$. Следовательно, $(b'^* b' \eta, \eta) = (\theta(b'^* b')\xi, \xi) = 0$ и $b'^* b' = 0$ благодаря точности $(x'\eta, \eta)$ на M'. Таким образом, θ - * - автоморфизм M'. Наконец, из (3) и (7) находим, что

$$(\sigma_t(a)\theta(b')\xi, \xi) = (a\theta(\sigma_{-t}^\rho(b'))\xi, \xi).$$

Отсюда ввиду произвольности $a \in \mathfrak{A}$ и соотношения $\Delta_\rho \xi = \xi$ устанавливаем 7). лемма доказана.

Закончим доказательство теоремы 7. Используя свойство автоморфизма $\theta_\pm$ и повторяя аргументы доказательства леммы 9 применительно к $\gamma_\pm$, можно показать, что расширяется до * -автоморфизма неймановской алгебры M $(\mathfrak{A} \subset M)$. Доказательство теоремы 7 закончено.

С помощью теоремы 7 можно доказать следующий результат.

ТЕОРЕМА 8. Если выполнены предположения теоремы 6, то для $x \in \mathfrak{U}$

$$\lim_{|t| \to \infty} \omega_{\gamma_\pm} (\sigma_t^{\rho}(x)) = \omega(x).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. D.W.Robinson. Comm.Math.Phys., 31, 171-189, 1973.
2. H.Araki. Relative hamiltonian for faithful normal states of a von Neumann algebra (   ), RIMS, Kyoto Univ., 1972.
3. R.Haag, N.M.Hugenholtz, M.Winnink. Comm.Math.Phys., 5, 215-236, 1967.
4. M.Takesaki. Tomita's theory of modular hilbert algebras and its appl., Lecture Notes in Math., 128, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1970.
5. М.А. Наймарк. Нормированные кольца, "Наука", М., 1969.

УДК 517.53.

О РОСТЕ ЦЕЛЫХ ХРЕБТОВЫХ ФУНКЦИЙ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ НУЛЯМИ. А.А. Гольдберг, И.В.Островский. Математическая физика и функциональный анализ, вып. У, 1974, стр.3-10.

Пусть $\varphi(z)$ - целая функция, обладающая свойством хребта: $|\varphi(z)| \leqslant |\varphi(i Im z)|$. Если $\varphi(z)$ имеет конечный порядок, а все ее нули действительны, то $\varphi(z)$ можно представить в виде

$$\varphi(z) = ce^{-\gamma z^2 + i\beta z} \prod \left(1 - \frac{z^2}{a_k^2}\right),$$

где c, γ, β и a_k - постоянные, $\gamma \geqslant 0,\ Im\beta = 0,\ a_k > 0,\ \sum a_k^{-2} < \infty$.

Библиографических ссылок 8.

УДК 517.53

ДИСКРЕТНЫЕ МНОЖЕСТВА ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА, ОГРАНИЧЕННЫХ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЛОСКОСТИ. Л.И. Ронкин. Математическая физика и функциональный анализ, вып. У, 1974, стр. 11-26.

Пусть E - дискретное множество точек $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $h_E = \frac{1}{2} \times \inf\limits_{x' \in E, x'' \in E} \max |x_j' - x_j''|$. Доказано, что если целая функция $f(z)$ экспоненциального типа не выше $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ ограничена на вещественной плоскости и обращается в точках $x \in E$ в ноль с кратностью не меньшей $\gamma(x)$, то имеет место импликация

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \left(\frac{1}{2r}\right)^n \sum_{\substack{x \in E \\ |x_1| < r, \dots, |x_n| < r}} \gamma_f(x) < a h_E^{n-1} (\sigma_1 + \dots + \sigma_n) \Rightarrow f(z) = 0.$$

Для константы a получены оценки, в том числе точные для некоторого класса множеств E. Как следствие теорем единственности получены теоремы о полноте систем функций $x^k e^{i\langle\lambda, x\rangle}$.

Библиографических ссылок 7.

УДК 519.21

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫХ ЗАКОНОВ. Г.П. Чистяков. Математическая физика и функциональный анализ, вып. У, 1974, стр. 27-50.

