АКАДЕМИЯ НАУК УССР

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Выпуск 1У

Харьков - 1973

БЦ 20386, подписано к печати 23/X-1973, физ. печ. листов 10,0,
усл. печ. листов 10,0. Заказ 2, тираж 500, Цена 1 руб. 00 коп.

Ротапринт ФТИНТ АН УССР, Харьков, 86, пр. Ленина, 47.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1 9 7 3 выпуск IУ

ОПИСАНИЕ КЛАССА I_0 В ОДНОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ ПОЛУГРУППЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР

И.В. Островский

Введение

Обозначим через $\mathfrak{S}$ совокупность вероятностных мер на полуоси $[0,\infty)$. Введем на $\mathfrak{S}$ бинарную операцию $\circ$, определяя меру $\sigma_1 \circ \sigma_2 \in \mathfrak{S}$ $(\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S})$ как линейный функционал в пространстве ограниченных непрерывных функций $f(x)$ на $[0,\infty)$, действующий согласно формуле

$$\int_0^\infty f(x)(\sigma_1 \circ \sigma_2)(dx) = \int_0^\infty\int_0^\infty \left\{ \int_{-1}^1 f(\sqrt{x^2+y^2+2xy\lambda})\, p_n(\lambda)\, d\lambda \right\} \sigma_1(dx)\sigma_2(dy), \tag{1}$$

где

$$p_n(\lambda) = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left\{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{\pi}\right\}^{-1}(1-\lambda^2)^{\frac{n-3}{2}}, \quad n>1. \tag{2}$$

Заметим, что операция $\circ$ зависит от выбора числа $n>1$, хотя это и не отражено в ее обозначении.

Операция $\circ$ была введена Дж.Кингменом [1] в связи с изучением случайного блуждания со сферической симметрией. Позднее она рассматривалась К.Урбаником [2] в качестве одной из возможных реализаций аксиоматически определенной им операции "обобщенной свертки".

Очевидно, операция $\circ$ коммутативна; Дж.Кингмен [1] показал, что она ассоциативна и, таким образом, превращает совокупность $\mathfrak{S}$ в коммутативную полугруппу $(\mathfrak{S}, \circ)$. Мера $\varkappa_0 \in \mathfrak{S}$, сосредоточенная в одной точке $x=0$, является в этой полугруппе единицей.

При целом $n \geqslant 2$ полугруппа $(\mathfrak{S}, \circ)$ допускает простое вероятностное истолкование. Обозначим через $\mathcal{F}_n$ совокупность вероятностных мер в R^n, инвариантных относительно поворота вокруг начала координат. Совокупность $\mathcal{F}_n$ является полугруппой относительно операции обычной свертки. Нетрудно убедиться, что эта полугруппа изоморфна полугруппе $(\mathfrak{S}, \circ)$; изоморфизм устанавливается сферическим проектированием меры $P \in \mathcal{F}_n$ на луч $[0,\infty)$;

$$\sigma(E) = P(\{x : x \in R^n,\ |x| \in E\}), \quad E \subset [0,\infty). \tag{3}$$

Таким образом, операцию $\circ$ при целом $n \geqslant 2$ можно истолковать как сложение независимых n-мерных случайных векторов, распределенных сферически симметрично.

Будем говорить, что мера $\mathfrak{S}_1 \in \mathfrak{S}$ является делителем меры $\sigma \in \mathfrak{S}$, если существует мера $\sigma_2 \in \mathfrak{S}$ такая, что $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2$. Меру $\sigma \in \mathfrak{S}, \sigma \neq \varkappa_0$, будем называть простой, если из $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2$ следует, что одна из мер σ_1, σ_2 совпадает с $\varkappa_0$. Меру $\sigma \in \mathfrak{S}$ будем называть безгранично делимой (б.д.), если для любого $m = 2,3,\dots$ она представляется в виде $\sigma = \sigma_m^{m\circ} = \sigma_m \circ \sigma_m^{\circ} \dots \circ \sigma_m$ (m раз), где $\sigma_m \in \mathfrak{S}$.

Н.Бингхем [3] с помощью теории дельфийских" полугрупп Д.Кендалла [4], дополненной Р.Давидсоном [5], получил для полугрупп "с обобщенной сверткой" К.Урбаника теоремы о факторизации, являющиеся аналогами известных теорем А.Я.Хинчина ([6], гл. 111) о факторизации вероятностных законов на прямой. В применении к полугруппе $(\mathfrak{S}, \circ)$ эти теоремы формулируются так:

ТЕОРЕМА А. Всякая мера $\sigma \in \mathfrak{S}$, имеющая хотя бы один простой делитель, представляется в форме

$$\sigma = \sigma_0 \circ \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots ,$$

где σ_0 не имеет простых делителей, а $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ – простые меры в конечном или счетном числе.

ТЕОРЕМА Б. Всякая мера $\sigma \in \mathfrak{S}$, не имеющая простых делителей, является б.д.

В связи с этими теоремами возникает вопрос об описании класса мер, не имеющих простых делителей. Мы будем обозначать этот класс через $I_0(\mathfrak{S}, \circ)$. Как известно [6], соответствующий класс для полугруппы вероятностных мер на прямой с операцией обычной свертки принято обозначать через I_0. Описание этого класса до настоящего времени не известно. Однако класс $I_0(\mathfrak{S}, \circ)$ удается описать довольно просто. Этому описанию и посвящена настоящая работа. Основным результатом является следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Класс $I_0(\mathfrak{S}, \circ)$ состоит из распределений Рэлея

$$\rho_a(E) = \frac{2a^n}{\Gamma(n/2)} \int_E x^{n-1} exp(-a^2x^2)dx, \quad 0 < a \leqslant \infty \ (\rho_\infty = \varkappa_0). \tag{4}$$

Заметим, что распределения Рэлея играют в полугруппе $(\mathfrak{S}, \circ)$ роль, аналогичную роли законов Гаусса в полугруппе вероятностных мер с операцией обычной свертки. При целом n они связаны с n -мерными сферически симметричными законами Гаусса формулой (3). Из нашей теоремы непосредственно вытекает такое следствие.

СЛЕДСТВИЕ. В полугруппе $\mathcal{F}_n$, $n \geqslant 2$, с операцией обычной свертки законы Гаусса и только они не имеют простых делителей.

Здесь, конечно, представляет интерес только второе утверждение, поскольку первое содержится в известной теореме Крамера [7], стр. 136.

2. Вспомогательные результаты

Характеристической функцией (х.ф.) меры $\sigma \in \mathfrak{S}$ будем называть функцию

$$\Phi(t;\sigma) = \int_0^\infty \Omega_n(tx)\sigma(dx), \quad 0 \leqslant t < \infty, \tag{5}$$

где

$$\Omega_n(z) = \Gamma(n/2)(2/z)^{(n-2)/2} J_{(n-2)/2}(z) =$$

$$= 1 - \frac{z^2}{2\cdot n} + \frac{z^4}{2\cdot 4\cdot n(n+2)} - \frac{z^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot n(n+2)(n+4)} + \ldots$$

(J_α – функция Бесселя порядка α). Как показал Дж.Кингмен [1] , из $\Phi(t;\sigma_1)=\Phi(t;\sigma_2)$ следует $\sigma_1=\sigma_2$, а равенство $\sigma=\sigma_1\circ\sigma_2$ равносильно равенству $\Phi(t;\sigma)=\Phi(t;\sigma_1)\Phi(t;\sigma_2)$. Дж.Кингмен установил также, что общий вид х.ф.б.д. меры $\sigma\in\mathfrak{S}$ дается формулой

$$\Phi(t;\sigma) = \exp\left\{\int_0^\infty (\Omega_n(tx)-1)\frac{1+x^2}{x^2} G_\sigma(dx)\right\}, \tag{6}$$

где G_σ – вполне конечная мера на $[0,\infty)$, подынтегральное выражение определяется в точке $x=0$ по непрерывности. Мера G_σ в представлении (6) единственна. Заметим, что отсюда следует (ср. [8] , стр. 88) : если х.ф. некоторой меры $\sigma\in\mathfrak{S}$ представляется в форме (6) , где G_σ не мера, а заряд [1], принимающий и отрицательные значения, то σ не является б.д. мерой. Распределения Рэлея ρ_a являются б.д.; для них мера G_σ сосредоточена в одной точке $x=0$.

3. Принадлежность распределений Рэлея классу $I_0(\mathfrak{S},\circ)$

Пусть $\rho_a=\sigma_1\circ\sigma_2$, где $\sigma_1,\sigma_2\in\mathfrak{S}$. Тогда имеем $\Phi(t;\rho_a)=\Phi(t;\sigma_1)\Phi(t;\sigma_2)$. Но $\Phi(t;\rho_a)=\exp(-t^2/(4a^2))$. Легко видеть, что х.ф. $\Phi(t;\sigma_j)$, $j=1,2$, являются обычными х.ф. некоторых вероятностных мер на прямой, поскольку

$$\Phi(t;\sigma_j) = \int_0^\infty \Omega_n(tx)\sigma_j(dx), \quad \Omega_n(tx) = \int_{-1}^{1} e^{itx\lambda} p_n(\lambda)\,d\lambda,$$

где $p_n(\lambda)$ – вероятностная плотность (2). Так как произведение этих обычных х.ф. равно $\exp(-t^2/(4a^2))$, то по теореме Крамера [7] имеем $\Phi(t;\sigma_j) = \exp(-t^2/(4a_j^2))$, $a_j>0$, и, следовательно, σ_1 и σ_2 – тоже распределения Рэлея. Тем самым установлено, что ρ_a не имеет простых делителей.

4. Безгранично делимые меры, не являющиеся распределениями Рэлея

Приступим к доказательству того, что класс $I_0(\mathfrak{S},\circ)$ исчерпывается мерами ρ_a . В основе его лежит идея работы Крамера [9] .

---

1) Напомним, что зарядом называется функция множеств, представимая в виде $\mu_1-\mu_2$, где μ_1 и μ_2 – вполне конечные меры.

Предварительно заметим, что для зарядов, как и для мер, можно равенством (1) определить операцию $\circ$, а равенством (5) ввести х.ф. При этом, очевидно, будет иметь место однозначность соответствия между зарядами и х.ф., а также соотношение $\Phi(t;\sigma_1\circ\sigma_2)=\Phi(t;\sigma_1)\Phi(t;\sigma_2)$.

Пусть $\sigma\in I_0(\mathfrak{S},\circ)$. По теореме Б мера σ является б.д., и, следовательно, ее х.ф. представима в виде (6). Предположим, что мера σ не является распределением Рэлея, тогда соответствующая мера G_σ не сосредоточена в одной точке $x=0$. Покажем, что мера σ имеет делитель, не являющийся б.д. Такой делитель в силу теоремы Б в свою очередь имеет простой делитель. Поэтому тем самым будет установлено, что мера σ имеет простой делитель и, следовательно, не принадлежит $I_0(\mathfrak{S},\circ)$.

Так как мера G_σ не сосредоточена в точке $x=0$, то существует точка $x_0>0$, такая что для любого $y>x_0$ выполняется $G_\sigma([x_0,y))>0$. Не уменьшая общности, можно считать, что $x_0=1$. Легко видеть, что б.д. мера σ' с х.ф.

$$\Phi(t;\sigma')=\exp\left\{\int_0^\infty(\Omega_n(tx)-1)\,H(dx)\right\},$$

где

$$H(E)=\{(1+\eta)^{-2}+1\}\,G_\sigma(E\cap[1,1+\eta]),\quad \eta=\frac{1}{10},$$

будет для меры σ делителем. Поэтому достаточно установить, что мера σ' имеет делитель, не являющийся б.д.

Обозначим через χ сужение лебеговой меры на отрезок $[a,b]$, $a=1/5$, $b=3/10$, и рассмотрим функцию

$$\Phi_\varepsilon(t)=\exp\left\{\int_0^\infty(\Omega_n(tx)-1)(H-\varepsilon\chi)(dx)\right\},\quad \varepsilon>0. \tag{7}$$

Так как

$$\Phi_\varepsilon(t)=e^{-c}\left\{1+\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k!}\left[\Phi(t;H-\varepsilon\chi)\right]^k\right\},$$

где $c=(H-\varepsilon\chi)([0,\infty))$, то $\Phi_\varepsilon(t)$ является х.ф. заряда

$$\sigma_\varepsilon=e^{-c}\left\{\varkappa_0+\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k!}(H-\varepsilon\chi)^{k\circ}\right\}. \tag{8}$$

Если мы покажем, что σ_ε является мерой, т.е. не принимает отрицательных значений, то из $\Phi_\varepsilon(0)=1$ будет следовать, что $\sigma_\varepsilon\in\mathfrak{S}$, а из тождества

$$\Phi(t;\sigma')=\Phi_\varepsilon(t)\exp\left\{\varepsilon\int_0^\infty(\Omega_n(tx)-1)\chi(dx)\right\}$$

-что σ_ε является для σ' делителем. Но σ_ε не может быть б.д. мерой, поскольку заряд $H-\varepsilon\chi$, фигурирующий в выражении (7) для х.ф. $\Phi(t;\sigma_\varepsilon)$, принимает отрицательные значения (например, на отрезке $[a,b]$). Таким образом, теорема будет доказана, если мы покажем, что при достаточно малом $\varepsilon>0$ заряд σ_ε является мерой. Для этого нам понадобятся два вспомогательных предложения.

5. Две леммы.

ЛЕММА 1. При достаточно малом $\varepsilon>0$ заряд

$$H-\varepsilon\chi+\frac{1}{2}(H-\varepsilon\chi)^{2\circ}$$

является мерой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу формулы Гегенбауэра ([10] , стр.63; [11] , стр.52) при $x_1>0$, $x_2>0$ справедливо соотношение

$$\Omega_n(tx_1)\Omega_n(tx_2)=\int_0^\infty \Omega_n(tx_3)K(x_1,x_2,x_3)x_3^{n-1}dx_3, \tag{9}$$

в котором K - функция, определенная в октанте $\{(x_1,x_2,x_3): x_1>0, x_2>0, x_3>0\}$ следующим образом. В области $Q=\{2\max_{1\le j\le 3} x_j < x_1+x_2+x_3\}$ функция K дается равенством

$$K(x_1,x_2,x_3)=\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2^{n-3}\Gamma(\frac{n-1}{2})\sqrt{\pi}}\frac{\{[x_3^2-(x_1-x_2)^2][(x_1+x_2)^2-x_3^2]\}^{(n-3)/2}}{(x_1x_2x_3)^{n-2}}, \tag{10}$$

а вне указанной области она равна нулю. Нетрудно убедиться, что K является симметрической функцией от x_1, x_2, x_3 и в области

$$\{1\le x_1\le 1+\eta,\quad 1\le x_2\le 1+\eta,\quad 2\eta\le x_3\le 2-2\eta\}$$

ограничена снизу некоторой положительной постоянной B_1 . Полагая в (9) $t=0$, получаем равенство

$$\int_0^\infty K(x_1,x_2,x_3)x_3^{n-1}dx_3=1. \tag{11}$$

Покажем, что мера $H\circ H$ допускает представление

$$(H\circ H)(dx)=p_1(x)dx, \tag{12}$$

где $p_1(x)$ - неотрицательная суммируемая на $[0,\infty)$ функция, такая что

$$p_1(x)\ge B_2>0,\quad 2\eta\le x\le 2-2\eta,\quad B_2=const. \tag{13}$$

В самом деле, из равенства

$$\Phi(t; H\circ H)=\int_0^\infty\int_0^\infty \Omega_n(tx_1)\Omega_n(tx_2)H(dx_1)H(dx_2)$$

в силу (9) следует

$$\Phi(t; H\circ H)=\int_0^\infty \Omega_n(tx_3)\left\{\int_0^\infty\int_0^\infty K(x_1,x_2,x_3)H(dx_1)H(dx_2)\right\}x_3^{n-1}dx_3.$$

Отсюда получаем (12) с

$$p_1(x)=x^{n-1}\int_0^\infty\int_0^\infty K(x_1,x_2,x)H(dx_1)H(dx_2). \tag{14}$$

Неотрицательность $p_1(x)$ очевидна, суммируемость вытекает из (11). Поскольку $H([1,1+\eta))>0$, то соотношение (13) получаем из оценки

$$p_1(x)\geq$$
$$\geq(2\eta)^{n-1}\int_1^{1+\eta}\int_1^{1+\eta} K(x_1,x_2,x)H(dx_1)H(dx_2)\geq(2\eta)^{n-1}B_1\{H([1,1+\eta))\}^2.$$

Покажем далее, что мера $H\circ\chi$ допускает представление

$$(H\circ\chi)(dx)=p_2(x)\,dx, \tag{15}$$

где $p_2(x)$ – неотрицательная суммируемая функция, такая что

$$p_2(x)=0,\quad x\bar{\in}[1-b,1+b+\eta];\quad p_2(x)\leq B_3<\infty,\ x\in[1-b,1+b+\eta]. \tag{16}$$

Действительно, подобно тому, как было получено (14), получаем

$$p_2(x)=x^{n-1}\int_0^\infty\int_0^\infty K(x_1,x_2,x)H(dx_1)\chi(dx_2). \tag{17}$$

Если $x>1+b+\eta$ или $x<1-b$, а $1\leq x_1\leq 1+\eta$, $a\leq x_2\leq b$, то точка (x_1,x_2,x) находится вне области Q, поэтому $K(x_1,x_2,x)=0$ и, следовательно, $p_2(x)=0$. Учитывая симметрию и неотрицательность функции K, а также соотношение (11), имеем

$$p_2(x)\leq\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}\int_1^{1+\eta}H(dx_1)\int_a^b K(x_1,x_2,x)x_2^{n-1}dx_2\leq\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}H([1,1+\eta)),$$

откуда следует (16).

Рассмотрим заряд

$$H\circ H-2\varepsilon H\circ\chi-2\varepsilon\chi. \tag{18}$$

Обозначая через $p_3(x)$ функцию, равную нулю вне отрезка $[a,b]$ и равную единице на нем, в силу (14), (17) имеем

$$(H\circ H-2\varepsilon H\circ\chi-2\varepsilon\chi)(dx)=(p_1(x)-2\varepsilon p_2(x)-2\varepsilon p_3(x))\,dx.$$

Будем считать $\varepsilon<B_2/(2B_3+2)$. Так как отрезок $[2\eta,2-2\eta]$ покрывает отрезки $[a,b]$ и $[1-b,\ 1+b+\eta]$ то, учитывая (13) и (16), заключаем, что при всех $x\geqslant 0$ выполняется $p_1(x)-2\varepsilon p_2(x)-2\varepsilon p_3(x)\geqslant 0$. Таким образом, заряд (18) является мерой; тем самым лемма доказана.

ЛЕММА 2. При достаточно малом $\varepsilon>0$ заряд

$$(H-\varepsilon\chi)^{3\circ}.$$

является мерой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_1>0,\ x_2>0,\ x_3>0$. Дважды используя (9), получим соотношение

$$\Omega_n(tx_1)\Omega_n(tx_2)\Omega_n(tx_3)=\int_0^\infty\Omega_n(tx_4)L(x_1,x_2,x_3,x_4)x_4^{n-1}dx_4, \qquad (19)$$

где

$$L(x_1,x_2,x_3,x_4)=\int_0^\infty K(x_1,x_2,x)K(x_3,x_4,x)x^{n-1}dx. \qquad (20)$$

Поскольку левая часть (19) симметрическая относительно x_1,x_2,x_3, то и L – симметрическая относительно $x_1,\ x_2,\ x_3$. Учитывая, что K – симметрическая функция своих переменных, из (20) видим, что L – симметрическая функция от всех своих четырех переменных $x_1,x_2,\ x_3,\ x_4$. Функция L равна нулю вне области $R=\{2\max\limits_{1\leqslant j\leqslant 4}x_j<x_1+x_2+x_3+x_4\}$.

В самом деле, пусть, например, $2x_1\geqslant x_1+x_2+x_3+x_4$, т.е. $x_1\geqslant x_2+x_3+x_4$. Заметим, что $K(x_1,x_2,x)=0$ при $x\leqslant x_1-x_2$, а $K(x_3,x_4,x)=0$ при $x\geqslant x_3+x_4$. Так как $x_1-x_2\geqslant x_3+x_4$, то подынтегральная функция в (20) равна нулю и, следовательно, $L=0$.

Покажем, что в области $\{1<x_j<1+\eta,\ j=1,2,3;\ 0<x_4<3-3\eta\}$ функция L ограничена снизу некоторой положительной постоянной B_4. Действительно, в указанной области имеем

$$L(x_1,x_2,x_3,x_4)\geqslant\int_{2\eta}^{2-2\eta}K(x_1,x_2,x)K(x_3,x_4,x)x^{n-1}dx\geqslant$$
$$\geqslant B_1(2\eta)^{n-1}\int_{2\eta}^{2-2\eta}K(x_3,x_4,x)\,dx.$$

Отсюда сразу следует ограниченность положительной постоянной в той части области, где $x_4 \geqslant \eta$. При $0<x_4<\eta$ имеем, учитывая (10), оценку снизу

$$\int_{2\eta}^{2-2\eta} K(x_3, x_4, x)\,dx \geqslant \int_{x_3-x_4}^{x_3+x_4} K(x_3, x_4, x)\,dx \geqslant$$

$$\geqslant B_5\, x_4^{-n+2} \int_{x_3-x_4}^{x_3+x_4} \{[x-(x_3-x_4)][(x_3+x_4)-x]\}^{(n-3)/2} dx \geqslant B_6 > 0,$$

где B_5 и B_6 – постоянные.

Отметим еще такое свойство функции L:

$$\int_0^\infty L(x_1, x_2, x_3, x_4)\, x_4^{n-1}\, dx_4 = 1.$$

С помощью рассуждения, аналогичного проведенному при доказательстве леммы 1, получаем равенство

$$(H\circ H\circ H)(dx) = p_4(x)\,dx,$$

где

$$p_4(x) = x^{n-1} \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty L(x_1, x_2, x_3, x)\, H(dx_1)\, H(dx_2)\, H(dx_3).$$

Отсюда следует, что при $0<x<3-3\eta$ выполняется

$$p_4(x) \geqslant B_7\, x^{n-1} \qquad (B_7 = const > 0). \tag{21}$$

Далее аналогичным образом рассматриваем меры $H\circ H\circ\chi$ и $\chi\circ\chi\circ\chi$ и убеждаемся, что

$$(H\circ H\circ\chi)(dx) = p_5(x)\,dx, \quad (\chi\circ\chi\circ\chi)(dx) = p_6(x)\,dx,$$

где $p_5(x)$ и $p_6(x)$ равны нулю при $x>2+2\eta+b$, а при $x\leqslant 2+2\eta+b$ выполняется

$$p_5(x) \leqslant B_8\, x^{n-1}, \quad p_6(x) \leqslant B_9\, x^{n-1} \quad (B_8, B_9 = const < \infty). \tag{22}$$

Из (21) и (22) заключаем, что при достаточно малом $\varepsilon>0$ является мерой заряд

$$(H\circ H\circ H - 3\varepsilon H\circ H\circ\chi - \varepsilon^3\chi\circ\chi\circ\chi)(dx) = (p_4(x) - 3\varepsilon p_5(x) - \varepsilon^3 p_6(x))\,dx.$$

Тем самым лемма доказана.

6. Завершение доказательства теоремы

Пусть $\varepsilon>0$ таково, что заряды, упомянутые в формулировках лемм 1 и 2, являются мерами. Рассмотрим заряд $(H-\varepsilon\chi)^{k\circ}$, $k>3$. Так как число k можно представить в виде $k=2p+3q$, где p и q – целые неотрицательные, то

$$(H-\varepsilon\chi)^{k\circ}=\{(H-\varepsilon\chi)^{2\circ}\}^{p\circ}\circ\{(H-\varepsilon\chi)^{3\circ}\}^{q\circ},$$

откуда видно, что заряд $(H-\varepsilon\chi)^{k\circ}$ тоже – мера. В силу (8) заключаем, что тогда и заряд $\mathfrak{S}_\varepsilon$ является мерой, что и требовалось доказать.

7. Замечание

В работе [1], стр. 34, Дж.Кингмен поставил вопрос, справедлива ли для полугруппы $(\mathfrak{S},\circ)$ теорема, аналогичная известной теореме Д.А.Райкова [6], стр.175, о разложениях закона Пуассона, если считать аналогом закона Пуассона для $(\mathfrak{S},\circ)$ меру π_a с х. ф. вида

$$\Phi(t;\pi_a)=\exp\{a(\Omega_n(t)-1)\},\ a>0\ ?$$

Другими словами, имеет ли мера π_a делители, кроме делителей вида π_b с $b\le a$? Из доказанной нами теоремы следует, что мера π_a имеет простые делители. Эти делители, конечно, не могут совпадать с π_b, поскольку π_b – б.д. мера, и, следовательно, простой не является. Таким образом, аналог теоремы Д.А.Райкова для полугруппы $(\mathfrak{S},\circ)$ не имеет места.

Выражаю благодарность В.С.Азарину за внимание к работе.
Темой настоящей статьи я обязан академику Ю.В.Линнику, которого вспоминаю с чувством глубокой признательности.

ЛИТЕРАТУРА

1. J.F.C.Kingman.Acta Math.,109,11-53,1963.
2. K.Urbanik.Studia Math.,23,217-245,1964.
3. N.H.Bingham.Proc.Lond.Math.Soc.,23,16-30,1971.
4. D.G.Kendall.Z.Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw.Geb., 9,163-195,1968.
5. R.Davidson.Z.Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw.Geb., 10,120-145,1968.
6. Ю.В.Линник, И.В.Островский. Разложения случайных величин и векторов. М., "Наука", 1972.
7. Г.Крамер. Случайные величины и распределения вероятностей. М., ИЛ, 1947.

8. Б.В. Гнеденко, А.Н.Колмогоров. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М., ГТТИ, 1949.

9. H.Cramer.Arkiv för mat.,1,61-65,1949.

10. Н.Я.Сонин. Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах. М., ГТТИ, 1954.

11. Г.Бейтмен, А.Эрдейи. Таблицы интегральных преобразований, 11, М.,"Наука", 1970.

THE DESCRIPTION OF THE CLASS I_0 IN ONE SEMIGROUP OF PROBABILITY MEASURES

I.V.Ostrovskii

It is proved that in the semigroup of probability measures investigated by J.F.C.Kingman (Acta Math.,109,11-53,1963) in connection with random walks with spherical symmetry,the class of measures without simple factors coincides with the class of Rayleigh distributions.It follows that only the Gauss laws have no simple factors in the convolution semigroup of spherically symmetric probability measures in R^n, $n \geqslant 2$.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
1973 выпуск IУ

ЗАМЕЧАНИЕ ОБ АРГУМЕНТЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

И.В.Островский, П.М.Флексер

Мы называем характеристической функцией функцию вида

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dF(x), \qquad -\infty<t<\infty,$$

где $F(x)$ – некоторая функция распределения. В связи с работой [1] возникает вопрос, существует ли характеристическая функция $\varphi(t)$, не обращающаяся в нуль на открытом интервале $(-1,1)$ и такая, что

$$\int_{-1}^{1} |\arg\varphi(t)|\,dt=\infty \tag{1}$$

(под $\arg\varphi(t)$ понимаем непрерывную на $(-1,1)$ ветвь аргумента, выделенную условием $\arg\varphi(0)=0$). В этой заметке мы покажем, что такая характеристическая функция существует.

Обозначим через $\psi(t)$ функцию, равную нулю при $|t|\geqslant 1$, а при $|t|<1$ даваемую равенством

$$\psi(t)=(1-t^2)^{n+4}\exp\{it(1-t^2)^{-n}\},$$

где n – натуральное число. Легко видеть, что функция $\psi(t)$ трижды непрерывно дифференцируема на всей оси и $\psi(-t)=\overline{\psi(t)}$. Поэтому функция

$$p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)e^{-itx}\,dt, \qquad -\infty<x<\infty,$$

действительна, непрерывна и допускает оценку

$$p(x)=o(|x|^{-3}), \qquad x\to\pm\infty. \tag{2}$$

Обозначим через $\eta(t)$ функцию, равную нулю при $|t|\geqslant 1$, а при $|t|<1$ даваемую равенством

$$\eta(t)=(1-|t|)^{n+5}.$$

Так как функция $\eta(t)$ неотрицательная, четная, а на полуоси $[0,\infty)$ – выпуклая, то с помощью известного приема Полиа (см.,например, [2], стр. 45) нетрудно показать, что функция

$$q(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\eta(t)e^{-itx}\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{1}(1-t)^{n+5}\cos tx\,dt$$

положительна при всех x, $-\infty < x < \infty$. Кроме того, имеем

$$q(x)=\frac{n+5}{\pi x^2}-\frac{(n+5)(n+4)(n+3)}{\pi x^3}\int_0^1 (1-t)^{n+2}\sin tx\,dt,$$

откуда видно, что функция $q(x)$ суммируема и для достаточно больших x выполняется $q(x) > x^{-2}$.

Учитывая (2), заключаем, что если число ε из (-1,1) достаточно мало по модулю, то функция $q(x)+\varepsilon p(x)$ будет положительной при всех x, $-\infty<x<\infty$. Будем считать далее, что $|\varepsilon|>0$ выбран именно таким образом и фиксирован. Чтобы выбрать $\operatorname{sign}\varepsilon$, заметим, что функция $\eta(t)+\varepsilon\psi(t)$ может иметь корень на интервале (0,1) только в тех точках, где $|\eta(t)|=|\varepsilon\psi(t)|$, т.е., где $1-t=|\varepsilon|(1+t)^{n+4}$, а такая точка t лишь одна. Поэтому можно выбрать $\operatorname{sign}\varepsilon$, что мы и сделаем, таким, чтобы функция $\eta(t)+\varepsilon\psi(t)$ не имела корней на интервале (0,1).

В силу положительности и суммируемости функции $q(x)+\varepsilon p(x)$, можно константу $c>0$ выбрать такой, чтобы функция

$$\varphi(t)=c\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}[q(x)+\varepsilon p(x)]dx=c\,[\eta(t)+\varepsilon\psi(t)]$$

была характеристической. Так как эта функция не имеет корней на (0,1), а $\varphi(0)=1$, $\varphi(-t)=\overline{\varphi(t)}$, то она не имеет корней и на интервале (-1,1). Пусть $\arg\varphi(t)$ - непрерывная на (-1,1) ветвь аргумента $\varphi(t)$, $\arg\varphi(0)=0$. Выберем непрерывную на (-1,1) ветвь $\arg\left[1+\frac{\eta(t)}{\varepsilon\psi(t)}\right]$ такой, чтобы она стремилась к нулю при $t\to\pm 1$; это возможно потому, что $\eta(t)=o(\psi(t))$, $t\to\pm 1$. Тогда имеем

$$\arg\varphi(t)=\arg\left\{c\varepsilon\psi(t)\left[1+\frac{\eta(t)}{\varepsilon\psi(t)}\right]\right\}=$$

$$=\arg\psi(t)+\arg\left[1+\frac{\eta(t)}{\varepsilon\psi(t)}\right]+const=\frac{t}{(1-t^2)^n}+O(1),\ t\to\pm 1.$$

Поэтому для функции $\varphi(t)$ выполняется (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. D.O.H.Szasz.On a rolling characteristic function,Periodica Mathematica Hungarica,3(1-2),13-17,1973.

2. Ю.В.Линник, Разложения вероятностных законов, Л., Изд-во ЛГУ, 1960.

REMARK ON THE ARGUMENT OF CHARACTERISTIC FUNCTION

I.V.Ostrovskii,P.M.Flekser

The existence of characteristic (in probabilistic sense) function $\varphi(t)$ satisfying the conditions
1) $\varphi(t)\neq 0$, $-1<t<1$, 2) $\int_{-1}^{1}|\arg\varphi(t)|dt=\infty$
has been proved.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1 9 7 3 выпуск 1У

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЯХ С РАСХОДЯЩИМСЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ К НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Г.Р. Белицкий

Обозначим через $\mathcal{G}_n^c$ группу ростков в начале координат комплексно-аналитических диффеоморфизмов $F:(C^n,0)\to(C^n,0)$. В ряде работ изучался вопрос о нормальной форме элемента из $\mathcal{G}_n^c$. Наиболее полное определение нормальной формы предложил Брюно. Он же доказал, что любой элемент группы $\mathcal{G}_n^c$ приводится к нормальной форме некоторым формальным преобразованием координат. Однако сходящееся преобразование к нормальной форме существует далеко не всегда. Соответствующие примеры есть у Дюляка, Зигеля. Более подробное исследование расходимости нормализующих преобразований проделал Брюно. Полное изложение этого круга вопросов и исчерпывающий список литературы содержится в [1].

Обозначим через S_n подмножество всех тех элементов из $\mathcal{G}_n^c$, для которых любое нормализующее преобразование координат расходится.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $F\in\mathcal{G}_1^c$ и $|F'(0)|=1$; тогда F является произведением (в смысле группы $\mathcal{G}_1^c$) двух элементов из S_1. При $n>1$ любой росток из $\mathcal{G}_n^c$ является произведением двух элементов из S_n.

Докажем теорему 1 для случая $n=1$. Нам понадобится простая арифметическая лемма.

Пусть $r(t)>0$ – убывающая при $t>0$ функция. Обозначим через A_r множество всех вещественных чисел α, для которых неравенство

$$|\alpha-\frac{p}{q}|\leqslant cr(q),\quad c=c(\alpha)$$

имеет бесконечное множество решений в целых p и q.

ЛЕММА. Любое вещественное число является суммой двух чисел из A_r.

Доказательство теоремы 1. Пусть

$$F(z)=\lambda z+\sum_{k=2}^{\infty}f_k z^k,\quad |\lambda|=1$$

причем ряд сходится в некоторой окрестности точки $z=0$. Найдем такие сходящиеся степенные ряды

$$H(z)=\alpha z+\sum_{k=2}^{\infty}h_k z^k,\qquad G(z)=\beta z+\sum_{k=2}^{\infty}g_k z^k,$$

что $F(z)=H(G(z))$, причем любое нормализующее преобразование для $H(z)$ и $G(z)$ расходится. С этой целью выберем, согласно лемме, такие числа α и β, что $\alpha\beta=\lambda$ и, кроме того, каждое из неравенств

$$|\alpha^k-\alpha|\leqslant\frac{1}{(k!)^2},\qquad |\beta^k-\beta|\leqslant\frac{1}{(k!)^2}$$

имеет бесконечное количество решений $k_1', k_2', \dots, k_n', \dots$ и k_1'', $k_2'', \dots, k_n'', \dots$ соответственно. Нормальная форма отображений H и G – линейное отображение. Формальное нормализующее преобразование вида $z + o(z)$ для каждого из отображений H и G единственно и коэффициенты его задаются формулами

$$\varphi_k = \frac{1}{\alpha^k - \alpha} \sum h_\ell \varphi_{i_1} \cdots \varphi_{i_\ell}, \quad \varphi_0 = 0, \ \varphi_1 = 1$$

$$\psi_k = \frac{1}{\beta^k - \beta} \sum g_\ell \psi_{i_1} \cdots \psi_{i_\ell}, \quad \psi_0 = 0, \ \psi_1 = 1$$

соответственно. Здесь суммирование в обеих формулах происходит по всем $\ell \geqslant 2$ и всем таким наборам $i_1, i_2, \dots, i_\ell$, что $i_1 + i_2 + \dots + i_\ell = k$. Далее, H и G должны удовлетворять соотношениям

$$f_k = \sum h_\ell g_{i_1} \cdots g_{i_\ell}, \qquad (1)$$

где суммирование происходит по тому же правилу.

Мы можем считать, что

$$1 < k_1' < k_1'' < k_2' < k_2'' < \dots .$$

Выберем h_j и g_j при $j \leqslant k_1' - 1$ так, чтобы выполнялись равенства (1). Для нахождения $h_{k_1'}$ и $g_{k_1'}$ напишем следующую систему

$$\varphi_{k_1'} = \frac{1}{\alpha^{k_1'} - \alpha} \Big(h_{k_1'} + \sum_{k_1' - 1 \geqslant \ell \geqslant 2} h_\ell \varphi_{i_1} \cdots \varphi_{i_\ell} \Big),$$

$$f_{k_1'} = \beta^{k_1'} h_{k_1'} + \alpha g_{k_1'} + \sum_{k_1' - 1 \geqslant \ell \geqslant 2} h_\ell g_{i_1} \cdots g_{i_\ell} .$$

Выберем теперь аргумент $h_{k_1'}$ равным аргументу всей остальной суммы первого уравнения, а $|h_{k_1'}| = 1$. Значение $g_{k_1'}$ найдем из второго уравнения. Тогда $|\varphi_{k_1'}| \geqslant (k_1'!)^2$. Далее, выберем h_j и g_j при $k_1' + 1 \leqslant j \leqslant k_1'' - 1$ так, чтобы выполнялись равенства (1), а для $h_{k_1''}$ и $g_{k_1''}$ с помощью аналогичной системы найдем такие значения, что $|\psi_{k_1''}| \geqslant (k_1''!)^2$. Продолжая этот процесс, построим сходящиеся ряды H и G, удовлетворяющие (1), причем

$$|\varphi_{k_n'}| \geqslant (k_n'!)^2, \quad |\psi_{k_n''}| \geqslant (k_n''!)^2, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Из этих неравенств вытекает, что любое нормализующее преобразование для H и G расходится. Теорема доказана.

Пусть теперь $\mathcal{G}_n$ обозначает группу ростков в начале координат C^∞-диффеоморфизмов $F:(R^n,0)\to(R^n,0)$. Диффеоморфизм F называется плоско устойчивым, если всякий диффеоморфизм G, имеющий с F одинаковый формальный ряд, приводится к F некоторой C^∞ - заменой координат. Обозначим через T_n подмножество всех тех элементов из $\mathcal{G}_n$, которые не являются плоско устойчивыми.

ТЕОРЕМА 2. Подмножество T_1 является собственным нормальным делителем группы $\mathcal{G}_1$, фактор по которому изоморфен группе $PR[[x]]$ вещественных обратимых формальных рядов с умножением - подстановкой ряда в ряд и отождествлением $t=-t$. При $n>1$ любой элемент из $\mathcal{G}_n$ является произведением двух элементов из T_n.

Утверждение теоремы 2 при $n=1$ вытекает из описания всех одномерных плоско устойчивых ростков отображений [2]. Случай $n>1$ рассматривается непосредственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Д. Брюно, Труды ММО, 25, 119-262, 1971.

2. Г.Р. Белицкий, Функц. анализ и его приложения, 6, № 1, 66-67, 1972.

ON ANALYTICAL MAPS WITH DIVERGING TRANSFORMATIONS TO THE NORMAL FORM

G.R.Belitski

It has been found that one-dimensional analytical germs of diffeomorphisms with diverging transformation to the linear form generate (in the group sense) a group of all analytical germs with modulo singular linear part.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
1 9 7 3 выпуск 1У

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ПЛЮРИСУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

П.З. Агранович

Известно, что плюрисубгармоническую функцию на каждом внутреннем компакте ее области определения можно аппроксимировать монотонно убывающей последовательностью плюрисубгармонических функций класса C^∞.

В доступной нам литературе мы не нашли ответа на естественно возникающий вопрос: когда такого рода аппроксимация возможна во всей области. Здесь будет доказана следующая

ТЕОРЕМА. Всякая плюрисубгармоническая на псевдовыпуклом открытом множестве Ω в $\mathbb{C}^n$ функция $u(z)$ есть предел монотонно убывающей последовательности плюрисубгармонических функций из $C^\infty(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi(z)$ неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция в пространстве $\mathbb{C}^n$, зависящая только от $|z|$, равная нулю при $|z|>1$ и такая, что

$$\int_{\mathbb{C}^n} \varphi(z)\,dz = 1 .$$

Известно [1], что для любого псевдовыпуклого множества Ω существует такая строго плюрисубгармоническая на Ω функция $v(z)\in C^\infty(\Omega)$, что множество

$$\Omega_c = \{z : z\in\Omega ,\ v(z)<c\} \Subset \Omega \ \forall c<\infty .$$

Положим

$$\tilde{u}_j(z) = \begin{cases} u(z) & \text{при} \quad z\in\Omega_{j+1} \\ 0 & \text{при} \quad z\bar{\in}\Omega_{j+1} \end{cases}$$

и рассмотрим последовательность функций

$$u_j(z) = \int_{\mathbb{C}^n} \tilde{u}_j(z-\varepsilon\zeta)\varphi(\zeta)\,d\zeta. \tag{1}$$

Выберем монотонно сходящуюся к нулю последовательность положительных чисел ε_j таких, что каждое ε_j меньше расстояния от $\Omega_{j+1/2}$ до $C\Omega_{j+1}$ и расстояния от Ω_{j+1} до $C\Omega_{j+2}$. Подставим ε_j в (1). Очевидно, что функция $u_j(z)\in C^\infty(\mathbb{C}^n)$ равна нулю при $z\bar{\in}\Omega_{j+2}$ и плюрисубгармонична в окрестности множества $\overline{\Omega}_{j+1/2}$. На каждом $\Omega_{j+1/2}$ функции $u_i(z)$ образуют при $i\geqslant j$ монотонно убывающую последовательность, сходящуюся к $u(z)$.

Теперь возьмем выпуклую функцию $\chi(t)$ из $C^\infty(R^1)$ такую, что $\chi(t)=0$ при $t<0$ и $\chi'(t)>0$ при $t>0$.

Обозначим

$$\chi_j(z) = \chi(v+1-j).$$

Отметим некоторые свойства функции $\psi_j(z)$:

1) Функция $\psi_j(z)$ строго плюрисубгармонична на множестве $\Omega\setminus\bar{\Omega}_{j-1}$ и плюрисубгармонична на множестве Ω .

Действительно, на Ω функция $v+1-j$ строго плюрисубгармоническая, поэтому из определения функции $\chi(t)$ следует [2] , что $\psi_j(z)$ плюрисубгармоническая на Ω .

На множестве $\Omega\setminus\bar{\Omega}_{j-1}$ функция $v+1-j>0$, а так как при $t>0$ функция $\chi(t)$ строго возрастающая и выпуклая, то $\psi_j(z)$ строго плюрисубгармоническая функция на $\Omega\setminus\bar{\Omega}_{j-1}$ [2] .

2) $$\inf_{\Omega\setminus\bar{\Omega}_{j-1+\varepsilon}} \psi_j(z) = \chi(\varepsilon)>0, \quad 0<\varepsilon<1.$$

3) Функции $\psi_j(z)$ обращаются в нуль на множестве Ω_K при $j\geq K+1$.

Рассмотрим теперь последовательность функций

$$u_j^j = u_j, \quad u_j^m = u_j + \sum_{i=j+1}^{m} \alpha_i \psi_i, \quad m = j+1, \ j+2\dots, \tag{2}$$

где α_i – некоторые положительные числа.

В дальнейшем нам нужны будут следующие свойства функций u_j^m :

а) на множестве Ω_K , $K\leq m$, $m\geq j$ верно равенство

$$u_j^{m+1} = u_j^m \ ;$$

б) функция u_j^m плюрисубгармонична в окрестности множества $\bar{\Omega}_{j+1/2}$.

в) коэффициенты $\alpha_i>0$ можно выбрать таким образом, чтобы на множестве Ω выполнялось неравенство

$$u_{j+1}^m - u_j^m \leq 0 \tag{3}$$

для любых m и j $(m\geq j+2)$.

В самом деле, из (2) следует, что

$$u_{j+1}^m - u_j^m = u_{j+1} - u_j - \alpha_{j+1}\psi_{j+1}.$$

Обозначим

$$a_j = \min_{\Omega} u_j(z),$$
$$A_j = \max_{\Omega} u_j(z)$$

и возьмем числа α_j, удовлетворяющими условию

$$\alpha_{j+1} > \frac{A_{j+1} - a_j}{\chi(1/2)} . \tag{4}$$

Заметим, что на множестве $\Omega_{j+\frac{1}{2}}$ $u_{j+1} - u_j \le 0$ и стало быть неравенство (3) выполняется на $\Omega_{j+1/2}$ при любых $\alpha_j > 0$. Вне множества $\Omega_{j+1/2}$, ввиду (4) и свойства 2) функции $\psi_j(z)$ имеем

$$u^m_{j+1} - u^m_j < u_{j+1} - u_j - \frac{A_{j+1} - a_j}{\chi(1/2)} \le$$

$$\le (u_{j+1} - A_{j+1}) - (u_j - a_j) \le 0 .$$

Таким образом, указанный выбор чисел α_j обеспечивает выполнение неравенства (3).

Покажем теперь, что увеличивая, если надо, α_j, можно добиться того, чтобы функции u^m_j при любом $j \le m-1$ были плюрисубгармоничны на множестве $\Omega_{m+2\varepsilon}$, $\varepsilon < 1/4$.

Доказательство проведем по индукции. Вначале покажем, что при надлежащем выборе α_{j+1} функция u^{j+1}_j плюрисубгармонична в окрестности множества $\Omega_{j+1+2\varepsilon}$. Действительно, из (2) следует, что функция

$$u^{j+1}_j = u_j + \alpha_{j+1}\psi_{j+1} .$$

На множестве $\Omega_{j+2\varepsilon}$ функция u_j – плюрисубгармоническая, следовательно, в силу свойства 1) функции $\psi_j(z)$ функция u^{j+1}_j плюрисубгармоническая на множестве $\varepsilon < 1/4$.

Введем теперь следующие обозначения :

$$S^m_j(w) = \inf_{\bar\Omega_{j+1+2\varepsilon} \setminus \bar\Omega_j} \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u^m_j(w)}{\partial z_i \cdot \partial \bar z_k} w_i \bar w_k ;$$

$$S^m_j = \inf_{|w|=1} S^m_j(w) , \quad m = j, j+1, \ldots ;$$

$$t_j(w) = \inf_{\Omega_{j+2\varepsilon} \setminus \bar\Omega_{j-1+\varepsilon}} \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \psi_j(z)}{\partial z_i \, \partial \bar z_k} w_i \bar w_k ;$$

$$t_j = \inf_{|w|=1} t_j(w) .$$

Очевидно, что $t_j > 0$ в силу свойства 1) функции $\psi_j(z)$. Рассмотрим теперь два случая :

1) $s_j^j \geqslant 0$. Тогда u_j плюрисубгармонична на множестве $\Omega_{j+1+2\varepsilon} \setminus \bar{\Omega}_j$ и, значит, на $\Omega_{j+1+2\varepsilon}$. Следовательно, при любом $\alpha_{j+1} > 0$ функция u_j^{j+1} плюрисубгармонична на множестве $\Omega_{j+1+2\varepsilon}$;

2) $s_j^j < 0$. Тогда, выбирая

$$\alpha_{j+1} > \max\left(\frac{A_{j+1} - a_j}{\chi(1/2)}, -\frac{s_j^j}{t_{j+1}}\right),$$

получим, что на $\Omega_{j+1+2\varepsilon} \setminus \bar{\Omega}_{j+2\varepsilon}$

$$\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u_j^{j+1}}{\partial z_i \partial \bar{z}_k} w_i \bar{w}_k = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u_j}{\partial z_i \partial \bar{z}_k} w_i \bar{w}_k +$$

$$+ \alpha_{j+1} \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \psi_{j+1}}{\partial z_i \partial \bar{z}_k} w_i \bar{w}_k \geqslant s_j^j(w) - \frac{s_j^j}{t_{j+1}} t_{j+1}(w) \geqslant$$

$$\geqslant \left(s_j^j - \frac{s_j^j}{t_{j+1}} \cdot t_{j+1}\right)|w|^2 = 0$$

и, значит, u_j^{j+1} плюрисубгармоническая функция в $\Omega_{j+1+2\varepsilon}$, $\varepsilon < \frac{1}{4}$.

Если u_j^m плюрисубгармоническая функция в $\Omega_{m+2\varepsilon}$, то выбирая

$$\alpha_{m+1} > \max\left(\frac{A_{m+1} - a_m}{\chi(1/2)}, -\frac{s_j^j}{t_{j+1}}, -\frac{s_j^{j+1}}{t_{j+1}}, \ldots -\frac{s_j^m}{t_{j+1}}\right)$$

и повторяя предыдущие рассуждения, получим, что u_j^{m+1} плюрисубгармоническая функция в $\Omega_{m+1+2\varepsilon}$, $\varepsilon < \frac{1}{4}$.

В виду свойства а) функций u_j^m происходит стабилизация последовательности функций $\{u_j^m\}_{m=j}^{\infty}$ на каждом Ω_k. Поэтому существует $\lim\limits_{m\to\infty} u_j^m = u_j^*$, он является плюрисубгармонической функцией класса $C^\infty(\Omega)$. Покажем, что функции u_j^* образуют монотонную последовательность.

В самом деле, $u_j^* = \lim\limits_{m\to\infty} u_j^\infty$, $u_{j+1}^* = \lim\limits_{m\to\infty} u_{j+1}^m$, поэтому в силу свойства в) функций u_j^m, получим $u_j^* \geqslant u_{j+1}^*$. На множестве Ω_j функции u_j^* и u_j совпадают, следовательно, $u = \lim\limits_{j\to\infty} u_j^*$.

Теорема доказана.

В заключение автор приносит благодарность Л.И.Ронкину.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л.Хермандер, Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных, "Мир", 1968.

2. Л.И.Ронкин. Введение в теорию целых функций многих переменных, "Наука", М., 1971.

ON APPROXIMATION OF THE PLURISUBHARMONIC FUNCTIONS

P.Z.Agranovich

It is known that a plurisubharmonic function may be approximated by a monotonically decreasing sequence of the C^{∞} - pluriharmonic functions on every internal compact from its domain. In the present paper the possibility of such approximation on the whole domain is considered and the following theorem is proved:

Theorem: Every function plurisubharmonic on the pseudoconvex open set $\Omega \subset C^{n}$ is the limit of the monotonically decreasing sequence of the $C^{\infty}(\Omega)$ plurisubharmonic functions.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1 9 7 3 выпуск 1У

О ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЯХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА В ПРОСТРАНСТВЕ С ВЕСОМ

Ю.И. Любарский

1. Пространство B_σ, введенное С.Н.Бернштейном, играет важную роль в широком круге вопросов теории функций и ее приложений. Оно состоит из всех целых функций экспоненциального типа не выше σ, (ц.ф.э.т. σ) ограниченных на вещественной оси $\mathbf{R}$ с топологией равномерной сходимости на $\mathbf{R}$. Можно рассмотреть (это сделал Б.Я.Левин [1] гл.У1) широкий класс пространств целых функций, являющихся обобщением пространств B_σ. Каждое пространство этого класса строится по выпуклому компактному множеству $I \subset \mathbf{C}$ и состоит из всех таких ц.ф.э.т. $f(z)$, что

$$\|f\|_I = \sup_{z\in\mathbf{C}} \{ e^{-|z| h_I(\arg z)} |f(z)| \} < \infty, \qquad (1)$$

где $h_I(\theta)$ – опорная функция множества I. Обозначается такое пространство через B_I. В том случае, когда множество I является отрезком $[-i\sigma, i\sigma]$ мнимой оси, пространство B_I совпадает с пространством B_σ.

В отличие от хорошо изученных пространств B_σ, пространства B_I при произвольном выпуклом компакте I изучены сравнительно мало. Поэтому возникает ряд задач, связанных с перенесением утверждений, известных относительно пространства B_σ на пространство B_I при произвольном выпуклом компакте I. Ниже решается одна из таких задач.

Хорошо известно, что все функции из пространства B_σ, которые могут быть аппроксимированы линейными комбинациями экспонент (то-есть функций вида $f(z) = e^{\lambda z}$), входящих в пространство B_σ, есть почти периодические функции, спектр которых лежит на сегменте $[-\sigma, \sigma]$. Они могут быть определены (см., например, [2]), как те функции $f \in B_\sigma$, для которых семейство сдвигов $\{f(t+\tau)\}_{\tau\in\mathbf{R}}$ предкомпактно в топологии, определенной нормой пространства B_σ.

Аналогично обстоит дело и в случае произвольного выпуклого компакта I. Если число λ принадлежит $\bar{I}$ – сопряженному множеству, то экспонента $e^{\lambda z}$ входит в пространство B_I. Рассмотрим множество $\mathcal{P}_I$ экспоненциальных полиномов с показателями из $\bar{I}$, то-есть множество конечных сумм вида

$$S(z) = \sum_{\lambda\in\bar{I}} c_\lambda e^{\lambda z}$$

и попытаемся описать все функции $f \in B_I$, принадлежащие $\bar{\mathcal{P}}_I$ – замыканию множества $\mathcal{P}_I$ по норме пространства B_I. Это описание будет дано в терминах предкомпактности семейства "нормированных" сдвигов функции $f(z)$.

Введем множество $\mathcal{L}_I$, состоящее из всех таких функций $f \in B_I$, что семейство $\{f_w(z)\}_{w\in\mathbf{C}}$, где

$$f_w(z) = e^{-|w| h_I(\arg w)} f(z+w)$$

предкомпактно в топологии пространства B_I. Справедлива следующая теорема :

ТЕОРЕМА 1. Для того, чтобы функция $f \in B_I$ могла быть аппроксимирована по норме этого пространства экспоненциальными полиномами из $\mathcal{P}_I$ необходимо и достаточно, чтобы функция f принадлежала множеству $\mathcal{L}_I$.

При доказательстве этой теоремы мы установим ряд утверждений, описывающих структуру функций из $\mathcal{L}_I$, аналогичных утверждениям относительно структуры равномерных почти периодических функций.

Для доказательства теоремы 1 надо проверить выполнение двух включений : $\mathcal{L}_I \subset \bar{\mathcal{P}}_I$ и $\mathcal{L}_I \supset \bar{\mathcal{P}}_I$.

2. Для доказательства включения

$$\mathcal{L}_I \supset \bar{\mathcal{P}}_I \tag{2}$$

рассмотрим круговой индикатор множества I :

$$H_I(z) = H_I(x+iy) = |z| h_I(\arg z) = \sup_{\zeta + i\eta \in I} (\zeta x + \eta y). \tag{3}$$

Сразу из определения следует, что для любых точек z, $w \in \mathbf{C}$ справедливо неравенство

$$H_I(z) + H_I(w) \geq H_I(z+w). \tag{4}$$

Из этого неравенства получается следующая лемма :

ЛЕММА 1. Пусть функция $f \in B_I$. Тогда при любом $w \in \mathbf{C}$ функция $f_w(z)$ также принадлежит пространству B_I и выполняется неравенство

$$\| f_w(z) \|_I \leq \| f(z) \|_I. \tag{5}$$

В самом деле

$$\|f\|_I = \sup_z \{e^{-H_I(z)} |f(z)|\} = \sup_z \{e^{-H_I(z+w)} |f(z+w)|\} \geq$$
$$\geq \sup_z \{e^{-H_I(z)} e^{-H_I(w)} f(z+w)\} = \| f_w(z) \|_I .$$

Лемма доказана.

Доказательство включения (2) сводится к проверке следующих трех утверждений :

а) Если точка $\lambda \in \bar{I}$, то функция $e^{\lambda z} \in \mathcal{L}_I$.

б) Если функции $f_1(z), f_2(z) \in \mathcal{L}_I$, то функция $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in \mathcal{L}_I$ при любых числах $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{C}$.

в) Если последовательность $\{f_n\}_1^\infty \in \mathcal{L}_I$ стремится по норме $\| \cdot \|_I$ к некоторой функции $f \in B_I$, то эта функция входит в множество $\mathcal{L}_I$.

Первые два из этих утверждений очевидны, а третье легко доказывается с помощью леммы 1.

3. В этом параграфе мы докажем включение

$$\mathcal{B}_I \subset \bar{\mathcal{P}}_I . \tag{6}$$

Для этого нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 2.[1] Пусть $f(x)$ ограниченная непрерывная функция, определенная на полуоси $x>0$. Для того, чтобы семейство функций $\{f(x+h)\}_{h>0}$ было предкомпактно в топологии равномерной сходимости на полуоси, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ представлялась в виде

$$f(x) = \hat{f}(x) + f_0(x), \tag{7}$$

где $\hat{f}(x)$ сужение на положительную полуось некоторой почти периодической по Бору функции, а $f_0(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность непосредственно следует из предкомпактности семейства $\{\hat{f}(x+h)\}$ и равномерной непрерывности на замкнутой полуоси $0 \leqslant x \leqslant \infty$ функции $f_0(x)$.

Доказательство необходимости разобьем на несколько частей.

1. Введем понятие относительно плотного на R_+ множества. Множество $E \subset R_+$ называется относительно плотным на R_+, если существует такое число $L > 0$, что в любом сегменте $[a, a+L]$ длины L, целиком содержащимся в R_+, найдется хотя бы одна точка множества E. Отметим, что если E – относительно плотное на R_+ множество, то для любого числа $x>0$ найдется такое $\tau \in E$, что $\tau > x$.

Введем еще одно понятие, которое нам пригодится в дальнейшем.

Пусть на полуоси R_+ определена некоторая функция $g(x)$. Число τ назовем ее ε – смещением для значений $x > x_0$ (здесь ε и x_0 – некоторые фиксированные положительные числа), если справедливо неравенство

$$\sup_{x>x_0} |g(x+\tau) - g(x)| < \varepsilon .$$

2. Докажем, что для любой функции $f(x)$, удовлетворяющей условиям нашей леммы и любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число x_ε такое, что множество $E_\varepsilon = \{\tau_\varepsilon\}$ всех ε – смещений функции $f(x)$ для значений $x > x_\varepsilon$ относительно плотно на R_+.

Доказательство этого предложения проведем от противного. Допустим обратное. Это значит, что при некотором $\varepsilon > 0$ ε – смещения функции $f(x)$ для значений $x > x_\varepsilon$ не образуют относительно плотного на R_+ множества ни при каком $x_\varepsilon > 0$. Другими словами, при некотором $\varepsilon > 0$ для любых $x_\varepsilon > 0$, $L > 0$ можно указать такое число $a > 0$, что сегмент $[a, a+L]$ не содержит ни одного ε – смещения функции $f(x)$ для значений $x > x_\varepsilon$. То-есть при любом $\tau \in [a, a+L]$ выполнено неравенство

$$\sup_{x>x_\varepsilon} |f(x+\tau) - f(x)| \geqslant \varepsilon .$$

Мы построим последовательность точек $\{x_k\}_0^\infty$ такую, что из последовательности функций $\{f(x+x_k)\}_{k=0}^\infty$ нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность. Построение этой последовательности проведем по индукции. Положим $x_0 = 0$. Пусть числа $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ выбраны так, что

---

1) Это утверждение, по-видимому, принадлежит Н.Н.Боголюбову, однако нам не известно, где оно опубликовано. Поэтому мы приводим доказательство этой леммы.

$$\sup_{x>0}|f(x_j+x)-f(x_i+x)|\geqslant\varepsilon \text{ при } i,\, j\leqslant k-1,\ i\neq j.$$

Для определения числа x_k выберем сначала число $L_k = x'_k = 2\max\{x_j\}_{j=0}^{k-1}$. Согласно предположению можно указать такое число $a_k>0$, что для любого $\tau\in[a_k, a_k+L_k]$ справедливо неравенство $\sup\limits_{x>x'_k}|f(x+\tau)-f(x)|\geqslant\varepsilon$. Положим $x_k = a_k+L_k$. Поскольку $L_k>x_j$ при $j=0,1,\dots,k-1$, то число $x_k-x_j\in[a_k, a_k+L_k]$ и, следовательно, $\sup\limits_{x>x_k}|f[x+(x_k-x_j)]-f(x)|\geqslant\varepsilon$. Поскольку $L_k>x_j$ при $j=0,1,\dots,k-1$, то левая часть этого неравенства не уменьшится, если x_k заменить на x_j т. е. $\sup\limits_{x>x_j}|f(x+x_k-x_j)-f(x)|\geqslant\varepsilon$. Делая замену $t=x+x_j$, мы получаем, что $\sup\limits_{t>0}|f(t+x_k)-f(t+x_j)|\geqslant\varepsilon$. Этот процесс повторяется для построения числа x_{k+1} и т.д. В результате получается последовательность $\{x_k\}_0^\infty$ такая, что при $i\neq j$ $\sup\limits_{x>0}|f(x+x_i)-f(x+x_j)|\geqslant\varepsilon$. Очевидно, что из последовательности функций $\{f(x+x_k)\}_0^\infty$ нельзя выбрать сходящуюся подпоследовательность. Мы пришли к противоречию, которое и доказывает предложение 2.

3. Выберем последовательность положительных чисел $\varepsilon_k\downarrow 0$, монотонно стремящуюся к нулю. Согласно предложению 2, для каждого k можно указать такое число x_{ε_k}, что E_{ε_k} – множество ε_k – смещений функции $f(x)$ для значений $x>x_{\varepsilon_k}$ относительно плотно. Без уменьшения общности можно считать, что $x_{\varepsilon_k}\uparrow\infty$. Теперь выберем последовательность $\{\tau_k\}$ так, что $\tau_k\in E_{\varepsilon_k}$, $\tau_k>x_{\varepsilon_k}$; $\tau_{k+1}>\tau_k+1$ и докажем, что последовательность функций $\{f(x+\tau_k)\}_k$ фундаментальна в топологии равномерной сходимости на полуоси R_+. Для того, чтобы это доказать, достаточно для любого $\varepsilon>0$ выбрать такое число $N=N(\varepsilon)$, что при $k,m>N$ справедливо неравенство $\sup\limits_{x>0}|f(x+\tau_k)-f(x+\tau_m)|<\varepsilon$. Выберем число $N(\varepsilon)$ так, чтобы $4\varepsilon_{N(\varepsilon)}<\varepsilon$. Пусть $k>m>N(\varepsilon)$. Выберем элемент $\tau\in E_{\varepsilon_m}$ так, что $\tau>x_{\varepsilon_k}$. Имеем :

$$\sup_{x>0}|f(x+\tau_k)-f(x+\tau_m)|\leqslant\sup_{x>0}|f(x+\tau_k+\tau)-f(x+\tau_k)|+$$

$$+\sup_{x>0}|f(x+\tau_m+\tau)-f(x+\tau_m)|+\sup_{x>0}|f(x+\tau_k+\tau)-f(x+\tau_m+\tau)|\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{x>\tau_k}|f(x+\tau)-f(x)|+\sup_{x>\tau_m}|f(x+\tau)-f(x)|+$$

$$+\sup_{x>0}|f(x+\tau+\tau_k)-f(x+\tau)|+\sup_{x>0}|f(x+\tau+\tau_m)-f(x+\tau)|\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{x>x_{\varepsilon_m}}|f(x+\tau)-f(x)|+\sup_{x>x_{\varepsilon_m}}|f(x+\tau)-f(x)|+$$

$$+\sup_{x>x_{\varepsilon_k}}|f(x+\tau_k)-f(x)|+\sup_{x>x_{\varepsilon_m}}|f(x+\tau_m)-f(x)|\leqslant 3\varepsilon_m+\varepsilon_k\leqslant 4\varepsilon_m<\varepsilon.$$

Здесь мы пользовались тем, что $\tau > x_{\varepsilon_k} > x_{\varepsilon_m}$; $\tau_k > x_{\varepsilon_k} > x_{\varepsilon_m}$; $\tau_m > x_{\varepsilon_m}$ и неравенством треугольника.

Таким образом последовательность функций $\{f(x+\tau_k)\}$ фундаментальна в топологии равномерной сходимости на R_+ . Положим

$$\hat{f}(x) = \lim_{k\to\infty} f(x+\tau_k).$$

Делая в неравенстве $\sup\limits_{x>0} |f(x+\tau_k)-f(x+\tau_m)| \leqslant 4\varepsilon_m$ предельный переход по $k\to\infty$ мы получаем, что

$$\sup_{x>0} |f(x+\tau_m) - \hat{f}(x)| \leqslant 4\varepsilon_m.$$

4. Положим $f_0(x) = f(x) - \hat{f}(x)$ и докажем, что $f_0(x) \to 0$ при $x\to\infty$. В самом деле, пусть $x > x_{\varepsilon_m}$. Тогда

$$|f_0(x)| = |f(x) - \hat{f}(x)| \leqslant |f(x) - f(x+\tau_m)| + |f(x+\tau_m) - \hat{f}(x)| \leqslant 5\varepsilon_m.$$

Так как $\varepsilon_m \downarrow 0$ при $m\to\infty$, то $f_0(x)\to 0$ при $x\to+\infty$.

5. Лемма будет доказана, если нам удастся продолжить $\hat{f}(x)$ на полуось $x<0$ так, чтобы получилась почти периодическая по Бору функция. При $x>0$ функция $\hat{f}(x)$ определяется формулой

$$\hat{f}(x) = \lim_{k\to\infty} f(x+\tau_k).$$

Эта же формула определяет $\hat{f}(x)$ и при $x<0$. (Поскольку $\tau_k \uparrow \infty$ то, начиная с некоторого n , сумма $x+\tau_n$ становится положительной и выражение $f(x+\tau_n)$ имеет смысл). Покажем вначале, что для каждого фиксированного $x<0$ этот предел существует. Для этого нам достаточно для каждого $\varepsilon>0$ указать такое N_ε , что при $k, m > N_\varepsilon$ выполняется $|f(x+\tau_k) - f(x+\tau_m)| < \varepsilon$. Выберем ℓ так, что $4\varepsilon_\ell < \varepsilon$ и число N_ε мы выберем настолько большим, что $N_\varepsilon > \ell$ и при $k > N_\varepsilon$ $x+\tau_k > x_{\varepsilon_\ell}$. Пусть $k, m > N_\varepsilon$. Тогда выберем $\tau\in E_{\varepsilon_\ell}$ так, что $x+\tau > \max\{x_{\varepsilon_k}, x_{\varepsilon_\ell}\}$, и воспользуемся неравенством треугольника :

$$|f(x+\tau_k) - f(x+\tau_m)| \leqslant |f(x+\tau_k+\tau) - f(x+\tau_k)| + |f(x+\tau_m+\tau) - f(x+\tau_m)| +$$

$$+ |f(x+\tau_k+\tau) - f(x+\tau)| + |f(x+\tau+\tau_m) - f(x+\tau)| \leqslant 2\varepsilon_\ell + \varepsilon_k + \varepsilon_m \leqslant 4\varepsilon_\ell < \varepsilon.$$

Функция $\hat{f}(x)$ определена и на отрицательной полуоси. Эти же неравенства показывают, что при любом $y\in[x,0]$ справедливо неравенство $|f(y+\tau_k) - f(y+\tau_m)| < \varepsilon$. То-есть функции $\{f(x+\tau_m)\}$ сходятся равномерно на любом конечном интервале. Поэтому предельная функция $\hat{f}(x)$ непрерывна. Ограниченность ее следует из того, что начиная с некоторого n (своего для каждого $x<0$) выполнено неравенство $|f(x+\tau_k)| \leqslant \sup\limits_{t>0} |f(t)| < \infty$.

6. Нам осталось доказать, что при каждом $\varepsilon>0$ для функции $\hat{f}(x)$ существует относительно плотное на $\mathbf{R}$ множество ε –смещений.

Рассмотрим множества $-E_{\varepsilon_m} = \{x : -x\in E_{\varepsilon_m}\}$. Множества $E_{\varepsilon_m} \cup -E_{\varepsilon_m}$, очевидно, являются относительно плотными на $\mathbf{R}$. Докажем, что каждое из множеств E_m является множеством $3\varepsilon_m$ смещений. В самом деле, пусть $\tau\in E_{\varepsilon_m}$. Тогда для каждого $x\in R$ выберем число ℓ такое, что выполнены неравенства $x+\tau_\ell > x_{\varepsilon_m}$

$$|\hat{f}(x+\tau)-f(x+\tau+\tau_\ell)|<\varepsilon_m\,,\quad |\hat{f}(x)-f(x+\tau_\ell)|<\varepsilon_m\,.$$

Тогда $|\hat{f}(x+\tau)-\hat{f}(x)|\leqslant|\hat{f}(x+\tau)-f(x+\tau+\tau_\ell)|+$

$$+|\hat{f}(x)-f(x+\tau_\ell)|+|f(x+\tau_\ell+\tau)-f(x+\tau_\ell)|<3\varepsilon_m\,.$$

Таким образом каждое $\tau\in E_{\varepsilon_m}$ является $3\varepsilon_m$ – смещением функции $\hat{f}(x)$. Тогда каждое $\tau\in -E_{\varepsilon_m}$ тоже является $3\varepsilon_m$ смещением функции $\hat{f}$, так как в этом случае

$$|\hat{f}(x+\tau)-\hat{f}(x)|=|\hat{f}(x+\tau)-\hat{f}[x+\tau+(-\tau)]|,$$

а число $-\tau\in E_{\varepsilon_m}$ и является $3\varepsilon_m$ смещением.

Лемма доказана.

Собственно доказательство включения (6) разобьем на несколько лемм.

ЛЕММА 3. Пусть функция $f\in\mathcal{L}_I$ и $\theta\in[0,2\pi]$ произвольное направление. Тогда функция $f(z)$ представима в виде

$$f(z)=e^{\lambda_\theta z}\,[a_\theta+\chi_\theta(z)]\,, \tag{8}$$

где a_θ некоторое число, а функция $\chi_\theta(z)$ такова, что

$$\chi_\theta(re^{i\theta})\longrightarrow 0 \qquad (r\to\infty)\,. \tag{9}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без уменьшения общности можно ограничиться случаем $\theta=0$. Кроме того, вместо функции $f\in B_I$ можно перейти к рассмотрению функции $e^{ibz}f(z)\in B_J$, где $J=I-ib$, и выбором подходящего вещественного числа b добиться того, что $\lambda_0\in R$ (здесь λ_0 уже относится к множеству J) и, следовательно, $\lambda_0=\bar{\lambda}_0$. Этот случай и будем рассматривать.

Из того, что функция $f(z)$ принадлежит множеству $\mathcal{L}_I$ следует, что функция $e^{-\lambda_0 x}f(x)$, рассматриваемая как функция на полуоси $x>0$ удовлетворяет условиям леммы 2. Поэтому она представима в виде :

$$e^{-\lambda_0 x}f(x)=\hat{f}(x)+f_0(x)\,.$$

Для доказательства леммы 3 достаточно убедиться в том, что $\hat{f}(x)=const$. Для этого в свою очередь достаточно доказать, что $\hat{f}(x)$ есть целая функция нулевого экспоненциального типа. Равенство $\hat{f}=const$ будет следовать из ограниченности $\hat{f}$ на R. Выберем последовательность $\varepsilon_n\downarrow 0$ при $n\to\infty$ и последовательность чисел $\tau_n\to\infty$, являющихся ε_n – смещениями функции $\hat{f}$. Из последовательности функций $\{e^{-\lambda_0\tau_n}f(z+\tau_n)\}$ выберем сходящуюся по норме пространства B_I подпоследовательность. Предел ее обозначим через $\varphi(z)$. Очевидно, что при $x>0$

$$\varphi(x) = e^{-\lambda_0 x} \hat{f}(x),$$

откуда следует, что $\hat{f}(x)$ целая функция экспоненциального типа, индикаторная диаграмма которой лежит в множестве $I - \lambda_0$. С другой стороны из почти периодичности функции $\hat{f}$ следует, что $I_{\hat{f}}$ — ее индикаторная диаграмма лежит на мнимой оси. Отсюда следует

$$I_{\hat{f}} \subset (I - \lambda_0) \cap \{z : Re\, z = 0\} = \{0\}.$$

Поэтому $\hat{f}(z)$ есть целая функция нулевого экспоненциального типа и, следовательно, $\hat{f} = const$. Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Число a_θ назовем коэффициентом Фурье функции $f(z)$, соответствующим направлению θ.

В случае равномерных почти периодических функций лишь счетное число коэффициентов Фурье отлично от нуля и последовательность этих коэффициентов принадлежит пространству ℓ_2. Что можно утверждать в нашем случае ? Ответ на этот вопрос дается следующей леммой.

ЛЕММА 4. Неравенство $a_\theta \neq 0$ выполняется лишь для не более чем счетного множества направлений $\theta_1, \theta_2, \ldots$ и

$$a_{\theta_k} \to 0 \qquad (k \to \infty). \tag{10}$$

Доказательство этой леммы получается при помощи следующих двух вспомогательных утверждений, доказательство которых мы опускаем.

а) Пусть функция $f \in \mathcal{L}_I$. Тогда для любого $\theta \in [0, 2\pi]$ можно указать последовательность $r_j \to \infty$ такую, что при $j \to \infty$

$$\| e^{-H(r_j e^{i\theta})} f(z + r_j e^{i\theta}) - a_\theta e^{\lambda_\theta z} \|_I \to 0 \tag{11}$$

б) Пусть дан экспоненциальный полином вида

$$S(z) = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{\lambda_{\theta_k} z}, \quad \text{причем} \quad \theta_k \neq \theta_j \quad \text{при} \quad k \neq j.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\| S \|_I \geq \max_{k=1,2,\ldots,N} |c_k|.$$

Покажем, как из этих утверждений следует наша лемма. Нам достаточно проверить, что для каждого числа $d > 0$ существует не более чем конечное число точек $\theta \in [0, 2\pi]$, для которых выполняется неравенство $|a_\theta| > d$.

Допустим обратное, для некоторой бесконечной последовательности $\{\theta_k\}_1^\infty \subset [0, 2\pi]$ попарно различных направлений выполнено неравенство

$$|a_{\theta_k}| \geq 1. \tag{12}$$

(Для простоты мы положили $d = 1$). В силу утверждения а) можно выбрать последовательность чисел $r_k \uparrow \infty$ так, чтобы при $k \to \infty$

$$\| a_{\theta_k} e^{\lambda_{\theta_k} z} - e^{-r_k h_I(\theta_k)} f(z + r_k e^{i\theta_k}) \|_I \to 0.$$

Без уменьшения общности последовательность $\{e^{-r_k h_I(\theta_k)} f(z + r_k e^{i\theta_k})\}_1^\infty$ можно считать фундаментальной. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших числах k и ℓ выполнены неравенства

$$\| e^{-r_\ell h_I(\theta_\ell)} f(z + r_\ell e^{i\theta_\ell}) - e^{-r_k h_I(\theta_k)} f(z + r_k e^{i\theta_k}) \|_I < \varepsilon ,$$

$$\| e^{-r_\ell h_I(\theta_\ell)} f(z + r_\ell e^{i\theta_\ell}) - a_{\theta_\ell} e^{\lambda_{\theta_\ell} z} \|_I < \varepsilon ,$$

$$\| e^{-r_k h_I(\theta_k)} f(z + r_k e^{i\theta_k}) - a_{\theta_k} e^{\lambda_{\theta_k} z} \|_I < \varepsilon$$

и, следовательно,

$$\| a_{\theta_k} e^{\lambda_{\theta_k} z} - a_{\theta_\ell} e^{\lambda_{\theta_\ell} z} \|_I < 3\varepsilon .$$

Ввиду (12) это неравенство противоречит утверждению б) .
Лемма доказана.

Итак, каждой функции $f \in \mathcal{L}_I$ отвечает счетное число направлений θ_k , соответствующих точек опоры λ_k и коэффициентов a_k . Это обстоятельство дает возможность каждой функции f из множества $\mathcal{L}_I$ сопоставить ее "ряд Фурье" :

$$f(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z} ,$$

причем числа λ_k называются ее показателями Фурье, а числа a_k - ее коэффициентами Фурье.

Интересно узнать, каким ограничениям должны удовлетворять числа $\{a_k\}_1^\infty$ и $\{\lambda_k\}_1^\infty$ для того, чтобы являться последовательностями коэффициентов и показателей Фурье некоторой функции $f \in \mathcal{L}_I$. Оказывается, что условие (10) есть единственное ограничение.

праведлива следующая теорема :

ТЕОРЕМА 2. Пусть множество I по-прежнему подчиняется ограничениям, наложенным в начале этого параграфа. Тогда для любой пары, состоящей из последовательности комплексных чисел $a_k \to 0$ и попарно различных направлений $\{\theta_k\}_1^\infty \subset [0, 2\pi]$ найдется функция $f \in \mathcal{L}_I$, коэффициенты Фурье которой удовлетворяют равенствам

$$a_\theta = \begin{cases} 0 & \theta \bar{\in} \{\theta_k\}_{k=1}^\infty \\ a_k & \theta = \theta_k \end{cases} \tag{13}$$

Мы проведем построение этой функции, предполагая для простоты, что компакт I есть единичный круг. В этом случае $\lambda_\theta = e^{-i\theta}$. Функцию $f(z)$ мы будем искать в виде

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{N_k+1}^{N_{k+1}} a_j \left[e^{z e^{-i\theta_j}} - e^{\alpha_k z e^{-i\theta_j}} \right] \right\} , \tag{14}$$

где $\{N_k\}_1^\infty$ некоторая последовательность натуральных чисел таких, что $N_1 = 0$, $N_{k+1} > N_k + 1$, а $\{\alpha_k\}_1^\infty$ некоторая последовательность чисел из интервала $(0,1)$. Если две эти последовательности можно выбрать так, чтобы экспоненциальные полиномы

$$P_k(z) = \sum_{N_k+1}^{N_{k+1}} a_j [e^{ze^{-i\theta_j}} - e^{\alpha_k z e^{-i\theta_j}}]$$

являлись членами абсолютно сходящегося по норме $\|\cdot\|_I$ ряда

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(z),$$

то функция $f(z)$ будет, очевидно, искомой.

Для того, чтобы выбрать последовательности $\{N_k\}$ и $\{\alpha_k\}_1^{\infty}$ заметим, что для любого экспоненциального полинома

$$S(z) = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{ze^{-i\theta_k}} \qquad (\theta_k \neq \theta_j, \quad k \neq j)$$

можно выбрать число $\alpha \in (0,1)$ настолько близким к 1, что

$$\| S(z) - s(\alpha z) \| \leqslant 4 \max_{1 \leqslant k \leqslant N} |c_k| .$$

В самом деле, очевидно, что найдется такое число $R > 0$, что при $|z| > R$ выполнено неравенство

$$|S(z)| e^{-|z|} \leqslant 2 \max_k |c_k| .$$

Затем по данному R выберем число $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ так, что при $|z| < 2R$

$$|S(z) - s(\alpha z)| < 4 \max_k |c_R| .$$

Это число α является, очевидно, искомым.

Теперь, для того, чтобы указать последовательности $\{N_k\}$, $\{\alpha_k\}$, выберем последовательность $\{\varepsilon_k\}$ положительных чисел, так что

$$\varepsilon_1 > 4 \max_k |a_k| ; \quad \sum_1^{\infty} \varepsilon_k < \infty ; \quad \varepsilon_k > \varepsilon_{k+1} .$$

Последовательность чисел $\{N_k\}$ определим так

$$N_1 = 0 ; \quad N_{k+1} = \max \{ N_k + 1, \min \{ N : 4 \max_{j > N} |a_j| < \varepsilon_{j+1} \} \} .$$

Если теперь натуральное число $\ell \in [N_k + 1, N_{k+1}]$, то $4|a_\ell| < \varepsilon_k$ и можно выбрать число $\alpha_k \in (0,1)$ так, что

$$\| P_k(z) \|_I = \| \sum_{N_k+1}^{N_{k+1}} a_j [e^{ze^{-i\theta_j}} - e^{\alpha_k z e^{-i\theta_j}}] \| < \varepsilon_k .$$

В силу выбора последовательности $\{\varepsilon_k\}_1^{\infty}$ полиномы P_k образуют сходящийся ряд. Теорема доказана.

З А М Е Ч А Н И Е. Из доказательства теоремы легко усмотреть следующий факт :

Если задана последовательность коэффициентов Фурье, то для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такую функцию $f \in \mathcal{L}_I$ с этими коэффициентами Фурье, что

$$\| f \| \leqslant \varepsilon + \max |a_{\theta_k}| .$$

Объединяя утверждения лемм 3,4 и теоремы 2, мы приходим к следующему заключению :

Любая функция $f \in \mathcal{L}_I$ представима в виде

$$f(z) = g(z) + h(z), \tag{15}$$

где функция $h(z)$ может быть аппроксимирована элементами $\mathcal{P}_I$ (это функция, построенная по коэффициентам Фурье функции f), а функция $g(z)$ принадлежит $\mathcal{L}_I$ и ее коэффициенты Фурье равны нулю, то-есть при любом $\theta \in [0, 2\pi]$ и $r \to \infty$

$$g(re^{i\theta})\, e^{-rh_I(\theta)} \to 0 . \tag{16}$$

Нам осталось доказать, что функции $g \in \mathcal{L}_I$, удовлетворяющие условию (16), могут быть аппроксимированы элементами $\mathcal{P}_I$. Для этого докажем, что стремление к нулю в (16) происходит равномерно по всем $\theta \in [0, 2\pi]$, а затем покажем, что любая функция, равномерно стремящаяся к нулю после гашения роста, может быть аппроксимирована экспоненциальными полиномами из $\mathcal{P}_I$. При этом нам понадобится следующая лемма.

Л Е М М А 5. Пусть функция $g \in \mathcal{L}_I$ и ее коэффициенты Фурье равны нулю $(a_\theta = 0)$ и последовательность точек $w_k = r_k e^{i\theta_k}$, $k = 1, 2, \dots$ обладает следующими свойствами :

а) $\theta_k \downarrow +0$ при $k \to \infty$

б) $r_k \to +\infty$ при $k \to \infty$

в) Существует предел по норме $\| \ \|_I$

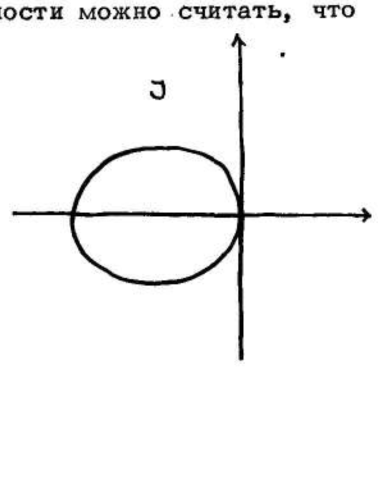
$$\varphi(z) = \lim_{k \to \infty} g_{w_k}(z) .$$

Тогда $\varphi(z) \equiv 0$.

Доказательство этой леммы разобьем на две части. Сначала докажем, что

$$\varphi(z) = Ce^{\lambda_0 z}$$

(λ_0 - опорная точка, соответствующая нулевому направлению, C - некоторая константа), а затем убедимся в том, что $C = 0$. Без уменьшения общности можно считать, что $\lambda_0 = \bar{\lambda}_0$. Рассмотрим функцию



$$\psi(z) = e^{-\lambda_0 z} \varphi(z).$$

Ее индикаторная диаграмма I_ψ содержится в множестве $J = I - \lambda_0$ и имеет с мнимой осью единственную общую точку - ноль. Кроме того, так как функция $\varphi(z) \in B_I$, то $\psi(x)$ ограничена на полуоси $x > 0$. Для доказательства равенства $\psi(z) \equiv const$ достаточно убедиться в том, что $\psi(x)$ ограничена и при $x<0$. Отсюда будет следовать, что индикаторная диаграмма I_ψ функции ψ лежит на мнимой оси и так как $I_\psi \subset J$, то $I_\psi = \{0\}$, то-есть $\psi(z)$ целая функция нулевого экспоненциального типа. Равенство $\psi(z) = const$ будет следовать из ограниченности $\psi(x)$ на R.

Таким образом достаточно убедиться в ограниченности функции $\psi(x)$ при $x<0$.

Функции $e^{-\lambda_0 z - z_k h(\theta_k)} f(z + z_k e^{i\theta_k})$ сходятся поточечно к $\psi(z)$ при $k \to \infty$. Для каждого числа $x>0$ выберем натуральное число $K_0 = K_0(x)$ такое, что при $K > K_0(x)$ справедливо неравенство

$$|\psi(-x) - e^{\lambda_0 x + z_k h(\theta_k)} f(-x + z_k e^{i\theta_k})| < 1.$$

Если мы сможем выбрать $M_1 > 0$ так, что для каждого $x>0$ найдется число $K_1 = K_1(x)$ такое, что при $K > K_1$

$$|e^{\lambda_0 x - z_k h(\theta_k)} f(-x - z_k e^{i\theta_k})| < M_1,$$

то, воспользовавшись предыдущим неравенством при $K > max\{K_1(x), K_0(x)\}$ получим, что $|\psi(-x)| < M_1 + 1$ при всех $x<0$, то-есть функция $\psi(x)$ ограничена на левой полуоси.

Из принадлежности функции $f(z)$ пространству B_I следует, что

$$\sup_k \left\{ e^{-|-x+z_k e^{i\theta_k}| h(-x+z_k e^{i\theta_k})} |f(-x+z_k e^{i\theta_k})| \right\} \leqslant \|f\|.$$

Но имеем (учитывая, что $\lambda_0 = h(0)$)

$$e^{\lambda_0 x - z_k h(\theta_k)} f(-x+z_k e^{i\theta_k}) = e^{-|-x+z_k e^{i\theta_k}| h(-x+z_k e^{i\theta_k})} \times$$

$$\times f(-x+z_k e^{i\theta_k}) e^{\lambda_0 x - z_k h(\theta_k) + |-x+z_k e^{i\theta_k}| h(-x+z_k e^{i\theta_k})}.$$

Первый сомножитель в правой части этого равенства ограничен и поэтому достаточно доказать существование такой константы $M_2 > 0$, что для каждого $x>0$ найдется $K_2 = K_2(x)$ такое, что при $K > K_2$

$$h(0)x - z_k h(\theta_k) + |-x + z_k e^{i\theta_k}| h(-x + z_k e^{i\theta_k}) \leqslant M_2.$$

Для того, чтобы это доказать, заметим, прежде всего, что при фиксированном $x>0$

$$|x - z_k e^{i\theta_k}| - (z_k - x) = 2x \frac{1-\cos\theta_k}{\sqrt{1 - 2\frac{x}{z_k}\cos\theta_k + \frac{x^2}{z_k^2}} + 1 - \frac{x}{z_k}} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Поэтому достаточно доказать, что при некоторой константе M_3 для каждого $x>0$ можно указать такое $K_3=K_3(x)$, что при $K>K_3$ выполнено неравенство

$$|h(0)x - r_k h(\theta_k) + r_k h[\arg(-x+r_k e^{i\theta_k})] - xh[\arg(-x+r_k e^{i\theta_k})]| \leqslant$$

$$\leqslant x|h(0) - h[\arg(-x+r_k e^{i\theta_k})]| + r_k |h(\theta_k) - h[\arg(-x+r_k e^{i\theta_k}]| \leqslant M_3.$$

Существование такой константы M_3 следует из двух фактов, первый из которых содержится, например, в [1, стр.76], а второй следует просто из теоремы синусов :

1. Функция $h(\theta)$ удовлетворяет условию Липшица с некоторой константой C_1 ;

2. При любой константе M_4 и любом $x>0$ можно указать такое число $K_4=K_4(x)$, что при $K>K_4$

$$|\theta_k - \arg(-x+r_k e^{i\theta_k})| < \frac{M_4}{r_k}.$$

Ограниченность функции $\psi(x)$, а вместе с ней и равенство $\varphi(z)=Ce^{\lambda_0 z}$ доказаны.

Так как функции $e^{-\lambda_0 x} f(x+r_k e^{i\theta_k})$ сходятся к C равномерно при $x>0$, $k\to\infty$, то для доказательства равенства $C=0$ достаточно проверить, что $e^{-\lambda_0 x} f(x+r_k e^{i\theta_k})\to 0$ при $x\to\infty$. Или, что функция $g(x+iy)= e^{-\lambda_0(x+iy)} f(x+iy)\to 0$ при $x\to\infty$ при каждом фиксированном y.

Положим $J=I-\lambda_0$, и пусть $h_j(\theta)$ – опорная функция множества J. Так как J лежит в левой полуплоскости, то $h_j(0)=0$ и пользуясь условиями Липшица для функции $h_j(\theta)$ мы получим, что в некоторой окрестности нуля выполнено неравенство $h_j(\theta)<M|\theta|$ с некоторой константой M. Отсюда и из того, что $|g(re^{i\theta})|\leqslant e^{rh_j(\theta)}$ следует, что функция $g(x+iy)$ ограничена по модулю в любой полуполосе $|y|\leqslant A$, $x>0$. Поскольку $g(x)\to 0$ при $x\to\infty$, то утверждение $g(x+iy)\to 0$ при $x\to\infty$ получается при помощи теоремы о двух константах.

Таким образом равенство $C=0$, а вместе с ним и утверждение леммы 5 доказано.

Теперь мы можем легко доказать, что стремление к нулю в (16) происходит равномерно по $\theta\in[0,2\pi]$.

ЛЕММА 6. Пусть функция $f\in\mathcal{L}_I$ такова, что все ее коэффициенты Фурье a_θ равны нулю.
Тогда

$$f(re^{i\theta})\, e^{-rh_I(\theta)} \rightrightarrows 0 \qquad (r\to\infty) \tag{18}$$

равномерно по $\theta\in[0,2\pi]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим обратное, функция f удовлетворяет условиям нашей леммы и (18) не выполнено. Тогда существует последовательность точек $r_k e^{i\theta_k}$ такая, что $r_k\uparrow\infty$ при $k\to\infty$ и

$$e^{-r_k h_I(\theta_k)}|f(r_k e^{i\theta_k})| \geqslant d>0 \qquad (k=1,2,\dots). \tag{19}$$

Без уменьшения общности можно считать, что $\theta_k \downarrow +0$ при $k \to \infty$ и существует предел по норме $\|\cdot\|_I$:

$$\varphi(z) = \lim_{k\to\infty} e^{-z_k h_I(\theta_k)} f(z + z_k e^{i\theta_k}).$$

Согласно лемме 5, $\varphi(z) \equiv 0$, поэтому для любой точки $z \in \mathbb{C}$ $e^{-z_k h_I(\theta_k)} f(z + z_k e^{i\theta_k}) \to 0$. В частности, $e^{-z_k h_I(\theta_k)} f(z_k e^{i\theta_k}) \to 0$.

Противоречие этого утверждения с (19') доказывает лемму.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пример, построенный в [3] показывает, что требование принадлежности функции $f(z)$ множеству $\mathcal{L}_I$, фигурирующее в условиях леммы 6, вообще говоря, нельзя убрать. Существует функция $f \in B_I$ такая, что $e^{-zh_I(\theta)} f(ze^{i\theta}) \to 0$ при $z \to \infty$, $\forall \theta \in [0, 2\pi]$ и

$$\overline{\lim_{z\to\infty}} \sup_{\theta\in[0,2\pi]} \{e^{-zh_I(\theta)} | f(ze^{i\theta})|\} > 0.$$

Доказательство включения $\mathcal{L}_I \subset \overline{\mathcal{P}}_I$, а вместе с ним и теоремы 1, заканчивается следующей леммой.

ЛЕММА 7. Пусть функция $f \in B_I$ такова, что при $z \to \infty$ $f(ze^{i\theta}) e^{-H(ze^{i\theta})} \rightrightarrows 0$ равномерно по $\theta \in [0, 2\pi]$.
Тогда функция $f(z)$ может быть приближена экспоненциальными полиномами из $\mathcal{P}_I$.

В самом деле, функции $f(\alpha z)$ принадлежат пространству B_I при $\alpha \in (0,1)$ и из условий леммы легко следует, что при $\alpha \to 1-0$

$$\| f(\alpha z) - f(z) \|_I \to 0.$$

Поэтому достаточно аппроксимировать тригонометрическими полиномами функции $f(\alpha z)$ при $\alpha \in (0,1)$. Поскольку индикаторная диаграмма функций $f(\alpha z)$ содержится строго внутри I , то эти функции можно представить интегралом Бореля, взятым по $\partial \bar{I}$ – границе сопряженного множества :

$$f(\alpha z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \bar{I}} F(\zeta) e^{\zeta z} d\zeta .$$

Заменяя интеграл на интегральные суммы, и проводя соответствующие оценки, (так как это сделано, например, в [1] стр. 377) мы получим последовательность экспоненциальных полиномов из $\mathcal{P}_I$, аппроксимирующих функцию $f(\alpha z)$. Лемма, а вместе с ней и теорема 1 доказаны.

Укажем изменения, которые следует провести в случае, когда I не удовлетворяет ограничениям, наложенным в начале этого параграфа.

Если λ угловая точка границы $\partial \bar{I}$, то ей может отвечать не одно направление, а некоторый угол. Поэтому в общем случае мы будем считать два направления эквивалентными, если им соответствует одна общая точка и сопоставлять коэффициент Фурье не одному направлению, а целому классу эквивалентности направлений. По-прежнему, коэффициенты Фурье могут отличаться от нуля лишь для не более, чем счетного числа классов эквивалентности, и последовательность коэффициентов Фурье стремится к нулю.