В работе изучается устойчивость разложений в метрике Леви одного класса безгранично делимых законов. Обозначим через $\mathcal{L}$ класс законов, введенный Ю.В. Линником. Закон $F \in \mathcal{L}$ если его характеристическая функция имеет вид:

$$\varphi(t; F) = \exp\left\{ i\beta t + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2} dG(x) \right., \qquad (1)$$

где $\Im m\beta = 0$, $G(x)$ - неубывающая функция с точками роста во множестве вида

$$\{\mu_{m1}\}_{m=-\infty}^{\infty} \cup \{\mu_{m2}\}_{m=-\infty}^{\infty}, \quad \mu_{m1} > 0, \quad \mu_{m2} < 0,$$

причем числа $\mu_{m+1,r} / \mu_{mr}$ $(m = 0, \pm 1, \dots;\ r = 1,2)$ - натуральные, отличные от единицы. И.В. Островский рассмотрел подкласс $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}$ законов, для которых в представлении (1)

$$\int_{|x| > y} dG(x) = O(e^{-My^2}),\ \exists M > 0.$$

Приведем следствие нашего основного результата.

ТЕОРЕМА. Пусть F является композицией законов F_1, F_2 и $\mathcal{L}(F, \mathcal{G}) < \varepsilon$, $0 < \varepsilon < e^{-\exp_3 e}$ ($\mathcal{L}(F, \mathcal{G})$ - расстояние в метрике Леви), где $\mathcal{G} \in \mathcal{L}_1$, причем функция $G(x)$, отвечающая закону $\mathcal{G}$ в представлении (1), не имеет точек роста в некоторой окрестности 0 за исключением точки 0. Тогда

$$\inf_{\tilde{\varphi}\in\mathcal{L}_1} \mathcal{L}(F_j, \tilde{\varphi}) < A\left\{\frac{\ln_4 \frac{1}{\varepsilon}}{(\ln_5 \frac{1}{\varepsilon})^{22}}\right\}^{-1/18}, \quad j=1,2,$$

где $A>0$ – постоянная, зависящая только от закона φ .

Библиографических ссылок 8.

УДК 519.21

ОБ α-КОМПОНЕНТАХ БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫХ ЗАКОНОВ. А.Е. Фрынтов. Математическая физика и функциональный анализ, вып. У, 1974, стр.51-63.

Ю.В. Линник поставил вопрос об описании класса I_0^{α} , состоящего из безгранично делимых законов, имеющих только безгранично делимые α-компоненты.

В работе получены достаточные условия принадлежности безгранично делимого закона с вполне конечной спектральной мерой Леви классу I_0^{α}. Эти условия отличаются по характеру от известных ранее тем, что носитель спектральной меры не предполагается счетным.

Библиографических ссылок 8.

УДК 513.832

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ РОСТКОВ ОТОБРАЖЕНИЙ КОНЕЧНОГО КЛАССА ГЛАДКОСТИ. Г.Р. Белицкий. Математическая физика и функциональный анализ, вып. У, 1974, стр.64-72.

Указаны условия эквивалентности в том или ином классе гладкости ростков C^k - отображений $F, G: (R^n, 0)\to(R^p, 0)$ при левой, правой и двусторонней заменах переменных.

Библиографических ссылок 3.

УДК 532.0

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ, ВСТРЕЧАЮЩЕЙСЯ В ПРИЛОЖЕНИЯХ . Г.В. Щербина. Математическая физика и функциональный анализ, вып. У, 1974, стр. 73-75.

Доказывается существование классического решения следующей краевой задачи

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \Psi(x,y,u), \qquad (I)$$

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} u(x,y)=0$$

в случае, когда $\Psi(x,y,u)\in C^1$, $\frac{\partial\Psi}{\partial u}\geq b>0$, $\lim_{x^2+y^2\to\infty}\Psi(x,y,0)=0$. Показывается, что если $\Psi\in C^{\alpha}$, классическое решение задачи (I), вообще говоря, не существует.

Библиографических ссылок 5.