Если для направления θ опорным множеством является не точка, а отрезок длины 2Δ, лежащий на границе сопряженной диаграммы $\bar{I}$, то коэффициентом Фурье a_θ является не число, а целая почти периодическая функция $a_\theta(t)$, с показателями Фурье лежащими на отрезке длины 2Δ. Требование на коэффициенты Фурье остается прежним :

$$\max_{-\infty<t<\infty} |a_{\theta_k}(t)| \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty .$$

С этими изменениями наши рассуждения применимы для произвольного выпуклого компакта $I \subset \mathbf{C}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Всюду выше мы рассматривали экспоненциальные полиномы с показателями из $\bar{I}$. Однако, если точка λ принадлежит внутренности множества $\bar{I}$, то, воспользовавшись представлением,

$$e^{\lambda z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \bar{I}} e^{\zeta z} \frac{1}{\zeta - \lambda} d\zeta$$

и заменяя интеграл интегральными суммами, мы приблизим экспоненту $e^{\zeta z}$ экспоненциальными полиномами с показателями, принадлежащими только $\partial\bar{I}$. Поэтому можно несколько усилить утверждение теоремы 1 и утверждать, что любая функция из $\mathcal{L}_I$ может быть приближена экспоненциальными полиномами с показателями из $\partial\bar{I}$ границы сопряженного множества.

В заключение выражаю глубокую благодарность моему научному руководителю Б.Я.Левину за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б.Я.Левин. Распределение корней целых функций Гостехиздат, Москва, 1956.

2. Б.М.Левитан. Почти периодические функции. Гостехиздат, Москва, 1953.

3. Lecture.Notes prepared in connection with the summer inst. of entire functions and related parts of analysis.(Amer. Math.Soc.) La-Jola,1966.

ON ALMOST PERIODIC ENTIRE FUNCTIONS OF EXPONENTIAL TYPE IN THE WEIGHTED SPACE

Yu.I.Lubarski

The theory is constructed of almost periodic functions for the B_D space consisting of all entire functions f(z) of exponential type, such that

$$\|f\|_{B_D} = \sup_{z\in\mathbf{C}} \{ |f(z)| e^{-|z| h_D(\arg z)} \} < \infty ,$$

where D is the convex compact in the complex plane C, $h_D(\theta)$ its supporting function.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1 9 7 3 выпуск IУ

ОБ УСТОЙЧИВЫХ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ ДЛЯ АБСТРАКТНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ

Г.Н. Гестрин

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается задача Коши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -Au; \quad u\Big|_{t=+0} = \varphi; \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=+0} = \psi, \tag{1.1}$$

где A - неограниченный существенно самосопряженный положительный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Обозначим через M_A множество элементов из H, замыканием с которого оператор A расширяется до самосопряженного. Предположим далее, что $\varphi \in \mathcal{D}_A$, $\psi \in \mathcal{D}_{\sqrt{A}}$. Тогда решение задачи (1.1) и его производная u'_t представляются в виде

$$u(t) = \cos\sqrt{A}\,t\,\varphi + \frac{\sin\sqrt{A}\,t}{\sqrt{A}}\,\psi, \tag{1.2}$$

$$u'_t(t) = -\sqrt{A}\sin\sqrt{A}\,t\,\varphi + \cos\sqrt{A}\,t\,\psi.$$

Пусть далее A_n - последовательность ограниченных положительных операторов, сходящаяся к A на каждом элементе из M_A при $n\to\infty$. Положим

$$S_n^{(1)} = \sum_{p=0}^{N}(-1)^p\frac{A_n^p\tau^{2p}}{(2p)!}; \qquad R_n^{(1)} = \sum_{p=N+1}^{\infty}(-1)^p\frac{A_n^p\tau^{2p}}{(2p)!},$$

$$S_n^{(2)} = \sum_{p=0}^{N}(-1)^p\frac{A_n^p\tau^{2p+1}}{(2p+1)!}; \qquad R_n^{(2)} = \sum_{p=N+1}^{\infty}(-1)^p\frac{A_n^p\tau^{2p+1}}{(2p+1)!}. \tag{1.3}$$

Здесь N – фиксированное целое число, $\tau = \frac{T}{n}$, $[0,T]$ промежуток изменения аргумента t в (1.1). Очевидно,

$$S_n^{(1)} + R_n^{(1)} = \cos\sqrt{A_n}\,\tau\,; \quad S_n^{(2)} + R_n^{(2)} = \frac{\sin\sqrt{A_n}\,\tau}{\sqrt{A_n}} .$$

Определим элементы u_k , v_k $(k=0,1,\ldots,n-1)$ формулами

$$u_{k+1} = S_n^{(1)} u_k + S_n^{(2)} v_k\,; \qquad u_0 = \varphi\,, \quad v_0 = \psi\,, \tag{1.4}$$

$$v_{k+1} = -A_n S_n^{(2)} u_k + S_n^{(1)} v_k\,,$$

а элементы $u^{(n)}(t)$, $v^{(n)}(t)$ – формулами

$$u^{(n)}(t) = \frac{t-k\tau}{\tau} u_{k+1} + \frac{(k+1)\tau - t}{\tau} u_k\,; \quad k\tau \leqslant t < (k+1)\tau, \tag{1.5}$$

$$v^{(n)}(t) = \frac{t-k\tau}{\tau} v_{k+1} + \frac{(k+1)\tau - t}{\tau} v_k\,; \quad k\tau \leqslant t < (k+1)\tau .$$

Естественно ожидать, что при $n \to \infty$ $u^{(n)}(t)$ и $v^{(n)}(t)$ в некотором смысле будут сходиться к $u(t)$ и $u'(t)$ соответственно. Целью работы и является исследование схемы (1.4)–(1.5).

Начнем с доказательства следующей леммы.

ЛЕММА 1. Если N нечетно и $\tau^2 \| A_n \| < 1$, то

$$(A_n u_k, u_k) + (v_k, v_k) \leqslant (A_n \varphi, \varphi) + (\psi, \psi)\,; \tag{1.6}$$

$$\| u_k \|^2 \leqslant e^{2T} \{ \| u_0 \|^2 + T((A_n \varphi, \varphi) + (\psi,\psi)) \} . \tag{1.7}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (1.4) следует

$$(A_n u_{k+1}, u_{k+1}) + (v_{k+1}, v_{k+1}) = (A_n (S_n^{(1)} u_k + S_n^{(2)} v_k), S_n^{(1)} u_k + S_n^{(2)} v_k) +$$

$$+ (-A_n S_n^{(2)} u_k + S_n^{(1)} v_k, -A_n S_n^{(2)} u_k + S_n^{(1)} v_k) = \tag{1.8}$$

$$= (A_n (S_n^{(1)2} + A_n S_n^{(2)2}) u_k, u_k) + ((S_n^{(1)2} + A_n S_n^{(2)2}) v_k, v_k) .$$

$$S_n^{(1)2} + A_n S_n^{(2)2} = (\cos\sqrt{A_n}\,\tau - R_n^{(1)})^2 +$$
$$+ A_n\left(\frac{\sin\sqrt{A_n}\,\tau}{\sqrt{A_n}} - R_n^{(2)}\right)^2 = E - R_n^{(1)2} - \tag{1.9}$$
$$- A_n R_n^{(2)2} - 2S_n^{(1)} R_n^{(1)} - 2S_n^{(2)} R_n^{(2)} .$$

Операторы $R_n^{(1)2}$ и $A_n R_n^{(2)2}$ положительны ; $S_n^{(1)} R_n^{(1)}$ и $S_n^{(2)} R_n^{(2)}$ будут положительными, если этим свойством обладают $S_n^{(1)}$, $S_n^{(2)}$, $R_n^{(1)}$ и $R_n^{(2)}$.

Так как по предположению $\tau^2 \| A_n \| < 1$, то для всех $p \geq 0$

$$\left(\frac{A_n^p \tau^{2p}}{(2p)!} g, g\right) > \left(\frac{A_n^{p+1} \tau^{2(p+1)}}{(2p+2)!} g, g\right). \tag{1.10}$$

По теореме Лейбница о знакопеременных рядах с монотонно убывающими членами $S_n^{(1)}$ положителен при любом N , а $R_n^{(1)}$ – при нечетном N . Поэтому из (1.9) найдем

$$S_n^{(1)2} + A_n S_n^{(2)2} \leq E . \tag{1.11}$$

Вместе с (1.8) это дает (1.7) :

$$(A_n u_{k+1}, u_{k+1}) + (v_{k+1}, v_{k+1}) \leq (A_n u_k, u_k) + (v_k, v_k) \leq$$
$$\leq (A_n \varphi, \varphi) + (\psi, \psi) .$$

Далее из (1.4) получаем

$$(u_{k+1}, u_{k+1}) = (S_n^{(1)} u_k, u_{k+1}) + (S_n^{(2)} v_k, u_{k+1}) \leq \tag{1.12}$$
$$\leq \frac{1}{2} \| S_n^{(1)} u_k \|^2 + \frac{1}{2} \| u_{k+1} \|^2 + \frac{1}{2\tau} \| S_n^{(2)} v_k \|^2 + \frac{\tau}{2} \| u_{k+1} \|^2 .$$

Отсюда, так как $S_n^{(1)} < E$, а $S_n^{(2)} < \tau E$, находим

$$(1-\tau) \| u_{k+1} \|^2 \leq \| u_k \|^2 + \tau \| v_k \|^2 . \tag{1.13}$$

С помощью (1.6) и итераций из (1.13) получаем (1.7).

Установленная лемма выражает свойство устойчивости разностной схемы (1.4), хотя и не в совсем обычном понимании. Схему $W_{K+1} = B(\tau)W_K$ называют устойчивой, если нормы $\| B^m(\tau) \|$ $(0 \leqslant m\tau \leqslant T)$ равномерно ограничены. Устойчивость в таком смысле при дополнительном условии согласованности в силу известной теоремы Лакса (см. [1], стр.57) влечет за собой сходимость.

В настоящей работе будет показано, что оценки (1.6), (1.7) при сформулированных выше требованиях к φ, ψ и операторам A_n, а также условиях $\tau \| A_n \| \to 0$, $\| A_n \varphi \| < const$, $\| A_n^2 \varphi \| < const$, $\| A_n \psi \| < const$, когда $n \to \infty$, приводят к слабой сходимости векторов $u^{(n)}(t)$ к $u(t)$. Вполне вероятно, что на самом деле имеет место сильная сходимость.

2. О единственности решения задачи (1.1)

Решение задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = \hat{A}x \quad ; \qquad x\Big|_{t=+0} = f ,$$

где $\hat{A}$ – линейный оператор в банаховом пространстве, единственно, если при достаточно больших $\lambda > 0$ отсутствует спектр и

$$\overline{\lim_{\lambda \to +\infty}} \frac{\ln \| R(\lambda, \hat{A}) \|}{\lambda} \leqslant 0 .$$

Этот результат принадлежит Ю.И.Любичу [2] и применим к рассматриваемому случаю. Для дальнейшего исследования схемы (1.4) нам понадобится, однако, доказательство единственности решения, понимаемого в более общем смысле. Используемый метод в случае, когда A есть эллиптический оператор второго порядка, содержится в книге О.А.Ладыженской [3].

Если $u(t)$ есть решение задачи (1.1) в обычном смысле, а $v(t)$ – произвольный непрерывно дифференцируемый элемент, обращающийся в нуль вблизи точки $t = T$ и принадлежащий при всех t к $\mathcal{D}_{\sqrt{A}}$, то

$$\int_0^T (u'_t, v'_t)_H \, dt + (\psi, v_0) = \int_0^T (Au, v)_H \, dt = \int_0^T (\sqrt{A}\, u, \sqrt{A}\, v)_H \, dt \qquad (2.1)$$

и, следовательно, разность $W(t)$ двух возможных решений u_1 и u_2 удовлетворяет тождеству

$$\int_0^T (W'_t, v'_t)_H \, dt = \int_0^T (AW, v)_H \, dt = \int_0^T (\sqrt{A}\, W, \sqrt{A}\, v)_H \, dt, \qquad (2.2)$$

причем,

$$\lim_{t \to +0} \| W(t) \| = 0 . \qquad (2.3)$$

Отметим, что в (2.1) производную u'_t можно понимать и обобщенно, т.е. как такой элемент H, норма которого квадратично суммируема на $[0, T]$ и для любого непрерывно дифференцируемого вектора $g(t)$, обращающегося в нуль вблизи точек $t = 0$ и $t = T$, выполняется равенство

$$\int_0^T (u'_t, g)_H\, dt = -\int_0^T (u, g')_H\, dt. \qquad (2.4)$$

В следующем параграфе будет показано, что при сделанных выше предположениях функции $u^{(n)}(t)$, определяемые формулами (1.6), слабо сходятся к вектору $u(t)$, имеющему обобщенную производную, причем $u(t) \in \mathcal{D}_A$, $\sqrt{A}\, u(t)$ сильно непрерывен и справедливо тождество (2.1). Так как сильная производная является и обобщенной, то из тривиальности решения задачи (2.2)-- (2.3) будет автоматически следовать сходимость $u^{(n)}(t)$ к обычному решению.

Переходя к доказательству равенства $W = 0$, заметим, что тождество (2.2) остается верным и при подстановке в него элемента $v(t)$, непрерывно дифференцируемого всюду, за исключением одной точки $t = t_1$, где существуют лишь левая и правая производные. Такой элемент, равный нулю на промежутке (t_1, T), можно аппроксимировать последовательностью элементов $v_m(t)$, отличных от нуля на $(0, t_1 - \delta_m)$, где $\delta_m \to 0$ при $m \to \infty$ и имеющих непрерывную производную всюду на $(0, T)$, так, чтобы

$$\int_0^T (W', v'_m)_H\, dt \longrightarrow \int_0^{t_1} (W', v')_H\, dt.$$

Поэтому (2.2) превращается в равенство

$$\int_0^{t_1} (W'_t, v'_t)_H\, dt = \int_0^{t_1} (AW, v)_H\, dt = \int_0^{t_1} (\sqrt{A} W, \sqrt{A} v)_H\, dt. \qquad (2.5)$$

Следуя методу О.А.Ладыженской, положим в (2.5)

$$v(t) = \begin{cases} \int_t^{t_1} W(\xi)\, d\xi, & 0 \leqslant t \leqslant t_1 \\ 0, & t_1 \leqslant t \leqslant T. \end{cases} \qquad (2.6)$$

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_{m_1}$ и $\eta_1, \ldots, \eta_{m_2}$ – точки двух различных разбиений промежутка (t, t_1). Тогда

$$\sum_{k=1}^{m_1} W(\xi_k)\Delta\xi_k \in \mathcal{D}_{\sqrt{A}}, \quad \sum_{i=1}^{m_2} W(\eta_i)\Delta\eta_i \in \mathcal{D}_{\sqrt{A}}. \qquad (2.7)$$

Обозначив $\delta_{ki} = \Delta\xi_k \cap \Delta\eta_i$, имеем

$$\Delta\xi_k = \sum_{i=1}^{m_2} \Delta\xi_k \cap \Delta\eta_i = \sum_{i=1}^{m_2} \delta_{ki}; \quad \Delta\eta_i = \sum_{k=1}^{m_1} \Delta\eta_i \cap \Delta\xi_k = \sum_{k=1}^{m_1} \delta_{ki}.$$

$$\Big\| \sum_{k=1}^{m_1} \sqrt{A}\, W(\xi_k)\Delta\xi_k - \sum_{i=1}^{m_2} \sqrt{A}\, W(\eta_i)\Delta\eta_i \Big\| =$$

$$= \Big\| \sum_{K=1}^{m_1} \sum_{i=1}^{m_2} \sqrt{A}\,(W(\xi_K) - W(\eta_i))\delta_{Ki} \Big\| \leqslant (t_1 - t) \max_{\delta_{Ki} \neq \phi} \|\sqrt{A}\,(W(\xi_K) - W(\eta_i))\|.$$

Из непрерывности $\sqrt{A}\,W(t)$ вытекает фундаментальность последовательности $\sqrt{A}\sum W(\xi_K)\ \Delta\xi_K$ и сходимость к пределу

$$\int_t^{t_1} \sqrt{A}\,W(\xi)\,d\xi\,,$$

а из замкнутости $\sqrt{A}$ следует, что $v(t) \in \mathcal{D}_{\sqrt{A}}$ и, кроме того,

$$\sqrt{A}\,v(t) = \begin{cases} \int_t^{t_1} \sqrt{A}\,W(\xi)\,d\xi\,, & 0 \leqslant t \leqslant t_1\,, \\ 0\,, & t_1 \leqslant t \leqslant T. \end{cases} \tag{2.8}$$

Наконец, если $t \in [0,\ t_1)$, то при достаточно малом Δt

$$\Big\| \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} + W(t) \Big\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t_1} \|W(\xi) - W(t)\|\,d\xi \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta t \to 0\,.$$

Подставив (2.8) в (2.5), найдем

$$\int_0^{t_1} (W'_t\,, W)_H\,dt = \int_0^{t_1} \Big(\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{A}\,v\,,\ \sqrt{A}\,v\Big)_H\,dt\,. \tag{2.9}$$

Выберем в H ортонормированный базис $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ и запишем разложения

$$W(t) = \sum_{K=1}^{\infty} W_K(t)\,e_K\,,\quad W'(t) = \sum_{K=1}^{\infty} \mu_K(t)\,e_K\,. \tag{2.10}$$

Функции $W_K(t)$ непрерывны, а $\mu_K(t) \in L_2(0,T)$. Более того, подставляя (2.10) в (2.4) и взяв $g(t) = a(t)\,e_K$, где $a(t)$ – любая непрерывно дифференцируемая функция, равная нулю вблизи концов промежутка $(0,\ T)$, сможем написать

$$\int_0^T \mu_K(t)\,a(t)\,dt = -\int_0^T W_K(t)\,a'(t)\,dt\,. \tag{2.11}$$

По известной теореме ([3], стр. 29) $W_K(t)$ абсолютно непрерывны и $W'_K(t) = \mu_K(t)$. Следовательно

$$Re \int_{t_2}^{t_1} (W'(t), W(t))\,dt = \frac{1}{2}\,\|W(t_1)\|_H^2 - \frac{1}{2}\,\|W(t_2)\|_H^2\,.$$

Применяя аналогичное рассуждение к правой части (2.9), учитывая (2.3) и равенство $v(t_1)=0$, получим

$$\frac{1}{2}\|W(t_1)\|_H^2=-\frac{1}{2}\|\sqrt{A}\,v(0)\|_H^2\ , \tag{2.12}$$

т.е. $W(t_1)=0$. Этим заканчивается доказательство.

3. Исследование сходимости схемы (1.4)

Введем пространство H_T векторов $u=u(t)$, которые при почти всех t из $[0,T]$ являются элементами H и такие, что

$$\|u\|_{H_T}^2=\int_0^T\|u(t)\|_H^2\,dt<+\infty\,. \tag{3.1}$$

В этой норме справедливы оценки, немедленно следующие из (1.6), (1,7), (1,5).

$$\|u^n(t)\|_{H_T}^2\leqslant 2\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\tau}^{(k+1)\tau}\left[\left(\frac{t-k\tau}{\tau}\right)^2\|u_{k+1}\|_H^2+\left(\frac{(k+1)\tau-t}{\tau}\right)^2\|u_k\|_H^2\right]dt\leqslant$$

$$\leqslant 2(e^{2T}\|u_0\|^2+Te^{2T}[(A_n\varphi,\varphi)+(\psi,\psi)])\,, \tag{3.2}$$

$$\|v^{(n)}(t)\|_{H_T}^2\leqslant\frac{4}{3}T\left((A_n\varphi,\varphi)+(\psi,\psi)\right), \tag{3.3}$$

$$\|\sqrt{A_n}\,u^{(n)}(t)\|_{H_T}^2\leqslant\frac{4}{3}T\left((A_n\varphi,\varphi)+(\psi,\psi)\right), \tag{3.4}$$

$$\|A_n v^{(n)}(t)\|_{H_T}^2\leqslant\frac{4}{3}T\left((A_n^2\varphi,A_n\varphi)+(A_n\psi,A_n\psi)\right), \tag{3.5}$$

$$\|A_n u^{(n)}(t)\|_{H_T}^2\leqslant\frac{4}{3}T\left((A_n\varphi,A_n\varphi)+(A_n\psi,\psi)\right). \tag{3.6}$$

Две последние оценки получаются из (3.3) и (3.4), если к обеим частям схемы (1.4) применить один раз оператор A_n, а другой раз $\sqrt{A_n}$. Так как вместе с H сепарабельно и H_T, то оценки (3.2)–(3.6) с предположением об ограниченности величин $\|A_n\varphi\|$, $\|A_n^2\varphi\|$, $\|A_n\psi\|$ позволяют сделать заключение о слабой компактности в H_T семейств $\{u^{(n)}(t)\}$, $\{v^{(n)}(t)\}$, $\{A_n u^{(n)}(t)\}$, $\{A_n v^{(n)}(t)\}$.

Предположим, что уже сами эти последовательности сходятся и обозначим соответствующие слабые пределы через $u(t)$, $v(t)$, $p(t)$ и $q(t)$.

ЛЕММА 2. Если $\tau \|A_n\| \to 0$ при $n \to \infty$, то $v(t)$ и $q(t)$ являются обобщенными производными для $u(t)$ и $p(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g(t) \in H_T$, существует сильная производная $g'(t)$ и $g(t) \equiv 0$ вблизи концов интервала $(0,T)$. Тогда для достаточно малого τ

$$\int_0^T \left(\frac{u^{(n)}(t+\tau) - u^{(n)}(t)}{\tau}, g(t) \right)_H dt = -\int_0^T \left(u^{(n)}(t), \frac{g(t)-g(t-\tau)}{\tau} \right)_H dt.$$

Из (1.5), (1.4), (1.3) находим

$$\frac{u^{(n)}(t+\tau) - u^{(n)}(t)}{\tau} = \frac{t-k\tau}{\tau} \cdot \frac{S_n^{(1)} - E}{\tau} u_{k+1} + \tag{3.7}$$

$$+ \frac{t-k\tau}{\tau} \cdot \frac{S_n^{(2)}}{\tau} v_{k+1} + \frac{(k+1)\tau - t}{\tau} \cdot \frac{S_n^{(1)} - E}{\tau} u_k +$$

$$+ \frac{(k+1)\tau - t}{\tau} \cdot \frac{S_n^{(2)}}{\tau} v_k \qquad (k\tau \leqslant t < (k+1)\tau);$$

$$\left\| \frac{S_n^{(1)} - E}{\tau} \right\| \leqslant \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\tau^{2p-1} \|A_n\|^p}{(2p)!} \to 0; \tag{3.8}$$

$$\left\| \frac{S_n^{(2)}}{\tau} - E \right\| \leqslant \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\tau^{2p} \|A_n\|^p}{(2p+1)!} \to 0.$$

Поэтому

$$\int_0^T \left(\frac{u^{(n)}(t+\tau) - u^{(n)}(t)}{\tau}, g(t) \right)_H dt = \int_0^T \left(\frac{S_n^{(1)} - E}{\tau} u^{(n)}(t), g(t) \right)_H dt +$$

$$+ \int_0^T \left(\left(\frac{S_n^{(2)}}{\tau} - E \right) v^{(n)}(t), g(t) \right)_H dt + \tag{3.9}$$

$$+ \int_0^T \left(v^{(n)}(t), g(t) \right)_H dt \to \int_0^T \left(v(t), g(t) \right)_H dt.$$

В то же время из существования сильной производной $g'(t)$ следует

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ -\int_0^T \left(u^{(n)}(t), \frac{g(t) - g(t-\tau)}{\tau} \right)_H dt \right\} = -\int_0^T \left(u(t), g'(t) \right)_H dt. \tag{3.10}$$

Сравнивая (3.9) и (3.10), приходим к доказательству леммы для пары $u(t)$ и $v(t)$. Так как p_k и q_k связаны теми же соотношениями (3.7), то и для пары $p(t)$ и $q(t)$ действительно то же доказательство.
Следствие: элементы $u(t)$ и $p(t)$ сильно непрерывны.
В самом деле, пусть, например,

$$u(t)=\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)e_k\ , \quad v(t)=\sum_{k=1}^{\infty} v_k(t)e_k\ .$$

Так как $v_k(t)$ есть обобщенная производная для $u_k(t)$ и $u_k(t)$ абсолютно непрерывна, то

$$\|u(t+\Delta t)-u(t)\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\int_t^{t+\Delta t} v_k(\xi)\,d\xi\Big|^2\le \Delta t\,\|v(t)\|^2_{H_T}\ .$$

ЛЕММА 3. Элемент $u(t)$ входит в $\mathcal{D}_A$ и $A_n u^{(n)}(t)$ слабо сходится в H_T к $Au(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем сначала g в множестве M_A. Тогда предельный переход в равенстве

$$\int_0^{T_1}(A_n u^{(n)}(t), g)_H\,dt=\int_0^{T_1}(u^{(n)}(t), A_n g)_H\,dt \quad [1] \tag{3.11}$$

с учетом обозначений, предшествовавших лемме 2, дает

$$\int_0^{T_1}(P(t), g)_H\,dt=\int_0^{T_1}(u(t), Ag)_H\,dt\ . \tag{3.12}$$

Существенная самосопряженность оператора A позволяет расширить равенство (3.12) на все $\mathcal{D}_A$.
Следовательно, $u(t)\in\mathcal{D}_A$ и $p(t)=Au(t)$.

Аналогично покажем, что $q(t)=Av(t)$.
Следствие: элемент $\sqrt{A}\,u(t)$ сильно непрерывен. Достаточно проверить, что $\sqrt{A}\,v(t)$ есть обобщенная производная для $\sqrt{A}\,u(t)$. С этой целью рассмотрим равенство

$$\int_0^T(\sqrt{A}\,u(t),\sqrt{A}(\sqrt{A}-\lambda)^{-1}g'(t))\,dt=-\int_0^T(\sqrt{A}\,v(t),\sqrt{A}(\sqrt{A}-\lambda)^{-1}g(t))\,dt,$$

где λ – произвольное комплексное число, или

$$\int_0^T(\sqrt{A}\,u(t), g'(t))\,dt+\bar{\lambda}\int_0^T(u(t),\sqrt{A}(\sqrt{A}-\lambda)^{-1}g'(t))\,dt=$$

$$=-\int_0^T(\sqrt{A}\,v(t), g(t))\,dt-\bar{\lambda}\int_0^T(v(t),\sqrt{A}(\sqrt{A}-\lambda)^{-1}g(t))\,dt\ ,$$

---

1) Здесь T_1 – любое число из $(0, T)$.

или

$$\int_0^T(\sqrt{A}u(t),g'(t))dt+\bar{\lambda}\int_0^T(u(t),g'(t))dt+\bar{\lambda}^2\int_0^T(u(t),(\sqrt{A}-\lambda)^{-1}g'(t))dt=$$

$$=-\int_0^T(\sqrt{A}v(t),g(t))dt-\bar{\lambda}\int_0^T(v(t),g(t))dt-\bar{\lambda}^2\int_0^T(v(t),(\sqrt{A}-\lambda)^{-1}g(t))dt,$$

или

$$\int_0^T(\sqrt{A}v(t),g(t))dt=-\int_0^T(\sqrt{A}u(t),g'(t))dt.$$

ЛЕММА 4. Для элемента $u(t)$ выполняется начальное условие

$$\lim_{t\to 0}\|u(t)-u_0\|=0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой части (α,β) промежутка $(0,T)$ можем написать

$$\int_\alpha^\beta\|u(t)-u_0\|^2dt=\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta(u(t)-u_0,u^{(n)}(t)-u_0)dt. \tag{3.13}$$

Подынтегральные выражения здесь непрерывны.

$$\begin{aligned}&|(u(t_2)-u_0,u^{(n)}(t_2)-u_0)-(u(t_1)-u_0,u^{(n)}(t_1)-u_0)|\leqslant\\&\leqslant|(u(t_2)-u(t_1),\ u^{(n)}(t_2)-u_0)|+\\&+|(u(t_1)-u_0,\ u^{(n)}(t_2)-u^{(n)}(t_1))|\leqslant\\&\leqslant A\|u(t_2)-u(t_1)\|+B\|u^{(n)}(t_2)-u^{(n)}(t_1)\|\end{aligned} \tag{3.14}$$

(A и B – постоянные, не зависящие от точек t_1,t_2).
Для любого κ

$$\left\|\frac{u_{\kappa+1}-u_\kappa}{\tau}\right\|\leqslant\left\|\frac{S_n^{(1)}-E}{\tau}\right\|\|u_\kappa\|+\left\|\frac{S_n^{(2)}}{\tau}\right\|\|v_\kappa\|<C, \tag{3.15}$$

где постоянная C не зависит от τ и κ.

Пусть $s\tau\leqslant t_2<(s+1)\tau,\ \ell\tau\leqslant t_1<(\ell+1)\tau$. Тогда

$$\|u^{(n)}(t_2)-u^{(n)}(t_1)\|=\left\|\frac{t_2-s\tau}{\tau}(u_{s+1}-u_s)-\frac{t_1-\ell\tau}{\tau}(u_{\ell+1}-u_\ell)+u_s-u_\ell\right\|$$

и, как легко видеть,

$$\|u^{(n)}(t_2)-u^{(n)}(t_1)\| \leqslant \begin{cases} 2C(t_2-t_1), & |t_2-t_1|<2\tau \\ 5C(t_2-t_1), & |t_2-t_1|\geqslant 2\tau. \end{cases} \tag{3.16}$$

Из (3.14), (3.16) и непрерывности вектора $u(t)$ заключаем о равностепенной непрерывности семейства функций $(u^{(n)}(t)-u_0,\ u(t)-u_0)$ и, следовательно, можно выделить подпоследовательность, которая в силу (3.13) будет сходиться к $\|u(t)-u_0\|^2$ равномерно на $(0,T)$:

$$\begin{aligned} \|u(t)-u_0\|_H^2 &= \lim_{n_i\to\infty}(u^{(n_i)}(t)-u_0,\ u(t)-u_0)\leqslant \\ &\leqslant \lim_{n_i\to\infty}\|u^{(n_i)}(t)-u_0\|\cdot\lim\|u(t)-u_0\|. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Получаем неравенство

$$\|u(t)-u_0\|_H \leqslant \lim_{n_i\to\infty}\|u^{(n_i)}(t)-u_0\|_H \tag{3.18}$$

Пусть $s\tau\leqslant t<(s+1)\tau$. Тогда

$$\|u^{(n)}(t)-u_0\|\leqslant\|u_{s+1}-u_s\|+\|u_s-u_0\|\leqslant C\tau+Ct \tag{3.19}$$

и $\lim\|u^{(n)}(t)-u_0\|\leqslant Ct$, а значит

$$\lim_{t\to 0}\|u(t)-u_0\|=0. \tag{3.20}$$

Перейдем теперь к доказательству интегрального тождества. Пусть $g(t)\in H_T$, существует непрерывная производная $g'(t)$ и вблизи точки $t=T$ $g(t)=0$. Обозначим $g(t_k)=g(k\tau)=g_k$, умножим второе равенство схемы (1.4) на g_k скалярно и просуммируем по k от $k=0$ до $k=n-1$. Приходим к формуле

$$\sum_{k=0}^{n-1}(v_{k+1}-v_k,\ g_k)=-\sum_{k=0}^{n-1}(A_nS_n^{(2)}u_k,g_k)+\sum_{k=0}^{n-1}((S_n^{(1)}-E)v_k,\ g_k). \tag{3.21}$$

Для последнего слагаемого в правой части имеем

$$\begin{aligned} \Big|\sum_{k=0}^{n-1}((S_n^{(1)}-E)v_k,g_k)\Big| &\leqslant\|S_n^{(1)}-E\|\sum_{k=0}^{n-1}\|v_k\|\|g_k\|\leqslant \\ &\leqslant const\cdot n\cdot\|S_n^{(1)}-E\|\leqslant const\cdot n\cdot\tau^2\|A_n\|\to 0 \quad \text{при} \quad \tau\to 0. \end{aligned}$$

Сумму в левой части перепишем в виде

$$\sum_{k=0}^{n-1}(v_{k+1}-v_k,\ g_k)=-\sum_{k=1}^{n-1}(v_k,\ g_k-g_{k-1})-(v_0,g_0) \tag{3.22}$$

и вновь полученную сумму сравним с интегралом

$$\int_0^T \left(v, \frac{\partial g}{\partial t}\right)_H dt\,, \tag{3.23}$$

$$\int_0^T \left(v(t), \frac{\partial g}{\partial t}\right)_H dt = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \left(v^{(n)}(t), \frac{g_{k+1}-g_k}{\tau}\right)_H dt + \right. \tag{3.24}$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \left(v^{(n)}(t), \frac{\partial g}{\partial t} - \frac{g_{k+1}-g_k}{\tau}\right)_H dt \right\}.$$

Далее

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \left(v^{(n)}(t), \frac{\partial g}{\partial t} - \frac{g_{k+1}-g_k}{\tau}\right)_H dt \right| \leqslant \tag{3.25}$$

$$\leqslant \sqrt{\int_0^T \|v^{(n)}(t)\|_H^2 dt}\ \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \left\| \frac{\partial g}{\partial t} - \frac{g_{k+1}-g_k}{\tau} \right\|^2 dt}\,.$$

Возьмем снова разложение

$$g(t) = \sum_{s=1}^{\infty} g_s(t) e_s\,. \tag{3.26}$$

Функции $g_s(t)$ абсолютно непрерывны.

$$g_k = g(k\tau) = \sum_{s=1}^{\infty} g_s(k\tau) e_k\,; \qquad g'(t) = \sum_{s=1}^{\infty} g_s'(t) e_s\,, \tag{3.27}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \left\| \frac{\partial g}{\partial t} - \frac{g_{k+1}-g_k}{\tau} \right\|^2 dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} dt \sum_{s=1}^{\infty} \left| g_s'(t) - \frac{g_s((k+1)\tau) - g_s(k\tau)}{\tau} \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \sum_{s=1}^{\infty} |g_s'(t) - g_s'(\xi)|^2 d\xi\, dt =$$

$$= \frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \|g'(\xi) - g'(t)\|^2 d\xi\, dt \leqslant$$

$$\leqslant T \max_{\xi, t, |\xi - t| < \tau} \|g'(\xi) - g'(t)\|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad \tau \to 0. \tag{3.28}$$

Соотношение (3.24) и оценки (3.25), (3.3) и (3.28) позволяют написать

$$\int_0^T \left(v(t), \frac{\partial g}{\partial t}\right)_H dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \left(v^{(n)}(t), \frac{g_{k+1}-g_k}{\tau}\right)_H dt. \tag{3.29}$$

Займемся упрощением суммы в (3.29).

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \left(v^{(n)}(t), \frac{g_{k+1}-g_k}{\tau}\right)_H dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \left(\frac{t-k\tau}{\tau} v_{k+1} +\right.$$

$$\left. + \frac{(k+1)\tau - t}{\tau} v_k\ ,\ \frac{g_{k+1}-g_k}{\tau}\right)_H dt = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (v_k, g_k - g_{k-1}) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (v_k, g_k - g_{k-1}) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (v_k, g_{k+1} - 2g_k + g_{k-1});$$

$$(g_{-1} = 0)$$

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} (v_k, g_{k+1} - 2g_k + g_{k-1}) \right| \leqslant const \sum_{k=0}^{n-1} \| g_{k+1} - 2g_k + g_{k-1} \|_H =$$

$$= const \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum_{s=1}^{\infty} \left| \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} (g_s'(\xi) - g_s'(\xi-\tau))\, d\xi \right|^2} \leqslant$$

$$\leqslant const\ \tau n \max \sqrt{\sum_{s=1}^{\infty} |g_s'(t+\tau) - g_s'(t)|^2} \leqslant T const \max_t \| g'(t+\tau) - g'(t) \|.$$

Формулы (3.22), (3.29) и последняя оценка показывают, что

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k, g_k) = -\int_0^T \left(v, \frac{\partial g}{\partial t}\right)_H dt - (v_0, g_0). \tag{3.30}$$

Обратимся, наконец, к сумме в правой части (3.21). Ее естественно сравнить с интегралом

$$\int_0^T (A_n u^{(n)}(t), g(t))_H dt.$$

Имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1}(A_n S_n^{(2)} u_k, g_k) = \tau \sum_{k=0}^{n-1}(A_n u_k, g_k) + \sum_{k=0}^{n-1}(A_n(S_n^{(2)}-\tau)u_k, g_k); \qquad (3.31)$$

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}(A_n(S_n^{(2)}-\tau)u_k, g_k)\right| \leqslant \|S_n^{(2)}-\tau\|\,\|A_n\|\sum_{k=0}^{n-1}\|u_k\|\,\|g_k\| \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\, n\tau^3 \|A_n\|^2 \leqslant \mathrm{const}\, T\,(\tau\|A_n\|)^2 \to 0; \qquad (3.32)$$

$$\int_0^T (A_n u^{(n)}(t), g(t))_H\, dt = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\tau}^{(k+1)\tau}(A_n u^{(n)}(t), g_k)\, dt +$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\tau}^{(k+1)\tau}(A_n u^{(n)}(t), g(t)-g_k)\, dt; \qquad (3.33)$$

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\tau}^{(k+1)\tau}(A_n u^{(n)}(t), g(t)-g_k)\,dt\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{\int_{k\tau}^{(k+1)\tau}\|A_n u^{(n)}(t)\|^2 dt}\,\cdot$$

$$\cdot\sqrt{\int_{k\tau}^{(k+1)\tau}\|g(t)-g_k\|_H^2\, dt} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{\int_{k\tau}^{(k+1)\tau}\left\|\frac{t-k\tau}{\tau}A_n u_{k+1} + \frac{(k+1)\tau-t}{\tau}A_n u_k\right\|^2 dt}\,\cdot$$

$$\cdot\sqrt{\int_{k\tau}^{(k+1)\tau}\sum_{s=1}^{\infty}|g_s(t)-g_s(k\tau)|^2\, dt} \leqslant$$

$$\leqslant \tau\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{2}{3}\|A_n u_k\|^2 + \frac{2}{3}\|A_n u_{k+1}\|^2}\cdot \max_{|t-\xi|<\tau}\sqrt{\sum_{s=1}^{\infty}(g_s(t)-g_s(\xi))^2} \to 0$$

при $\tau \to 0$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\tau}^{(k+1)\tau}(A_n u^{(n)}(t), g_k)_H\, dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\tau}^{(k+1)\tau}\left(\frac{t-k\tau}{\tau}A_n u_{k+1} + \frac{(k+1)\tau-t}{\tau}A_n u_k, g_k\right)dt =$$

$$= \frac{\tau}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(A_n u_{k+1}, g_k) + \frac{\tau}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(A_n u_k, g_k) = \tau\sum_{k=0}^{n-1}(A_n u_k, g_k) + \varepsilon(\tau),$$

где $\varepsilon(\tau)\to 0$ вместе с τ. Итак,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}(A_n S_n^{(2)} u_k, g_k)=\int_0^T (Au(t),g(t))_H dt. \qquad (3.34)$$

Формулами (3.21), (3.30), (3.34) обосновывается интегральное тождество (2.1). В силу теоремы единственности сходится к $u(t)$ и вся последовательность $u^{(n)}(t)$.

Резюмируем содержание настоящего параграфа в следующей теореме.

ТЕОРЕМА. Если A существенно самосопряженный положительный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, M_A – множество элементов, замыканием с которого этот оператор расширяется до самосопряженного, A_n – последовательность ограниченных положительных операторов такая, что $\|A_n g - Ag\|\to 0$ при $n\to\infty$ для элементов g из M_A, $\varphi\in\mathcal{D}_A$, $\psi\in\mathcal{D}_{\sqrt{A}}$, причем $\|A_n\varphi\|$, $\|A_n^2\varphi\|$, $\|A_n\psi\|$ остаются ограниченными, $n^{-1}\|A_n\|\to 0$, то последовательность $u^{(n)}(t)$ $(0\leqslant t\leqslant T)$, определяемая формулами (1,5), (1.4), (1.3), слабо сходится к решению $u(t)$ задачи (1.1) в норме (3.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Р.Д.Рихтмайер. Разностные методы решения краевых задач. ИЛ, 1960.

2. Ю.И.Любич. К теории единственности решения абстрактной задачи Коши, УМН, т.ХУ1, вып. 5, 101, 1961.

3. О.А.Ладыженская. Смешенная задача для гиперболического уравнения. ГИТТЛ, 1953.

ON STABLE FINITE-DIFFERENCE SCHEMES FOR THE ABSTRACT CAUCHY PROBLEM

G.N.Gestrin

A method is developed to construct stable schemes for the Cauchy problem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-Au;\quad u\big|_{t=0}=\varphi;\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi;\quad 0\leqslant t\leqslant T,$$

where A is an unbounded essentially self-adjoint positive operator in the separable Hilbert space. The said difference scheme has the form

$$u_{k+1}=S_n^{(1)}u_k+S_n^{(2)}v_k;\qquad u_0=\varphi;\quad v_0=\psi;$$

$$v_{k+1}=-A_nS_n^{(2)}u_k+S_n^{(1)}v_k\qquad (k=0,1,2,\dots,n-1).$$

Here A is a sequence of bounded self-adjoint operators, approximating the operator A, and $S_n^{(1)}$, $S_n^{(2)}$ are determined by the formulae

$$S_n^{(1)}=\sum_{p=0}^{N}(-1)^p\frac{A_n^p\tau^{2p}}{(2p)!};\qquad S_n^{(2)}=\sum_{p=0}^{N}(-1)^p\cdot\frac{A_n^p\tau^{2p+1}}{(2p+1)!};\ \tau=\frac{T}{n}, \qquad (1.3)$$

N stands for an arbitrary odd integer. The elements are shown to converge to the solution of the problem (1.1).

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1 9 7 3 выпуск 1У

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ ГРИНА ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

Г.В. Сузиков

1. Введение

В работе [1] рассмотрен предельный случай смешанной краевой задачи для уравнения Гельмгольца. Соответствующие доказательства используют в значительной мере результаты работы С.Заремба [2] . Имея в виду в дальнейшем обобщить результаты работы [1] на случай самосопряженного произвольного эллиптического оператора 2-го порядка, мы в настоящей работе получаем (следуя указанной работе С.Заремба) необходимые для такого обобщения результаты.

Пусть Γ замкнутая ограниченная поверхность Ляпунова с показателем Ляпунова, равным единице, в пространстве m измерений. Область, внутреннюю к Γ, назовем D_i, внешнюю – D_e.

Пусть множество S с гладкой границей γ, лежащее на поверхности Γ, представляет собой объединение конечного числа открытых, связных и непересекающихся кусков $S_i\ (i=1,2,\dots,p)$ поверхности Γ. Области, являющиеся дополнением $S\cup\gamma$ до всего пространства E_m и до Γ назовем соответственно D и Σ.

Рассмотрим в области D самосопряженный эллиптический оператор M, определяемый равенством :

$$Mu(x)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{k=1}^{m}a_{ik}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\right)+c(x)\,u(x),$$

причем, мы предполагаем, что функции $a_{ik}(x)=a_{ki}(x)$, $(a_{ik}(x))_{x_j}$, $c(x)$, ограничены в E_m и принадлежат в E_m таким классам : $a_{ik}(x)\in C^{(3)}$, $c(x)\in C^{(1)}$, дискриминант формы $\sum a_{ik}\xi_i\xi_k$ ограничен снизу положительным числом, $c(x)<0$, $c(x)<-d^2 (d>0)$ вне некоторой ограниченной области.

2. Некоторые вспомогательные утверждения

Здесь мы установим некоторые утверждения для решений уравнения $Mu(x)=0$, которые будут полезны нам в дальнейшем.

ЛЕММА 1. Если функция $u(x)$ есть ограниченное решение уравнения $Mu(x)=0$ в D_i (или в D_e), равное 1 на S и нулю на Σ, то $0<u<1$ в D_i (или в D_e) и в каждой точке x_0 границы множеств Σ и S найдется направление $\ell(x_0)$, не ортогональное нормали к поверхности Γ в этой точке и число $0<\alpha<1$ такие, что при стремлении точки $x\in D_i$ (D_e) к точке x_0 по этому направлению будем иметь :

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = \alpha ,$$

при этом направление ℓ можно выбирать так, что $\ell(x_0)$ и α будут регулярными функциями точки x_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для определенности рассмотрим случай D_i . Хорошо известно [3] , что функция $u(x)$, удовлетворяющая условиям леммы, единственна и допускает представление :

$$u(x) = \int_S a(y) \frac{\partial \mathcal{G}^d(x,y)}{\partial \nu_y} dS_y , \tag{2.1}$$

где $\mathcal{G}^d(x,y)$ – функция Грина задачи Дирихле для уравнения $Mu = 0$ в области D_i (с границей Γ); ν_y – конормаль к поверхности Γ в точке y ; $a(y) = [\sum_{i=1}^{m} (\sum_{k=1}^{m} a_{ik}(y) X_k(y))^2]^{\frac{1}{2}}$, $X_k(y)$ – направляющие косинусы нормали к поверхности Γ в точке y . Так как функция $a(y) > 0$ (в силу эллиптичности оператора M) и функция $\frac{\partial \mathcal{G}^d(x,y)}{\partial \nu_y} > 0$ (см., напр., [4]), то, если $mes\ S \neq 0$, очевидно, всюду в D_i имеем $0 < u(x)$ и $u(x) < V(x)$, (2.2)

где функция $V(x)$ определена формулой (2.1) с интегрированием по всей поверхности Γ . Так определенная функция $V(x)$ равна 1 на всей поверхности Γ и удовлетворяет уравнению $MV = 0$ в D_i . В силу принципа максимума она меньше или равна единице всюду. Отсюда и из (2.2) следует неравенство

$$0 < u(x) < 1 .$$

Остальные утверждения леммы, очевидно, будут доказаны, если показать, что из условий : $x \to x_0$, $x \in D_i$ и лежит на конормали к поверхности Γ в точке x_0 , тогда следует $\lim_{x \to x_0} u(x) = \frac{1}{2}$.

Для вычисления этого предела заметим следующее: 1) в силу хорошо известных свойств функции Грина предел в (2.1) при $x \to x_0 \in \Gamma$ равен пределу такого же выражения, в котором интегрирование распространено на любую часть поверхности Γ , вырезанную из S любой окрестностью точки x_0 ;

2) используя свойство 3 функции Грина, указанное на стр. 82 [3] , вычисления на стр. 41 этой же книги, имеем оценку :

$$a(y) \frac{\partial \mathcal{G}^d(x,y)}{\partial \nu_y} = \frac{2}{\omega_m \sqrt{A(x_0)}} \frac{\sum_{i=1}^{m} X_i(y)(x_i - y_i)}{[\sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}(x_0)(x_i - y_i)(x_k - y_k)]^{m/2}} + O(r^{2-m})$$

для $x \in D_i$ и лежащих на конормали к поверхности Γ в точке x_0 и $y \in \Gamma$, где ω_m площадь $m-1$ – мерной сферы радиуса 1, $A(x_0) = det\|a_{ik}(x_0)\|_{i,k=1}^{m}$,

$A_{i,k}$ – элементы матрицы обратной к матрице $\|a_{ik}\|_{i,k=1}^{m}$; x_i , y_i – координаты точек x и y соответственно.

В силу замечаний 1), 2) и гладкости поверхности Γ и функций A , A_{ik} и формулы (2.1), очевидно, имеем для x , лежащих на конормали к Γ в точке x_0 :

$$\lim_{x\to x_0} u(x) = \lim_{x\to x_0} \int\limits_{\Sigma(x_0,\rho)} \frac{2}{\omega_m\sqrt{A(x_0)}} \frac{\sum_{i=1}^{m} X_i(y)(x_i-y_i)\,dS_y}{\left[\sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}(x_0)(x_i-y_i)(x_k-y_k)\right]^{m/2}} + \varepsilon_1(\rho), \quad (2.3)$$

где $\Sigma(x_0,\rho)$ – проекция части множества S, лежащей внутри сферы радиуса ρ с центром в точке x_0, на касательную плоскость к поверхности Γ в этой точке, а функция $\varepsilon_1(\rho)\to 0$ при $\rho\to 0$.

Выбирая систему координат так, чтобы ее начало было в точке x_0, а ось y_m была направлена по нормали к поверхности Γ в точке x_0 и обозначая расстояние от точки x до точки x_0 через t, после несложных вычислений приводим выражение (2.3) к виду :

$$\lim_{x\to x_0} u(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{2t\,a_{mm}(x_0)}{a(x_0)\,\omega_m\sqrt{A(x_0)}} \int\limits_{\Sigma(x_0,\rho)} \frac{dy_1\ldots dy_{m-1}}{\left[\sum_{i,k=1}^{m-1} A_{ik}(x_0)+t^2\,\frac{a_{mm}(x_0)}{a^2(x_0)}\right]^{\frac{m}{2}}} + \varepsilon_1(\rho). \quad (2.4)$$

Для вычисления этого предела сделаем сначала замену переменных

$$\sqrt{\|A_{ik}(x_0)\|_{i,k=1}^{m-1}}\; y = \xi\,, \quad (2.5)$$

затем введем сферические координаты с центром в точке x_0. Соответствующие вычисления приводят выражение (2.4) к виду :

$$\lim_{x\to x_0} u(x) = \lim_{t\to 0} \frac{2t\sqrt{a_{mm}(x_0)}}{a(x_0)\,\omega_m} \left[\int\limits_{\Sigma'(x_0,\rho)} \frac{\rho^{m-2}\,d\rho\,d\Omega}{\sqrt{\rho^2+t^2\cdot\frac{a_{mm}(x_0)}{a^2(x_0)}}^{\,m}} + \varepsilon_1(\rho)\right], \quad (2.6)$$

где $\Sigma'(x_0,\rho)$ – образ $\Sigma(x_0,\rho)$ при преобразовании (2.5). Заметим, что в силу гладкости и неособенности этого преобразования область $\Sigma'(x_0,\rho)$ такова, что она описывается условиями :

$$0\leqslant\rho\leqslant f(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{m-1});\quad f(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{m-1})>0;\quad \vartheta_1,\ldots,\vartheta_{m-1}\in\Omega\,,$$

где Ω – часть $(m-1)$ – мерной сферы радиуса 1, близкая к половине сферы, точнее $\operatorname{mes}\Omega = \frac{\omega_{m-1}}{2} + \varepsilon_2(\rho)$, $\varepsilon_2\to 0$ при $\rho\to 0$. Указанное замечание позволяет сделать в (2.6) предельный переход. Соответствующие вычисления дают :

$$\lim_{x\to x_0} u(x) = \frac{1}{\omega_m}\,\frac{(m-3)(m-5)\ldots 5\cdot 3}{(m-2)(m-4)\ldots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}\left[\frac{\omega_{m-1}}{2}+\varepsilon_2(\rho)\right]+\varepsilon_1(\rho)$$

при m четных и

$$\lim_{x\to x_0} u(x) = \frac{1}{\omega_m}\,\frac{(m-3)(m-5)\ldots 4\cdot 2}{(m-2)(m-4)\ldots 5\cdot 3}\left[\frac{\omega_{m-1}}{2}+\varepsilon_2(\rho)\right]+\varepsilon_1(\rho)$$

при m нечетных.

Подставляя в полученные выражения значения ω_m, ω_{m-1}, учитывая произвольность ρ и стремление к нулю функций $\varepsilon_1(\rho)$ и $\varepsilon_2(\rho)$, отсюда выводим требуемое: если $x \in D_i$ и находится на конормали к поверхности Γ в точке x_0, то $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = \frac{1}{2}$.

Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Пусть K – некоторая ограниченная область. Если функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению $Mu(x)=0$ в K и непрерывна в $\bar{K}$, то производная функции $u(x)$ по любому направлению, взятая в центре любой сферы, лежащей в K, оценивается через радиус R сферы и колебание ω функции $u(x)$ на поверхности сферы следующим образом :

$$\left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right| \leqslant C_1 \frac{\omega}{R} + C_2 \max_{x \in \bar{K}} |u(x)| R \qquad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

причем, числа C_1 и C_2 не зависят ни от радиуса R, ни от местоположения сферы, если $R < R_0$, где R_0 – число, определяемое лишь оператором M и областью K.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим функцию $u(x)$ внутри сферы $S(x_0, R)$ потенциалом двойного слоя, распространненого на поверхности сферы :

$$u(x) = 2 \int\limits_{S(x_0,R)} \varphi(\xi) a(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} F(x, \xi)\, dS_\xi , \tag{2.7}$$

x_0 – центр сферы $S(x_0, R)$, R – радиус, ν_ξ – конормаль к поверхности сферы, взятая в точке ξ сферы, $F(x, \xi)$ – главное фундаментальное решение уравнения $Mu(x)=0$. Такое представление всегда возможно, и функция $\varphi(\xi)$ удовлетворяет интегральному уравнению :

$$\varphi(\xi) = 2 \int\limits_{S(x_0,R)} \varphi(\eta) a(\eta) \frac{\partial}{\partial \nu_\eta} F(\xi, \eta)\, dS_\eta + u(\xi). \tag{2.8}$$

Из определения главного фундаментального решения $F(x, y)$, формул (8.1), (8.4), [3] и гладкости коэффициентов оператора M после несложных выкладок получаем: уравнение (2.8) можно переписать в виде

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{2\omega_m \sqrt{A(x_0)}\, R} \int\limits_{S(x_0,R)} \frac{r^2(\xi,\eta)\, \varphi(\eta)\, dS_\eta}{\left[\sum\limits_{r,s=1}^{m} A_{rs}(x_0)(\xi_s - \eta_s)(\xi_r - \eta_r)\right]^{m/2}} + \int\limits_{S(x_0,R)} \tilde{K}_1(\xi,\eta)\varphi(\eta)\, dS_\eta + u(\xi), \tag{2.9}$$

где

$$|\tilde{K}_1(\xi,\eta)| \leqslant C r^{2-m} \tag{2.10}$$

равномерно относительно x_0 и R таких, что сфера $S(x_0, R) \in \bar{K}$.

Сведем интегрирование в (2.9) к интегрированию по единичной сфере, концентрической к сфере $S(x_0, R)$. Имеем :

$$\varphi(\xi)=\frac{1}{2\omega_m\sqrt{A(x_0)}}\int\limits_{S(1)}\frac{r^2(\xi,\eta)\varphi(\eta)dS_\eta}{[\sum\limits_{r,s=1}^{m}A_{rs}(x_0)(\xi_s-\eta_s)(\xi_r-\eta_r)]^{m/2}}+ \tag{2.11}$$

$$+R\int\limits_{S(1)}K_1(\xi,\eta)\varphi(\eta)dS_\eta+u(\xi),$$

причем, очевидно, из (2.10) следует :

$$|K_1(\xi,\eta)|\leqslant C r^{2-m}(\xi,\eta) \tag{2.12}$$

равномерно.

Мы будем записывать уравнение (2.11) соответственно его записи еще и в операторной форме :

$$\varphi=K_{x_0}\varphi+RK_1\varphi+u. \tag{2.13}$$

Рассмотрим уравнение :

$$\varphi=K_{x_0}\cdot\varphi+f\cdot \tag{2.14}$$

Это уравнение всегда разрешимо. Действительно, как нетрудно видеть, такое уравнение получается для плотности потенциала двойного слоя φ, если решать методами теории потенциала задачу Дирихле для внутренности сферы $S(1)$ для уравнения :

$$\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\sum_k a_{ik}(x_0)\frac{\partial u}{\partial x_k}\Big)=0$$

с граничными значениями f на поверхности сферы. Такая задача всегда однозначно разрешима. Обозначим через $L(\xi,\eta,x_0)$ и L ядро резольвенты и резольвенту уравнения (2.14) соответственно.

Пользуясь резольвентой L, уравнение (2.13) перепишем в виде :

$$\varphi=RK_1\varphi+u+L(RK_1\varphi+u).$$

Откуда и из оценки (2.12), очевидно, имеем

$$\max|\varphi|\leqslant CR\max|\varphi|+\max|u|+C(x_0)[CR\max|\varphi|+\max|u|], \tag{2.15}$$

где $C(x_0)$ норма оператора L, рассматриваемого как оператор из C в C. Так как ядро оператора K_{x_0} непрерывно зависит от x_0, то и норма резольвенты этого оператора непрерывно зависит от x_0. Таким образом, $C(x_0)$ есть непрерывная функция x_0. Положим $C_0=\max\limits_{x_0\in K}C(x_0)$. Очевидно, $C_0>0$. Пусть теперь $R_0=\dfrac{1}{2C(1+C_0)}$. Тогда, очевидно, из (2.15), следует, что при $R<R_0$:

$$\max_{x\in S(1)} |\varphi| \leqslant 2(1+C_0)\max_{x\in S(1)} |u(x)|. \tag{2.16}$$

Возвращаясь к формуле (2.7), из очевидной равномерной оценки :

$$\frac{C_1}{r^m(\xi,x)} \leqslant \left|\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial \nu_\xi} F(x,\xi)\right| \leqslant \frac{C_2}{r^m(\xi,x)}, \qquad x=x_0,\ \xi\in S(x_0,R)$$

и (2.16) выводим :

$$\left|\frac{\partial u(x_0)}{\partial x_j}\right| \leqslant \frac{C}{R}\max_{x\in S(x_0,R)} |u(x)|$$

при $R<R_0$ с константой C, не зависящей ни от x_0 ни от R.

Рассмотрим теперь функцию :

$$V(x) = u(x) - \frac{\bar{u}+\underline{u}}{2} - \int\limits_{K(x_0,R)} c(y)\frac{\bar{u}+\underline{u}}{2} F(x,y)\,d\tau_y, \tag{2.17}$$

где $\bar{u}$ и $\underline{u}$ – максимум и минимум функции u на поверхности $S(x_0,R)$ шара $K(x_0,R)$. Функция $V(x)$, очевидно, удовлетворяет уравнению $MV(x)=0$ поэтому, проведя предыдущие рассуждения, имеем :

$$\left|\frac{\partial V(x_0)}{\partial x_j}\right| \leqslant \frac{C}{R}\max_{x\in S(x_0,R)} |V(x)| \tag{2.18}$$

равномерно.

Из (2.17), очевидно, следует :

$$\max_{x\in S(x_0,R)} |V(x)| = \frac{\omega}{2} + \max_{x\in S(x_0,R)} \left|\int\limits_{K(x_0,R)} \frac{\bar{u}+\underline{u}}{2} c(y) F(x,y)\,d\tau_y\right|, \tag{2.19}$$

где ω – колебание функции u. Так как

$$\max_{x\in S(x_0,R)} \left|\int\limits_{K(x_0,R)} \frac{\bar{u}+\underline{u}}{2} c(y)F(x,y)\,d\tau_y\right| \leqslant C\max_{x\in K} |u(x)|\,R^2$$

равномерно, то из (2.18) и (2.19) выводим :

$$\left|\frac{\partial V(x_0)}{\partial x_j}\right| \leqslant C\,\frac{\omega}{2R} + C\cdot\max_{x\in K} |u|\,R. \tag{2.20}$$

Дифференцируя (2.17) по x_j и учитывая очевидную равномерную оценку :

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_j}\int\limits_{K(x_0,R)} c(y)\frac{\bar{u}+\underline{u}}{2} F(x,y)\,d\tau_y\right| \leqslant C\max_{x\in K} |u(x)|\,R$$

и оценку (2.20) получаем

$$\left| \frac{\partial u(x_0)}{\partial x_j} \right| \leqslant C_1 \frac{\omega}{R} + C_2 \max_{x \in K} |u(x)| R$$

равномерно относительно x_0 и R, таких, что $S(x_0, R) \in \bar{K}$.

Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Пусть функция $u(x)$, удовлетворяющая в окрестности части S поверхности Γ, лежащей в D_i (или в D_e) уравнению $Mu(x)=0$, непрерывна вплоть до Γ и на части S поверхности Γ равна нулю. Рассмотрим точку A на S, лежащую на положительном расстоянии от границы S. Проведем сферу Σ радиуса ρ, касающуюся поверхности Γ в точке A и лежащую целиком в $D_e(D_i)$. Рассмотрим сферу Σ' радиуса $\rho' > \rho$ концентрическую с первой и такую, что часть D_i (D_e), попавшая внутрь этой сферы, односвязна. Назовем эту часть T. Функция $u(x)$ допускает в области T оценку:

$$|u(x)| \leqslant \frac{r(c,x)-\rho}{\rho'-\rho} \cdot \frac{\rho'^n}{\rho^n} \cdot \varepsilon, \tag{2.21}$$

где $r(c,x)$ – расстояние между точками c и x, c – центр сфер Σ и Σ', ε – верхняя грань значений функции $u(x)$ на части границы T не лежащей на Γ, $n>0$ – некоторое число, определяемое лишь оператором M.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию

$$V(x) = \frac{\frac{1}{\rho^n} - \frac{1}{r^n(c,x)}}{\frac{1}{\rho^n} - \frac{1}{\rho'^n}} \cdot \varepsilon .$$

Эта функция при любом $n>0$ положительная в T, на части границы T, не лежащей на Γ, ее значения равны ε, на S она неотрицательна. Вычислим еще MV. Имеем: $MV = -n(n+2)\times$

$$\times \frac{\sum\limits_{i,k=1}^{m} a_{ik}(x)(x_i-c_i)(x_k-c_k)}{r^{n+4}}\varepsilon + n\frac{\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ii}(x)}{r^{n+2}}\varepsilon +$$
$$+ n\frac{\sum\limits_{i,k=1}^{m} (a_{ik}(x))_{x_j}(x_k-c_k)}{r^{n+2}}\varepsilon + cV.$$

Положим:

$$\lambda_0 = \min_{x_0 \in E_m} [\lambda_{min}(x)],$$

$\lambda_{min}(x)$ – минимальное собственное значение матрицы $\|a_{ik}(x)\|_{i,k=1}^{m}$,

$$\mu_0 = \max_{x \in E_m} \sum_{i=1}^{m} a_{ii}(x), \quad \nu_0 = \max_{1 \leqslant j \leqslant m,\, x \in E_m} \sum_{i,k=1}^{m} (a_{ik}(x))_{x_j}.$$

Очевидно:

$$MV \leqslant -\frac{n(n+2)}{r^{n+2}}\lambda_0\varepsilon + \frac{n}{r^{n+2}}\mu_0\varepsilon + \frac{nr}{r^{n+2}}\nu_0\varepsilon + cV.$$

Выберем n таким, чтобы было

$$(n+2)\lambda_0 - (\mu_0 + \nu_0 d(\Gamma)) > 0,$$

где $d(\Gamma)$ – диаметр Γ. Тогда, очевидно, будет $MV \leq 0$. Из принципа максимума и свойств функций u, V выводим: $|u(x)| \leq V(x),\ x \in T$ т.е.

$$|u(x)| \leq \frac{\frac{1}{\rho^n} - \frac{1}{r^n(c,x)}}{\frac{1}{\rho^n} - \frac{1}{\rho'^n}}\,\varepsilon,$$

откуда очевидным образом следует оценка (2.21)

Лемма доказана.

3. Функция Грина одной задачи Дирихле. Некоторые ее свойства

Рассмотрим такую задачу Дирихле: найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую в области D уравнению:

$$M\,u(x) = 0, \quad x \in D \tag{3.1}$$

и такому краевому условию на границе S области D:

$$u(x) = f(x), \quad x \in S. \tag{3.2}$$

ТЕОРЕМА 1. Краевая задача (3.1) - (3.2) имеет единственное решение, непрерывное во всем пространстве, если функция $f(x)$ непрерывна и ограничена на S.

Мы не приводим доказательство этой теоремы. Заметим только, что единственность есть простое следствие принципа максимума для уравнения (3.1), а существование может быть установлено с помощью видоизменения С. Заремба метода Шварца ([2] § 5) и леммы 1.

Функцию Грина $\mathcal{G}(x,y)$ задачи (3.1) - (3.2) определим, как обычно, соотношениями:

$$\mathcal{G}(x,y) = F(x,y) - g(x,y),$$

$$M_y\, g(x,y) = 0 \qquad x, y \in D,$$

$$\mathcal{G}(x,y) = 0 \qquad y \in S,\ x \in D.$$

Функция $g(x,y)$ есть непрерывная функция точки y во всем пространстве для всех $x \in D$.

ТЕОРЕМА 2. Функция Грина $\mathcal{G}(x,y)$ краевой задачи (3.1)-(3.2)

1) существует и единственна;
2) неотрицательна и, кроме того, неотрицательна и функция $g(x,y)$;
3) допускает представление $\mathcal{G}(x,y) = F(x,y) - \int\limits_S \varphi(x,\xi)\,F(\xi,y)\,dS_\xi,\ x \in D,$ причем, $\varphi(x,\xi) \geq 0.$
4) симметрична, т.е. $\mathcal{G}(x,y) = \mathcal{G}(y,x)$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Утверждения 1 и 2 теоремы являются простыми следствиями теоремы 1 и принципа максимума для уравнения $Mu=0$. Поэтому мы переходим к доказательству **утверждения 3**.

Так как функция $g(x,y)$, рассматриваемая как функция точки y, удовлетворяет уравнению $Mg=0$ в окрестности S и ее значения на S – гладкая функция, то, как хорошо известно ([3] § 36), на S существуют и непрерывны величины

$$\left(\frac{\partial g(x,\xi)}{\partial \nu_\xi}\right)_e, \quad \left(\frac{\partial g(x,\xi)}{\partial \nu_\xi}\right)_i \qquad \xi\in S, \quad x\in D,$$

где значками e, i обозначены предельные значения величин в скобках извне и изнутри соответственно.

Оценим теперь производные функции $g(x,y)$ при приближении точки y к границе γ множества S.

Обозначим через a и b расстояния от рассматриваемой точки y до S и до γ соответственно.

Пусть $\frac{a}{b}\geqslant\frac{1}{4}$. Проведем сферу радиуса a с центром в точке y. Для производных функций g в центре этой сферы (т.е. в точке y), в силу леммы **2**, имеем оценку

$$\left|\frac{\partial g(x,y)}{\partial y_i}\right|\leqslant C_1\,\frac{\omega}{a}+C_2, \qquad (j=1,2,\ldots,m), \quad x\in D_i,$$

где ω – колебание функции g на поверхности сферы. Так как функция g непрерывна в окрестности S и при $b\to 0$ в рассматриваемой области $a\to 0$, то, очевидно, $\omega\to 0$ при $b\to 0$. Поэтому имеем при $\frac{a}{b}\geqslant\frac{1}{4}$

$$b\left|\frac{\partial g(x,y)}{\partial y_i}\right|\to 0, \quad \text{если } b\to 0 \quad (j=1,2,\ldots,m). \tag{3.4}$$

Пусть $\frac{a}{b}<\frac{1}{4}$. Рассмотрим функцию $\mathcal{G}(x,y)$. При $x\in D$ она как функция точки y удовлетворяет уравнению $M_y\mathcal{G}=0$ в некоторой окрестности S, равна нулю на S и непрерывна вплоть до S. Следовательно, к этой функции применимы леммы **2** и **3**. Рассмотрим сферу радиуса a с центром в точке y, радиуса a столь малого, что эта сфера не содержит внутри себя точки x. В силу леммы **2** имеем в точке y :

$$\left|\frac{\partial\mathcal{G}(x,y)}{\partial y_j}\right|\leqslant C_1\,\frac{\omega}{a}+C_2, \qquad (j=1,2,\ldots,m), \tag{3.5}$$

где ω – колебание функции $\mathcal{G}(x,y)$ на поверхности сферы. Для оценки ω проведем такое построение: обозначим через A точку, в которой сфера радиуса a касается S и проведем концентрические сферы радиусов $\frac{b}{4}$ и b такие, что сфера радиуса $\frac{b}{4}$ касается S в точке A и целиком лежит в той из областей D_i, D_e, которая не содержит точки y ; часть T области D_i или D_e, лежащая внутри сферы радиуса b и содержащая сферу радиуса a односвязна. Очевидно, при малых a и b такое построение возможно. При достаточно малых b в силу леммы 3 функция $\mathcal{G}(x,y)$ в точках области T и, следовательно, в точках сферы радиуса a допускает оценку :

$$\left|\mathcal{G}(x,y)\right|\leqslant\frac{r-\frac{b}{4}}{b-\frac{b}{4}}\;\frac{b^n}{\left(\frac{b}{4}\right)^n}\cdot\varepsilon, \tag{3.6}$$

где r – расстояние от центра концентрических сфер до точки y, ε – максимум функции $\mathcal{G}(x,y)$ на части границы области T, не содержащей точек поверхности Γ. Очевидно, что $r-\frac{b}{4}\leqslant 2a$, когда точка y принадлежит сфере радиуса a, поэтому из (3.6) имеем :

$$\omega \leq 2\,\frac{2a}{b-\frac{b}{4}}\,\frac{b^n}{(\frac{b}{4})^n}\cdot\varepsilon\,. \qquad (3.7)$$

Подставляя полученную оценку в (3.5), имеем при малых b оценку :

$$\left|\frac{\partial\mathcal{G}(x,y)}{\partial y_j}\right| \leq C_1\,\frac{4^{n+2}}{3}\,\frac{\varepsilon}{b}+C_2\,.$$

Так как функция $\mathcal{G}(x,y)$ непрерывна в некоторой окрестности S и равна нулю на $S(x\in D)$, то $\varepsilon\to 0$ при $b\to 0$. Отсюда и из (3.7) выводим

$$b\left|\frac{\partial\mathcal{G}(x,y)}{\partial y_j}\right|\to 0 \quad \text{при} \quad b\to 0 \quad (j=1,2,\dots,m)\,. \qquad (3.8)$$

Т.к. функция $F(x,y)$ при $x\in D$ имеет ограниченные производные по y в окрестности S, то из (3.8) имеем : производные функции $g(x,y)$ допускают оценку

$$b\left|\frac{\partial g(x,y)}{\partial y_j}\right|\to 0 \quad \text{при} \quad b\to 0 \quad (j=1,2,\dots,m)\,. \qquad (3.9)$$

Применим к функциям $g(x,\xi)$ и $F(y,\xi)$ вторую формулу Грина в области $\Delta\rho$ образованной точками пространства, не лежащими на S и удаленными от γ и от y более чем на ρ и перейдем в полученном равенстве к пределу при $\rho\to 0$. Получим, пользуясь существованием и непрерывностью величин (3.3) и оценками (3.4) и (3.9), равенство :

$$g(x,y)=\lim_{\rho\to 0}\int_{S_\rho}\left[\left(\frac{\partial g(x,\xi)}{\partial\nu_\xi}\right)_i-\left(\frac{\partial g(x,\xi)}{\partial\nu_\xi}\right)_e\right]a(\xi)F(y,\xi)\,dS_\xi\,, \qquad (3.10)$$

где S_ρ часть S, удаленная от γ на ρ. Так как

$$\left(\frac{\partial g(x,\xi)}{\partial\nu_\xi}\right)_i-\left(\frac{\partial g(x,\xi)}{\partial\nu_\xi}\right)_e=\left(\frac{\partial\mathcal{G}(x,\xi)}{\partial\nu_\xi}\right)_i-\left(\frac{\partial\mathcal{G}(x,\xi)}{\partial\nu_\xi}\right)_e\,,$$

то из того, что $\mathcal{G}\geq 0$ всюду и $\mathcal{G}=0$ на S, и неравенств $a>0,\ F>0$, имеем :

$$\varphi(x,\xi)=\left[\left(\frac{\partial g(x,\xi)}{\partial\nu_\xi}\right)_i-\left(\frac{\partial g(x,\xi)}{\partial\nu_\xi}\right)_e\right]a(\xi)\geq 0\,.$$

Из этого неравенства и (3.10) выводим требуемое

$$\mathcal{G}(x,y)=F(x,y)-g(x,y)=F(x,y)-\int_S\varphi(x,\xi)\,F(y,\xi)\,dS_\xi\,.$$

Обычным образом, пользуясь формулой Грина, проверяем симметрию функции $\mathcal{G}(x,y)$.

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть функция $\psi(y)$ ограничена и непрерывна на Σ, тогда функция

$$V(x) = \int_{\Sigma} \psi(y)\, a(y)\, \mathscr{G}(x,y)\, dS_y$$

1) непрерывна во всем пространстве ; 2) равна нулю на S ; 3) удовлетворяет уравнению $MV=0$ всюду вне Γ : 4) ее производные по конормали на Σ изнутри и извне существуют и равны соответственно :

$$\left(\frac{\partial V(x)}{\partial \nu_x}\right)_i = \frac{1}{2}\psi(x) + \int_{\Sigma} \frac{\partial \mathscr{G}(x,y)}{\partial \nu_x}\, a(y)\psi(y)\, dS_y ,$$

$$\left(\frac{\partial V(x)}{\partial \nu_x}\right)_e = -\frac{1}{2}\psi(x) + \int_{\Sigma} \frac{\partial \mathscr{G}(x,y)}{\partial \nu_x}\, a(y)\psi(y)\, dS_y ;$$

5) кроме того, интегральное уравнение :

$$\frac{1}{2}\psi(x) + \int_{\Sigma} \frac{\partial \mathscr{G}(x,y)}{\partial \nu_x}\, a(y)\psi(y)\, dS_y = f(x)$$

является уравнением со слабой особенностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательства всех утверждений теоремы 3 аналогичны, поэтому мы докажем для примера только утверждение 5).

В силу утверждений 3,4 теоремы 2, очевидно, имеем при $y \in D$ во всех точках $x \in \Sigma$

$$\frac{\partial \mathscr{G}(x,y)}{\partial \nu_x} = \frac{\partial F(x,y)}{\partial \nu_x} - \int_{S} \mathscr{G}(y,\xi)\, \frac{\partial F(x,\xi)}{\partial \nu_x}\, a(\xi)\, dS_\xi . \tag{3.11}$$

Если $x,\ y \in \Sigma$, то хорошо известно (см.например, [3] § 22), что

$$\left| \frac{\partial F(x,y)}{\partial \nu_x} \right| \leq C_1 \left[r(x,y) \right]^{-m+2} , \tag{3.12}$$

где C_1 – некоторая постоянная. (Напомним, что Γ – поверхность Ляпунова с показателем Ляпунова, равным единице, а Σ – ее часть). Кроме того, если $x,\ y \in \Gamma$, то имеет место оценка :

$$C_2 [r(x,y)]^{-m+2} \leq F(x,y) \leq C_3 [r(x,y)]^{-m+2}, \tag{3.13}$$

где C_2 и C_3 – некоторые постоянные (см.например, [5], глава 6, § 2). Отсюда и из (3.12) выводим :

$$\left| \frac{\partial F(x,y)}{\partial \nu_x} \right| \leq C F(x,y) \qquad (x,\ y \in \Sigma). \tag{3.14}$$

Оценивая правую часть равенства (3.11) по модулю и пользуясь при этом оценкой (3.14) и неотрицательностью функции $\mathscr{G}$, имеем :

$$\left| \frac{\partial \mathscr{G}(x,y)}{\partial \nu_x} \right| \leq C \left[F(x,y) + \int_{\Sigma} \mathscr{G}(y,\xi)\, F(\xi,x)\, dS_\xi \right].$$

Интеграл в квадратных скобках в этом неравенстве равен $g(x,y)$. Поэтому, учитывая неравенство $g(x,y) \leq F(x,y)$, вытекающее из утверждения 2 теоремы 2, выводим :

$$\left| \frac{\partial \mathcal{G}(x,y)}{\partial \nu_x} \right| \leq 2CF(x,y).$$

Из этого неравенства и неравенства (3.13) очевидно следует утверждение 5 теоремы 3.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.А.Марченко, Г.В.Сузиков. Вторая кревая задача в области со сложной границей. Матем.сб. т.69(111):1 , 1966.

2. С.Заремба. Об одной смешанной задаче, относящейся к уравнению Лапласа.УМН, т.1, вып.3-4 /13-14/, 1946.

3. К.Миранда. Уравнения с частными производными эллиптического типа, 1957.

4. О.А.Олейник. О свойствах решений краевых задач для уравнений эллиптического типа. Мат.сб. 30/72/, 1952.

5. Н.С.Ландкоф. Основы современной теории потенциала. 1966.

SOME PROPERTIES OF GREEN FUNCTIONS FOR ONE DIRICHLET PROBLEM

G.V.Suzikov

The paper studies the properties of the solution of the first boundary problem for the second-order self-conjugate elliptic equation in the domain whose boundary consists of a finite number of nonclosed smooth surfaces.The behaviour of the Green function derivatives has been studied in the neighbourhood of the surface edge.The representation for the Green function has been found.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
1 9 7 3 выпуск IУ

УСРЕДНЕННОЕ ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Г.В. Сузиков

1. Постановка задачи. Формулировка основного результата

Пусть Γ замкнутая ограниченная поверхность Ляпунова с показателем Ляпунова, равным единице, в пространстве E_m. Область, внутреннюю к Γ, назовем D_i, внешнюю – D_e. Пусть множество S на поверхности Γ с гладкой границей γ представляет собой объединение конечного числа открытых, связных и непересекающихся кусков S_i $(i=1,2,\dots,p)$ поверхности Γ. Область, являющуюся дополнением $S\cup\gamma$ до всей поверхности Γ назовем Σ.

Рассмотрим в области D_i с границей Γ такую смешанную краевую задачу: найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$Mu(x)=\Phi(x)\ ,\quad x\in D_i \tag{1.1}$$

и таким краевым условиям:

$$u(x)=0\ ,\quad x\in S \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \nu_x}=0\ ,\quad x\in\Sigma\ .$$

Здесь, и всюду в дальнейшем, $\Phi(x)$ – заданная функция; ν_x – конормаль к поверхности Γ в точке x, определяемая коэффициентами оператора M; M – эллиптический самосопряженный дифференциальный оператор второго порядка с переменными коэффициентами, определяемый равенством;

$$Mu(x)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\sum_{k=1}^{m}a_{ik}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\Big)+c(x)\,u(x),$$

причем, мы предполагаем, что функции $a_{ik}(x)=a_{ki}(x)$, $\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j}$, $c(x)$

определены и ограничены во всем пространстве и принадлежат таким классам: $a_{ik}(x)\in C^{(3)}$, $c(x)\in C^{(1)}$, дискриминант формы $\sum_{i,k=1}^{m}a_{ik}\xi_i\xi_k$ ограничен снизу положительным числом; $c(x)<0$, $c(x)<-d^2$ $(d>0)$ вне некоторой ограниченной области.

Если число p велико, куски S_i малы и распределены по всей поверхности Γ, то естественно ожидать, что можно поставить для области D_i новую краевую задачу с граничным условием одного типа на всей поверхности Γ (возможно не совпадающим ни с одним из условий (1.2)) такую, что решения исходной и новой задач будут мало отличаться, т.е. получить для краевой задачи (1.1) – (1.2) усредненные граничные условия.

Для получения таких условий мы рассматриваем последовательность задач (1.1)-(1.2), когда область D_i, поверхность Γ, оператор M и функции Φ фиксированы, и вместе с n меняются лишь расположенные на поверхности Γ множества $S = S^{(n)}$ и $\Sigma = \Sigma^{(n)}$, причем все время $\Sigma^{(n)} = \Gamma \setminus (S^{(n)} \cup \gamma^{(n)})$, $\gamma^{(n)}$ – общая граница множеств, $S^{(n)}$ и $\Sigma^{(n)}$ – гладкие линии на поверхности Γ, $S^{(n)} = \bigcup_{i=1}^{p_n} S_i^{(n)}$, $S_i^{(n)}$ – связные компоненты $S^{(n)}$, p_n – их количество.

Соответствующие результаты мы устанавливаем для функций Грина $\mathcal{G}(x, y)$ краевых задач (1.1) – (1.2) что, конечно, эквивалентно рассмотрению самих краевых задач.

Обозначим через $N(x, y)$ функцию Грина задачи Неймана для уравнения (1.1) в области D_i с границей Γ и введем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем N – емкостью куска σ поверхности Γ число :

$$N(\sigma) = \int_\sigma \varphi(y)\, dS_y, \tag{1.3}$$

где функция $\varphi(y)$ есть решение уравнения :

$$\int_\sigma \varphi(y)\, N(x, y)\, dS_y = 1, \quad x \in \sigma. \tag{1.4}$$

Введем еще такие обозначения: $N_i^{(n)}$ – N – емкость куска $S_i^{(n)}$ поверхности Γ, $r_{ij}^{(n)}$ – расстояние между множествами $S_i^{(n)}$ и $S_j^{(n)}$, $\sum_\sigma a_i^{(n)}$ – сумма величин $a_i^{(n)}$, распространенная при данном n на все те значения индекса i, при котором множество $S_i^{(n)}$ лежит строго внутри куска σ поверхности Γ

$$a(x) = \Big[\sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}(x) X_k(x)\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2}},$$

где $X_k(x)$ – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности Γ в точке x. Основной результат содержится в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. Пусть при $n \to \infty$ выполнены такие условия:

1) диаметры $d_i^{(n)}$ удаляемых из поверхности Γ кусков $S_i^{(n)}$ равномерно стремятся к нулю при $n \to \infty$;

2) функция $\delta(\rho) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \Big\{ \max_i \sum_{j \neq i} \frac{N_j^{(n)}}{(r_{ij}^{(n)})^{m-2}} \Big\}$

стремится к нулю при $\rho \to 0$;

3) N – емкости $N_i^{(n)}$ кусков $S_i^{(n)}$ поверхности Γ удовлетворяют предельному соотношению $\lim_{n\to\infty} \sum_\sigma N_i^{(n)} = \int_\sigma f(x)\, dS_x$ для любого куска σ поверхности Γ, где $f(x)$ непрерывная на Γ функция.

Тогда при $n \to \infty$ в области D_i существует предел последовательности функций Грина краевых задач (1.1) – (1.2):

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{G}^{(n)}(x,y)=\mathcal{G}(x,y),$$

и этот предел есть функция Грина краевой задачи :

$$Mu(x)=\Phi(x)\,,\quad x\in D_i\,, \tag{1.5}$$

$$a(x)\,\frac{\partial u(x)}{\partial \nu_x}+f(x)u(x)=0\,,\quad x\in\Gamma. \tag{1.6}$$

Результаты, аналогичные полученным здесь, относящиеся к другим уравнениям или к другим краевым условиям, имеются, например, в работах [1] – [3]. Теорема 1 является обобщением теоремы 2 работы [2].

2. Функция Грина смешанной краевой задачи. Одно ее представление

Функцию Грина $\mathcal{G}(x,y)$ задачи (1.1) – (1.2) определим, как обычно, соотношениями :

1) $\mathcal{G}(x,y)=F(x,y)-g(x,y),$

2) $M_y\,g(x,y)=0\,,\quad x,y\in D_i\,,$

3) $\mathcal{G}(x,y)=0\,,\quad y\in S\,,\ x\in D_i\,,$

4) $\dfrac{\partial\mathcal{G}(x,y)}{\partial\nu_y}=0\,,\quad y\in\Sigma\,,\ x\in D_i\,,$

5) $g(x,y)$ при $x\in D_i$ является непрерывной функцией точки y в $D_i\cup\Gamma$.

Здесь и всюду в дальнейшем $F(x,y)$ – главное фундаментальное решение уравнения $Mu=0$.

ТЕОРЕМА 2. Функция Грина $\mathcal{G}(x,y)$ краевой задачи (1.1) – (1.2), определенная соотношениями 1) – 5), существует и единственна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Единственность функции, удовлетворяющей условиям 1) – 5) есть простое следствие принципа максимума для уравнения $Mu=0$.

При доказательстве существования нами будут использованы функции: 1) $\mathcal{G}_{D_i}(x,y)$ – функция Грина задачи Дирихле для уравнения $Mu=0$ в области D_i с границей Γ; 2) $\mathcal{G}_D(x,y)$ – функция Грина следующей задачи Дирихле: $Mu=\Phi(x)$ в области $D=E_m\setminus(S\cup\gamma)$, $u=0$ на S ($\Phi(x)$ – заданная функция); 3) $V(x,y)=\int\limits_\Sigma \mathcal{G}_D(y,\xi)a(\xi)\psi(\xi)dS_\xi$, (2.1), где функция $\psi(\xi)$ есть решение уравнения

$$\frac{1}{2}\psi(\xi)+\int\limits_\Sigma\psi(\eta)a(\eta)\,\frac{\partial\mathcal{G}_D(\xi,\eta)}{\partial\nu_\xi}\,dS_\eta=\frac{\partial\mathcal{G}_{D_i}(x,\xi)}{\partial\nu_\xi}\,,\quad(\xi\in\Sigma,\ x\in D_i). \tag{2.2}$$

Функция $\mathcal{G}_{D_i}(x,y)$ хорошо изучена (см.,например, [4] § 21), функция $\mathcal{G}_D(x,y)$ в необходимом нам объеме изучена в [5]. Что касается функции V, то мы сейчас покажем, что а) она существует, б) что функция $\mathcal{G}(x,y)=\mathcal{G}_{D_i}(x,y)-V$ удовлетворяет условиям 1) – 5), т.е. является функцией Грина краевой задачи (1.1) - (1.2). Для доказательства этих утверждений предположим сначала, что интегральное уравнение (2.2) имеет решение. Тогда, так как функция $\frac{\partial \mathcal{G}_{D_i}(x,\xi)}{\partial \nu_\xi}$ при $\xi \in \Sigma$ и $x \in D_i$ является непрерывной и ограниченной функцией точки ξ на Σ, а ядро этого интегрального уравнения имеет в силу утверждения 5) теоремы 3 работы [5] слабую особенность, функция $\psi(\xi)$ будет тоже ограниченной и непрерывной на Σ и, следовательно, в силу той же теоремы 3 работы [5] и (2.1), (2.2) функция $V(x,y)$ существует, при $x \in D_i$ является непрерывной функцией y в $D_i \cup \gamma$, равна нулю на S, ее производная по конормали на Σ равна $\frac{\partial \mathcal{G}_{D_i}(x,y)}{\partial \nu_y}$ $(y \in \Sigma,\ x \in D_i)$, удовлетворяет уравнению $MV=0$ всюду в D_i. Из этих свойств функции $V(x,y)$ вытекает, что функция $\mathcal{G}(x,y)=\mathcal{G}_{D_i}(x,y)-V$ удовлетворяет условиям 1) - 5). Таким образом для завершения доказательства теоремы нам достаточно показать, что интегральное уравнение (2.2) разрешимо, для чего в свою очередь, достаточно показать, что однородное уравнение, соответствующее (2.2) имеет только тривиальное решение. Пусть $\psi^\circ(\xi)$ такое решение, т.е. пусть :

$$\frac{1}{2}\psi^\circ(\xi)+\int_\Sigma \psi^\circ(\eta)\,a(\eta)\,\frac{\partial \mathcal{G}_D(\xi,\eta)}{\partial \nu_\xi}\,dS_\eta=0.$$

Пользуясь теоремой 3 работы [5], имеем: функция

$$V^\circ(y)=\int_\Sigma \psi^\circ(\xi)\,a(\xi)\,\mathcal{G}_D(y,\xi)\,dS_\xi$$

а) непрерывна во всем пространстве, б) равна нулю на S, в) удовлетворяет уравнению $MV^\circ=0$ всюду вне поверхности Γ, г) ее производная по конормали изнутри равна нулю на Σ. Из этих свойств и принципа максимума для уравнения $MV^\circ=0$ (см., например, [6]) следует, что $V^\circ(y)\equiv 0$ всюду. Так как в силу утверждения 4 теоремы 3 работы [5] функция $\psi^\circ(\xi)$ равна разности предельных значений функции $V^\circ(y)$ на Σ изнутри и извне, то отсюда следует $\psi^\circ(\xi)\equiv 0$.

Теорема доказана.

Для доказательства основной теоремы нам понадобиться одно представление функции $\mathcal{G}(x,y)$, которое устанавливает

ТЕОРЕМА 3. Функция $\mathcal{G}(x,y)$ допускает представление

$$\mathcal{G}(x,y)=N(x,y)-\int_S \vartheta(x,\xi)\,N(y,\xi)\,dS_\xi \tag{2.3}$$

($N(x,y)$ - функция Грина задачи Неймана для уравнения $Mu=0$ в области D_i с границей Γ), причем

$$\vartheta(x,\xi)=\frac{\partial \mathcal{G}(x,\xi)}{\partial \nu_\xi}\,a(\xi) \tag{2.4}$$

и, кроме того, $\mathcal{G}(x,y)\geqslant 0$, $\vartheta(x,\xi)\geqslant 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формулы (2.3), (2.4) формально получаем, применяя к функциям $\mathcal{G}(x,\xi)$ и $N(y,\xi)$ формулу Грина в области D_i.

Неравенства

$$\mathcal{G}(x,y)\geqslant 0,\quad \frac{\partial \mathcal{G}(x,\xi)}{\partial \nu_\xi}\geqslant 0 \qquad \xi \in S,\ x,y \in D_i$$

следуют из принципа максимума. Поэтому для доказательства теоремы достаточно проверить, что к функциям $\mathcal{G}(x,\xi)$ и $N(y,\xi)$ можно применять формулу Грина. Функция $\mathcal{G}(x,\xi)$, как это было установлено при доказательстве теоремы 2, представима в виде :

$$\mathcal{G}(x,\xi)=\mathcal{G}_{D_i}(x,\xi)-V(x,\xi),$$

где $\mathcal{G}_{D_i}(x,y)$ – функция Грина задачи Дирихле для уравнения $Mu=0$ в области D_i с границей Γ, а функция V допускает представление

$$V(x,\xi)=\int\limits_{\Sigma}\psi(x,\eta)\,\mathcal{G}_D(\xi,\eta)\,dS_\eta\ ,\quad x\in D_i\ ,$$

причем, функция ψ в этом равенстве ограничена. Пользуясь представлением и свойствами функции $\mathcal{G}_D(x,y)$, установленными в теореме 2 работы [5], убеждаемся в том, что функция $V(x,\xi)$ при $x\in D_i$ допускает представление в виде потенциала простого слоя с суммируемой плотностью, распространенного по поверхности Γ. Отсюда и из хорошо известных свойств функций $\mathcal{G}_{D_i}(x,\xi)$ и $N(y,\xi)$, очевидно, следует, что формулу Грина к функциям $\mathcal{G}(x,y)$ и $N(x,y)$ применять можно.

Теорема доказана.

3. N – емкость. Некоторые свойства N – емкости

Мы назвали N – емкостью множества S на поверхности Γ число

$$N(S)=\int\limits_S\varphi(\xi)\,dS_\xi\,, \tag{3.1}$$

где $\varphi(\xi)$ есть решение уравнения

$$\int\limits_S\varphi(\xi)N(\xi,x)\,dS_\xi=1\qquad(x\in S). \tag{3.2}$$

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 4. Пусть S открытое множество на поверхности Γ с гладкой границей γ. Тогда N – емкость множества S неотрицательна и для любой функции $\psi(\xi)$ такой, что функция

$$V(x)=\int\limits_S\psi(\xi)\,N(\xi,x)\,dS_\xi \tag{3.3}$$

непрерывна в $D_i\cup\Gamma$, на $S\cup\gamma$ найдется точка x_0, в которой будет выполнено равенство :

$$V(x_0)=\frac{\int\limits_S\psi(\xi)\,dS_\xi}{N(S)}\ . \tag{3.4}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция $\varphi(\xi)$ есть решение уравнения (3.2). Рассмотрим функцию

$$u(x)=\int\limits_S\varphi(\xi)\,N(\xi,x)\,dS_\xi\ . \tag{3.5}$$

Пользуясь хорошо известными свойствами функции $N(x,y)$ (напомним, что $N(x,y)$ – функция Грина задачи Неймана для уравнения $Mu=0$ в области D_i с границей Γ), равенством (3.2) и представлением (3.5), нетрудно видеть, что функция $u(x)$: 1) удовлетворяет уравнению $Mu=0$ в D_i ; 2) равна единице на S ; 3) ее производная по конормали равна нулю на $\Sigma=\Gamma\setminus(S\cup\gamma)$. Такая функция единственна. Кроме того, из представления (3.5) и свойств функции $N(x,y)$, очевидно, имеем

$$\varphi(\xi)=\frac{\partial u(\xi)}{\partial\nu_\xi}\cdot\frac{1}{a(\xi)} \qquad (\xi\in S).$$

Отсюда следует, что уравнение (3.2) имеет единственное решение. Таким образом для доказательства первых двух утверждений теоремы достаточно показать, что уравнение (3.2) имеет хотя бы одно неотрицательное решение или, что тоже самое, показать, что существует функция $u(x)$, удовлетворяющая условиям 1) – 3) и что она допускает представление (3.5) с неотрицательной функцией $\varphi(\xi)$.