УДК 539.3:534.I

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ НЕПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ НАГРУЗКАХ, БЛИЗКИХ К КРИТИЧЕСКИМ. В.И. Бабенко. Математическая физика и функциональный анализ, вып. У, 1974, стр. 76-91.

Исходя из уравнений теории оболочек Кирхгофа-Лява, асимптотическими методами М.И. Вишика - Л.А. Люстерника и Н.Н. Боголюбова - Ю.А. Митропольского изучается потеря устойчивости безмоментного равновесного состояния непологих, несимметричных, строго выпуклых, достаточно тонких анизотропных оболочек и их поведение в начальной послекритической стадии. Строятся асимптотические представления для деформаций. Получен критерий устойчивости оболочек. Рассмотрено влияние закрепления оболочки вдоль края на ее устойчивость.

Библиографических ссылок II.

УДК 517.946

АСИМПТОТИКА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В СРЕДЕ С БОЛЬШИМ КОЛИЧЕСТВОМ МЕЛКИХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ. В.Н. Фенченко. Математическая физика и функциональный анализ, вып. У, 1974, стр. 92-105.

Рассматривается электромагнитное поле в среде, содержащей большое число мелких диэлектрических включений. Показано, что в случае, когда число включений возрастает, а их суммарный объем $\tau^{(N)} \to 0$ поле $\vec{E}^{(N)}(x)$, $\vec{H}^{(N)}(x)$ может быть представлено в виде:

$$\begin{cases} \vec{E}^{(N)}(x) = \vec{E}^{(0)}(x) + \tau^{(N)}\vec{V}_E(x) + o(\tau^{(N)}), \\ \vec{H}^{(N)}(x) = \vec{H}^{(0)}(x) + \tau^{(N)}\vec{V}_H(x) + o(\tau^{(N)}), \end{cases}$$

где $\vec{E}^{(0)}(x)$, $\vec{H}^{(0)}(x)$ – поле в однородной среде, а для функций $\vec{V}_E(x)$, $\vec{V}_H(x)$ дано явное выражение.

Из полученного представления следует, что среда с большим числом диэлектрических включений может рассматриваться как сплошная с иными параметрами.

Библиографических ссылок 3.

УДК 519.4:517:513:88

МОДУЛЯРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И МНОЖЕСТВО АСИМПТОТИЧЕСКИХ ОТНОШЕНИЙ. В.Я. Голодец. Математическая физика и функциональный анализ, вып. У, 1974, стр. 106-122.

В работе изучается множество асимптотических отношений, алгебраический инвариант для алгебр фон Неймана, введенный ранее Х. Араки и Е. Дж. Вудсом, с помощью модулярных операторов.

Библиографических ссылок 16.

УДК 517.94

О ВОЗМУЩЕНИИ СПЕКТРА САМОСОПРЯЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ МАТРИЧНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ. В.И. Храбустовский. Математическая физика и функциональный анализ, вып. У, 1974, стр. 123-140.

Получен достаточный признак конечности числа дискретных уровней, вносимых возмущением $\eta(t) - \eta^*(t)$ в каждую из спектральных лакун самосопряженных дифференциальных операторов L_{2n}, L_{2n+1} (соответственно порядка $2n$ и $2n+1$) с периодическими (периода 1) матричными коэффициентами, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}^2_m(-\infty,\infty)$ m-компонентных вектор-функций. Кроме того, для случая, когда оператор L_{2n} полуограничен, получены достаточные условия конечности числа дискретных уровней, вносимых возмущениями всех коэффициентов оператора L_{2n} в лакуну $(-\infty, \lambda_0)$, где λ_0 – нижняя грань оператора L_{2n}.

Библиографических ссылок 22.

УДК 517.4

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА СО СЛУЧАЙНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ. Л.А. Пастур. Математическая физика и функциональный анализ, вып. У, 1974, стр. 141-143.

В работе найдена асимптотика функции распределения собственных значений многомерного уравнения Шредингера со случайным метрически транзитивным потенциалом, являющимся гауссовским полем или полем вида

$$\sum_j \varphi(x - x_j),$$

где $\varphi(x)$ – интегрируемая функция, такая, что $\varphi(0) < 0$, а точки x_j распределены в пространстве согласно закону Пуассона.