Доказательство существования функции $u(x)$, удовлетворяющей условиям 1) – 3), проводится так же, как в предыдущем параграфе было доказано существование функции $\mathcal{G}(x,y)$ с единственным отличием: функцию $\mathcal{G}_{D_i}(x,y)$ нужно всюду заменить на функцию $\tilde{u}(x)$, удовлетворяющую уравнению $M\tilde{u}(x)=0$ всюду вне поверхности Γ и равную единице на Γ . Представление (3.5) и неотрицательность функции $\varphi(\xi)$ доказываются применением формул Грина и принципа максимума так же, как в предыдущем параграфе мы доказали представление для функции $\mathcal{G}(x,y)$.

Для доказательства последнего утверждения теоремы рассмотрим функцию

$$W(x)=\alpha u(x)-V(x),$$

где

$$\alpha=\frac{\int_S\psi(\xi)\,dS_\xi}{N(S)}. \tag{3.6}$$

Если равенство (3.4) не имеет места ни при каком $x_0\in S\cup\gamma$, то очевидно, функция $W(x)$ на $S\cup\gamma$ либо строго больше нуля, либо строго меньше нуля. Покажем, что это невозможно. Рассуждения в обоих случаях одинаковы, поэтому ограничимся случаем $W>0$ на $S\cup\gamma$. Так как $MW=0$ в D_i , $W>0$ на $S\cup\gamma$ и $\frac{\partial W}{\partial\nu}=0$ на $\Sigma=\Gamma\setminus(S\cup\gamma)$, то из принципа максимума вытекает $W\geqslant 0$ в D_i . Кроме того, из непрерывности функции $W\geqslant 0$ в области $D_i\cup\Gamma$ и условия $W>0$ на S следует, что в $D_i\cup\Gamma$ функции $W>0$ на множестве положительной меры. Применяя формулу Грина к функциям W и 1 в области D_i , получаем :

$$-\int_{D_i}c(x)W(x)\,d\tau_x=\int_\Gamma a(x)\frac{\partial W}{\partial\nu_x}\cdot dS_x. \tag{3.7}$$

Так как в силу представления функций u, V, W

$$\frac{\partial W(x)}{\partial\nu_x}=\alpha\frac{\partial u(x)}{\partial\nu_x}-\frac{\partial V(x)}{\partial\nu_x}=\alpha\,\frac{\varphi(x)}{a(x)}-\frac{\psi(x)}{a(x)},$$

то, подставляя полученное выражение в (3.7), получаем противоречие : левая часть в (3.7) положительна ($c<0$, $W>0$) на множестве положительной меры), а правая часть, в силу (3.6) и (3.1) равна нулю. Полученное утверждение доказывает последнее утверждение теоремы.

Теорема 4 доказана.

4. Доказательство основной теоремы.

Рассмотрим последовательность $\mathcal{G}^{(n)}(x,y)$ функций Грина краевых задач

$$Mu^{(n)}(x) = \Phi(x) \qquad x \in D_i ;$$

$$u^{(n)}(x) = 0 \qquad x \in S^{(n)} ;$$

$$\frac{\partial u^{(n)}(x)}{\partial \nu_x} = 0 \qquad x \in \Sigma^{(n)} = \Gamma \setminus (S^{(n)} \cup \gamma^{(n)}),$$

где $\gamma^{(n)}$ – общая граница множеств $\Sigma^{(n)}$ и $S^{(n)}$, когда при $n \to \infty$ выполнены условия теоремы 1.

Теорема 3 дает следующее представление для функций $\mathcal{G}^{(n)}(x,y)$:

$$\mathcal{G}^{(n)}(x,y) = N(x,y) - \int_{S^{(n)}} \vartheta^{(n)}(x,\xi) N(y,\xi)\, dS_\xi . \tag{4.1}$$

Так как $\mathcal{G}^{(n)}(x,y) = 0$ на $S^{(n)} \cup \gamma^{(n)}$, $S^{(n)} = \bigcup_i S_i^{(n)}$

и $S_i^{(n)} \cap S_j^{(n)} = \emptyset$ при $j \neq i$, то при $y \in S_i^{(n)}$

равенство (4.1) можно записать в виде :

$$N(x,y) = \int_{S_i^{(n)}} \vartheta^{(n)}(x,\xi) N(y,\xi)\, dS_\xi + \sum_{j \neq i} \int_{S_j^{(n)}} \vartheta^{(n)}(x,\xi) N(y,\xi)\, dS_\xi ,$$

или, выбирая в качестве y точку $y_i^{(n)}$, существование которой на $S_i^{(n)}$ устанавливает теорема 4, еще и так :

$$N(x, y_i^{(n)}) = \frac{\mu_i^{(n)}}{N_i^{(n)}} + \sum_{j \neq i} \int_{S_j^{(n)}} \vartheta^{(n)}(x,\xi) N(y_i^{(n)},\xi)\, dS_\xi , \tag{4.2}$$

где мы положили

$$\mu_i^{(n)} = \int_{S_i^{(n)}} \vartheta_i^{(n)}(x,\xi)\, dS_\xi . \tag{4.3}$$

Из (4.2), используя неравенства $\vartheta^{(n)} \geqslant 0$, $N \geqslant 0$, получаем :

$$\mu_i^{(n)} \leqslant N_i^{(n)} N(x, y_i^{(n)}) . \tag{4.4}$$

Пользуясь представлением функции $N(x,y)$ в виде потенциала простого слоя, можно показать, что при $x, y \in \Gamma$

$$N(x,y) = 2F(x,y) + r(x,y), \qquad |r(x,y)| \leqslant C\,(r(x,y))^{-m+3}, \tag{4.5}$$

где C некоторая постоянная. (Соответствующее доказательство имеется в работе [2] в случае $m = 3$, $M = \Delta - \lambda^2$, где Δ – оператор Лапласа.

Изменения, которые нужно внести в это доказательство в нашем случае, несущественны). Используя (4.5) и неравенства (3.13) работы [5], из (4.4) выводим при $x \in D_i$

$$\mu_i^{(n)} \leqslant C N_i^{(n)}, \tag{4.6}$$

где число C зависит исключительно от расстояния от точки x до поверхности Γ.

Из (4.3), (4.6) и условий 1), 2), 3) теоремы 1 получаем: существует подпоследовательность $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ такая, что последовательность мер с плотностями $\vartheta^{(n_k)}$, сосредоточенных на поверхности Γ, слабо сходится к некоторой мере с ограниченной плотностью ϑ, сосредоточенной на поверхности Γ и для любого куска σ поверхности Γ выполняется соотношение

$$\lim_{n=n_k \to \infty} \sum_{\sigma} \mu_i^{(n)} = \int_{\sigma} \vartheta(x,\xi)\, dS_\xi . \tag{4.7}$$

Совершая в (4.1) предельный переход по этой подпоследовательности, получаем при $x, y \in D_i$:

$$\mathcal{G}(x,y) = \lim_{n=n_k \to \infty} \mathcal{G}^{(n)}(x,y) = N(x,y) - \int_{\Gamma} \vartheta(x,\xi) N(y,\xi)\, dS_\xi . \tag{4.8}$$

Пусть теперь y_0 – произвольная точка поверхности Γ и $\sigma(y_0,\rho)$ – часть этой поверхности, вырезаемая сферой радиуса ρ с центром в точке y_0. Равенство (4.2) запишем так:

$$\frac{\mu_i^{(n)}}{N_i^{(n)}} + \sum_{\substack{\sigma(y_0,\rho) \\ j\neq i}} \int_{S_j^{(n)}} \vartheta^{(n)}(x,\xi) N(y_i^{(n)},\xi)\, dS_\xi + \int_{(\Gamma\setminus\sigma(y_0,\rho))\cap S^{(n)}} \vartheta^{(n)}(x,\xi) N(y_0,\xi)\, dS_\xi +$$
$$+ \int_{(\Gamma\setminus\sigma(y_0,\rho))\cap S^{(n)}} \vartheta^{(n)}(x,\xi)\left[N(y_i^{(n)},\xi) - N(y_0,\xi)\right] dS_\xi - N(x,y_0) - \left[N(x,y_i^{(n)}) - N(x,y_0)\right] = 0. \tag{4.9}$$

Пользуясь условиями 1), 2), 3) теоремы 1, определением (4.3), слабой сходимостью $\vartheta^{(n_k)}$ к ϑ, оценкой (4.6), равенствами (4.7), (4.8), оценками (4.5) и (3.13) работы [5], ограниченностью функции ϑ и поступая так же, как мы поступали в работе [2] при исследовании выражения (4.14) из (4.9), получаем:

$$\frac{\mu_i^{(n)}}{N_i^{(n)}} = \mathcal{G}(x,y_0) + \varepsilon^{(n)}(y_i^{(n)},\rho), \tag{4.10}$$

причем, равномерно по $y_i^{(n)}$ таким, что $y_i^{(n)} \in \sigma(y_0,\rho)$

$$\overline{\lim_{n=n_k\to\infty}} \left|\varepsilon^{(n)}(y_i^{(n)},\rho)\right| \to 0 \quad \text{при} \quad \rho \to 0. \tag{4.11}$$

Из (4.10) имеем:

$$\left|\sum_{\sigma(y_0,\rho)} \mu_i^n - \mathcal{G}(x,y_0) \sum_{\sigma(y_0,\rho)} N_i^{(n)}\right| \leqslant \sum_{\sigma(y_0,\rho)} \left|\varepsilon^{(n)}(y_i^{(n)},\rho)\right| N_i^{(n)} .$$

Откуда при $n = n_k \to \infty$, учитывая условие 3) теоремы 1 и формулу (4.7), получаем, согласно (4.11) :

$$\left| \int\limits_{\sigma(y_0,\rho)} \vartheta(x,\xi)\, dS_\xi - \mathcal{G}(x,y_0) \int\limits_{\sigma(y_0,\rho)} f(\xi)\, dS_\xi \right| \leqslant \varepsilon(\rho) \int\limits_{\sigma(y_0,\rho)} f(\xi)\, dS_\xi ,$$

где $\varepsilon(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$. Поделив обе части этого неравенства на площадь куска $\sigma(y_0,\rho)$ поверхности Γ и устремив затем ρ к нулю получаем :

$$\vartheta(x, y_0) = \mathcal{G}(x, y_0) f(y_0). \tag{4.12}$$

Откуда, пользуясь (4.8) и ограниченностью ϑ, в частности, выводим : ϑ – непрерывная функция.

Из свойств функции $N(x,y)$ и равенств (4.8), (4.12) вытекает, что функция $\mathcal{G}(x,y)$, определенная равенством (4.8), есть функция Грина краевой задачи (1.5) – (1.6). Таким образом, из последовательности $\mathcal{G}^{(n)}(x,y)$ и, очевидно, из любой ее подпоследовательности, мы выделили подпоследовательность $\mathcal{G}^{(n_k)}(x,y)$ сходящуюся к функции Грина краевой задачи (1.5) – (1.6). Так как функция Грина этой краевой задачи единственна, то отсюда вытекает, что вся последовательность $\mathcal{G}^{(n)}(x,y)$ сходится к функции Грина задачи (1.5)–(1.6).

Теорема доказана .

5. Связь N – емкости с F – емкостью. Эквивалентная формулировка теоремы 1.

F – емкость $C(S)$ множества S определяется соотношениями (см., например, [7], гл. 6 § 2) :

$$C(S) = \int\limits_S \sigma(\xi)\, dS_\xi , \tag{5.1}$$

где $\sigma(\xi)$ есть решение уравнения

$$\int\limits_S \sigma(\xi) F(\xi, x)\, dS_\xi = 1 \quad (x \in S). \tag{5.2}$$

Равенство (5.2) запишем в виде

$$\frac{1}{2} \int\limits_S \sigma(\xi) N(\xi, x)\, dS_\xi + \varepsilon(x) = 1 \quad (x \in S), \tag{5.3}$$

где :

$$\varepsilon(x) = \int\limits_S \sigma(\xi) \left[F(x,\xi) - \frac{1}{2} N(x,\xi) \right] dS_\xi .$$

Оценивая с помощью соотношений (4.5) настоящей работы и (2.13) работы [5], получаем :

$$|\varepsilon| \leqslant \delta(d) \int\limits_S \sigma(\xi) N(\xi, x)\, dS_\xi , \tag{5.4}$$

где d – диаметр S и $\delta(d) \to 0$ при $d \to 0$. В силу теоремы 4 на S найдется точка x_0, в которой будет выполнено равенство :

$$\int\limits_S \sigma(\xi) N(\xi, x) dS_\xi = \frac{\int_S \sigma(\xi) dS_\xi}{N(S)} .$$

которое, согласно (5.1), можно переписать так

$$\int_S G(\xi) N(\xi, x)\, dS_\xi = \frac{c(S)}{N(S)} . \qquad (5.5)$$

Отсюда, полагая в равенстве (5.3) $x = x_0$, получаем

$$\frac{c(S)}{2N(S)} + \varepsilon(x_0) = 1 , \qquad (5.6)$$

причем, из (5.4) и (5.5) следует, что

$$|\varepsilon(x_0)| \leqslant \delta(d) \frac{c(S)}{N(S)} \qquad (5.7)$$

и $\delta(d) \to 0$ при $d \to 0$. Из (5.6) и (5.7) выводим :

$$c(S)[1 + \varepsilon(S)] = 2N(S),$$

причем, $|\varepsilon(S)| \to 0$ при $d \to 0$, где d – диаметр S. Отсюда очевидным образом следует

ТЕОРЕМА 5. Теорема 1 верна, если всюду в условиях заменить N – емкости множеств $S_i^{(n)}$ на половины T – емкостей этих же множеств.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.А.Марченко, Е.Я.Хруслов. Краевые задачи с мелкозернистой границей. Матем. сб. т.65 (107): 3, 1964.
2. В.А.Марченко, Г.В.Сузиков. Вторая краевая задача в области со сложной границей. Матем. сб. т.69/111/:1, 1966.
3. В.Г.Михайленко. Краевые задачи с мелкозернистой границей для эллиптических дифференциальных операторов второго порядка. Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 6, 1968.
4. Миранда. Уравнения с частными производными эллиптического типа, 1957, М.ИЛ.
5. Г.В.Сузиков. Некоторые свойства функции Грина одной задачи Дирихле.Настоящий сб.
6. О.А.Олейник. О свойствах решений краевых задач для уравнений эллиптического типа. Матем. сб. 30/72/, 1952.
7. Н.С.Ландкоф. Основы современной теории потенциала. М., "Наука", 1966.

AVERAGED BOUNDARY CONDITION OF ONE MIXED EDGE PROBLEM FOR ELLIPTIC TYPE EQUATION

G.V.Suzikov

The paper studies one mixed boundary problem for the second-order self-conjugate elliptic equation.Averaged boundary conditions have been deduced for limiting solutions.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1 9 7 3 выпуск IУ

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В ОБЛАСТЯХ С МЕЛКОЗЕРНИСТОЙ ГРАНИЦЕЙ

В.Н. Фенченко

1. Постановка задачи и формулировка результатов

Рассмотрим в области $\Omega^{(N)} = R_3 \setminus F^{(N)}$, где множество $F^{(N)}$ состоит из N односвязных компонент $F_i^{(N)}$, ограниченных гладкими поверхностями $\partial F_i^{(N)}$, следующую краевую задачу для системы уравнений Максвелла :

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E}(x) - ik\vec{H}(x) = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{H}(x) + ik\vec{E}(x) = \vec{J}(x), \quad x \in \Omega^{(N)}, \end{cases} \tag{1.1}$$

$$[\vec{n}_x, \vec{E}(x)] = 0, \quad x \in \partial F_i^{(N)}, \tag{1.2}$$

$$|\vec{E}(x)|, \ |\vec{H}(x)| < \infty, \quad x \to \infty. \tag{1.3}$$

Здесь $\vec{J}(x)$ – заданная функция, k – комплексный параметр ($\Im m\, k > 0$).

Как известно, задача (1.1) – (1.3) имеет единственное решение, которое будем обозначать через $\vec{E}^{(N)}(x), \vec{H}^{(N)}(x)$. Функции $\vec{E}^{(N)}(x)$, $\vec{H}^{(N)}(x)$ описывают электромагнитное поле в однородной изотропной среде, содержащей проводящие включения, а функция $\vec{J}(x)$ характеризует плотность распределения токов в ней [1].

Будем изучать асимптотическое поведение решения $\vec{E}^{(N)}(x)$, $\vec{H}^{(N)}(x)$, когда количество компонент множества $F^{(N)}$ возрастает, а их диаметры $a_i^{(N)}$ и расстояния между ними $R_{i,j}^{(N)}$ уменьшаются так, что объем $\tau^{(N)}$ множества $F^{(N)}$ стремится к нулю.

Предположим, что существует ограниченная область D с гладкой границей ∂D такая, что множество $F^{(N)} \subset D$ при любом N . Функцию $\vec{J}(x)$ будем считать гладкой финитной с носителем, лежащим вне области D .

Для оценки влияния множества $F^{(N)}$ на решение задачи (1.1) – (1.3) введем в качестве характеристик его компонент $F_i^{(N)}$ величины

$$P_{j,k}^{(i,N)} = \delta_{j,k}\, \tau_i^{(N)} + p_{j,k}^{(i,N)},$$

$$M_{j,k}^{(i,N)} = \delta_{j,k}\, \tau_i^{(N)} + m_{j,k}^{(i,N)},$$

где $\delta_{j,k}$ – символ Кронекера, $\tau_i^{(N)}$ – объем множества $F_i^{(N)}$, а $p_{j,k}^{(i,N)}, m_{j,k}^{(i,N)}$ – тензоры его поляризации и виртуальной массы [2] . Они выражаются формулами :

$$P_{j,k}^{(i,N)} = \int\limits_{R_3\setminus F_i^{(N)}} (\operatorname{grad} v_j^{(i,N)}(x),\ \operatorname{grad} v_k^{(i,N)}(x)\, dx,$$

$$m_{j,k}^{(i,N)} = \int\limits_{R_3\setminus F_i^{(N)}} (\operatorname{grad} w_j^{(i,N)}(x),\ \operatorname{grad} w_k^{(i,N)}(x)\, dx.$$

Здесь $v_j^{(i,N)}(x)$, $w_j^{(i,N)}(x)$ – решения в области $R_3 \setminus F_i^{(N)}$ следующих краевых задач

$$\Delta v_j^{(i,N)}(x) = 0, \quad x \in R_3 \setminus F_i^{(N)}, \tag{1.4}$$

$$v_j^{(i,N)}(x) = C + x^j,\ x \in \partial F_i^{(N)}, \tag{1.5}$$

$$\int\limits_{\partial F_i^{(N)}} \frac{\partial v_j^{(i,N)}}{\partial n}(x)\, d\Gamma_x = 0, \tag{1.6}$$

$$v_j^{(i,N)}(x) \to 0, \quad x \to \infty, \tag{1.7}$$

где C – некоторая постоянная, а x^j – j-ая компонента вектора x.

$$\Delta w_j^{(i,N)}(x) = 0, \quad x \in R_3 \setminus F_i^{(N)}, \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial w_j^{(i,N)}}{\partial n}(x) = \cos(n, x^j),\ x \in \partial F_i^{(N)}, \tag{1.9}$$

$$w_j^{(i,N)}(x) \to 0, \quad x \to \infty. \tag{1.10}$$

Обозначим через $C_\tau(\partial F_i^{(N)})$ пространство непрерывных вектор-функций, касательных к $\partial F_i^{(N)}$. Введем интегральные операторы, определенные на вектор-функциях $\vec{\rho}(x) \in C_\tau(\partial F_i^{(N)})$

$$(K_{ij}^{(N)} \vec{\rho})(x) = 2 \int\limits_{\partial F_i^{(N)}} [\vec{n}_x, [\vec{\rho}(\xi), \operatorname{grad}_\xi g(x-\xi)]]\, d\Gamma_\xi,$$

где

$$g(x-\xi) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|}.$$

Учитывая, что вектор-функция $\vec{\rho}(x)$ касательна к $\partial F_i^{(N)}$, нетрудно показать, что ядро интегрального оператора $K_{i,j}^{(N)}$ имеет слабую особенность.

Будем рассматривать оператор $K_{i,j}^{(N)}$ как оператор, действующий из пространства $C_\tau(\partial F_i^{(N)})$ в пространство $C_\tau(\partial F_j^{(N)})$. Оказывается, что при любом фиксированном N существуют ограниченные операторы $(I + K_{i,i}^{(N)})^{-1}$, $(I - K_{i,i}^{(N)})^{-1}$ (см. p.2). Их норма, вообще говоря, зависит от вида поверхностей $\partial F_i^{(N)}$. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что поверхности

$\partial F_i^{(N)}$ являются диффеоморфными образами единичной сферы, причем соответствующие отображения $\vec{z}_i^{(N)}(Q)$ удовлетворяют условиям

$$\left| \frac{\partial \vec{z}_i^{(N)}(Q)}{\partial q_i} \right| \leq c a_i^{(N)}, \quad \left| \frac{\partial^2 \vec{z}_i^{(N)}(Q)}{\partial q_i \, \partial q_j} \right| \leq c a_i^{(N)},$$

$$|\vec{z}_i^{(N)}(Q') - \vec{z}_i^{(N)}(Q'')| \geq c a_i^{(N)} \rho(Q', Q''),$$

где $\rho(Q', Q'')$ – расстояние между точками Q', Q'' на единичной сфере, а постоянные от i, N не зависят. При таких условиях можно показать, что выполняются условия

$$\sigma_i^{(N)} \leq C_1 [a_i^{(N)}]^2, \quad \|(I \pm K_{i,i}^{(N)})^{-1}\| \leq C_2, \tag{1.11}$$

где $\sigma_i^{(N)}$ – площадь поверхности $\partial F_i^{(N)}$, а постоянные C_1, C_2 от i, N не зависят.

Основной результат работы состоит в следующем.

ТЕОРЕМА. Пусть при $N \to \infty$ выполняются условия :

1. Для любой области $G \subset D$ существуют пределы

а) $$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{\tau^{(N)}} \sum_G P_{j,k}^{(i,N)} = \int_G P_{j,k}(x) dx,$$

б) $$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{\tau^{(N)}} \sum_G M_{j,k}^{(i,N)} = \int_G M_{j,k}(x) dx,$$

где $P_{j,k}(x)$, $M_{j,k}(x)$ – дифференцируемые в $\bar{D}$ функции, $\sum\limits_G$ – суммирование по тем значениям i для которых $F_i^{(N)} \subset G$.

2. Имеют место соотношения

$$\max_{1 \leq i \leq N} \frac{a_i^{(N)}}{R_i^{(N)}} = o(1), \quad R_i^{(N)} = \min_{j \neq i} R_{i,j}^{(N)},$$

$$\max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j \neq i} \frac{[a_i^{(N)}]^2}{[R_{i,j}^{(N)}]^2} \leq \alpha C_1^{-1} C_2^{-1} \frac{2\pi}{1 + |k| \operatorname{diam}(D)},$$

где $\alpha < 1$ – постоянная, не зависящая от N, а постоянные C_1 и C_2 из неравенств (1.11).

Тогда решение задачи (1.1) – (1.3) в точках $x \notin \bar{D}$ может быть представлено в виде

$$\vec{E}^{(N)}(x) = \vec{E}^{(0)}(x) + \tau^{(N)}\vec{V}_E(x) + o(\tau^{(N)}),$$
$$\vec{H}^{(N)}(x) = \vec{H}^{(0)}(x) + \tau^{(N)}\vec{V}_H(x) + o(\tau^{(N)}). \qquad (1.12)$$

Здесь функции $\vec{E}^{(0)}(x)$, $\vec{H}^{(0)}(x)$ во всем пространстве R_3 удовлетворяют системе (1.1), а $\vec{V}_E(x)$, $\vec{V}_H(x)$ определены формулами

$$\vec{V}_E(x) = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\int_D P(\xi)\vec{E}^{(0)}(\xi)g(x-\xi)d\xi - ik\operatorname{rot}\int_D M(\xi)\vec{H}^{(0)}(\xi)g(x-\xi)d\xi,$$
$$\vec{V}_H(x) = -ik\operatorname{rot}\int_D P(\xi)\vec{E}^{(0)}(\xi)g(x-\xi)d\xi - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\int_D M(\xi)\vec{H}^{(0)}(\xi)g(x-\xi)d\xi, \qquad (1.13)$$

где $P(x)$, $M(x)$ – матрицы соответственно с элементами $P_{j,k}(x), M_{j,k}(x)$.

Из формул (1.12) – (1.13) вытекает такое

СЛЕДСТВИЕ. Решение задачи (1.1) – (1.3) может быть представлено в виде

$$\vec{E}^{(N)}(x) = \tilde{E}^{(N)}(x) + \vec{Z}_E^{(N)}(x),$$
$$\vec{H}^{(N)}(x) = \tilde{H}^{(N)}(x) + \vec{Z}_H^{(N)}(x), \qquad (1.14)$$

где для $\vec{Z}_E^{(N)}(x)$, $\vec{Z}_H^{(N)}(x)$ в любой области $G \subset R_3 \setminus \bar{D}$ имеет место оценка

$$\| \vec{Z}_E^{(N)}(x), \vec{Z}_H^{(N)}(x) \|_{L_2(G)} = o(\tau^{(N)}),$$

а функции $\tilde{E}^{(N)}(x)$, $\tilde{H}^{(N)}(x)$ во всем пространстве R_3 удовлетворяют (в слабом смысле) следующей системе уравнений Максвелла :

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\tilde{E}^{(N)}(x) - ik\mu^{(N)}(x)\tilde{H}^{(N)}(x) = 0, \\ \operatorname{rot}\tilde{H}^{(N)}(x) + ik\varepsilon^{(N)}(x)\tilde{E}^{(N)}(x) = \vec{J}(x), \end{cases} \qquad (1.15)$$

где

$$\varepsilon^{(N)}(x) = \begin{cases} I, & x \in R_3 \setminus D, \\ I + \tau^{(N)}P(x), & x \in D, \end{cases} \qquad \mu^{(N)}(x) = \begin{cases} I, & x \in R_3 \setminus D, \\ I - \tau^{(N)}M(x), & x \in D, \end{cases}$$

I – единичная матрица.

Иными словами, наличие в среде проводящих включений можно эффективно учесть соответствующим изменением ее параметров.

В [3] было получено представление электростатического поля в среде с мелкими проводящими неоднородностями, можно рассмотреть аналогичную магнитостатическую задачу, исследование которой сводится к исследованию задачи Неймана. Заметим, что соответствующие представления статических полей получаются из

(1.12) при $k=0$.

2. Вспомогательные предложения

1. Рассмотрим некоторые свойства операторов $I+K^{(N)}_{i,i}$, $I-K^{(N)}_{i,i}$. Введем оператор $\mathring{K}^{(N)}_{i,i}$, действующий как $K^{(N)}_{i,i}$ при $k=0$. Убедимся, что оператор $I-\mathring{K}^{(N)}_{i,i}$ отображает пространство $C_\tau(\partial F^{(N)}_i)$ на себя взаимно-однозначно и, следовательно, в силу теоремы Банаха, имеет ограниченный обратный оператор $(I-\mathring{K}^{(N)}_{i,i})^{-1}$. Действительно, так как ядро интегрального оператора $\mathring{K}^{(N)}_{i,i}$ имеет слабую особенность, то он вполне непрерывен. Следовательно, достаточно показать, что в пространстве $C_\tau(\partial F^{(N)}_i)$ уравнение

$$\vec{\rho}(x)-(\mathring{K}^{(N)}_{i,i}\vec{\rho})(x)=0 \tag{2.1}$$

имеет лишь тривиальное решение.

Пусть $\vec{\rho}(x)$ – решение уравнения (2.1). Пользуясь свойствами интегралов со слабой особенностью и сингулярных интегралов, можно показать, что функция $\vec{\rho}(x)$ дифференцируема и ее производные удовлетворяют условию Гельдера. Построим функцию

$$\vec{V}(x)=\operatorname{rot}\int_{\partial F^{(N)}_i}\vec{\rho}(\xi)\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\,d\Gamma_\xi . \tag{2.2}$$

Воспользуемся векторным аналогом первой формулы Грина [4].

$$\int_S([\vec{u}(x),\operatorname{rot}\vec{v}(x)],\vec{n}_x)\,d\Gamma_x=\int_V(\operatorname{rot}\vec{u}(x)\operatorname{rot}\vec{v}(x)-\vec{u}(x)\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{v}(x))\,dx \tag{2.3}$$

Применим формулу (2.3) к функциям $\vec{u}(x)=\vec{v}(x)=\vec{V}(x)$ в области $F^{(N)}_i$. Так как в силу уравнения (2.1) на $\partial F^{(N)}_i$ $[\vec{n}_x,\vec{V}(x)]_+=0$ (знаки "+", "–" обозначают предельные значения соответственно изнутри $F^{(N)}_i$ и извне), то получим, что в $F^{(N)}_i$ функция $\vec{V}(x)$ может быть представлена в виде градиента некоторой скалярной функции $\vec{V}(x)=\operatorname{grad}\varphi(x)$. Из уравнения (2.1) следует, что $\varphi(x)=const$ на $\partial F^{(N)}_i$, а из формулы (2.2), –что $\Delta\varphi(x)=0$ в $F^{(N)}_i$. Поэтому $\varphi(x)\equiv const$, а значит $\vec{V}(x)\equiv 0$ в области $F^{(N)}_i$.

Так как функция $[\vec{n}_x,\operatorname{rot}\vec{V}(x)]$ непрерывна при переходе через $\partial F^{(N)}_i$, то $[\vec{n}_x,\operatorname{rot}\vec{V}(x)]_-=0$ и вновь воспользовавшись (2.3), получим, что в области $R_3\setminus F^{(N)}_i$ функция $\vec{V}(x)$ также может быть представлена в виде градиента некоторой скалярной функции $\vec{V}(x)=\operatorname{grad}\varphi(x)$. Так как $\vec{V}(x)=O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$ при $x\to\infty$, то можно показать, что $\varphi(x)=const+o(1)$ при $x\to\infty$. Из формулы (2.2) следует, что $\Delta\varphi(x)=0$ в $R_3\setminus F^{(N)}_i$, а так как функция $(\vec{n}_x,\vec{V}(x))$ непрерывна при переходе через $\partial F^{(N)}_i$, то на $\partial F^{(N)}_i$ $\frac{\partial\varphi}{\partial n_-}(x)=0$. Следовательно, $\varphi(x)\equiv const$, а тогда $\vec{V}(x)\equiv 0$ в $R_3\setminus F^{(N)}_i$.

Итак, построенная функция $\vec{V}(x)$ есть тождественный нуль, но тогда

$$\vec{\rho}(x) = [\vec{n}_x, \vec{V}(x)]_+ - [\vec{n}_x, \vec{V}(x)]_- = 0,$$

что и доказывает утверждение.

Аналогично можно показать, что оператор $I + \mathring{K}_{i,i}^{(N)}$ также имеет обратный.

Нормы операторов $(I + \mathring{K}_{i,i}^{(N)})^{-1}$, $(I - \mathring{K}_{i,i}^{(N)})^{-1}$, вообще говоря, зависят от вида поверхностей $\partial F_i^{(N)}$. Однако, при сделанных относительно $\partial F_i^{(N)}$ предположениях, нетрудно видеть, что выполняются неравенства

$$\sigma_i^{(N)} \leq C_1 [a_i^{(N)}]^2, \quad \|(I \pm \mathring{K}_{i,i}^{(N)})^{-1}\| \leq C_2', \tag{2.4}$$

где постоянные C_1 и C_2' от i и N не зависят.

Так как

$$\| K_{i,i}^{(N)} - \mathring{K}_{i,i}^{(N)} \| \leq c\, a_i^{(N)2}$$

и постоянная не зависит от i и N, то при достаточно малых $a_i^{(N)}$ операторы $I + K_{i,i}^{(N)}$, $I - K_{i,i}^{(N)}$ имеют обратные и выполняется неравенство

$$\|(I \pm K_{i,i}^{(N)})^{-1}\| \leq C_2, \tag{2.5}$$

причем, постоянная C_2 от i и N не зависит.

Заметим, что существование операторов $(I + K_{i,i}^{(N)})^{-1}$, $(I - K_{i,i}^{(N)})^{-1}$ можно было бы установить непосредственно, но возможность выполнения неравенства (2.5) с постоянной, не зависящей от i и N, была бы не очевидной.

2. Здесь рассмотрим краевые задачи (1.4) - (1.7), (1.8) - (1.10). Покажем, что их решения $v_j^{(i,N)}(x)$, $w_j^{(i,N)}(x)$ могут быть представлены в виде

$$v_j^{(i,N)}(x) = \int_{\partial F_i^{(N)}} \sigma_j^{(i,N)}(\xi) \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{4\pi |x-\xi|}\, d\Gamma_\xi, \tag{2.6}$$

$$w_j^{(i,N)}(x) = \int_{\partial F_i^{(N)}} \mu_j^{(i,N)}(\xi) \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{4\pi |x-\xi|}\, d\Gamma_\xi, \tag{2.7}$$

где функции $\sigma_j^{(i,N)}(x)$, $\mu_j^{(i,N)}(x)$ удовлетворяют уравнениям

$$\sigma_j^{(i,N)}(x) + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial F_i^{(N)}} \sigma_j^{(i,N)}(\xi) \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{|x-\xi|}\, d\Gamma_\xi = 2(x^j + c), \quad x \in \partial F_i^{(N)}, \tag{2.8}$$

$$\mu_j^{(i,N)}(x) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial F_i^{(N)}} \mu_j^{(i,N)}(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}\frac{1}{|x-\xi|}\,d\Gamma_\xi = 2x^j, \quad x\in\partial F_i^{(N)}. \qquad (2.9)$$

Действительно, уравнение (2.8) - это уравнение внешней задачи Дирихле. Она имеет решение, если выполнено условие

$$\int\limits_{\partial F_i^{(N)}} (x^j + c)\rho_{\text{роб.}}(x)\,d\Gamma_x = 0, \qquad (2.10)$$

где $\rho_{\text{роб.}}(x)$ - плотность потенциала Робэна R для области $F_i^{(N)}$.
Но условие (2.10) эквивалентно (1.6), так как в силу формулы Грина

$$\int\limits_{\partial F_i^{(N)}} (x^j + c)\rho_{\text{роб.}}(x)\,d\Gamma_x = -\int\limits_{\partial F_i^{(N)}} v_j^{(i,N)}(x)\frac{\partial R}{\partial n_-}(x)\,d\Gamma_x = \int\limits_{\partial F_i^{(N)}} \frac{\partial v_j^{(i,N)}}{\partial n_-}(x)\,d\Gamma_x.$$

Следовательно, решение задачи (1.4) - (1.7) существует и представимо в виде (2.6).

Уравнение (2.9) - это уравнение внутренней задачи Дирихле. Для функции $w_j^{(i,N)}(x)$, определенной (2.7), в области $F_i^{(N)}$ имеем

$$w_j^{(i,N)}(x) \equiv x^j. \qquad (2.11)$$

Следовательно, выполнено условие (1.9) :

$$\frac{\partial w_j^{(i,N)}}{\partial n_-}(x) = \frac{\partial w_j^{(i,N)}}{\partial n_+}(x) = \cos(n, x^j), \quad x\in\partial F_i^{(N)}.$$

Так как (1.8) и (1.10) очевидно выполнены, то функция $w_j^{(i,N)}(x)$ является решением задачи (1.8) - (1.10).

Заметим, что при сделанных относительно $\partial F_i^{(N)}$ предположениях имеют место оценки

$$\max_{x\in\partial F_i^{(N)}} |\sigma_j^{(i,N)}(x)| \le c a_i^{(N)}, \qquad \max_{x\in\partial F_i^{(N)}} |\mu_j^{(i,N)}(x)| \le c a_i^{(N)}, \qquad (2.12)$$

где постоянная c от i и N не зависит.
Укажем также на следующие два очевидных равенства

$$[\vec{n}_x, \operatorname{grad} v_j^{(i,N)}(x)]_- = [\vec{n}_x, \vec{e}_j], \quad x\in\partial F_i^{(N)}, \qquad (2.13)$$

$$[\vec{n}_x, \operatorname{grad} w_j^{(i,N)}(x)]_+ = [\vec{n}_x, \vec{e}_j], \quad x\in\partial F_i^{(N)}, \qquad (2.14)$$

где $\vec{e}_j$ - j -ый орт координатной системы.
Равенство (2.13) следует из (1.5), а (2.14) - из (2.11).

В дальнейшем понадобятся следующие представления тензоров $P_{j,k}^{(i,N)}$, $M_{j,k}^{(i,N)}$:

$$P_{j,k}^{(i,N)} = \int\limits_{\partial F_i^{(N)}} \sigma_j^{(i,N)}(x)\cos(n, x^k)\,d\Gamma_x, \quad M_{j,k}^{(i,N)} = -\int\limits_{\partial F_i^{(N)}} \mu_j^{(i,N)}(x)\cos(n, x^k)\,d\Gamma_x, \qquad (2.15)$$

Действительно, пользуясь представлениями (2.6) – (2.7), имеем

$$\int\limits_{\partial F_i^{(N)}} \sigma_j^{(i,N)}(x)\cos(n,x^k)\,d\Gamma_x = \int\limits_{\partial F_i^{(N)}} v_{j-}^{(i,N)}(x)\cos(n,x^k)\,d\Gamma_x -$$

$$-\int\limits_{\partial F_i^{(N)}} v_{j+}^{(i,N)}(x)\cos(n,x^k)\,d\Gamma_x = \int\limits_{\partial F_i^{(N)}} (x^j+c)\cos(n,x^k)\,d\Gamma_x -$$

$$-\int\limits_{\partial F_i^{(N)}} \frac{\partial v_j^{(i,N)}}{\partial n_+}(x)\,x^k\,d\Gamma_x = \delta_{k,j}\,\tau_i^{(N)} - \int\limits_{\partial F_i^{(N)}} \frac{\partial v_j^{(i,N)}}{\partial n_-}(x)\,(x^k+c)\,d\Gamma_x =$$

$$= \delta_{k,j}\,\tau_i^{(N)} - \int\limits_{\partial F_i^{(N)}} \frac{\partial v_j^{(i,N)}}{\partial n_-}(x)\,v_k^{(i,N)}(x)\,d\Gamma_x = \delta_{k,j}\,\tau_i^{(N)} +$$

$$+\int\limits_{R_3\setminus F_i^{(N)}} (\operatorname{grad} v_j^{(i,N)}(x),\ \operatorname{grad} v_k^{(i,N)}(x)\,dx = P_{j,k}^{(i,N)},$$

$$\int\limits_{\partial F_i^{(N)}} \mu_j^{(i,N)}(x)\cos(n,x^k)\,d\Gamma_x = \int\limits_{\partial F_i^{(N)}} w_{j-}^{(i,N)}(x)\cos(n,x^k)\,d\Gamma_x -$$

$$-\int\limits_{\partial F_i^{(N)}} w_{j+}^{(i,N)}(x)\cos(n,x^k)\,d\Gamma_x = \int\limits_{\partial F_i^{(N)}} w_{j-}^{(i,N)}(x)\,\frac{\partial w_k^{(i,N)}}{\partial n_-}(x)\,d\Gamma_x -$$

$$-\int\limits_{\partial F_i^{(N)}} x^j\cos(n,x^k)\,d\Gamma_x = -\int\limits_{R_3\setminus F_i^{(N)}} (\operatorname{grad} w_j^{(i,N)}(x),\ \operatorname{grad} w_k^{(i,N)}(x))\,dx -$$

$$-\,\delta_{k,j}\,\tau_i^{(N)} = -M_{j,k}^{(i,N)}.$$

3. Доказательство теоремы

Решение задачи (1.1) - 1.3) будем искать в виде

$$\vec{E}^{(N)}(x) = \vec{E}^{(0)}(x) + \sum_{i=1}^{N} \vec{v}_E^{(i,N)}(x) + \vec{Z}_E^{(N)}(x),$$

$$\vec{H}^{(N)}(x) = \vec{H}^{(0)}(x) + \sum_{i=1}^{N} \vec{v}_H^{(i,N)}(x) + \vec{Z}_H^{(N)}(x), \tag{3.1}$$

где функции $\vec{v}_E^{(i,N)}(x)$, $\vec{v}_H^{(i,N)}(x)$ подберем так, чтобы

$$\vec{E}_i^{(N)}(x) = \vec{E}^{(0)}(x) + \vec{v}_E^{(i,N)}(x),$$

$$\vec{H}_i^{(N)}(x) = \vec{H}^{(0)}(x) + \vec{v}_H^{(i,N)}(x) \tag{3.2}$$

являлись решением задачи (1.1) - (1.3) для одного тела (т.е. при $F^{(N)} = F_i^{(N)}$. Заметим, что так как задача (1.1) - (1.3) имеет единственное решение, то функции $\vec{v}_E^{(i,N)}(x)$, $\vec{v}_H^{(i,N)}(x)$, $\vec{Z}_E^{(N)}(x)$, $\vec{Z}_H^{(N)}(x)$ в (3.1) определяются однозначно.

ЛЕММА 3.1. Функции $\vec{v}_E^{(i,N)}(x)$, $\vec{v}_H^{(i,N)}(x)$ в (3.1) таковы, что для точек $x \notin \bar{D}$

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{v}_E^{(i,N)}(x) = \tau^{(N)} \vec{V}_E(x) + o(\tau^{(N)}),$$

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{v}_H^{(i,N)}(x) = \tau^{(N)} \vec{V}_H(x) + o(\tau^{(N)}), \tag{3.3}$$

где функции $\vec{V}_E(x)$, $\vec{V}_H(x)$ определены формулами (1.13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зададим функции $\vec{v}_E^{(i,N)}(x)$, $\vec{v}_H^{(i,N)}(x)$ формулами

$$\vec{v}_E^{(i,N)}(x) = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\int_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\rho}_1^{(i,N)}(\xi)\, g(x-\xi)\, d\Gamma_\xi,$$

$$\vec{v}_H^{(i,N)}(x) = -ik \operatorname{rot}\int_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\rho}_1^{(i,N)}(\xi)\, g(x-\xi)\, d\Gamma_\xi, \tag{3.4}$$

где $\vec{\rho}_1^{(i,N)}(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\vec{\rho}_1^{(i,N)}(x) - (K_{i,i}^{(N)} \vec{\rho}_1^{(i,N)})(x) = 2\frac{i}{k}[\vec{n}_x, \vec{H}^{(0)}(x)], \quad x \in \partial F_i^{(N)}. \tag{3.5}$$

Убедимся, что функции $\vec{E}_i^{(N)}(x), \vec{H}_i^{(N)}(x)$ определенные формулами (3.2), (3.4), являются решением задачи (1.1)-(1.3) при $F^{(N)} = F_i^{(N)}$. Действительно, они удовлетворяют системе (1.1) и условию на бесконечности (1.3). Из уравнения (3.5) следует, что на поверхности $\partial F_i^{(N)}$ $[\vec{n}_x, \vec{H}_i^{(N)}(x)]_+ = 0$. Следовательно, в силу единственности решения краевой задачи $\vec{E}_i^{(N)}(x) \equiv 0$, $\vec{H}_i^{(N)}(x) \equiv 0$ в области $F_i^{(N)}$. Так как функция $[\vec{n}_x, \vec{E}_i^{(N)}(x)]$ непрерывна при переходе через $\partial F_i^{(N)}$, то выполняется граничное условие (1.2).

Покажем, что для функции $\vec{\rho}_1^{(i,N)}(x)$ являющейся решением уравнения (3.5) имеет место оценка

$$\max_{x \in \partial F_i^{(N)}} |\vec{\rho}_1^{(i,N)}(x)| \leq c' \tag{3.6}$$

и представление

$$\rho_1^{(i,N)}(x) = \frac{-i}{k} H_j^{(0)}(\mathring{x}_i) [\vec{n}_x, \operatorname{grad} \mu_j^{(i,N)}(x)] + \vec{q}_1^{(i,N)}(x), \tag{3.7}$$

где $\mathring{x}_i$ – некоторая точка в области $F_i^{(N)}$, а $\vec{q}_1^{(i,N)}(x)$ такова, что

$$\max_{x \in \partial F_i^{(N)}} |\vec{q}_1^{(i,N)}(x)| \leq c'' a_i^{(N)}. \tag{3.8}$$

Здесь постоянные c' и c' в (3.6), (3.8) от i и N не зависят, а функция $\mu_j^{(i,N)}(x)$ в (3.7) предполагается продолженной с поверхности $\partial F_i^{(N)}$, но при этом нетрудно видеть, что векторное произведение $[\vec{n}_x, \operatorname{grad} \mu_j^{(i,N)}(x)]$ от продолжения не зависит.

Существование решения уравнения (3.5) и оценка (3.6) следует из (1.11). Из уравнения (3.5) и представления (3.7) для $\vec{q}_1^{(i,N)}(x)$ получаем уравнение

$$\vec{q}_1^{(i,N)}(x) - (K_{i,i}^{(N)} \vec{q}_1^{(i,N)})(x) = 2\frac{i}{k}([\vec{n}_x, \vec{H}^{(0)}(x)] - H_j^{(0)}(\mathring{x}_i) \times$$

$$\times [\vec{n}_x \cdot \operatorname{rot} \int_{\partial F_i^{(N)}} [\vec{n}_\xi, \operatorname{grad} \mu_j^{(i,N)}(\xi)] g(x-\xi) d\Gamma_\xi]_+), \quad x \in \partial F_i^{(N)}.$$

Для его решения, воспользовавшись (1.11), (2.12), (2.13), получим оценку

$$\max_{x \in \partial F_i^{(N)}} |\vec{q}_1^{(i,N)}(x)| \leq c' \max_{x \in \partial F_i^{(N)}} | [\vec{n}_x, \vec{H}^{(0)}(x)] - H_j^{(0)}(\mathring{x}_i) \times$$

$$\times [\vec{n}_x, \operatorname{rot} \int_{\partial F_i^{(N)}} [\vec{n}_\xi, \operatorname{grad} \mu_j^{(i,N)}(\xi)] g(x-\xi) d\Gamma_\xi]_+ | \leq c'' a_i^{(N)} +$$

$$+ c'' \max_{x \in \partial F_i^{(N)}} | [\vec{n}_x, \vec{H}^{(0)}(\mathring{x}_i) + H_j^{(0)}(\mathring{x}_i) \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \int_{F_i^{(N)}} \operatorname{grad} \mu_j^{(i,N)}(\xi) \times$$

$$\times g(x-\xi)d\xi]_+ | \le c''' a_i^{(N)} + c''' \max_{x\in\partial F_i^{(N)}} |[\vec{n}_x, \vec{e}_j +$$

$$+\operatorname{grad}\operatorname{div}\int_{\partial F_i^{(N)}} \vec{n}_\xi \cdot \mu_j^{(i,N)}(\xi)\cdot \frac{1}{4\pi|x-\xi|}\, dT_\xi]_+ | \le c^{\mathrm{IV}} a_i^{(N)} +$$

$$+ c^{\mathrm{IV}} \max_{x\in\partial F_i^{(N)}} |[\vec{n}_x, \vec{e}_j - \operatorname{grad} w_j^{(i,N)}(x)]_+| = c^{\mathrm{IV}} a_i^{(N)},$$

где постоянные от i и N не зависят.

Пусть $\vec{\rho}_2^{(i,N)}(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\vec{\rho}_2^{(i,N)}(x) + (K_{i,i}^{(N)} \vec{\rho}_2^{(i,N)})(x) = -2[\vec{n}_x, \vec{E}^{(0)}(x)], \quad x\in\partial F_i^{(N)}. \tag{3.9}$$

Зададим теперь функции $\vec{v}_E^{(i,N)}(x)$, $\vec{v}_H^{(i,N)}(x)$ формулами

$$\vec{v}_E^{(i,N)}(x) = \operatorname{rot}\int_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\rho}_2^{(i,N)}(\xi)\, g(x-\xi)\, dT_\xi,$$

$$\vec{v}_H^{(i,N)}(x) = -\frac{i}{k} \operatorname{rot}\operatorname{rot}\int_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\rho}_2^{(i,N)}(\xi)\, g(x-\xi)\, dT_\xi. \tag{3.10}$$

Аналогично предыдущему, можно убедиться, что функции $\vec{E}_i^{(N)}(x)$, $\vec{H}_i^{(N)}(x)$, определенные формулами (3.2), (3.10), также являются решением задачи (1.1)-(1.3) для одного тела. Но решение задачи (1.1)-(1.3) единственно, следовательно, в $R_3 \setminus F_i^{(N)}$ имеет место тождество

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\int_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\rho}_1^{(i,N)}(\xi)\, g(x-\xi)\, dT_\xi = \operatorname{rot}\int_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\rho}_2^{(i,N)}(\xi) g(x-\xi)\, dT_\xi. \tag{3.11}$$

Кроме того, можно показать, что для функции $\vec{\rho}_2^{(i,N)}(x)$ имеют место оценка и представление, аналогичные (3.6), (3.7)

$$\max_{x\in\partial F_i^{(N)}} |\vec{\rho}_2^{(i,N)}(x)| \le c', \tag{3.12}$$

$$\vec{\rho}_2^{(i,N)}(x) = -E_j^{(0)}(x_i)\, [\vec{n}_x, \operatorname{grad} \sigma_j^{(i,N)}(x)] + \vec{q}_2^{(i,N)}(x), \tag{3.13}$$

$$\max_{x\in\partial F_i^{(N)}} |\vec{q}_2^{(i,N)}(x)| \le c' a_i^{(N)}, \tag{3.14}$$

где постоянные C' и C'' от i и N не зависят.
Доказательство этого аналогично доказательству представления (3.6) и оценки (3.7) и поэтому не приводятся.

Разложим функцию $g(x-\xi)$ в ряд Тейлора, тогда, учитывая оценки (3.6), (3.12), из тождества (3.11) получим

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\Big\{ g(x-\mathring{x}_i)\int\limits_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\rho}_1^{\,(i,N)}(\xi)\,d\Gamma_\xi - \frac{\partial g}{\partial x^k}(x-\mathring{x}_i)\int\limits_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\rho}_1^{\,(i,N)}(\xi)\times$$

$$\times(\xi^k-\mathring{\xi}_i^k)\,d\Gamma_\xi\Big\} - \operatorname{rot}\Big\{ g(x-\mathring{x}_i)\int\limits_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\rho}_2^{\,(i,N)}(\xi)\cdot d\Gamma_\xi - \frac{\partial g}{\partial x^k}(x-\mathring{x}_i)\times$$

$$\times\int\limits_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\rho}_2^{\,(i,N)}(\xi)\,(\xi^k-\mathring{\xi}_i^k)\,d\Gamma_\xi\Big\} \equiv \vec{\varphi}^{\,(i,N)}(x), \tag{3.15}$$

где функция $\vec{\varphi}^{\,(i,N)}(x)$ учитывает остальные члены разложения. Домножим (3.15) на $|x-\mathring{x}_i|\,e^{-ik|x-\mathring{x}_i|}$ и при $x\to\infty$ вдоль s-ой координатной оси перейдем к пределу :

$$ik\Big[\vec{e}_s,\Big[\vec{e}_s,\int\limits_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\rho}_1^{\,(i,N)}(\xi)\,d\Gamma_\xi\Big]\Big] + k^2\Big[\vec{e}_s,\Big[\vec{e}_s,\int\limits_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\rho}_1^{\,(i,N)}(\xi)\times$$

$$\times(\xi^s-\mathring{\xi}_i^s)\,d\Gamma_\xi\Big]\Big] - \Big[\vec{e}_s,\int\limits_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\rho}_2^{\,(i,N)}(\xi)\,d\Gamma_\xi\Big] + ik\Big[\vec{e}_s, \tag{3.16}$$

$$\int\limits_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\rho}_2^{\,(i,N)}(\xi)\,(\xi^s-\mathring{\xi}_i^s)\,d\Gamma_\xi\Big] = a_s\,,\quad s=1,2,3,$$

причем, нетрудно показать, что $(\vec{e}_s,\vec{a}_s)=0$ и $\vec{a}_s=o(\tau_i^{(N)})$. Теперь, воспользовавшись представлениями (2.15), (3.7) и оценкой (3.8), имеем

$$\int\limits_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\rho}_1^{\,(i,N)}(\xi)\cdot(\xi^s-\mathring{\xi}_i^s)\,d\Gamma_\xi = \frac{-i}{k}H_j^{(0)}(\mathring{x}_i)\int\limits_{\partial F_i^{(N)}}\big[\vec{n}_\xi,\operatorname{grad}\mu_j^{(i,N)}(\xi)\big]\times$$

$$\times(\xi^s-\mathring{\xi}_i^s)\,d\Gamma_\xi + o(\tau_i^{(N)}) = \frac{i}{k}\big[\vec{e}_s, M^{(i,N)}\vec{H}^{(0)}(\mathring{x}_i)\big] + o(\tau_i^{(N)}), \tag{3.17}$$

$$\int\limits_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\rho}_2^{\,(i,N)}(\xi)(\xi^s-\mathring{\xi}_i^s)\,d\Gamma_\xi = -\,[\vec{e}_s,\ P^{(i,N)}\vec{E}^{(0)}(\mathring{x}_i)] + o(\tau_i^{(N)}), \tag{3.18}$$

где $P^{(i,N)}$, $M^{(i,N)}$ – матрицы соответственно с элементами $P_{j,k}^{(i,N)}$, $M_{j,k}^{(i,N)}$.

Будем рассматривать (3.16) как систему относительно $\int\limits_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\rho}_1^{\,(i,N)}(\xi)\,d\Gamma_\xi$, $\int\limits_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\rho}_2^{\,(i,N)}(\xi)\,d\Gamma_\xi$. Решим ее, учитывая (3.17), (3.18), тогда получим

$$\begin{gathered}\int\limits_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\rho}_1^{\,(i,N)}(\xi)\,d\Gamma_\xi = P^{(i,N)}\vec{E}^{(0)}(\mathring{x}_i) + o(\tau_i^{(N)}),\\ \int\limits_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\rho}_2^{\,(i,N)}(\xi)\,d\Gamma_\xi = -ikM^{(i,N)}\vec{H}^{(0)}(\mathring{x}_i) + o(\tau_i^{(N)}).\end{gathered} \tag{3.19}$$

Разложим функцию $g(x-\xi)$ в ряд Тейлора, тогда, учитывая (3.6),(3.19), из представления (3.4) имеем для $x\notin\bar{D}$

$$\begin{aligned}\vec{v}_E^{\,(i,N)}(x) &= \operatorname{rot}\operatorname{rot}\int\limits_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\rho}_1^{\,(i,N)}(\xi)\,g(x-\xi)\,d\Gamma_\xi = \operatorname{rot}\operatorname{rot} g(x-\mathring{x}_i)\int\limits_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\rho}_1^{\,(i,N)}(\xi)\,d\Gamma_\xi - \\ &- \operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{\partial g}{\partial x^k}(x-\mathring{x}_i)\int\limits_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\rho}_1^{\,(i,N)}(\xi)(\xi^k-\mathring{\xi}_i^k)\,d\Gamma_\xi + o(\tau_i^{(N)}) = \\ &= \operatorname{rot}\operatorname{rot} g(x-\mathring{x}_i)P^{(i,N)}\vec{E}^{(0)}(\mathring{x}_i) - ik\operatorname{rot} g(x-\mathring{x}_i)M^{(i,N)}\vec{H}^{(0)}(\mathring{x}_i) + o(\tau_i^{(N)}),\end{aligned} \tag{3.20}$$

аналогично

$$\begin{aligned}\vec{v}_H^{\,(i,N)}(x) &= -\operatorname{rot}\operatorname{rot} g(x-\mathring{x}_i)M^{(i,N)}\vec{H}^{(0)}(\mathring{x}_i) - ik\operatorname{rot} g(x-\mathring{x}_i)\times \\ &\times P^{(i,N)}\vec{E}^{(0)}(\mathring{x}_i) + o(\tau_i^{(N)}).\end{aligned} \tag{3.21}$$

Теперь, суммируя по i (3.20) и (3.21), пользуясь условием 1 теоремы, получим представление (3.3).

Лемма 3.1. доказана.

ЛЕММА 3.2. Функции $\vec{Z}_E^{(N)}(x)$, $\vec{Z}_H^{(N)}(x)$ в (3.1) допускают оценку

$$|\vec{Z}^{(N)}_E(x)| = o(\tau^{(N)}) , \quad |\vec{Z}^{(N)}_H(x)| = o(\tau^{(N)}) \tag{3.22}$$

для точек $x \notin \overline{D}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим функции $\vec{Z}^{(N)}_E(x)$, $\vec{Z}^{(N)}_H(x)$ в виде

$$\begin{aligned} \vec{Z}^{(N)}_E(x) &= \sum_{i=1}^{N} \operatorname{rot}\operatorname{rot}\int_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\rho}^{\,(i,N)}_{1,2}(\xi)\, g(x-\xi)\, d\Gamma_\xi , \\ \vec{Z}^{(N)}_H(x) &= -ik \sum_{i=1}^{N} \operatorname{rot}\int_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\rho}^{\,(i,N)}_{1,2}(\xi)\, g(x-\xi)\, d\Gamma_\xi , \end{aligned} \tag{3.23}$$

где $\vec{\rho}^{\,(i,N)}_{1,2}(x)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} &\vec{\rho}^{\,(i,N)}_{1,2}(x) - (K^{(N)}_{i,i}\vec{\rho}^{\,(i,N)}_{1,2})(x) = \sum_{j\neq i} (K^{(N)}_{i,j}\vec{\rho}^{\,(j,N)}_{1,2})(x) + 2\frac{i}{k}[\vec{n}_x, \\ &\sum_{j\neq i} \vec{v}^{\,(j,N)}_H(x)] , \quad x \in \partial F_i^{(N)} , \quad i = 1,2,\dots,N . \end{aligned} \tag{3.24}$$

Аналогично предыдущему (см. лемму 3.1) можно показать, что функции $\vec{E}^{(N)}(x)$, $\vec{H}^{(N)}(x)$ определенные формулами (3.1), (3.23), являются решением задачи (1.1)-(1.3). Кроме того, можно показать, что в $R_3 \setminus F^{(N)}$ имеет место тождество, аналогичное (3.11).

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\int_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\rho}^{\,(i,N)}_{1,2}(\xi)\, g(x-\xi)\, d\Gamma_\xi \equiv \operatorname{rot}\int_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\rho}^{\,(i,N)}_{2,2}(\xi)\, g(x-\xi)\, d\Gamma_\xi , \tag{3.25}$$

где $\vec{\rho}^{\,(i,N)}_{2,2}(x)$ – удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} &\vec{\rho}^{\,(i,N)}_{2,2}(x) + (K^{(N)}_{i,i}\vec{\rho}^{\,(i,N)}_{2,2})(x) = -\sum_{j\neq i} (K^{(N)}_{i,j}\vec{\rho}^{\,(i,N)}_{2,2})(x) - \\ &-2[\vec{n}_x, \sum_{j\neq i} \vec{v}^{\,(j,N)}_E(x)] , \quad x \in \partial F_i^{(N)} , \quad i = 1,2,\dots,N . \end{aligned} \tag{3.26}$$

Поскольку операторы $I + K^{(N)}_{i,i}$, $I - K^{(N)}_{i,i}$ имеют обратные, системы (3.24), (3.26) эквиваленты следующим

$$\begin{aligned} &\vec{\rho}^{\,(i,N)}_{1,2}(x) = (I - K^{(N)}_{i,i})^{-1} \cdot \Big\{ \sum_{j\neq i} (K^{(N)}_{i,j}\vec{\rho}^{\,(j,N)}_{1,2})(x) + \\ &+2\frac{i}{k}[\vec{n}_x, \sum_{j\neq i} \vec{v}^{\,(j,N)}_H(x)] \Big\} , \quad x \in \partial F_i^{(N)} , \quad i = 1,2,\dots,N ; \end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\vec{\rho}_{2,z}^{\,(i,N)}(x) = (\underline{I} + K_{i,i}^{(N)})^{-1} \cdot \Big\{ -\sum_{j\neq i} (K_{i,j}^{(N)} \vec{\rho}_{2,z}^{\,(j,N)})(x) -$$

$$-2\,[\vec{n}_x, \sum_{j\neq i} \vec{v}_E^{\,(j,N)}(x)]\Big\}, \quad x \in \partial F_i^{(N)}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \tag{3.28}$$

Учитывая неравенства (1.11) и условие 2 теоремы, из (3.27), (3.28) получаем оценки

$$\max_{x\in\partial F_i^{(N)}} |\vec{\rho}_{1,z}^{\,(i,N)}(x)| \leq c \max_{1\leq i\leq N} \max_{x\in\partial F_i^{(N)}} |\sum_{j\neq i} \vec{v}_H^{\,(j,N)}(x)|, \tag{3.29}$$

$$\max_{x\in\partial F_i^{(N)}} |\vec{\rho}_{2,z}^{\,(i,N)}(x)| \leq c \max_{1\leq i\leq N} \max_{x\in\partial F_i^{(N)}} |\sum_{j\neq i} \vec{v}_E^{\,(j,N)}(x)|, \tag{3.30}$$

где постоянная c от i и N не зависит.
Из (3.17), (3.18), пользуясь представлениями (2.15) и оценками (2.12), имеем

$$\Big|\int_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\rho}_1^{\,(i,N)}(\xi)\, d\Gamma_\xi\Big| \leq c a_i^{(N)^3}, \quad \Big|\int_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\rho}_2^{\,(i,N)}(\xi)\, d\Gamma_\xi\Big| \leq c a_i^{(N)^3}, \tag{3.31}$$

где постоянная c от i и N не зависит.

Теперь, учитывая оценки (3.6), (3.12), (3.33) и условие 2 теоремы, можем оценить $\sum_{j\neq i} \vec{v}_E^{\,(j,N)}(x)$, $\sum_{j\neq i} \vec{v}_H^{\,(j,N)}(x)$

$$\max_{x\in\partial F_i^{(N)}} |\sum_{j\neq i} \vec{v}_E^{\,(j,N)}(x)| \leq c' \max_{x\in\partial F_i^{(N)}} \Big\{ \sum_{j\neq i} \Big| \mathrm{rot} \int_{\partial F_j^{(N)}} \vec{\rho}_2^{\,(j,N)}(\xi)(g(x-\xi) -$$

$$- g(x-\overset{\circ}{x}_j))\, d\Gamma_\xi \Big| + \sum_{j\neq i} \Big| \mathrm{rot}\, g(x-\overset{\circ}{x}_j) \int_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\rho}_2^{\,(j,N)}(\xi)\, d\Gamma_\xi \Big| \Big\} \leq \tag{3.34}$$

$$\leq c'' \sum_{j\neq i} \Big\{ \frac{a_j^{(N)^3}}{R_{i,j}^{(N)^3}} + \frac{a_j^{(N)^3}}{R_{i,j}^{(N)^2}} \Big\} \leq c''' \max_{1\leq i\leq N} \Big(\frac{a_j^N}{R_j^{(N)}} \Big) = o(1), \ N \to \infty,$$

аналогично

$$\max_{x\in\partial F_i^{(N)}} |\sum_{j\neq i} \vec{v}_H^{\,(j,N)}(x)| = o(1), \ N \to \infty. \tag{3.35}$$

Причем оценки (3.34), (3.35) равномерны по i. Следовательно, из (3.29), (3.30) следует

$$\max_{x\in\partial F_i^{(N)}} \left| \vec{\rho}_{1,z}^{\,(i,N)}(x),\ \vec{\rho}_{2,z}^{\,(i,N)}(x) \right| = o(1),\ N\to\infty \tag{3.36}$$

и оценка (3.36) также равномерна по i.

Разложим функцию $g(x-\xi)$ в (3.25) в ряд Тейлора, тогда имеем

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} g(x-\mathring{x}_i)\int_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\rho}_{1,z}^{\,(i,N)}(\xi)\,d\Gamma_\xi - \operatorname{rot} g(x-\mathring{x}_i)\int_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\rho}_{2,z}^{\,(i,N)}(\xi)\,d\Gamma_\xi \equiv \vec{\varphi}^{\,(i,N)}(x), \tag{3.37}$$

где функция $\vec{\varphi}^{\,(i,N)}(x)$ учитывает остальные члены разложения.
Домножим (3.37) на $|x-\mathring{x}_i|\,e^{-ik|x-\mathring{x}_i|}$ и при $x\to\infty$ вдоль S-ой координатной оси перейдем к пределу, получим

$$[\vec{e}_s, [\vec{e}_s, \int_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\rho}_{1,z}^{\,(i,N)}(\xi)\,d\Gamma_\xi]] - [\vec{e}_s, \int_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\rho}_{2,z}^{\,(i,N)}(\xi)\,d\Gamma_\xi] = \vec{a}_s^{\,(N)},\ s=1,2,3, \tag{3.38}$$

причем, учитывая (3.36), нетрудно показать, что $(\vec{e}_s, \vec{a}_s^{\,(N)})=0$ и $\vec{a}_s^{\,(N)}=o(\tau_i^{(N)})$.

Из (3.38) следует, что

$$\left| \int_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\rho}_{1,z}^{\,(i,N)}(\xi)\,d\Gamma_\xi,\ \int_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\rho}_{2,z}^{\,(i,N)}(\xi)\,d\Gamma_\xi \right| = o(\tau_i^{(N)}),\ N\to\infty, \tag{3.39}$$

причем, оценка (3.39) равномерна по i.

Оценим теперь $\vec{Z}_E^{(N)}(x)$, $\vec{Z}_H^{(N)}(x)$, при $x\notin\bar{\mathcal{D}}$, используя (3.36), (3.39)

$$\begin{gathered}\left|\vec{Z}_E^{(N)}(x)\right| \le c' \sum_{i=1}^{N} \Big\{ \Big| \operatorname{rot}\int_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\rho}_{2,z}^{\,(i,N)}(\xi)\,(g(x-\xi)-g(x-\mathring{x}_i))\,d\Gamma_\xi \Big| + \\ + \Big| \operatorname{rot} g(x-\mathring{x}_i) \int_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\rho}_{2,z}^{\,(i,N)}(\xi)\,d\Gamma_\xi \Big| \Big\} \le c'' \sum_{i=1}^{N} \Big\{ a_i^{(N)^3} \max_{x\in\partial F_i^{(N)}} |\vec{\rho}_{2,z}^{\,(i,N)}(x)| + \\ + \Big| \int_{\partial F_i^{(N)}} \vec{\rho}_{2,z}^{\,(i,N)}(\xi)\,d\Gamma_\xi \Big| \Big\} = o(\tau^{(N)}),\end{gathered} \tag{3.40}$$

аналогично

$$|\vec{Z}_H^{(N)}(x)| = o(\tau^{(N)}). \tag{3.41}$$

Лемма доказана.

Из лемм 3.1, 3.2 и представления (3.1) вытекает представление (1.12) и тем самым теорема доказана.

4. Доказательство следствия

В пространстве L_2 шестикомпонентных суммируемых с квадратом функций $U(x)$ определим оператор K, действующий по формуле

$$(KU)(x) \equiv \begin{bmatrix} (\operatorname{grad} \operatorname{div} + k^2) & -ik \operatorname{rot} \\ -ik \operatorname{rot} & -(\operatorname{grad} \operatorname{div} + k^2) \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} P(\xi) & 0 \\ 0 & M(\xi) \end{bmatrix} U(\xi) g(x-\xi) d\xi, \quad (4.1)$$

где матрицы $P(x)$, $M(x)$ продолжены нулевыми вне области D.

Пользуясь дифференциальными свойствами ньютоновского потенциала и свойствами сингулярных интегралов, можно показать, что оператор K переводит пространство L_2 в себя и его норма ограничена.

Определим функцию $U^{(N)}(x)$ формулой

$$U^{(N)}(x) = U^{(0)}(x) + \tau^{(N)} (K U^{(0)})(x) + Z^{(N)}(x), \quad (4.2)$$

где

$$U^{(0)}(x) = \begin{bmatrix} \vec{E}^{(0)}(x) \\ \vec{H}^{(0)}(x) \end{bmatrix},$$

а функция $Z^{(N)}(x)$ удовлетворяет уравнению

$$Z^{(N)}(x) = \tau^{(N)} (K Z^{(N)})(x) + \tau^{(N)2} (K^2 U^{(0)})(x). \quad (4.3)$$

Так как норма оператора K ограничена, то при достаточно малом $\tau^{(N)}$ уравнение (4.3) имеет решение, причем

$$\| Z^{(N)}(x) \|_{L_2} = O(\tau^{(N)}). \quad (4.4)$$

Обозначим через L оператор Максвелла, соответствующий системе (1.15), а через L^* – формально ему сопряженный:

$$L \equiv \begin{bmatrix} \operatorname{rot} & -ik\mu^{(N)}(x) \\ ik\varepsilon^{(N)}(x) & \operatorname{rot} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \operatorname{rot} & -ik \\ ik & \operatorname{rot} \end{bmatrix} + ik\tau^{(N)} \begin{bmatrix} 0 & M(x) \\ P(x) & 0 \end{bmatrix} \equiv L_0 + ik\tau^{(N)} B,$$

$$L^* \equiv \begin{bmatrix} \operatorname{rot} & -ik\varepsilon^{(N)}(x) \\ ik\mu^{(N)}(x) & \operatorname{rot} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \operatorname{rot} & -ik \\ ik & \operatorname{rot} \end{bmatrix} - ik\tau^{(N)} \begin{bmatrix} 0 & P(x) \\ M(x) & 0 \end{bmatrix} \equiv L_0^* - ik\tau^{(N)} B^*.$$

Пусть $\psi(x)$ – финитная и гладкая шестикомпонентная функция, тогда, учитывая (4.2), имеем

$$\int (U^{(N)}, L^*\psi)\, dx = \int (U^{(0)}, L^*\psi)\, dx + \tau^{(N)} \int (KU^{(0)}, L^*\psi)\, dx + \int (Z^{(N)}, L^*\psi)\, dx,$$

но, как нетрудно убедиться

$$\int (U^{(0)}, L^*\psi)\,dx = \int (J,\psi)\,dx + ik\tau^{(N)}\int (BU^{(0)},\psi)\,dx,\quad J = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{J}(x) \end{bmatrix}, \tag{4.5}$$

$$\int (KU^{(0)}, L^*\psi)\,dx = -ik\int (BU^{(0)},\psi)\,dx + ik\tau^{(N)}\int (BKU^{(0)},\psi)\,dx, \tag{4,6}$$

$$\int (Z^{(N)}, L^*\psi)\,dx = -ik\tau^{(N)2}\int (BKU^{(0)},\psi)\,dx. \tag{4.7}$$

Следовательно, объединяя (4.5), (4.6), (4.7), получим

$$\int (U^{(N)}, L^*\psi)\,dx = \int (J,\psi)\,dx. \tag{4.8}$$

Пусть

$$\tilde{E}^{(N)}(x) = \{U_1^{(N)}(x),\ U_2^{(N)}(x),\ U_3^{(N)}(x)\},\quad \tilde{H}^{(N)}(x) = \{U_4^{(N)}(x),\ U_5^{(N)}(x),\ U_{(6)}^{(N)}(x)\},$$

$$\tilde{Z}_E^{(N)}(x) = \{Z_1^{(N)}(x),\ Z_2^{(N)}(x),\ Z_3^{(N)}(x)\},\quad \tilde{Z}_H^{(N)}(x) = \{Z_4^{(N)}(x),\ Z_5^{(N)}(x),\ Z_6^{(N)}(x)\},$$

тогда $\tilde{E}^{(N)}(x)$, $\tilde{H}^{(N)}(x)$ в силу (4.8) в слабом смысле удовлетворяют системе (1.15), а для точек $x \notin \bar{D}$ из (4.2) имеем

$$\tilde{E}^{(N)}(x) = \vec{E}^{(0)}(x) + \tau^{(N)}\vec{V}_E(x) + \tilde{Z}_E^{(N)}(x),$$

$$\tilde{H}^{(N)}(x) = \vec{H}^{(0)}(x) + \tau^{(N)}\vec{V}_H(x) + \tilde{Z}_H^{(N)}(x). \tag{4.9}$$

Из представлений (1.12), (4.9) и оценки (4.4) следует (1.14) и тем самым следствие доказано.

Заметим, что как видно из доказательств, теорема и следствие имеют место и при вещественных значениях параметра k, если условие ограниченности (1.3) заменить условием излучения.

В заключение рассмотрим простой пример. Пусть включения $F_i^{(N)}$ –шары одинакового радиуса a и пусть они расположены в попавших в область D узлах пространственной периодической решетки. Согласно следствию, наличие в среде таких включений можно эффективно учесть соответствующим изменением диэлектрической и диамагнитной проницаемости среды. Вычислим новые параметры $\varepsilon^{(N)}(x)$, $\mu^{(N)}(x)$.

Как легко убедиться, решениями задач (1.4)-(1.7), (1.8)-(1.10) служат функции

$$v_j^{(i,N)}(x) = \frac{a^3}{r^2}\cos(\vec{r}, x^j),\qquad w_j^{(i,N)}(x) = -\frac{1}{2}\frac{a^3}{r^2}\cos(\vec{r}, x^j),$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор из центра i -го шара в точку x.
Тогда

$$P_{j,k}^{(i,N)} = 3\cdot\frac{4}{3}\pi a^3\cdot\delta_{j,k},\qquad M_{j,k}^{(i,N)} = \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi a^3\delta_{j,k},$$

Следовательно

$$\varepsilon^{(N)}(x)=\begin{cases}1, & x\in R_3\setminus D,\\ 1+3\cdot\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{\ell}\right)^3, & x\in D,\end{cases}\qquad \mu^{(N)}(x)=\begin{cases}1, & x\in R_3\setminus D,\\ 1-\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{\ell}\right)^3, & x\in D,\end{cases}$$

где ℓ – период решетки.

Отметим, что эти формулы для параметров среды совпадают (с точностью до $o(\tau^{(N)})$) с известными ранее, полученными на физическом уровне строгости [7] .

Автор выражает благодарность В.А.Марченко и Е.Я.Хруслову за постановку задачи и внимание к работе.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Х.Хенл и др., Теория дифракции, М., "Мир", 1964.

2. Г.Полиа, Г. Сегё , Изопериметрические неравенства в математической физике, М., "ФМ", 1962.

3. В.Фенченко, О некоторых задачах электростатики в областях с мелкозернистой границей. Труды ФТИНТ АН УССР, Математическая физика и функциональный анализ, Вып. 3, 1972.

4. Д.Стрэттон, Теория электромагнетизма, М.-Л., Гостехиздат, 1948.

5. Н.Гюнтер, Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, М., 1953.

6. С.Михлин, Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, М., 1962.

7. Л.Левин, Современная теория волноводов, М., "ИЛ", 1954.

BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR THE SYSTEM OF MAXWELL EQUATIONS IN REGIONS WITH FINE-GRAINED BOUNDARY

V.N.Fenchenko

The boundary-value problem is considered for the system of Maxwell equations, which describes an electromagnetic field in the medium with conducting inclusions. An asymptotic behaviour of the solution of such a problem, when the inclusion number grows infinitely, while their diameters diminish in such a manner, that the total volume of the inclusions $\tau^{(N)}\to 0$, is under study. The first and the second terms of the asymptotic power expansion of the solution $\tau^{(N)}$ have been found. It is demonstrated that the inclusions effect can be effectively taken account of by changing the medium parameters.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1 9 7 3 выпуск 1У

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ КАЧЕСТВЕННОГО СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

А.Г. Брусенцев

В работе распространяется принцип расщепления И.М.Глазмана [1] на эллиптические дифференциальные операторы произвольного порядка, порожденные системами, которые не предполагаются ни формально самосопряженными, ни сильно эллиптическими. Установленный принцип применяется затем к спектральному анализу различных эллиптических операторов, вообще говоря, несамосопряженных.

Как известно, в случае скалярных сильно эллиптических операторов второго порядка принцип расщепления был обоснован И.М.Глазманом [1] и М.Ш.Бирманом [2], высших порядков – Ф.Вольфом [3].

С помощью принципа расщепления в работе устанавливается необходимый и достаточный признак полной непрерывности резольвенты минимального эллиптического оператора L_m в терминах поведения квадратичной формы для L или L^*L на N – финитных функциях. Это–обобщение на рассматриваемый случай теоремы И.М.Глазмана [1, стр.60,109]. Для несамосопряженных систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка такое обобщение получил В.В.Мартынов [4], для самосопряженных скалярных сильно эллиптических операторов – Ф.Вольф [3].

Достаточные условия отсутствия предельного спектра несамосопряженной эллиптической системы L в $\mathcal{L}_2(R^n)$ получены также в терминах коэффициентов дифференциальной операции L. В самосопряженном случае это – признак чистой дискретности спектра. Признак чистой дискретности спектра установлен также для скалярной операции $(-\Delta)^m + Q(x)$ с комплекснозначным потенциалом $Q(x)$. Для одномерной операции $-y'' + Q(x)y$ с комплексным $Q(x)$ ряд признаков дискретности спектра принадлежит М.А.Наймарку [5], В.Б.Лидскому [6], а также А.Г.Аленицыну [7]. Наш результат в этом случае дает признак, близкий к [7]. Признак дискретности спектра для эллиптических систем дает теорема В.В.Грушина [8], которая не охватывает наших результатов и не охватывается ими. В частности, для операции $(-\Delta)^m + Q(x)$ наш результат точнее. Отметим также вытекающие из наших результатов признаки дискретности спектра одномерной и трехмерной систем Дирака, отличные от признаков, приводимых для одномерных систем в монографии Б.М.Левитана и И.С.Саргсяна [9], а также от признаков Р.С.Исмагилова и В.В.Мартынова [10], В.В.Мартынова [11] и Л.Б.Зеленко [12], [13].

В работе устанавливаются также достаточные условия совпадения минимального и максимального операторов, порожденных эллиптической системой. Этими условиями охватываются, в частности, результаты П.Гесса [14] и Ф.Браудера [15], относящиеся к операторам с ограниченными коэффициентами. Для симметрических сильно эллиптических систем более точные условия существенной самосопряженности получены в [16]. Условия совпадения минимального и максимального скалярных операторов второго порядка получены в [17]. Ряд условий самосопряженности эллиптических операторов высших порядков содержатся в монографиях [18], [19], а для одномерного случая – в [20].

Отметим в заключение, что наряду с методом расщепления, существенную роль в данной работе играет метод циклических сингулярных априорных оценок, развитый в [16], [21], [22].

Работа выполнена под руководством Ф.С.Рофе-Бекетова, которому автор выражает искреннюю благодарность.

1. Локальное строение области определения рассматриваемых операторов. Обозначения

Рассматривается дифференциальное выражение

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leq \sigma} a_\alpha(x) D^\alpha u(x), \tag{1.1}$$

где $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$, $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$, $x \in G \subseteq R^n$;

$a_\alpha(x)$ – квадратная матрица порядка z, $u(x)$ – z – компонентная вектор-функция.

Будем считать :

$$a_\alpha(x) \in C^{\sigma+|\alpha|}(G), \quad |\alpha| < \sigma; \quad \underset{|\alpha| = \sigma,}{a_\alpha(x) \in C^{\max(\sigma+2, 2\sigma)}(G),} \tag{1.2}$$

где G – некоторая, вообще говоря, неограниченная область в R^n.

Кроме того, операция L (1.1) предполагается эллиптической, т.е.

$$\det\Big(\sum_{|\alpha| = \sigma} a_\alpha(x)\xi^\alpha\Big) \neq 0, \quad x \in G, \quad \xi \in R^n, \quad |\xi| \neq 0. \tag{1.3}$$

Через $W_2^{j,z}(G)$ будем обозначать пространство Соболева порядка j,

$$(u, v)_{W_2^{j,z}(G)} = \int_G \sum_{|\alpha| \leq j} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle dx,$$

где

$$\langle a, b\rangle = \sum_{k=1}^{z} a_k \bar{b}_k, \quad \langle a, a\rangle = |a|^2.$$

Под $|A|$ также подразумеваем операторную норму $z \times z$ матрицы A.

Через $W_{2\,loc}^{j,z}(G)$ обозначим множество вектор-функций, принадлежащих $W_2^{j,z}(\Omega)$, где Ω – любая ограниченная область такая, что $\bar{\Omega} \subset G$.

$W_2^{0,z} = \mathcal{L}_2^z(G)$, $\mathring{W}_2^{j,z}(G)$ – пополнение $\dot{C}_0^{\infty,z}(G)$ по метрике $W_2^{j,z}(G)$.

Пусть L_m, L_M соответственно минимальный и максимальный операторы, порожденные выражением L (1.1) в области G,

$$L_M \overset{def}{=} (L_m^+)^*,$$

где L^+ сопряженное к L выражение.

ЛЕММА 1.1.[1] При условиях (1.2), (1.3) для L_m (1.1)

$$\mathcal{D}(L_M) \subset W_{2\,loc}^{\sigma,z}(G). \tag{1.4}$$

---

1) В скалярном случае для сильно эллиптических операторов этот результат содержится в [19 , стр.381] , для эллиптических операторов с коэффициентами из C^∞ – в [23, стр.151] , [24 стр.237]. Приводимое нами доказательство отличается от названных.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x_0 произвольная точка области G. Найдется окрестность $\mathcal{K}(x_0, \varepsilon_0)$, для которой существует нормированное фундаментальное решение системы $Lv = 0$ см. [25], то есть существует матрица-функция $\omega(x, y)$ такая, что для $v(x) \in C^{1,2}(\mathcal{K}(x_0, \varepsilon_0))$

$$L\int_V \omega(x, y) v(x)\, dx = e(y) v(y),$$

где V – такое открытое множество, что $\bar{V} \subset \mathcal{K}(x_0, \varepsilon_0)$, а

$$e(x) = \begin{cases} 1 & x \in V \\ 0 & x \notin V. \end{cases}$$

Кроме того, $\omega(x, y)$ σ – раз гладкая функция при $x \neq y$, а на диагонали $x = y$ имеет особенность типа полярного ядра. Пусть $u(x)$ слабое решение уравнения $Lu = f$, $f \in \mathcal{L}_2^2(G)$. Для $y \in \mathcal{K}(x_0, \frac{\varepsilon_0}{2})$ имеет место представление см. [26].

$$u(y) = h_{\varepsilon_0}(y) + \int_{\mathcal{K}(x_0, \varepsilon_0)} \omega(x, y) f(x)\, dx, \tag{1.5}$$

где $h_{\varepsilon_0}(y) \in C^{\sigma,2}(\mathcal{K}(x_0, \varepsilon_0/2))$.

Осредним $f(x)$ с помощью стандартного бесконечно-гладкого ядра $\theta_\delta(|x-y|)$. Полученную функцию обозначим через $f_\delta(x)$, причем $f_\delta(x) \to f(x)$ в $\mathcal{L}_2^{(2)}$ при $\delta \to 0$. Построим

$$u_\delta(y) = h_{\varepsilon_0}(y) + \int_{\mathcal{K}(x_0 \varepsilon_0)} \omega(x, y) f_\delta(x)\, dx.$$

Вследствие полярности ядра $\omega(x, y)$, $u_\delta(y) \to u(y)$ в $\mathcal{L}_2^2(\mathcal{K}(x_0, \varepsilon_0/2))$. $\{u_\delta(x)\}$ σ – раз гладкие функции и :

$$L(u_{\delta_1}(y) - u_{\delta_2}(y)) = f_{\delta_1}(y) - f_{\delta_2}(y),$$

$$\| L[u_{\delta_1}(y) - u_{\delta_2}(y)] \|_{\mathcal{L}_2^2(\mathcal{K}(x_0, \varepsilon_0/2))} \longrightarrow 0$$

при $\delta_1, \delta_2 \to 0$.

Известно неравенство Фридрихса (см. [27]) :

$$\| Lu \|^2_{\mathcal{L}_2^2(\Omega)} + \| u \|^2_{\mathcal{L}_2^2(\Omega)} \geq \gamma \| u \|^2_{W_2^{\sigma,2}(\Omega')}, \tag{1.6}$$

где $u(x) \in W_2^{\sigma,2}(\Omega)$, Ω', Ω – ограниченные области, причем $\bar{\Omega}' \subset \Omega$, $\gamma > 0$.

Взяв в качестве Ω окрестность $\mathcal{K}(x_0, \frac{\varepsilon_0}{2})$, можно утверждать, что для $\varepsilon < \varepsilon_0$ $\{u_\delta(y)\}$ образуют фундаментальную последовательность в метрике $W_2^{\sigma,2}(\mathcal{K}(x_0, \frac{\varepsilon}{2}))$. Отсюда, очевидно, следует (1.4). Лемма доказана.

2. Принцип расщепления для эллиптических систем

Обозначим $L_з$ — произвольное замкнутое расширение минимального оператора L_m, отвечающего (1.1) с коэффициентами (1.2), такое, что

$$L_m \subseteq L_з \subseteq L_M \qquad x \in G \subseteq R^n, \tag{2.1}$$

$L^з_{G\setminus\Omega}$ — замыкание сужения $L_з$ на функции, равные нулю в окрестности, ограниченной строго внутренней подобласти $\Omega \subset G$.

ТЕОРЕМА **2.1.** Предельные спектры $L_з$ и $L^з_{G\setminus\Omega}$ совпадают:

$$C(L_з) = C(L^з_{G\setminus\Omega}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $\mathcal{D}(L^з_{G\setminus\Omega}) \subset \mathcal{D}(L_з)$. Поэтому, $C(L^з_{G\setminus\Omega}) \subset C(L_з)$. Покажем, что имеет место обратное включение. Для этого покажем, что каждому $\lambda \in C(L_з)$ отвечает характеристическая последовательность функций $v_p(x) \in \mathcal{D}(L_з)$, равных нулю в окрестности Ω, и потому $v_p(x) \in \mathcal{D}(L^з_{G\setminus\Omega})$, а значит, $\lambda \in C(L^з_{G\setminus\Omega})$. Итак, пусть $f_p(x)$ — произвольная характеристическая последовательность для $\lambda \in C(L_з)$. В силу неравенства Фридрихса (1.6) имеем:

$$\|f_p\|_{W_2^{\sigma,2}(\mathcal{K})} \leqslant C,$$

где $\mathcal{K}$ — фиксированная окрестность Ω. Из теоремы вложения Соболева — Кондрашова поэтому следует, что $\{f_p\}$ компактна в $W_2^{(\sigma-1),2}(\mathcal{K})$. Выберем сходящуюся в $W_2^{(\sigma-1),2}(\mathcal{K})$ подпоследовательность, а затем из неё подпоследовательность $\{u_p\}_{p=1}^{\infty}$, для которой разности

$$v_{p1}(x) = u_{2p}(x) - u_{2p-1}(x)$$

некомпактны $\mathcal{L}_2^2(G)$. Очевидно, $\{v_{p1}\}$ остается характеристической для $\lambda \in C(L_з)$ и в $W_2^{(\sigma-1),2}(\mathcal{K})$ сходится к нулю. Пусть функция $\varphi(x) \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(G)$ удовлетворяет условиям $\varphi(x) \equiv 0$, $x \in \Omega$; $\varphi(x) \equiv 1$, $x \notin \mathcal{K}$. Тогда функции $v_p(x) = \varphi(x)\, v_{p1}(x) \in \mathcal{D}(L^з_{G\setminus\Omega})$ и образуют некомпактную в $\mathcal{L}_2^2(G)$ последовательность. Кроме того,

$$\|Lv_p - \lambda v_p\|_{\mathcal{L}_2^2(G)} \leqslant \|Lv_{p1} - \lambda v_{p1}\|_{\mathcal{L}_2^2(G)} + C\,\|v_{p1}\|_{W_2^{(\sigma-1),2}(\mathcal{K})},$$

откуда вытекает, что

$$\lim_{p\to\infty} \|Lv_p - \lambda v_p\| = 0,$$

и теорема **2.1** доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ **2.1** Условия (**1.2**) на гладкость коэффициентов L (**1.1**) в теореме **2.1** могут быть ослаблены: достаточно, чтобы имело место включение

$$\mathcal{D}(L_\jmath) \subset W^{\sigma,r}_{2\,loc}(G) \tag{2.2}$$

и было бы верно неравенство (1.6). Но это неравенство может быть доказано в предположении только непрерывности коэффициентов, а соответствующее включение во многих случаях может быть получено при гораздо более слабых требованиях, чем (1.2).

Везде в дальнейшем рассматриваются операторы, порожденные эллиптической системой в $\mathcal{L}^r_2(R^n)$.

ТЕОРЕМА 2.2 Пусть L_m имеет хотя бы одну регулярную точку. Его резольвента вполне непрерывна тогда и только тогда, когда

$$\lim_{R\to\infty}\left\{\inf_{\substack{\varphi\in C_0^{\infty,r}\\ supp\,\varphi\cap C_R=\phi}}\frac{\|L\varphi\|}{\|\varphi\|}\right\}=\infty, \tag{2.3}$$

где $C_R=\{x: |x|\leqslant R\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО опирается на следующее обобщение леммы Реллиха:

ЛЕММА 2.1 (В.В.Мартынов [4]). Пусть A – замкнутый неограниченный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, имеющий плотную область определения и непустое резольвентное множество. Его резольвента вполне непрерывна, тогда и только тогда, когда вполне непрерывна резольвента самосопряженного оператора A^*A или при любом $M>0$ множества

$$U_M=\{x: x\in\mathcal{D}(A);\ \|Ax\|+\|x\|\leqslant M\} \tag{2.4}$$

компактны в $\mathcal{H}$.

Итак, пусть резольвента оператора L_m вполне непрерывна. Предположим, что (2.3) не имеет места, т.е. найдется последовательность функций $\varphi_p(x)\in C_0^{\infty,r}$, носители которых уходят на бесконечность, такая, что

$$\frac{\|L\varphi_p\|}{\|\varphi_p\|}\leqslant M_1.$$

Легко видеть, что последовательность $\{\varphi_p(x)/\|\varphi_p\|\}$ не компактна в $\mathcal{L}^r_2(R^n)$, тем не менее она является множеством типа U_M (2.4), т.е. необходимость условия (2.3) доказана.

Установим теперь его достаточность. Пусть $(L^+L)_m$ – минимальный оператор, порожденный выражением L^+L. Рассмотрим также самосопряженный оператор $L^*_m L_m$. На функциях из $C_0^{\infty,r}$ он совпадает с $(L^+L)_m$, т.е. $L^*_m L_m$ – некоторое самосопряженное расширение симметрического оператора $(L^+L)_m$.

Воспользовавшись замечанием после теоремы 2.1, покажем, что она применима к этому расширению. Пусть $u\in\mathcal{D}(L^*_m L_m)$. Тогда

$$|(Lu, L\psi)|\leqslant C\|\psi\|,$$

где $\psi\in C_0^{\infty,r}(\Omega)$, Ω – фиксированная компактная область в R^n. Отсюда следует (см. [27], предлож. 3.7.4 [2]), что $u(x)\in W^{2\sigma,r}_{2\,loc}(R^n)$, т.е. для

2) В [27] коэффициенты дифференциального выражения бесконечно гладкие, но требуемая в настоящей работе гладкость достаточна для приводимых там доказательств нужных нам фактов.

расширения $L_m^* L_m$ верно включение (2.2).

Предположим, что условие (2.3) выполнено, но спектр $L_m^* L_m$ не является дискретным (вследствие леммы 2.1 это означает, что резольвента L_m не является вполне непрерывной). Если $(L_m^* L_m)_{R^n \setminus C_R}$ – замыкание оператора индуцированного $L_m^* L_m$ на функциях равных нулю в окрестности C_R, то $C(L_m^* L_m) = C((L_m^* L_m)_{R^n \setminus C_R})$. Пусть $\lambda \in C(L_m^* L_m)$, тогда $\lambda \in C((L_m^* L_m)_{R^n \setminus C_R})$, т.е. существует некомпактная последовательность функций $u_p(x)$ из $\mathcal{D}((L_m^* L_m)_{R^n \setminus C_R})$ таких, что $\| u_p \| = 1$ и :

$$(L_m^* L_m u_p - \lambda u_p, u_p) \to 0.$$

Отсюда получим :

$$(L_m u_p, L_m u_p) \leqslant \lambda + M. \tag{2.5}$$

Причем можно найти нормированную последовательность, удовлетворяющую (2.5), для любого $R > 0$. Рассмотрим такие последовательности при $R = 1, 2, 3 \ldots$, а затем выберем диагональную. Обозначим ее через $\{ v_p \}_{p=1}^{\infty}$. Легко видеть, что эта последовательность некомпактна. Кроме того, $v_p \in \mathcal{D}(L_m)$ и равна тождественно нулю в окрестности C_R при $R = p$. Отсюда следует, что найдется последовательность финитных функций из $C_0^{\infty, r}$ с носителями, уходящими на бесконечность, таких, что

$$\frac{\| L \varphi_p \|}{\| \varphi_p \|} \leqslant M_1,$$

что противоречит (2.3). Таким образом, теорема 2.2 доказана. Пусть L (1.1) – формально самосопряженное выражение. Тогда, подобно тому, как это делается для оператора Шредингера в [1], может быть доказана

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть L_m самосопряжен. Тогда для того, чтобы часть спектра, лежащая левее данной точки λ, не имела отличных от λ предельных точек, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\varepsilon > 0$ существовало $R_\varepsilon > 0$, при котором квадратичный функционал

$$([L - \lambda + \varepsilon] \varphi, \varphi) \geqslant 0 \tag{2.6}$$

для любой функции $\varphi \in C_0^{\infty, r}$, $supp\, \varphi \cap C_{R_\varepsilon} = \Phi$.