Библиографических ссылок 6.

УДК:517.55

О СУЩЕСТВОВАНИИ ГОЛОМОРФНОЙ В КОНУСЕ ФУНКЦИИ С ЗАДАННЫМ ИНДИКАТОРОМ ПРИ УТОЧНЕННОМ ПОРЯДКЕ. П.З. Агранович. Математическая физика и функциональный анализ, вып. У, 1974, стр.144-145.

Пусть $C_T=\{z:\frac{z}{|z|}\in T\}$, где T - открытое множество на единичной сфере в пространстве $\mathbb{C}^n$. Предполагаем, что конус псевдовыпуклый и каждое его непустое сечение комплексно одномерной плоскостью, проходящей через начало координат, является углом раствора меньше чем $\min(\frac{\pi}{\rho}, 2\pi)$.

Нами получен следующий результат.

ТЕОРЕМА. Для любой позитивно однородной порядка ρ плюрисубгармонической в конусе C_T функции $\varphi(z)$ и любого сильного уточненного порядка $\rho(r)$ ($\rho(r)\to\rho$ при $r\to\infty$) существует голоморфная в C_T функция $f(z)$ порядка $\rho(r)$, индикатор которой совпадает с $\varphi(z)$.

Библиографических ссылок 7.

УДК 517.56

ОБ ОДНОМ УТОЧНЕНИИ ОЦЕНКИ СУММЫ ДЕФЕКТОВ ДЛЯ ГОЛОМОРФНЫХ КРИВЫХ НИЖНЕГО ПОРЯДКА $\lambda\le\frac{1}{2}$. С.В.Львова. Математическая физика и функциональный анализ, вып. У,1974, стр. 146.

Для голоморфных кривых ранга K нижнего порядка $\lambda\le\frac{1}{2}$ получена оценка

$$\sum_{A^K}\delta(A^K)\le C_n^K-1,$$

где A^K - система K-мерных линейных подпространств в общем положении.

Эта оценка уточняет ранее известную оценку (**Ahlfors L.V. "The theory of meromorphis curves ",Acta Soc.Sci.Fenn.,Ser.A,3,N°4,1941.**).

Библиографических ссылок 4.

УДК 517.948 + 512.13

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЛОКАЛЬНОГО C^∞-РЕШЕНИЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. Л.П. Кучко. Математическая физика и функциональный анализ, вып. У, 1974, стр. 147-150.

В работе указаны условия существования локального C^∞- решения $\varphi:(R^n,0)\to(R^p,0)$ функционального уравнения вида

$$\varphi(x)=\mathcal{H}(x,\varphi(G_1(x,\varphi(x))),\dots,\varphi(G_m(x,\varphi(x)))),$$

где $\mathcal{H}, G_i$ $(i=1,2,\dots,m)$- C^∞-отображения.

В качестве следствия приводятся результаты типа теоремы Адамара-Перрона об инвариантных многообразиях ростка C^∞-отображения $\mathcal{F}$ в "критической" ситуации - при наличии у линейного приближения $\mathcal{F}$ точек спектра на единичной окружности.

Библиографических ссылок 4.

УДК 519.4:517:513.88

ЛОКАЛЬНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ. В.Я. Голодец. Математическая физика и функциональный анализ, вып. У, 1974, стр. 151-155.

Для C^*- алгебры $\mathfrak{A}$ наблюдаемых рассматриваются две однопараметрические группы σ_t и σ_t^P автоморфизмов, определяющие невозмущенную и локально возмущенную динамики системы. Если ω- КМШ -состояние для σ_t^P , а $\mathfrak{A}$ - асимптотически абелева для σ_t и существуют эпиморфизмы (необязательно обратимые) алгебры $\mathfrak{A}$, сплетающие σ_t и σ_t^P , то $\gamma_\pm$ расширяются до автоморфизмов алгебры Неймана $M=\pi_\omega(\mathfrak{A})''$, где π_ω - представление $\mathfrak{A}$, построенное по состоянию ω .