В частности, для чистой дискретности спектра полуограниченного оператора необходимо и достаточно, чтобы

$$\inf_{\substack{supp\, \varphi \cap C_R = \Phi \\ \varphi \in C_0^{\infty, r}}} \frac{(L \varphi, \varphi)}{\| \varphi \|^2} \longrightarrow \infty, \text{ при } R \to \infty. \tag{2.7}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО повторяет рассуждения, приводимые в [1] при доказательстве теоремы 41 (п° 19).

3. Условия совпадения минимального и максимального операторов

В дальнейшем часто будет использоваться

ЛЕММА 3.1 (см. [16]). Пусть функции $\mathcal{J}_j(\zeta) > 0$ $(j = 0, 1, \ldots, m)$

удовлетворяют системе неравенств :

$$\mathcal{J}_j^2(\zeta) \leqslant a_j \mathcal{J}_{j-1}(\zeta)\mathcal{J}_{j+1}(\zeta) + b_j \mathcal{J}_{j-1}(\zeta)\mathcal{J}_j(\zeta), \quad j=1\ldots m-1 \tag{3.1}$$

где константы a_j, $b_j \geqslant 0$. Тогда для каждого $\ell = 1,\ldots,m-1$ справедливо по крайней мере одно из двух соотношений :

$$\underline{\lim}_{\zeta\to\infty} \mathcal{J}_\ell(\zeta)/\mathcal{J}_m(\zeta) = 0; \quad \overline{\lim}_{\zeta\to\infty} \mathcal{J}_\ell(\zeta)/\mathcal{J}_0(\zeta) < \infty. \tag{3.2}$$

Кроме того, мы воспользуемся полученным в [16] представлением дифференциального выражения (1.1) в виде

$$Lu = \int_\omega \sum_{\nu=0}^{\sigma} a_\nu(x,\eta)\partial_\eta^\nu u(x)\,d\omega_\eta, \tag{3.3}$$

где $\omega = \{\eta : \eta\in R^n,\ |\eta|=1\}$,

$$\partial_\eta f = \langle \eta, \nabla\rangle f = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad a_\nu(x,\eta) = i^\nu \sum_{|\alpha|=\nu} a_\alpha(x) P_\alpha(\eta), \quad P_\alpha(\eta) -$$

скалярные полиномы степени ν от η, построенные в [16], $d\omega_\eta$ - элемент гиперплощади единичной сферы.

ЛЕММА 3.2. Пусть функция $k(x)\in C^\sigma$, $0\leqslant k(x)\leqslant 1$ и пусть

$$|\partial_\eta^j k(x)|\, k^{j-1}(x) \leqslant C, \quad x\in R^n, \quad j=\overline{1,\sigma}, \tag{3.4}$$

$$k^{\sigma-|\alpha|}(x)\, a_\alpha(x) = O(1), \quad |\alpha|\leqslant\sigma, \quad (k^0(x)=1). \tag{3.5}$$

Тогда, если

$$\Big|\Big(\sum_{|\alpha|=\sigma} a_\alpha(x)\xi^\alpha\Big)^{-1}\Big| \leqslant C, \quad |\xi|=1,\ x\in R^n \tag{3.6}$$

и коэффициенты $L(1.1)$ $a_\alpha(x)$ при $|\alpha|=\sigma$ равномерно непрерывны в R^n, то каждая функция $u(x)\in\mathcal{D}(L_M)$ удовлетворяет условию :

$$\int_{R^n} k^{2j}(x)\Big\{\int_\omega |\partial_\eta^j u(x)|^2 d\omega_\eta\Big\}dx < \infty, \quad j=0,1,\ldots,\sigma. \tag{3.7}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на неравенстве Фридрихса для всего пространства R^n (см.приложение), причем оно нам понадобится для главной части оператора (1.1). Обозначим последнюю через L_σ.
При условиях доказываемой леммы найдутся такие константы $k_0>0$, $c_0>0$, что

$$(L_\sigma\varphi, L_\sigma\varphi) + k_0(\varphi,\varphi) \geqslant c_0\|\varphi\|^2_{W_2^{\sigma,2}(R^n)}$$

для всякой функции $\varphi(x)\in \mathring{W}_2^{\sigma,2}(R^n) = W_2^{\sigma,2}(R^n)$. Нетрудно видеть, что найдется такое $\delta > 0$, для которого выполнено неравенство

$$\| L_\sigma \varphi \|^2 \geq \delta ((-\Delta)^\sigma \varphi, \varphi) - A(\delta) \| \varphi \|^2 \tag{3.8}$$

для той же совокупности функций φ .
Обозначим через $\theta(t)$ функцию из $C^\infty((0,\infty))$, удовлетворяющую условиям

$$\begin{aligned} &\theta(t) = 1, && 0 \leq t \leq \tfrac{1}{2}, \\ &\theta(t) = 0, && t \geq 1, \\ &0 \leq \theta(t) \leq 1, && \tfrac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

Обозначив через $\varphi_\tau(x)$ произведение $R(x)\theta\left(\frac{|x|}{\tau}\right)$, подставим в неравенство (3.8) $\varphi(x) = \varphi_\tau^\sigma(x)\, u(x)$, $u \in \mathcal{D}(L_M)$. Получим :

$$\begin{aligned} 2\| \varphi_\tau^\sigma(x) L_\sigma u \|^2 &+ 2 \Big\| \int_{\omega_n} a_\sigma(x,\eta) \sum_{\ell=1}^{\sigma} C_\sigma^\ell [\partial_\eta^\ell(\varphi_\tau^\sigma)][\partial_\eta^{\sigma-\ell} u]\, d\omega_\eta \Big\|^2 + \\ &+ A(\delta) \| \varphi_\tau^\sigma u \|^2 \geq \delta((-\Delta)^\sigma \varphi, \varphi) \geq \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\geq \delta_1 \int_{R^n \times \omega} \varphi_\tau^{2\sigma} |\partial_\eta^\sigma u|^2 d\omega_\eta dx -$$

$$- \Big| \iint_{R^n \times \omega} \sum_{\kappa,\ell=1}^{\sigma} C_{\ell,\kappa,\sigma} [\partial_\eta^\kappa(\varphi_\tau^\sigma(x))][\partial_\eta^\ell(\varphi_\tau^\sigma(x))] \langle \partial_\eta^{\sigma-\kappa} u, \partial_\eta^{\sigma-\ell} u \rangle \, d\omega_\eta dx \Big| =$$

$$= \delta_1 \int_{R^n \times \omega} \varphi_\tau^{2\sigma} |\partial_\eta^\sigma u|^2 d\omega\, dx - \mathcal{J}(\tau),$$

где C_σ^ℓ , $C_{\ell,\kappa,\sigma}$ – константы, зависящие только от σ, ℓ, κ . Введем следующее обозначение :

$$J_j^2(\tau) = \int_{R^n \times \omega} \varphi_\tau^{2j}(x)\, |\partial_\eta^j u|^2 d\omega_\eta dx.$$

Оценим через эти интегралы величину $\mathcal{J}(\tau)$, учитывая, что

$$|\partial_\eta^\ell \varphi_\tau^\sigma(x)| \leq C\, \varphi_\tau^{\sigma-\ell}(x). \tag{3.10}$$

Пользуясь неравенством Буняковского–Шварца, получаем :

$$\mathcal{J}(\tau) \leq M \sum_{\kappa,\ell=1}^{\sigma} J_{\sigma-\kappa}(\tau) J_{\sigma-\ell}(\tau).$$

Далее можно написать :

$$\| \varphi_\tau^\sigma L_\sigma u \|^2 = \| \varphi_\tau^\sigma L u \|^2 - \sum_{\substack{s,p=0 \\ p+s<2\sigma}}^{\sigma} (\varphi_\tau^\sigma L_s u, \varphi_\tau^\sigma L_p u),$$

где

$$L_s u = \int_\omega a_s(x,\eta)\,\partial_\eta^s u\, d\omega_\eta .$$

Отсюда :

$$\|\varphi_\tau^\sigma L_\sigma u\|^2 \leq A + B \sum_{\substack{p,s=0\\ p+s<2\sigma}}^{\sigma} \|\varphi_\tau^\sigma L_s u\| \cdot \|\varphi_\tau^\sigma L_p u\| .$$

Здесь мы использовали условие $u(x) \in \mathcal{D}(L_M)$. A и B – константы, не зависящие от τ .
Заметим теперь, что

$$|k^{\sigma-s}(x)\, a_s(x,\eta)| \leq C$$

и оценим через $\{\mathcal{J}_j(\tau)\}$ величину $\|\varphi_\tau^\sigma L_s u\|$, $0<s<\sigma$

$$\|\varphi_\tau^\sigma L_s u\| = \|\varphi_\tau^\sigma(x)\int_\omega a_s(x,\eta)\partial_\eta^s u(x)\, d\omega_\eta\| \leq$$

$$\leq \int_\omega \|\varphi_\tau^\sigma(x)\, a_s(x,\eta)\,[\partial_\eta^s u(x)]\|\, d\omega_\eta =$$

$$= \int_\omega \Big(\int_{R^n} \varphi_\tau^{2\sigma}(x)\, |a_s(x,\eta)[\partial_\eta^s u]|^2 dx\Big)^{\frac12} d\omega_\eta \leq$$

$$\leq C_1 \int_\omega \Big(\int_{R^n} \varphi_\tau^{2(\sigma-s)}(x)\, |\partial_\eta^s u|^2 dx\Big)^{\frac12} d\omega_\eta \leq C_2 \mathcal{J}_{\sigma-s}(\tau).$$

Совершенно аналогично, учитывая (3.10), получаем :

$$\Big\|\int_\omega a_\sigma(x,\eta) \sum_{\ell=1}^{\sigma} C_\sigma^\ell [\partial_\eta^\ell \varphi_\tau^\sigma(x)][\partial_\eta^{\sigma-\ell} u(x)]\, d\omega_\eta\Big\|^2 \leq$$

$$\leq C_3 \sum_{\ell=1}^{\sigma} \mathcal{J}_{\sigma-\ell}^2(\tau).$$

Возвращаясь теперь к неравенствам (3.9) и собирая все оценки, получим

$$\mathcal{J}_\sigma^2(\tau) \leq A_1 + B_1 \sum_{\substack{s,z=0\\ s+z<2\sigma}}^{\sigma} \mathcal{J}_s(\tau)\mathcal{J}_p(\tau). \tag{3.11}$$

Величины $\mathcal{J}_j(\tau)$ удовлетворяют неравенствам (3.1) (см. [16]), т.е. выполнено (3.2). Поэтому (3.11) в совокупности с тем, что $\mathcal{J}_0(\tau) \leq \|u\|$ дает ограниченность величин $\mathcal{J}_j(\tau)$, что эквивалентно (3.7).

Лемма 3.2 доказана.

ТЕОРЕМА 3.1 [3]. Минимальный L_m и максимальный L_M операторы, порожденные дифференциальным выражением L (1.1) совпадают, если выполнены все условия леммы 3.2 и если, кроме того, существует функция $P(x)\in C^{\sigma}$ и система ограниченных областей $\{\Omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ с кусочно-гладкими границами $\partial\Omega_k$ такие, что $\bar\Omega_k \subset \Omega_{k+1}$, $\bigcup_k \Omega_k = R^n$, $P(x)|_{\partial\Omega_k} = N_k \to \infty$ при $k\to\infty$, $0\leq P(x)\leq N_k$ $(x\in\Omega_k)$, причем,

$$|\partial_\eta^j P(x)| \leq c_k R^{\sigma-j}(x), \quad j=\overline{1,\sigma}, \tag{3.12}$$

где $x\in\Omega_k$, $c_k = o(N_k)$, $\eta\in\omega$.

В случае выражения первого порядка равенство $L_m = L_M$ имеет место независимо от леммы 3.2, если вместо (3.12) выполнены неравенства :

$$\Big|\sum_{|\alpha|=1} a_\alpha(x)\,[D^\alpha P(x)]\Big| \leq c_k, \quad x\in\Omega_k, \quad (k=1,2,\dots). \tag{3.13}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что в $\mathcal{D}(L_m)$ входят все функции из $W_2^{\sigma,2}(R^n)$ имеющие компактные носители, т.е. эквивалентные функции равной нулю вне ограниченного множества. Для доказательства теоремы достаточно показать, что для всякой функции $u(x)\in\mathcal{D}(L_M)$ найдется последовательность $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\varphi_k\in \mathring{W}_2^{\sigma,2}(\Omega_k)$ такая, что

$$\begin{aligned} &\|L_M u - L\varphi_k\| \to 0,\\ &\|u-\varphi_k\|\to 0. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Построим последовательность финитных функций : $\varphi_k(x)=0$, $x\notin\Omega_k$;

$$\varphi_k(x) = \Big(1-\frac{P(x)}{N_k}\Big)^{\sigma} u(x) \in \mathring{W}_2^{\sigma,2}(\Omega_k)$$

и покажем, что имеет место (3.14).

$$\|L_M u - L\varphi_k\| \leq \|L_M u - \varphi_k L_M u\| +$$

$$+ c\Big\|\int_\omega \Big\{\sum_{\nu=1}^{\sigma} a_\nu(x,\eta)\sum_{s=1}^{\nu}\Big[\partial_\eta^s\Big(1-\frac{P(x)}{N_k}\Big)^{\sigma}\Big]\partial_\eta^{\nu-s}u(x)\Big\}d\omega_\eta\Big\|_{\mathcal{L}_2^2(\Omega_k)} \leq$$

$$\leq \varepsilon_k + \delta_k \int_\omega \sum_{\nu=1}^{\sigma}\sum_{s=1}^{\nu} \|k^{\nu-s}(x)\,[\partial_\eta^{\nu-s}u(x)]\|_{\mathcal{L}_2^2(\Omega_k)}\, d\omega_\eta \leq$$

$$\leq \varepsilon_k + \delta_k' \sum_{\nu=1}^{\sigma}\sum_{s=1}^{\nu}\Big\{\int_{R^n} k^{2(\nu-s)}(x)\int_\omega |\partial_\eta^{\nu-s}u|^2 d\omega_\eta\, dx\Big\}^{\frac12},$$

где ε_k, $\delta_k'\to 0$ при $k\to\infty$.

---

3) В случае одномерной формально самосопряженной системы первого порядка теорема 3.1) дает признак самосопряженности, близкий к принадлежащим Б.М.Левитану [9, стр.639] и В.В.Мартынову [4, стр.1508].

Отсюда вытекает, вследствие леммы 3.2, что выполнено (3.14). При $\sigma = 1$ (3.14) получается аналогично из (3.13), независимо от леммы 3.2. Теорема 3.1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть L (1.1) удовлетворяет всем условиям леммы 3.2 с $R(x) = R(|x|)$, тогда $L_m = L_M$, если

$$\int^{\infty} [k(t)]^{\sigma-1} dt = \infty , \tag{3.15}$$

причем условие (3.4) принимает вид :

$$\left| \frac{d^j}{dt^j} R(t) \right| R^{j-1}(t) \leqslant C , \quad j = \overline{1,\sigma} . \tag{3.16}$$

(Условие (3.16) можно заменить требованием монотонности $R(t)$. Этот вариант сводится к (3.16), см. [21]).

4. Признаки отсутствия предельного спектра

Пусть δ_R верхняя грань тех δ, при которых выполняется неравенство (3.8) для функций $\varphi(x)$, носители которых находятся вне шара C_R. Обозначим

$$\delta_0 = \lim_{R \to \infty} \delta_R .$$

Через S_n будем обозначать гиперплощадь единичной сферы в R^n.
Введем также обозначение :

$$c_{np} = \int_{\omega} \eta_1^p \, d\omega_\eta ,$$

где η_1 –1–ая координата вектора η $(|\eta| = 1)$. Очевидно $c_{np} = 0$ при нечетном p.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть коэффициенты $a_\alpha(x)$ главной части выражения (1.1) равномерно непрерывны и ограничены в R^n, и выполнено условие (3.6) леммы 3.2. Пусть также существует функция $0 < g(x) \to \infty$ при $|x| \to \infty$ такая, что области $G_M = \{x : g(x) < M\}$ односвязны, $g(x) \in C^\sigma$ и

$$|\partial_\eta^j g(x)| = o\left([g(x)]^{j+1}\right), \quad j = \overline{1,\sigma}, \eta \in \omega , \tag{4.1}$$

а матрица $a_0(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|a_0^{-1}(x)| \leqslant C g^{-\sigma}(x) \tag{4.2}$$

при $|x| \geqslant R_0 > 0$. Кроме того, предположим, что

$$a_\alpha(x) = o(g^{\sigma-|\alpha|}(x)) , \quad |\alpha| = \overline{1,\sigma-1} , \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}[a_\sigma^* a_0] , \frac{\partial}{\partial x_j} a_0(x) = o(g^{\sigma+1}(x)) , \quad j = 1 \dots n . \tag{4.4}$$

Тогда : 1°. Если при $|x|\geqslant R_0$ имеет место неравенство

$$|a_0^*(x)a_\sigma(x,\eta)a_0^{-1}(x)+(-1)^\sigma a_\sigma^*(x,\eta)|\leqslant\gamma_1\theta, \tag{4.5}$$

где $0<\theta<1$, $\gamma_1=\dfrac{2\sqrt{\delta_0}}{\sqrt{C_{n,2\sigma}}\sqrt{S_n}}$, то $L_m=L_M$ и его предельный спектр пуст.

2°. Если σ – четное, матрица $a_0(x)$ удовлетворяет дополнительно неравенству

$$|a_0(x)|\leqslant Cg^\sigma(x) \tag{4.6}$$

или диагональна, то равенство $L_m=L_M$ и отсутствие предельного спектра будут иметь место, если при $|x|\geqslant R_0$ вместо (4.5) выполнено неравенство :

$$a_0^*(x)a_\sigma(x,\eta)+a_\sigma^*(x,\eta)\,a_0(x)\geqslant-\gamma_2\theta[a_0^*(x)a_0(x)]^{\frac{1}{2}} \tag{4.7}$$

при $\gamma_2=\dfrac{2\sqrt{\delta_0}}{C_{n,\sigma}}$, $\eta\in\omega$.

(В случае $n=1$ следует положить $\gamma_1=\gamma_2=2\sqrt{\delta_0}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предварительно докажем, что при условиях теоремы имеет место неравенство :

$$\|L\varphi\|^2\geqslant A_0[\hat{J}_\sigma(\varphi)+\hat{J}_0(\varphi)]-A_1[\|\varphi\|^2+\sum_{p+s\leqslant 2\sigma}\hat{J}_{sc}(\varphi)\hat{J}_{pc}(\varphi)], \tag{4.8}$$

где

$$\hat{J}_{sc}(\varphi)=\int_{R^n\times\omega}c(x)g^{2(\sigma-s)}(x)|\partial_\eta^s\varphi|^2d\omega_\eta dx,\ c(x)\to 0,\ (|x|\to\infty),$$

$\hat{J}_s(\varphi)$ – тот же интеграл при $c(x)\equiv 1$, а $\varphi\in W_2^{\sigma,2}(R^n)$ и имеет компактный носитель, причем $supp\,\varphi\cap C_{R_0}=\phi$. Очевидно, что

$$\|L\varphi\|^2\geqslant\frac{1}{2}\|L_\sigma\varphi+a_0(x)\varphi\|^2-\|\sum_{0<s<\sigma}L_s\varphi\|^2. \tag{4.9}$$

Оценим снизу первое слагаемое с помощью (3.8) :

$$\|L_\sigma\varphi+a_0(x)\varphi\|^2=(L_\sigma\varphi,L_\sigma\varphi)+(a_0\varphi,a_0\varphi)+$$

$$+(a_0\varphi,L_\sigma\varphi)+(L_\sigma\varphi,a_0\varphi)\geqslant\delta((-\Delta)^\sigma\varphi,\varphi)-$$

$$-A(\delta)(\varphi,\varphi)+(a_0\varphi,a_0\varphi)+$$

$$+\int_{R^n\times\omega}\langle[a_0^*(x)a_\sigma(x,\eta)+(-1)^\sigma a_\sigma^*(x,\eta)\,a_0(x)]\partial_\eta^\sigma\varphi,\varphi\rangle d\omega_\eta dx+$$

$$+\sum_{p+\ell=\sigma-1} A_{p,\ell}\int_{R^n}\Big\{\int_{\omega}\langle \partial_\eta^p\varphi,\ [\langle\eta,\nabla\rangle(a_\sigma^*(x,\eta)a_\circ(x))]\partial_\eta^\ell\varphi\rangle d\omega_\eta\Big\}dx=$$

$$=\delta((-\Delta)^\sigma\varphi,\varphi)-A(\underset{\sim}{\delta})(\varphi,\varphi)+(a_\circ\varphi,a_\circ\varphi)+$$

$$+\mathcal{J}_1(\varphi)+\mathcal{J}_2(\varphi).$$

Заметим, что в случае, когда σ четное, сумму двух последних слагаемых можно записать в виде :

$$\mathcal{J}_1(\varphi)+\mathcal{J}_2(\varphi)=\int_{R^n\times\omega}\langle[a_\circ^*a_\sigma(x,\eta)+a_\sigma^*(x,\eta)a_\circ(x)]\partial_\eta^{\frac{\sigma}{2}}\varphi,\partial_\eta^{\frac{\sigma}{2}}\varphi\rangle d\omega_\eta dx+$$

$$+\sum_{p+\ell=\sigma-1} B_{p,\ell}\int_{R^n}\Big\{\int_{\omega}\langle\partial_\eta^p\varphi,[\langle\eta,\nabla\rangle(a_\sigma^*(x,\eta)a_\circ(x))]\partial_\eta^\ell\varphi\rangle d\omega_\eta\Big\}dx= \tag{4.10}$$

$$=\mathcal{J}_1'(\varphi)+\mathcal{J}_2'(\varphi).$$

Здесь нам понадобится

ЛЕММА 4.1. Если выполнены условия (4.2), (4.4), (4.6), то

$$\frac{\partial}{\partial x_j}[a_\circ^*(x)a_\circ(x)]^{\frac12}=o(g^{\sigma+1}(x)),\quad j=\overline{1,n}. \tag{4.11}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.1. Как известно,

$$[a_\circ^*a_\circ]^{\frac12}=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma(\lambda E-a_\circ^*a_\circ)^{-1}\sqrt{\lambda}\,d\lambda,$$

где Γ - контур, содержащий собственные числа матрицы $a_\circ^*a_\circ$. При малом изменении аргумента x контур Γ можно считать фиксированным. Поэтому :

$$\frac{\partial}{\partial x_j}[a_\circ^*a_\circ]^{\frac12}(x)=-\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma(\lambda E-a_\circ^*a_\circ)^{-1}[a_\circ^*a_\circ]'_{x_i}\times$$

$$\times(\lambda E-a_\circ^*a_\circ)^{-1}\sqrt{\lambda}\,d\lambda.$$

Обозначим через $\nu(x)$ и $\mu(x)$ соответственно минимальное и максимальное собственные числа матрицы $a_\circ^*a_\circ$. Пусть Γ_x - окружность с центром $\frac12(\nu(x)+\mu(x))$ на вещественной оси и радиусом $\frac12(\nu(x)+\mu(x))-1$. В силу условий (4.2), (4.6) $\mu(x)\leqslant C\nu(x)$. Отсюда получаем :

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_j}\left[a_\circ^* a_\circ\right]^{\frac{1}{2}}(x)\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\Gamma_x}\left|(\lambda E - a_\circ^* a_\circ)^{-1}\right|^2 |\lambda|^{\frac{1}{2}} ds \times$$

$$\times\left|\left[a_\circ^* a_\circ\right]'_{x_j}\right| \leqslant \frac{(\nu(x)+\mu(x)-1)^{\frac{1}{2}}}{(\nu(x)-1)^2}\left[\frac{1}{2}(\nu(x)+\mu(x))-1\right]\times$$

$$\times\left|(a_\circ^* a_\circ)'_{x_j}\right| \leqslant \frac{A}{\sqrt{\mu(x)}}\left|(a_\circ^*)'_{x_j} a_\circ + a_\circ^*(a_\circ)'_{x_j}\right|.$$

Вследствие условия (4.4) отсюда следует (4.11). Лемма 4.1 доказана. Продолжаем доказательство (4.8). Предположим сначала, что выполнены условия второй части теоремы для четного σ .

Оценим снизу величину (4.10) с помощью условий (4.4), (4.7).

Получим :

$$\mathcal{J}_1'(\varphi) + \mathcal{J}_2'(\varphi) \geqslant -\gamma_2\theta\int\limits_{R^n\times\omega}\langle[a_\circ^* a_\circ]^{\frac{1}{2}}\partial_\eta^{\frac{\sigma}{2}}\varphi,\ \partial_\eta^{\frac{\sigma}{2}}\varphi\rangle\, d\omega_\eta dx -$$

$$-A\sum_{\substack{p,\ell=0\\ p+\ell=\sigma-1}}^{\sigma-1}\hat{\mathcal{I}}_{\ell c}(\varphi)\hat{\mathcal{I}}_{pc}(\varphi).$$

Далее можно написать :

$$-\gamma_2\theta\int\limits_{R^n\times\omega}\langle[a_\circ^* a_\circ]^{\frac{1}{2}}\partial_\eta^{\frac{\sigma}{2}}\varphi,\quad \partial_\eta^{\frac{\sigma}{2}}\varphi\rangle\, d\omega_\eta dx =$$

$$= -\gamma_2\theta\int\limits_{R^n}\langle[a_\circ^* a_\circ]^{\frac{1}{2}}\Big(\int\limits_\omega\partial_\eta^\sigma\varphi\, d\omega_\eta\Big),\varphi\rangle\, dx -$$

$$-\gamma_2\theta\sum_{\substack{p,\ell=0\\ p+\ell=\sigma-1}}^{\sigma-1}B_{p,\ell}\int\limits_{R^n}\Big\{\int\limits_\omega\langle\partial_\eta^p\varphi,\ (\partial_\eta[a_\circ^* a_\circ]^{\frac{1}{2}})\,\partial_\eta\varphi\rangle\, d\omega_\eta\Big\}dx.$$

Заметив, что при диагональности $a_\circ(x)$ (4.11) очевидно, и приняв во внимание лемму 4.1, получим :

$$\mathcal{J}_1'(\varphi) + \mathcal{J}_2'(\varphi) \geqslant +\gamma_2\theta c_{n\sigma}\int\limits_{R^n}|\Delta^{\frac{\sigma}{2}}\varphi|\cdot|a_\circ\varphi|\, dx -$$

$$-A_1\sum_{p,\ell=0}^{\sigma-1}\hat{\mathcal{I}}_{pc}(\varphi)\hat{\mathcal{I}}_{\ell c}(\varphi).$$

Таким образом можно написать :

$$\|L_6\varphi + a_\circ\varphi\|^2 \geqslant \delta\int\limits_{R^n}\langle(-\Delta)^\sigma\varphi,\varphi\rangle\, dx -$$

$$-\gamma_2 \Theta c_{n\sigma} \Big(\int_{R^n} \langle (-\Delta)^\sigma \varphi, \varphi \rangle dx\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{R^n} \langle a_0(x)\varphi, a_0(x)\varphi\rangle dx\Big)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\int_{R^n} \langle a_0\varphi, a_0\varphi\rangle - A(\delta)(\varphi,\varphi) - A\sum_{p,\ell=0}^{\sigma-1} \hat{\mathcal{J}}_{pc}(\varphi)\hat{\mathcal{J}}_{\ell c}(\varphi).$$

Если теперь предположить, что $supp\, \varphi$ находится вне шара достаточно большого радиуса, то δ можно выбрать настолько близким к δ_0, что $\Theta^2\delta_0 < \delta_0$. Учитывая теперь условия (4.2) и замечая, что

$$\hat{\mathcal{J}}_\sigma(\varphi) = c_{n\sigma}\int_{R^n} \langle (-\Delta)^\sigma \varphi, \varphi\rangle dx,$$

получим :

$$\| L_6\varphi + a_0\varphi\|^2 \geqslant A_0 [\hat{\mathcal{J}}^2_\sigma(\varphi) + \hat{\mathcal{J}}^2_0(\varphi)] -$$

$$-A(\delta)\|\varphi\|^2 - A\sum_{p,\ell=0}^{\sigma-1} \hat{\mathcal{J}}_{pc}(\varphi)\hat{\mathcal{J}}_{pc}(\varphi).$$

В силу условия (4.3) можно написать

$$\|\sum_{0<s<\sigma} L_s\varphi\|^2 \leqslant B\sum_{0<s<\sigma} \hat{\mathcal{J}}^2_{sc}(\varphi),$$

откуда следует неравенство (4.8). Это же неравенство получается с использованием условия (4.5), которое равносильно следующему

$$|[a_0^* a_\sigma(x,\eta) + (-1)^\sigma a_\sigma^*(x,\eta)a_0(x)]h| \leqslant \gamma_1\Theta |a_0(x)h|.$$

Поэтому :

$$|\mathcal{F}_1(\varphi) + \mathcal{F}_2(\varphi)| \leqslant \Big|\int_{R^n\times\omega} \langle \partial^\sigma_\eta\varphi, [a_\sigma^*(x,\eta)a_0(x)] +$$

$$+(-1)^\sigma a_0^*(x)a_\sigma(x,\eta)]\varphi\rangle d\omega_\eta dx\Big| + |\mathcal{F}_2(\varphi)| \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_1\Theta c^{\frac{1}{2}}_{n,2\sigma} S^{\frac{1}{2}}_n ((-\Delta)^\sigma\varphi,\varphi)^{\frac{1}{2}} (a_0(x)\varphi, a_0(x)\varphi)^{\frac{1}{2}} + |\mathcal{F}_2(\varphi)|.$$

Отсюда получим (4.8), так как величина $\mathcal{F}_2(\varphi)$ уже оценивалась. Докажем теперь, что $C(L_m)$ пусто. Предположим, что $\lambda\in C(L_m)$. Тогда существует, вследствие теоремы 2.1, последовательность финитных функций $\varphi_k \in C_0^{\infty,2}$ с непересекающимися, уходящими на бесконечность носителями, такая, что

$$\|L\varphi_k - \lambda\varphi_k\| \to 0, \quad \|\varphi_k\| = 1.$$

Величина $\hat{\mathcal{J}}_0(\varphi_K) \to \infty$ $(K \to \infty)$. Так как $\{\mathcal{J}_S(\varphi_K)\}_{S=0}$ удовлетворяют системе неравенств (3.1), в чем нетрудно убедиться интегрированием по частям и простой оценкой, то вследствие леммы 3.1, при каждом S имеет место одно из условий

$$\hat{\mathcal{J}}_{sc}(\varphi_K) = o(\hat{\mathcal{J}}_\sigma(\varphi_K)); \quad \hat{\mathcal{J}}_{sc}(\varphi_K) = o(\hat{\mathcal{J}}_0(\varphi_K)). \tag{4.12}$$

Таким образом, при $K > K_0$ можно написать :

$$\| L\varphi_K \| \geqslant A \hat{\mathcal{J}}_0(\varphi_K) \geqslant N_K \| \varphi_K \|,$$

где $N_K \to \infty$. Поэтому получаем

$$\| L\varphi_K - \lambda \varphi_K \| \geqslant N_K - |\lambda|,$$

что противоречит характеристичности последовательности $\{\varphi_K\}$.
Отсутствие предельного спектра у оператора L_m доказано. Заметим, что из неравенства (4.8) следует также (2.3).
Покажем теперь, что $L_m = L_M$.

ЛЕММА 4.2. При условиях теоремы 4.1 для всякой функции $u(x) \in \mathcal{D}(L_M)$ при $j = 0, 1, \ldots, \sigma$

$$\int_{R^n} g^{2(\sigma-j)}(x) \left\{ \int_\omega |\partial_\eta^j u|^2 d\omega_\eta \right\} dx < \infty. \tag{4.13}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.2. Подставим в неравенство (4.8) $\varphi(x) = \varphi_\sigma(x,\tau) u(x)$, где $u(x) \in \mathcal{D}(L_M)$, $\varphi_\sigma(x,\tau) = \varphi_j(x,\tau)$ при $j = \sigma$, а

$$\varphi_j(x,\tau) = \begin{cases} g^{\sigma-j}(x) \left(1 - \frac{g(x)}{\tau}\right)^{\sigma+j}, & x \in \{x : g(x) < \tau\} \\ 0, & x \in \{x : g(x) \geqslant \tau\}. \end{cases}$$

$$\| L(\varphi_\sigma(x,\tau) u(x)) \|^2 = \| \varphi_\sigma(x,\tau) Lu +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\sigma} \sum_{s=1}^{j} C_s^j \int_\omega a_j(x,\eta) [\partial_\eta^s \varphi_\sigma(x,\tau)] \partial_\eta^{j-s} u(x) \|^2 \leqslant$$

$$\leqslant A \Big[\| \varphi_\sigma(x,\tau) Lu \|^2 + \sum_{\substack{s,p=0 \\ s+p<2\sigma}}^{\sigma} \mathcal{J}_{sc}(\tau) \mathcal{J}_{pc}(\tau) \Big],$$

где

$$\mathcal{J}_{sc}^2(\tau) = \int_{R^n} \varphi_s^2(x,\tau) c(x) \left(\int_\omega |\partial_\eta^s u|^2 d\omega_\eta \right) dx,$$

$C(x) \to 0$. Мы использовали свойства (4.1) функции $g(x)$, из которых следует, что

$$|\partial_\eta^s \varphi_\sigma(x,\tau)| \leq c(x)\varphi_{\sigma-s}(x,\tau),$$

а также условие (4.3). Неравенство (4.8) верно для функций с носителями вне шара с достаточно большим радиусом. Поэтому функцию $u(x)$ положим равной нулю внутри этого шара, что не ограничивает общности. Пусть $J_s^2(\tau)$ тот же интеграл, что и $J_{sc}^2(\tau)$, но при $c(x) \equiv 1$. Тогда :

$$\hat{J}_\sigma^2(\varphi_\sigma(x,\tau)u(x)) \geq J_\sigma^2(\tau) - A\sum_{\substack{s,p=0\\ s+p<2\sigma}}^{\sigma} J_{sc}(\tau)J_{pc}(\tau),$$

$$\hat{J}_{sc}^2(\varphi_\sigma(x,\tau)u(x)) \leq A\sum_{j,\ell=0}^{s} J_{jc}(\tau)J_{\ell c}(\tau).$$

Кроме того, существует такая последовательность точек $\tau_K \to \infty$, что (см. [16]):

$$\hat{J}_0^2(\varphi_\sigma(x,\tau_K)u(x)) \geq A\, J_0^2(\tau_K).$$

После этих замечаний неравенство (4.8) дает :

$$J_\sigma^2(\tau_K) + J_0^2(\tau_K) \leq A\sum_{s,p=0}^{\sigma} J_{sc}(\tau_K)J_{pc}(\tau_K) + B. \tag{4.14}$$

Если какая-либо из величин $J_s(\tau_K)$ неограничена, то в силу соотношений (3.2) будет неограничена хотя бы одна из величин $J_\sigma(\tau_K)$, $J_0(\tau_K)$. Нетрудно проверить, что в этом случае при подстановке $J_{sc}(\tau_K)$ $(s=0\ldots\sigma)$, $J_\sigma(\tau_K)$, $J_0(\tau_K)$ в (4.12), вместо фигурирующих там величин, по крайней мере, одно из этих соотношений выполняется, что противоречит (4.14). Таким образом, $J_s(\tau_K)$ ограничены по K, что равносильно утверждению леммы 4.2. Завершается доказательство теоремы аналогично теореме 3.1. Рассматривается произвольная функция $u(x) \in \mathcal{D}(L_M)$. Затем строится $\varphi_R(x) = \Theta(\frac{|x|}{R})u(x)$, $\varphi_R \in \mathcal{D}(L_M)$.

Остается показать, что $L\varphi_R \to L_M u$ при $R \to \infty$.

$$\|L_M u - L\varphi_R\| \leq \|Lu - \Theta(\tfrac{|x|}{R})Lu\| +$$

$$\frac{A}{R}\sum_{j=1}^{\sigma}\Big\{\int_{R^n} g^{2(\sigma-j)}(x)\Big(\int_\omega |\partial_\eta^j u|^2 d\omega_\eta\Big)dx\Big\}^{\frac{1}{2}} \to 0.$$

Теорема 4.1 доказана.

Простейшими примерами реализации условий теоремы 4.1 являются трехмерная и одномерная системы Дирака. В трехмерном случае соответствующее дифференциальное выражение имеет вид :

$$Pu = i\sum_{j=1}^{3}\alpha_j\frac{\partial u}{\partial x_j} + Q(x)u, \tag{4.15}$$

3) $q_1''(x)$, $q_2''(x)$ сохраняют знак при больших по абсолютной величине x ; спектр оператора (4.21) непрерывен и заполняет всю ось $(-\infty,\infty)$. С другой стороны известно, что всякая одномерная самосопряженная система Дирака унитарно-эквивалентна системе с матрицей $Q(x)$, имеющей нулевой след (см. [9]), причем для системы (4.21)

$$Q(x) = \frac{1}{2}(q_2 - q_1)\begin{pmatrix} -\cos\varphi(x) & \sin\varphi(x) \\ \sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \end{pmatrix}, \tag{4.22}$$

где

$$\varphi(x) = -\int_0^x [q_1(t) + q_2(t)]\,dt.$$

Положим $q_1(x) = x^2$, $q_2(x) = 2x^2$. Нетрудно видеть, что матрица (4.22) удовлетворяет (4.17), (4.19) при $g(x) = x^2$. Условие же (3.18) не выполнено, а именно $Q'(x)$ есть $O(g^2(x))$, но не $o(g^2(x))$. Уже при этом предельный спектр соответствующего оператора заполняет всю ось.

5. Случай J – симметрической дифференциальной операции $(-\Delta)^m + Q(x)$

При доказательстве теоремы (4.1) показано, что при ее условиях выполнено соотношение (2.3). Отсюда можно было бы заключить, что резольвента соответствующего оператора вполне непрерывна, если бы нам было известно, что резольвентное множество непусто. Но, например, у оператора $Lu = u' + xu$ $(n=1, \sigma=1, \tau=1)$ спектр состоит из собственных значений, покрывающих всю плоскость. Условие (2.3) для него, тем не менее, выполнено.

В некоторых случаях можно дополнительно установить непустоту резольвентного множества. Рассмотрим скалярный оператор

$$Lu = (-\Delta)^m u + Q(x)u \quad (\tau=1, \sigma=2m). \tag{5.1}$$

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть комплекснозначная функция $Q(x)$ удовлетворяет следующим условиям :

$$|Q(x)| \geqslant C g^{2m}(x), \quad |x| \geqslant R_0 ; \tag{5.2}$$

$$|\nabla Q(x)| = o\left(g^{2m+1}(x)\right); \tag{5.3}$$

$$-\pi + \delta_1 \leqslant \arg Q(x) \leqslant \pi - \delta_2, \quad |x| \geqslant R_0, \tag{5.4}$$

где $g(x)$ – функция, определенная в теореме 4.1, C, δ_j $(j=1,2)$ – положительные константы. Тогда оператор L (5.1) будет J – существенно самосопряженным $(L_m = L_M)$, его резольвента вполне непрерывна и в каждом секторе

$$-\delta_2' \leqslant \arg(-\lambda) \leqslant \delta_1', \tag{5.5}$$

где $\delta_j' < \min\{\delta_j, \pi\}$, может находиться лишь конечное число собственных значений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условия (5.2), (5.3), (5.4) являются условиями теоремы 4.1. Действительно, в данном случае $\delta_0 = 1$, $a_{2m}(\eta) = \frac{1}{c_{m,2m}}$, $\gamma_2 = \frac{2}{c_{n,2m}}$.

Условие (4.7) примет вид :

$$2\operatorname{Re} Q \geqslant -2\Theta |Q| ,$$

что равносильно (5.4).

Таким образом, спектр оператора L (5.1) состоит из собственных значений конечной кратности, так как остаточный спектр отсутствует, в силу J -самосопряженности. Осталось показать, что в секторе (5.5) при достаточно большом $|\lambda|$ нет собственных значений.

Не ограничивая общности, можно считать условия (5.2), (5.4) выполненными при всех $x \in R^n$, т.к. в противном случае, добавив достаточно большую по модулю константу, мы добъемся этого, может быть, с иной константой C. Спектр при этом только сдвинется. Заметим, что при всех λ из сектора (5.5) значения $(Q(x)-\lambda)$ находятся вне фиксированного сектора, содержащего отрицательную полуось. Кроме того,

$$|Q(x)-\lambda| \geqslant A\{|Q(x)|+|\lambda|\} \geqslant A_1\{q^{2m}(x)+|\lambda|\}.$$

Условие (5.3) для $Q(x)-\lambda$ тоже выполнено, поэтому, повторяя рассуждения, приводимые при доказательстве теоремы 4.1, получим для $\varphi(x)\in W_2^{2m}(R^n)$ и имеющей компактный носитель :

$$\|(-\Delta)^m\varphi + (Q-\lambda)\varphi\|^2 \geqslant A_0\,[\hat{J}^2_{2m}(\varphi)+\hat{J}^2_0(\varphi)] - B\Big\{\sum_{\substack{p,s=0\\ p+s\neq 4m}}^{2m}\hat{J}_{sc}(\varphi)\hat{J}_{pc}(\varphi)\Big\}. \tag{5.6}$$

Заметим, что в этом неравенстве правая часть не зависит от λ . Пусть $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность собственных значений из сектора (5.5), причем $\lambda_k\to\infty$. Обозначим

$$\varphi_k(x)=\varphi_{2m}(x,\tau)\,u_k(x),$$

где $u_k(x)$ – собственный вектор, отвечающий λ_k .

$$\|(-\Delta)^m\varphi_k+(Q-\lambda_k)\varphi_k\|^2 = \|[(-\Delta)^m u_k+(Q-\lambda_k)u_k]\,\varphi_{2m}(x,\tau)+$$

$$+\sum_{s=1}^{2m}(-1)^m C^s_{2m}\int_\omega\{\partial_\eta^{2m-s}u_k(x)\}\,\partial_\eta^s\varphi_{2m}(x,\tau)\|^2\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\substack{s,p=0\\ s+p<4m}}^{2m}J_{sc}(\tau,k)\,J_{p,c}(\tau,k),\quad J_s(\tau,k)=\int_{R^n}\varphi_s^2(x,\tau)\Big(\int_\omega|\partial_\eta^s u_k|^2d\omega_\eta\Big)dx.$$

Таким образом ,

$$J^2_{2m}(\tau,k)+\hat{J}^2_0(\varphi_{2m}(x,\tau)\,u_k(x))\leqslant A\sum_{\substack{p,s=0\\ p+s\neq 4m}}^{2m}J_{sc}(\tau,k)\,J_{pc}(\tau,k).$$

В силу леммы 4.2 все величины, входящие в последнее неравенство, ограничены по τ при фиксированном κ, поэтому переходя к пределу при $\tau \to \infty$, получим :

$$J_{2m}^2(\kappa) + J_0^2(\kappa) \leqslant A \sum_{\substack{s+p<4m \\ p,s=0}}^{2m} J_{sc}(\kappa) J_{pc}(\kappa), \tag{5.7}$$

где

$$J_j^2(\kappa) = \int_{R^n} g^{2m-j}(x) \left(\int_{\omega} |\partial_\eta^j u_\kappa(x)|^2 d\omega_\eta \right) dx.$$

Зафиксируем некоторую ограниченную область $\Omega \subset R^n$. Пусть Ω' тоже ограниченная область и $\bar{\Omega} \subset \Omega'$. Легко видеть, что для $\psi(x) \in C_0^\infty(\Omega')$:

$$\hat{J}_{2m}(\psi) \geqslant d \|\psi\|^2_{W_2^{2m}(\Omega')} - c \|\psi\|_{\mathcal{L}_2(\Omega')},$$

$$\sum_{\substack{p,s=0 \\ p+s<4m}}^{2m} \hat{J}_{sc}(\psi) \hat{J}_{pc}(\psi) \leqslant \varepsilon \|\psi\|^2_{W_2^{2m}(\Omega')} + K \|\psi\|^2_{\mathcal{L}_2(\Omega')},$$

где $\varepsilon > 0$ сколь угодно малая константа.

В силу (5.6) для $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^{2m}(\Omega')$ можно написать :

$$\|L\varphi - \lambda_\kappa \varphi\|^2 \geqslant d_1 \|\varphi\|^2_{W_2^{2m}(\Omega')} - c_1 \|\varphi\|^2_{\mathcal{L}_2(\Omega')}.$$

Отсюда, точно так же, как это делается в [27 стр. 198], получаем :

$$\|Lu - \lambda_\kappa u\|^2_{\mathcal{L}_2(\Omega')} + c_2 \|u\|^2_{\mathcal{L}_2(\Omega')} \geqslant d_2 \|u\|^2_{W_2^{2m}(\Omega)}, \quad u \in W_2^{2m}(\Omega').$$

Положив $u = u_\kappa$, находим, что при условии $\|u_\kappa\| = 1$ последовательность $\{u_\kappa\}_{\kappa=1}^\infty$ ограничена в $W_2^{2m}(\Omega)$. Так как $u_\kappa(x)$ является слабым решением уравнения

$$(-\Delta)^m u + Q(x) u = \lambda_\kappa u,$$

где $\lambda_\kappa \to \infty$, то, в силу ограниченности, $\{u_\kappa\}$ в $W_2^{2m}(\Omega)$

$$\|u_\kappa\|_{\mathcal{L}_2(\Omega)} \to 0. \tag{5.8}$$

Если величина $J_j(\kappa)$ не ограничена по κ, то из условия $\|u_\kappa\|_{W_2^{2m}(\Omega)} \leqslant A_\Omega$ следует, что найдется подпоследовательность $\{\kappa_i\}_{i=1}^\infty$, на которой

$$J_{jc}(\kappa_i) = o\,(J_j(\kappa_i)), \quad j = \overline{0,2m}. \tag{5.9}$$

$\{J_j(\tau,k)\}$ удовлетворяют системе неравенств (3.1). Переходя к пределу по τ, находим, что такой же системе неравенств удовлетворяют $J_j(k)$, $j=0,1,\ldots,2m$, т.е. по аргументу k выполнено (3.2). Это противоречит неравенству (5.7), вследствие соотношений (5.9). Таким образом $J_j(k),\ (j=0,\ldots,2m)$ ограничены по k. С другой стороны, беря в качестве Ω шар достаточно большого радиуса, учитывая нормированность $u_k(x)$ и (5.8), а также то, что $\min\limits_{x\in R^n\setminus\Omega} q^{4m}(x)$ может быть сколь угодно большим, получаем неограниченность $J_0(k)$. Значит, в секторе (4.5) при достаточно большом $|\lambda|$ все точки являются регулярными. Отсюда на основании теоремы 2.1 заключаем, что резольвента оператора (5.1) вполне непрерывна. Теорема 5.1 доказана.

Приложение. Неравенство Фридрихса для всего пространства R^n.

Обычно неравенство Фридрихса формулируется для ограниченной области. Нам, однако, оно требуется для всего пространства.

П Р Е Д Л О Ж Е Н И Е. Пусть выражение L (1.1) имеет ограниченные в R^n коэффициенты, старшие из которых равномерно непрерывны, и выполнено условие (3.6) леммы 3.2. Тогда найдутся такие константы $c_0,\ R_0>0$, что для любой функции $u(x)\in W_2^{\sigma,z}(R^n)$ имеет место неравенство:

$$\|Lu\|^2 \geqslant c_0 \|u\|_{W_2^{\sigma,z}} - R_0 \|u\|. \tag{П.1}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО по сути то же, что и для конечных областей. Следует лишь специальным образом выбрать покрытие пространства. Пусть L_σ главная часть выражения L. Для вектор-функции $\varphi\in C_0^{\infty,z}(U)$, где U область достаточно малого диаметра $d>0$, имеем (см. [27],

$$\|L_\sigma \varphi\|^2 \geqslant c_1 \|\varphi\|^2_{W_2^{\sigma,z}}, \tag{П.2}$$

Причем, как нетрудно усмотреть из доказательства этого неравенства, в силу условия (3.6) и равномерной непрерывности коэффициентов L_σ c_1 можно взять не зависящим от выбора, $U\subset R^n$ т.е. c_1 зависит только от диаметра области U. Возьмем покрытие пространства R^n с диаметром равным d так, чтобы каждая точка $x_0\in R^n$ покрывалась не более чем N элементами покрытия. $\{U_p\}_{p=1}^{\infty}$, где N – фиксировано. Построим разложение единицы $\{\psi_p^2\}_{p=1}^{\infty}$, отвечающее этому покрытию, $\sum\limits_{p=1}^{\infty}\psi_p^2\equiv 1$. В силу свойств покрытия для любой вектор – функции $\varphi\in C_0^{\infty,z}$ имеем :

$$\Big|\|\varphi\|_{W_2^{\sigma,z}} - \sum_{p=1}^{\infty}\|\psi_p\varphi\|^2_{W_2^{\sigma,z}}\Big| \leqslant c_\varepsilon \|\varphi\|_{W_2^{(\sigma-1),z}} + \varepsilon\|\varphi\|^2_{W_2^{\sigma,z}},$$

$$\Big|\|L_\sigma\varphi\|_{\mathcal{L}_2^z} - \sum_{p=1}^{\infty}\|L_\sigma(\psi_p\varphi)\|^2\Big| \leqslant c_\varepsilon \|\varphi\|_{W_2^{(\sigma-1),z}} + \varepsilon\|\varphi\|_{W_2^{\sigma,z}},$$

где $\varepsilon>0$ может быть взято произвольно малым. Применяя неравенство (П.2) к $\psi_p\varphi$, получим :

$$\|L_\sigma(\psi_p\varphi)\|^2 \geqslant c_1\|\psi_p\varphi\|_{W_2^{\sigma,z}}.$$

Учитывая предыдущие неравенства, отсюда находим

$$\| L_\sigma \varphi \|^2 \geq c_2 \| \varphi \|^2_{W_2^{\sigma,2}} - R \| \varphi \|^2_{W_2^{(\sigma-1),2}} . \qquad (П.3)$$

В силу ограниченности коэффициентов, отсюда вытекает неравенство (П.1) при $u \in C_0^{\infty,2}(R^n)$. Теперь предельным переходом в пространстве $W_2^{\sigma,2}$ получим, что (П.1) верно для $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{\sigma,2}(R^n) = W_2^{\sigma,2}(R^n)$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. И.М.Глазман. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. Физматгиз, М., 1963.

2. М.Ш.Бирман, И.М.Глазман. Спектры сингулярных дифференциальных операторов. Тр.4-го Всесоюзн. съезда, 2, 253-261, 1964.

3. F.Wolf.On the essential spectrum of partial differential boundary problems,Comm.Pure and Appl.Math.,12,211-229,1959.

4. В.В.Мартынов. Прямые методы качественного спектрального анализа несамосопряженной системы дифференциальных уравнений первого порядка. 1Диф. ур.4, 8, 1494-1508, 1968.

5. М.А.Наймарк. О спектре несамосопряженных дифференциальных операторах второго порядка. ДАН СССР, 85, 1, 1952.

6. В.Б.Лидский. Несамосопряженный оператор Штурма-Лиувиля с дискретным спектром. Тр. Моск.матем.о-ва, 9, 1960.

7. А.Г.Аленицын. О возмущении несамосопряженного оператора Шредингера с дискретным спектром. Сб."Проблемы матем.физ", вып.5, изд. ЛГУ, 1971.

8. В.В.Грушин. К доказательству дискретности спектра одного класса дифференциальных операторов в R^n . Функц.анализ и его прилож.,5, вып. 1, 71-72, 1971.

9. Б.М.Левитан, И.С.Саркcян. Введение в спектральную теорию. М., 1970.

10. Р.С.Исмагилов, В.В.Мартынов. Критерий дискретности спектра самосопряженной системы дифференциальных уравнений первого порядка с медленно меняющимися коэффициентами. ДАН СССР, 167, 6, 1223, 1966.

11. В.В.Мартынов. Прямые методы 11, Диф.ур. 4, 12, 2243-2256, 1968.

12. Л.Б.Зеленко. О спектре самосопряженной системы дифференциальных уравнений первого порядка. Сб."Обыкновенные дифференциальные уравнения и ряды Фурье". Изд-во СГУ, Саратов, 1971, 69-81.

13. Л.Б.Зеленко. Диссертация, Саратов, 1968.

14. P.Hess. Über die wesentliche Maximalität gleichmäßig stark elleptischer Operator in $L_2(R^n)$.Math.Zeit.,107, 1,1968.

15. F.E.Browder.On the spectral theory of elliptic differential operators,Math.Ann.,142,N°1,22-130,1961.

16. А.Г.Брусенцев, Ф.С.Рофе-Бекетов. Условия самосопряженности сильно эллиптических систем произвольного порядка. Матем. сб. (в печати).

17. Ф.С.Рофе-Бекетов, А.М.Холькин. Условия самосопряженности операторов эллиптического типа второго порядка общего вида. Теория функций, функц.анализ, вып. 17, Харьков, 41-51, 1973.

18. И.М.Гельфанд, Г.Е.Шилов. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М., Физматгиз, 1958.

19. О.М.Березанский. Разложение по собственным функциям. "Наукова думка" К, 1965.

20. М.А.Наймарк. Линейные дифференциальные операторы, "Наука", М., 1969.

21. А.Г.Брусенцев, Ф.С.Рофе-Бекетов. Достаточные условия самосопряженности эллиптических операторов высших порядков. Сб."Матфиз и функц. анализ", ФТИНТ АН УССР, вып. 2, 15-25, 1971.

22. А.Г.Брусенцев, Ф.С.Рофе-Бекетов. О самосопряженности эллиптических операторов высших порядков. Функц. анализ, и его прилож., 1973.

23. Ж.-Л.Лионс и Э.Мадженес. Неоднородные граничные задачи и их приложения. И.л., М., 1971.

24. Л.Хермандер. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М., 1965.

25. Я.Б.Лопатинский. Фундаментальные решения системы дифференциальных уравнений эллиптического типа. УМЖ 3, 1951.

26. К.Морен. Методы гильбертова пространства. И.л., М.,1965.

27. Р.Нарасимхан. Анализ на действительных и комплексных многообразиях. "Мир"., М., 1971.

CERTAIN PROBLEMS OF THE QUALITATIVE SPECTRAL ANALYSIS OF ELLIPTICAL SYSTEMS OF AN ARBITRARY ORDER

A.G.Brusentsev

The paper grounds the splitting principle for elliptical systems of an arbitrary order and using this principle combined with the method of cyclic a priori estimation certain sufficient conditions of absence of essential spectrum of elliptical systems in $L_2(R^n)$ are established,in particular,one-and three-dimentional Dirac system,as well as the operation $(-\Delta)^m+Q(x)$ with the $Q(x)$.Besides,sufficient conditions of coincidence of the minimum and maximum operators resulting from the elliptical system in $L_2(R^n)$ are obtained.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1 9 7 3 выпуск 1У

О ВОЗМУЩЕНИИ СПЕКТРА САМОСОПРЯЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ МАТРИЧНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. И. Храбустовский

ВВЕДЕНИЕ

В работе исследуется дискретный спектр, который может возникать при непериодических возмущениях самосопряженных операторов L и T в $L_n^2(-\infty,\infty)$

$$Ly \equiv -(P(t)y' - R(t)y)' - R^*(t)y' + Q(t)y = \lambda y, \tag{0.1}$$

$$Ty \equiv \mathcal{J}y' + H(t)y = \lambda y \tag{0.2}$$

с периодическими (периода 1) матричными коэффициентами P, Q, R, H

$$P^*(t) = P(t) > 0, \quad Q^*(t) = Q(t), \quad H^*(t) = H(t)$$

(P, R, H непрерывно дифференцируемы, Q непрерывно зависит от t), $\mathcal{J}$ – постоянная матрица

$$\mathcal{J}^* = \mathcal{J}^{-1} = -\mathcal{J}. \tag{0.3}$$

Спектр операторов L и T, как известно, чисто непрерывен. Возмущенные операторы

$$L_\eta = L + \eta(t), \quad T_\zeta = T + \zeta(t) \tag{0.4}$$

в случае, когда рассматриваемые нами возмущения

$$\eta^*(t) = \eta(t) \in L^1_{loc}, \quad \zeta^*(t) = \zeta(t) \in L^2_{loc} \tag{0.5}$$

достаточно малы на бесконечности в интегральном смысле [1)], имеют тот же предельный спектр, что и операторы L, T. Оператор L, как легко видеть, полуограничен.

---

1) Например [1], если η и ζ^2 принадлежат классу K, т.е.

$$\lim_{|x|\to\infty} \int_x^{x+1} |\eta(t)|dt = \lim_{|x|\to\infty} \int_x^{x+1} |\zeta(t)|^2 dt = 0.$$

Мы устанавливаем достаточные признаки конечности или бесконечности числа дискретных уровней операторов L_η и T_ξ, возникающих, соответственно, в полубесконечной спектральной лакуне оператора L (0,1) и в каждой из спектральных лакун оператора T (0.2). В скалярном случае для полубесконечной спектральной лакуны оператора Хилла

$$\ell y = -y'' + q(t)y = \lambda y \ , \quad q(t+1) = q(t)$$

соответствующие признаки установлены М.Ш.Бирманом [1] (см.также книгу [2]).

Проводимое в работе исследование спектра оператора L_η основано на сочетании замены Ляпунова в квадратичной форме, отвечающей L_η, и принципа расщепления Глазмана, то есть на рассматриваемый случай обобщается метод [1], [2].

Исследование дискретного спектра оператора T_ξ сводится к рассмотренной задаче для оператора L_η путем возведения T_ξ в квадрат. Такой прием в случае возмущения оператора Дирака с постоянными коэффициентами применялся в [1] - [4].

Для того, чтобы иметь возможность применить названные методы к исследованию возмущений периодических систем, оказалось необходимым провести детальное исследование невырожденных самосопряженных матричных решений типа Флоке уравнения (0.1) при λ на нижней точке спектра оператора L, и прежде всего построить такие решения, а тем самым доказать их существование. При этом заметные осложнения были связаны с возможностью сложной жордановой структуры матрицы монодромии. По-видимому, эти результаты представляют самостоятельный интерес.

Исследование Флоке-решений существенно опирается на некоторые факты теории канонических систем, установленные в работах М.Г.Крейна и Г.Я.Любарского [5], В.Б.Лидского [6], В.А.Якубовича [7] (см.также монографии [8], [9]).

Автор выражает искреннюю благодарность Ф.С.Рофе-Бекетову, под руководством которого выполнена эта работа.

<u>Обозначения</u> :

$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$ – скалярное произведение векторов $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$ в унитарном пространстве E^n;

$(x,y) = \int_a^b \langle x(t), y(t)\rangle dt$ – скалярное произведение в гильбертовом пространстве $H = L_n^2(a,b)$.

Нормы векторов и матриц в E^n обозначаем через $|x|$ и $|T|$, нормы элементов в H – через $\|x(t)\|$.

Если T – матрица, то $\mathrm{Re}\,T = \frac{1}{2}(T+T^*)$.

$\mu(A)$ – наименьшее собственное значение эрмитовой матрицы A,

A^+, $A^- \geqslant 0$ – ее положительная и отрицательная части : $A = A^+ - A^-$.

1_n – единичная $n\times n$ матрица ;

$C_0^k(a,b)$ – класс вектор-функций k-кратно непрерывно дифференцируемых и равных нулю в окрестности концов интервала (a,b) ;

$D(L)$ – область определения оператора L, действующего в H.

1. Матричные решения типа Флоке.

Рассмотрим систему

$$x' = J H_\lambda(t) x \ , \tag{1.1}$$

где

$$H_\lambda(t) = H_0(t) + \lambda H_1(t) \in L^1_{loc} \tag{1.2}$$

периодическая эрмитова $m \times m$ матрица-функция :

$$H_\lambda(t+1) = H_\lambda(t) = H^*_\lambda(t) \qquad (\Im m \lambda = 0),$$

$\mathcal{J}$ – матрица типа (0.3).

Обозначим $\mathcal{U}(t,\lambda)$ матричное решение системы (1.1) такое, что $\mathcal{U}(0,\lambda) = 1_m$. Как известно [9], при вещественных λ решение $\mathcal{U}(t,\lambda)$ $\mathcal{J}$ – унитарно, то есть $\mathcal{U}^*(t,\lambda)\mathcal{J}\,\mathcal{U}(t,\lambda) = \mathcal{J}$.
Матрица $\mathcal{U}(1,\lambda)$ называется матрицей монодромии (м.м.) системы (1.1), а ее собственные числа $\rho_j(\lambda)$ – мультипликаторами системы (1.1).

Всюду ниже предполагаем, что система (1.1), (1.2) является системой положительного типа [5], то есть, что выполняются два условия :

1. Матрица $H_1(t)$ является неотрицательно определенной при любом t.

2. Уравнение $x' = \mathcal{J} H_0(t) x$ не имеет решений $x(t) \neq 0$, для которых $H_1(t)x(t) = 0$ (почти всюду) и $x(1) = \rho x(0), |\rho| = 1$.

Заметим, что система второго порядка (0.1) сводится к канонической системе (1.1) положительного типа в "сдвоенном" пространстве $(m = 2n)$.
Действительно, $2n$ – мерная вектор-функция

$$x(t) = y \oplus z \quad , \text{ где } \quad z = P(t)y' - R(t)y, \tag{1.3}$$

удовлетворяет системе (1.1) при

$$H_\lambda(t) = \begin{pmatrix} -Q + R^* P^{-1} R & R^* P^{-1} \\ P^{-1} R & P^{-1} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_{2n} \overset{def}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Матрицей монодромии $\mathcal{U}(1,\lambda)$ системы (0.1) будем называть м.м. соответствующей системы (1.1), (1.4), (1.5). Очевидно,

$$\mathcal{U}(1,\lambda) = \begin{pmatrix} \theta(1,\lambda) & \varphi(1,\lambda) \\ \hat{\theta}'(1,\lambda) & \hat{\varphi}'(1,\lambda) \end{pmatrix},$$

где $\theta(t,\lambda)$ и $\varphi(t,\lambda)$ – матричные решения уравнения (0.1), удовлетворяющие начальным данным

$$\theta(0,\lambda) = \hat{\varphi}'(0,\lambda) = 1_n \, , \quad \hat{\theta}'(0,\lambda) = \varphi(0,\lambda) = 0.$$

Здесь через $\hat{Y}'(t)$ для любого $n \times n$ матричного решения $Y(t)$ системы (0.1) обозначено

$$\hat{Y}'(t) = P(t)Y'(t) - R(t)Y(t). \tag{1.6}$$

Как известно, при вещественных λ

$$Y^* \hat{Y}' - (\hat{Y}')^* Y = C_Y = const.$$

Если $C_Y = 0$, решение $Y(t)$ называется самосопряженным.

Известно [10, стр.460], что если $E(t)$ является самосопряженным решением уравнения (0.1) и $\det E(t) \neq 0$ на $[a, b]$, то подстановка $y(t) = E(t)u(t)$ преобразует функционал

$$\Phi[y] = \int_a^b \{\langle Py', y'\rangle - \langle Ry, y'\rangle - \\ - \langle R^* y', y\rangle + \langle (Q - \lambda 1_n) y, y\rangle\} dt \tag{1.7}$$

для вектор-функции $y(t)$, удовлетворяющей условию $y(a) = y(b) = 0$, к виду

$$\Phi[y] = \int_a^b \langle P(t)E(t)u'(t), E(t)u'(t)\rangle dt.$$

Непосредственной проверкой отсюда легко выводится

ЛЕММА 1.1. Пусть самосопряженное решение $E(t)$ уравнения (0.1) такое, что $\det E(t) \neq 0$ на $[a, b]$, представлено в виде

$$E(t) = Z(t) e^{\Lambda t},$$

где Λ – постоянная матрица, а вектор-функция $y(t)$ абсолютно непрерывна, $y'(t) \in L_n^2(a, b)$, $y(a) = y(b) = 0$.

Тогда подстановка $y(t) = Z(t)u(t)$ преобразует функционал $\Phi[y]$ (1.7) к виду

$$\Phi[y] = \int_a^b \langle PZ(u' - \Lambda u),\ Z(u' - \Lambda u)\rangle dt.$$

Обозначим $\mathfrak{N}_\rho(\mathcal{U})$ корневое подпространство оператора $\mathcal{U}$, отвечающее собственному значению ρ. Пусть жорданова нормальная форма $\mathcal{U}|_{\mathfrak{N}_\rho}$ (сужения оператора $\mathcal{U}$ на $\mathfrak{N}_\rho$) состоит из d клеток порядка $q_1, \dots, q_d$ и, таким образом, $\mathfrak{N}_\rho(\mathcal{U})$ разлагается в прямую сумму d простых циклических подпространств $\mathfrak{N}_\rho^s(\mathcal{U})$ $(s = \overline{1, d})$ размерностей q_s соответственно.

<u>Определение</u>. В случае, когда числа q_s четны, обозначим $\mathfrak{M}_\rho(\mathcal{U})$ линейную оболочку инвариантных подпространств $\mathfrak{M}_\rho^s(\mathcal{U})$ $(s = \overline{1, d})$ оператора $\mathcal{U}$ таких, что $\mathfrak{M}_\rho^s(\mathcal{U}) \subset \mathfrak{N}_\rho^s(\mathcal{U})$, $\dim \mathfrak{M}_\rho^s(\mathcal{U}) = \frac{1}{2} q_s$ $(s = \overline{1, d})$. Через $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$ обозначим прямую сумму подпространств $\mathfrak{M}_\rho(\mathcal{U})$, отвечающих унимодулярным (по модулю равным единице) собственным числам оператора $\mathcal{U}$:

$$\mathfrak{M}(\mathcal{U}) = \sum_{|\rho|=1} \dot{+}\, \mathfrak{M}_\rho(\mathcal{U}). \tag{1.8}$$

ЛЕММА 1.2. Пусть система (1.1) является системой положительного типа, и пусть при вещественном $\lambda = \lambda_0$ один из мультипликаторов равен

$$\rho_0 = e^{i\theta_0} \; (|\rho_0| = 1) \qquad \text{и} \qquad \dim \mathcal{M}_{\rho_0}(U(1,\lambda_0)) = \mathcal{H}.$$

Пусть при любом λ из некоторой вещественной полуокрестности точки λ_0 (например, левой) все $\mathcal{H}$ мультипликаторов, стремящихся к ρ_0 при $\lambda \to \lambda_0$, находятся не на единичной окружности.

Тогда порядки жордановых клеток $q_j \; (j = 1, \ldots, d)$, отвечающих ρ_0 в жордановой нормальной форме м.м. $U(1, \lambda_0)$, являются четными $(q_j = 2k_j)$, а инвариантное подпространство $\mathcal{M}_{\rho_0}(U(1,\lambda_0))$ – J – нейтральным, т.е.

$$\langle Jf, g \rangle = 0 \qquad \forall f, g \in \mathcal{M}_{\rho_0}(U(1,\lambda_0)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что λ_0 – собственное число кратности d задачи

$$x' = JH_\lambda(t)\,x\,, \qquad x(1) = e^{i\theta} x(0) \tag{1.9}$$

при $\theta = \theta_0$. Так как спектр этой задачи дискретен, то существует $\delta > 0$ такое, что отрезок $[\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]$ не содержит собственных чисел отличных от λ_0.

Лемма работы [5, стр. 554] означает, что найдется $\varepsilon > 0$ такое, что в окрестности $V_\varepsilon(\theta_0) = \{\theta : \theta_0 - \varepsilon < \theta < \theta_0 + \varepsilon\}$ существует d действительных аналитических функций

$$\lambda_j(\theta) = \lambda_0 + a_j(\theta - \theta_0)^{m_j} + \ldots \tag{1.10}$$

и d линейно независимых, аналитически зависящих от θ, вектор-функций $x_j(t,\theta)$ такие, что часть спектра задачи (1.9) при $\theta \in V_\varepsilon(\theta_0)$, попавшая в интервал $(\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$, состоит из собственных чисел $\lambda_j(\theta)$, а $x_j(t,\theta)$ являются соответствующими собственными функциями.

Рассмотрим $\lambda_j(\theta)$ (1.10). В силу условия леммы при достаточно малых $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ при $\theta \in V_\varepsilon(\theta_0)$ задача (1.9) не имеет собственных чисел в интервале $(\lambda_0 - \delta, \lambda_0)$. Поэтому

$$\lambda_j(\theta) \geqslant \lambda_0 \; (j = 1, \ldots, d) \quad \text{при} \quad \theta \in V_\varepsilon(\theta_0).$$

Следовательно, показатели m_j в (1.10) четны $(m_j = 2k_j)$, но в [5, стр. 557] установлено, что числа m_j совпадают с порядками жордановых клеток, отвечающих ρ_0.

Докажем J – нейтральность подпространства $\mathcal{M}_{\rho_0}(U(1,\lambda_0))$.

Положим $\rho = e^{i\theta}$, $x_j(\rho) = x_j(0,\theta)$, тогда в некоторой окрестности точки ρ_0 в комплексной ρ – плоскости

$$U(1, \lambda_j(\rho))\, x_j(\rho) = \rho x_j(\rho)\,, \quad j = 1, \ldots, d. \tag{1.11}$$

Обращая разложения (1.10), получим d $2\kappa_j$ – значных функций $(m_j = 2\kappa_j)$

$$\rho_j(\lambda) = \rho_0 + c_j(\lambda - \lambda_0)^{\frac{1}{2\kappa_j}} + \dots \quad . \tag{1.12}$$

В [5, стр.556] показано, что если в каждом из разложений (1.12) выделить $2\kappa_j$ различных ветвей функции $(\lambda - \lambda_0)^{1/2\kappa_j}$, то полученные $\mathcal{H}$ однозначных функций задают поведение всех мультипликаторов, которые при $\lambda \to \lambda_0$ стремятся к ρ_0 .

В силу условия леммы, когда λ изменяется в некоторой левой вещественной полуокрестности точки λ_0 , ровно половина мультипликаторов из $2\kappa_j$, задаваемых функцией $\rho_j(\lambda)$, находится вне единичной окружности. Обозначим эти мультипликаторы (однозначные ветви функции $\rho_j(\lambda)$) через $\rho_j^z(\lambda)$, $z = 1, \dots, \kappa_j$. При достаточно малом $\delta > 0$ и $\lambda \in \Delta = (\lambda_0 - \delta, \lambda_0)$ имеем

$$|\rho_j^z(\lambda)| > 1, \qquad \lambda_j(\rho_j^z(\lambda)) = \lambda . \tag{1.13}$$

Обозначив $x_j^z(\lambda) = x_j(\rho_j^z(\lambda))$, получаем в силу (1.11), что при $\lambda \in \Delta$

$$\begin{gathered} \mathcal{U}(1,\lambda)\, x_j^z(\lambda) = \rho_j^z(\lambda)\, x_j^z(\lambda), \\ z = 1, \dots, \kappa_j, \quad j = 1, \dots, d . \end{gathered} \tag{1.14}$$

Так как при вещественных λ $\mathcal{U}(1,\lambda)$ – $\mathcal{J}$ – унитарна , то ее корневые подпространства, отвечающие таким собственным числам ρ_1, ρ_2, что $\rho_1 \cdot \bar{\rho}_2 \neq 1$, являются $\mathcal{J}$ – ортогональными [11, гл.УII] . Поэтому в силу (1.13) из (1.14) вытекает, что при $\lambda \in \Delta$

$$\begin{gathered} \langle \mathcal{J} x_j^q(\lambda),\; x_i^\ell(\lambda) \rangle = 0, \\ 1 \le q \le \kappa_j, \quad 1 \le \ell \le \kappa_i, \quad 1 \le i, \; j \le d. \end{gathered} \tag{1.15}$$

Обозначая

$$[\rho_j^n, \rho_j^{n+1}] = \frac{x_j^n - x_j^{n+1}}{\rho_j^n - \rho_j^{n+1}},$$

$$[\rho_j^n, \rho_j^{n+1}, \dots, \rho_j^{n+m}] = \frac{[\rho_j^n, \dots, \rho_j^{n+m-1}] - [\rho_j^{n+1}, \dots, \rho_j^{n+m}]}{\rho_j^n - \rho_j^{n+m}},$$

положим для $s = 1, \dots, \kappa_j - 1$, $j = 1, \dots, d$ $(\lambda \in \Delta)$

$$e_j^0(\lambda) = x_j^1(\lambda), \qquad e_j^s(\lambda) = [\rho_j^1, \dots, \rho_j^{s+1}] .$$

По индукции легко показать, что

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{U}(1,\lambda)\, e_j^{\circ}(\lambda) = \rho_j^{1}(\lambda)\, e_j^{\circ}(\lambda), \\
&\mathcal{U}(1,\lambda)\, e_j^{s}(\lambda) = \rho_j^{s+1}(\lambda)\, e_j^{s}(\lambda) + e_j^{s-1}(\lambda), \\
&s=1,\dots,\kappa_j-1, \quad j=1,\dots,d.
\end{aligned}
\tag{1.16}
$$

В силу (1.15) имеем при $\lambda \in \Delta$

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathcal{J} e_j^{q}(\lambda),\; e_i^{\ell}(\lambda) \rangle = 0, \\
&0 \leqslant q \leqslant \kappa_j-1,\; 0 \leqslant \ell \leqslant \kappa_i-1,\; 1 \leqslant i,\; j \leqslant d.
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

В силу аналитической зависимости функций x_j от ρ существует

$$
\lim_{\lambda \to \lambda_0 - 0} e_j^{s}(\lambda) = \frac{1}{s!} \left. \frac{d^s x_j(\rho)}{d\rho^s} \right|_{\rho=\rho_0}.
$$

Переходя к пределу при $\lambda \to \lambda_0 - 0$ в (1.16), (1.17), получаем $\mathcal{J}$-нейтральность $\mathfrak{M}_{\rho_0}(\mathcal{U}(1,\lambda_0))$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Предположим, что при $\lambda - \lambda_0$ для всех унимодулярных мультипликаторов системы (1.1) выполнены условия леммы 1.2. Тогда инвариантное подпространство $\mathfrak{M}(\mathcal{U}(1,\lambda_0))$ (1.8) – $\mathcal{J}$ – нейтрально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает непосредственно из $\mathcal{J}$ – ортогональности корневых подпространств $\mathcal{J}$ – унитарной матрицы $\mathcal{U}$, отвечающих таким собственным числам ρ_1, ρ_2, что $\rho_1 \bar{\rho}_2 \neq 1$.

Важное значение для нас имеет

ТЕОРЕМА А. (В.Б.Лидский [6]). Пусть

$$
X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_3(t) & x_4(t) \end{pmatrix}
$$

– произвольное $\mathcal{J}$ – унитарное решение системы (1.1) с $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{2n}$ (1.5) и эрмитовым, вообще говоря, невещественным

$$
H_\lambda(t) = H_0(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) & h_2(t) \\ h_3(t) & h_4(t) \end{pmatrix}
$$

(x_j, h_j – $n \times n$ матрицы). Тогда :

1°. Для всех t $\det(x_1 - i x_2) \neq 0$, а матрица

$$
W(t) = (x_1 - i x_2)^{-1} (x_1 + i x_2)
$$

– унитарна.

2°. $$W' = i z(t) W,$$

где $$z(t) = 2(X_1 - iX_2)^{-1} h_4 (X_1^* + iX_2^*)^{-1},$$

а следовательно, если $h_4(t) > 0$, то все собственные числа матрицы $W(t)$ с возрастанием t монотонно вращаются в положительном направлении по единичной окружности.

3°. $\det X_2(t) = 0$ (соответственно $\det X_1(t) = 0$) при тех и только тех t, при которых у $W(t)$ есть собственное значение равное $+1$ (соответственно -1).

Эта теорема сформулирована и доказана в [6] в предположении вещественности $H_0(t)$ и решения $X(t)$. Однако она верна и в общем случае, так как все ее утверждения можно доказать, минуя специфические для вещественного случая соображения, используя только соотношения

$$X_1(t) X_2^*(t) = X_2(t) X_1^*(t), \quad X_4(t) X_1^*(t) - X_3(t) X_2^*(t) = 1_n, \tag{1.18}$$

которые получены в [6] и верны в общем случае. Например, унитарность матрицы $W(t)$ вытекает из равенства

$$(X_1 - iX_2)(X_1^* + iX_2^*) = (X_1 + iX_2)(X_1^* - iX_2^*),$$

являющегося прямым следствием первого из соотношений (1.18).

Доказательство родственных результатов см. также [12].

ТЕОРЕМА 1. Пусть λ_0 является нижней гранью оператора L (0.1). Тогда:

1°. У уравнения

$$Ly \equiv -(P(t)y' - R(t)y)' - R^*(t)y' + Q(t)y = \lambda_0 y \tag{1.19}$$

имеются невырожденные самосопряженные матричные решения $E(t)$ типа Флоке (н.с. Ф.-решения), то есть, решения $E(t)$ со свойствами

$$\det E(t) \neq 0, \quad -\infty < t < \infty,$$

$$E^*(t) \hat{E}'(t) = (\hat{E}'(t))^* E(t),$$

$$E(t) = Z(t) e^{\Lambda t}, \quad Z(t+1) = Z(t),$$

где Λ – постоянная матрица, $\hat{E}'$ см. (1.6).

2°. Если $E_0(t)$ является н.с. Ф.-решением, то и $E_0(t)\cdot K$, где K – любая постоянная невырожденная матрица, тоже является н.с. Ф.-решением и, если все мультипликаторы уравнения (1.19) унимодулярны, то любое н.с.Ф.-решение $E(t)$ имеет вид $E_0(t)\cdot K$. Если же имеются мультипликаторы отличные по модулю от единицы, то :

а) у любого н.с.Ф.-решения элементарные делители, отвечающие унимодулярным собственным числам матрицы e^{Λ}, совпадают с элементарными делителями $\mathcal{U}(1,\lambda_0)\big|_{\mathfrak{M}(\mathcal{U}(1,\lambda_0))}$ (сужения оператора монодромии уравнения (1.19) на подпространство $\mathfrak{M}(\mathcal{U}(1,\lambda_0))$ (1.8)) и подпространство

$$\{E(0)x \oplus \hat{E}'(0)x \mid x\in E^n\} \supset \mathfrak{M}(\mathcal{U}(1,\lambda_0)).$$

б) существуют, по крайней мере, два н.с. Ф.-решения $E_i(t)$ и $E_e(t)$ такие, что $E_i(t) \neq E_e(t)\cdot C$ ни при какой постоянной матрице C.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1°. Так как λ_0 есть нижняя точка спектра оператора L (0.1), то у системы (1.19) обязательно есть унимодулярные мультипликаторы, в то время как при любом $\lambda < \lambda_0$ модули всех мультипликаторов уравнения (0.1) отличны от единицы [13], [14]. Поэтому в силу следствия 1.1, порядки жордановых клеток, отвечающих унимодулярным мультипликаторам уравнения (1.19), являются четными, а подпространство $\mathfrak{M}(\mathcal{U}(1,\lambda_0))$ (1.8) - $\mathcal{J}_{2n}$ - нейтральным.

Допустим $2p$ мультипликаторов уравнения (1.19) унимодулярны, а $2m$ - отличны по модулю от единицы. Обозначим через M_i и M_e инвариантные подпространства оператора $\mathcal{U}(1,\lambda_0)$, отвечающие собственным числам, находящимся соответственно внутри и вне единичной окружности, а через

$$\begin{pmatrix} A_i \\ B_i \end{pmatrix} \tag{1.20}$$

- $2n\times n$ матрицу, столбцы которой образуют базис в подпространстве $M_i \dotplus \mathfrak{M}(\mathcal{U}(1,\lambda_0))$.

Докажем, что матричное решение $E_i(t)$ уравнения (1.19), удовлетворяющее начальным данным

$$E_i(0) = A_i\ , \qquad \hat{E}_i'(0) = B_i\ , \tag{1.21}$$

является н.с. Ф.-решением.

Так как $M_i \dotplus \mathfrak{M}(\mathcal{U}(1,\lambda_0))$ есть n - мерное инвариантное подпространство оператора $\mathcal{U}(1,\lambda_0)$, то существует матрица $R_i\,(\det R_i \neq 0)$ такая, что $E_i(1) = E_i(0)R_i$, $\hat{E}_i'(1) = \hat{E}_i'(0)R_i$, а следовательно

$$E_i(t) = Z_i(t)e^{\Lambda_i t}\ ,\quad Z_i(t+1) = Z_i(t),\ e^{\Lambda_i} = R_i\ . \tag{1.22}$$

Поскольку подпространство $M_i \dotplus \mathfrak{M}(\mathcal{U}(1,\lambda_0))$ - $\mathcal{J}_{2n}$ - нейтрально, то

$$\langle \mathcal{J}_{2n} f, g\rangle = 0,$$

при

$$f = A_i x\oplus B_i x\ ,\qquad g = A_i y\oplus B_i y\ ,\quad x,y\in E^n,$$

а следовательно

$$\langle (A_i^* B_i - B_i^* A_i)x, y\rangle = 0 \qquad \forall x,y\in E^n.$$

Таким образом получаем

$$E_i^*(t)\hat{E}_i'(t) - (\hat{E}_i'(t))^* E_i(t) = A_i^* B_i - B_i^* A_i = 0. \tag{1.23}$$

Докажем невырожденность $E_i(t)$. Так как столбы матрицы (1.20) линейно независимы, то

$$E_i^*(t) E_i(t) + (\hat{E}_i'(t))^* \hat{E}_i'(t) > 0. \tag{1.24}$$

В силу (1.23), (1.24) существуют [15], [16] матрицы $C = C^*$ и $K\ (\det K \neq 0)$ такие, что

$$E_i(0) = \cos C\ K, \quad \hat{E}_i'(0) = \sin C \cdot K.$$

Следовательно матрица

$$\begin{pmatrix} E_i(0)K^{-1} & -\sin C \\ \hat{E}_i'(0)K^{-1} & \cos C \end{pmatrix}$$

является $\mathcal{J}_{2n}$ - унитарной, и поэтому в силу теоремы А $\det E_i(t) \neq 0$.

Докажем теперь, что $\det E_i(t) \neq 0\ (-\infty < t < \infty)$. Предположим, что это не так. Тогда для любого t_0 можно построить решение $y(t)$ уравнения (1.19), имеющее правее t_0 два нуля. Действительно, выберем $t_1 > t_0$ такое, что $\det E_i(t_1) \neq 0$ и обозначим через $\Theta_1(t)$ и $\varphi_1(t)$ матричные решения уравнения (1.19), удовлетворяющие начальным данным

$$\Theta_1(t_1) = \hat{\varphi}_1'(t_1) = 1_n, \quad \hat{\theta}_1'(t_1) = \varphi_1(t_1) = 0.$$

Так как

$$E_i(t) = \Theta_1(t)A_1 + \varphi_1(t)B_1,$$

$$A_1^* B_1 = B_1^* A_1, \quad \det A_1 \neq 0,$$

то матрица

$$\begin{pmatrix} E_i(t)A_1^{-1} & \varphi_1(t) \\ \hat{E}_i'(t)A_1^{-1} & \hat{\varphi}_1'(t) \end{pmatrix}$$

является $\mathcal{J}_{2n}$ - унитарной. Поэтому в силу теоремы А $\det \varphi_1(t)$ обращается в нуль при сколь угодно больших t (ср. [7]).

Пусть $\det \varphi_1(t_2) = 0,\ t_2 > t_1$. Поэтому существует вектор $y \neq 0$ такой, что $\varphi_1(t_2)y = 0$. Решение $\varphi_1(t)y$ имеет правее точки t_0 два нуля t_1, t_2.

Следовательно, уравнение (1.19) - осцилляторно. В силу теоремы 31 из [2,стр. 69-74] это противоречит тому, что нижняя грань оператора $L\ (0,1)$ равна λ_0.

Таким образом [2)]

$$\det E_i(t) \neq 0 \qquad (-\infty < t < \infty). \tag{1.25}$$

Докажем теперь, что $E_i(t)$ является главным решением уравнения (1.19) на правой полуоси (определение см. [10, стр. 462]). В силу (1.23), (1.25) для этого достаточно показать, что при $t \to \infty$

$$\left| \int_0^t E_i^{-1}(x)\, P^{-1}(x)\, (E_i^*)^{-1}(x)\, dx\, y \right| \to \infty \tag{1.26}$$

равномерно по $y \in E^n$, $|y| = 1$.

Обозначим через H_n следующую $n \times n$ матрицу

$$H_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \cdot & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.27}$$

а через $G_n(t)$ – матрицу – функцию

$$G_n(t) = \int_0^t e^{-H_n x}\, e^{-H_n^* x}\, dx. \tag{1.28}$$

Непосредственно проверяется, что при $t \to \infty$

$$\det G_n(t) = a t^{n^2} + O(t^{n^2-1}),$$

где

$$a = \left\{ (n-1)!\,(n-2)! \ldots 1! \right\}^{-2} \cdot \det \left(\frac{1}{i+k-1} \right)_{i,k=1}^{n} > 0.$$

Поскольку все миноры порядка $n-1$ матрицы $G_n(t)$ при $t \to \infty$ есть $O(t^{n^2-1})$, получаем, что при $t \to \infty$ $G_n^{-1}(t) \to 0$, а следовательно при $t \to \infty$

$$\langle G_n(t) y, y \rangle \to \infty \tag{1.29}$$

равномерно по $y \in E^n$, $|y| = 1$.

Учитывая (1.22) и позитивность $P(t)$, отсюда получаем (1.26).

2°. Пусть $E(t) = Z(t) e^{\Lambda t}$ – какое-нибудь н.с. Ф.-решение уравнения (1.19). Рассмотрим н.с.Ф.-решение $E_1(t) = E(t) S$, где S – матрица, приводящая e^{Λ} к жордановой нормальной форме.

---

2) В случае, когда в (1.19) $P(t)$, $Q(t) + R'(t)$ вещественны и $R(t) = R^*(t)$, невырожденность $E_i(t)$ можно легко вывести из теоремы Штернберга–Якубовича [7, стр.25] .

Легко видеть, что n – мерное подпространство

$$F = \left\{ E_1(0)x \oplus \hat{E}_1'(0)x \mid x \in E^n \right\}$$

является $\mathcal{J}_{2n}$ – нейтральным инвариантным подпространством оператора $\mathcal{U}(1,\lambda_0)$. Пусть среди n векторов – столбцов $2n \times n$ матрицы

$$\begin{pmatrix} E_1(0) \\ \hat{E}_1'(0) \end{pmatrix}$$

имеется r векторов $f_1,\ldots,f_r$ из инвариантного подпространства оператора $\mathcal{U}(1,\lambda_0)$, отвечающего унимодулярным собственным числам, и s векторов $f_{r+1},\ldots,f_{r+s}$ из $M_i \dot{+} M_e$ $(s+r=n)$.

Из того, что не существует $\mathcal{J}_{2n}$ – нейтральных подпространств размерности большей чем n и из $\mathcal{J}_{2n}$ – нейтральности $\mathfrak{M}(\mathcal{U}(1,\lambda_0))$ вытекает, что $r = p = \dim \mathfrak{M}(\mathcal{U}(1,\lambda_0))$.

Рассмотрим $2n \times n$ матрицу

$$\begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{pmatrix}$$

со столбцами $f_1,\ldots,f_p$, $g_1,\ldots,g_m$, где $g_1,\ldots,g_m$ – линейно независимые векторы из M_i $(\dim M_i = m)$ и решение $\tilde{E}(t)$ уравнения (1.19), удовлетворяющее начальным данным

$$\tilde{E}(0) = \tilde{A}, \quad \hat{\tilde{E}}'(0) = \tilde{B}. \tag{1.30}$$

Аналогично тому, как это делалось для $E_i(t)$, можно показать, что и $\tilde{E}(t)$ является главным решением. Поэтому в силу теоремы 10.5 из [10,стр.463]

$$\tilde{E}(t) = E_i(t)\cdot D, \quad \det D \neq 0. \tag{1.31}$$

Если все мультипликаторы уравнения (1.19) унимодулярны, то $E_1(t) = \tilde{E}(t)$. В силу (1.31) отсюда вытекает, что $E(t) = E_i(t)K$ $(\det K \neq 0)$.
Если же имеются мультипликаторы, отличные по модулю от единицы, то, сравнивая начальные данные (1.21), (1.30), из (1.31) выводим утверждение а).

Обозначим через

$$\begin{pmatrix} A_e \\ B_e \end{pmatrix} \tag{1.32}$$

$2n \times n$ матрицу, столбцы которой образуют базис в $M_e \dot{+} \mathfrak{M}(\mathcal{U}(1,\lambda_0))$.
Аналогично тому, как это делалось для $E_i(t)$, можно показать, что решение $E_e(t)$ уравнения (1.19), удовлетворяющее начальным данным

$$E_e(0) = A_e, \quad \hat{E}_e'(0) = B_e, \tag{1.33}$$

является н.с. Ф.-решением. Легко видеть, что если не все мультипликаторы уравнения (1.19) унимодулярны, то $E_i(t) \neq E_e(t)C$ ни при какой постоянной матрице C. Теорема доказана.

При доказательстве теоремы 1 было установлено, что н.с. Ф.-решение $E_i(t)$ (1.20), (1.21) является главным решением на правой полуоси. Отсюда в силу теоремы 10.5 из [10, стр.463] вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1.2. Пусть λ_0 -нижняя грань оператора L (0.1). Тогда любое главное решение уравнения (1.19) на правой полуоси является н.с.Ф.-решением и имеет вид $E_i(t)\cdot K$, где K любая постоянная невырожденная матрица. Аналогично любое главное решение на левой полуоси имеет вид $E_e(t)\cdot K$, где $E_e(t)$ – н.с. Ф.-решение (1.32), (1.33).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Теорема остается в силе для уравнения (0.1) при $\lambda < \lambda_0$ (нижней грани оператора L (0,1)). Так как в этом случае отсутствуют унимодулярные мультипликаторы, то формулировка и доказательство теоремы существенно упрощаются.

2. Некоторые вспомогательные неравенства

ЛЕММА 2.1. Пусть спектр матрицы T не пересекается с мнимой осью. Тогда для любой вектор-функции $y(t)\in C_0^1(-\infty,\infty)$ имеет место неравенство

$$\|y'+Ty\|^2 \geqslant \alpha(T)(\|y'\|^2+\|y\|^2), \tag{2.1}$$

где

$$\alpha(T) = \inf_{-\infty<\xi<\infty} \frac{|\det(T+i\xi 1_n)|^2}{(\xi^2+1)|T+i\xi 1_n|^{2(n-1)}} > 0. \tag{2.2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как для любого вектора $x\in E^n$ и $\xi\in(-\infty,\infty)$

$$|(T+i\xi 1_n)x|^2 \geqslant |(T+i\xi 1_n)^{-1}|^{-2}\cdot|x|^2,$$

то в силу оценки [17, стр.42]

$$|(T+i\xi 1_n)^{-1}| \leqslant |T+i\xi 1_n|^{n-1}\,|\det(T+i\xi 1_n)|^{-1}$$

получаем

$$|(T+i\xi 1_n)x|^2 \geqslant \alpha(T)(\xi^2+1)|x|^2.$$

Следовательно, обозначив через $\tilde{y}(\xi)$ преобразование Фурье функции $y(t)$, имеем

$$\|y'+Ty\|^2 = \|(T+i\xi 1_n)\tilde{y}\|^2 \geqslant \alpha(T)(\|\xi\tilde{y}\|^2+\|\tilde{y}\|^2) =$$

$$= \alpha(T)(\|y'\|^2+\|y\|^2).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2.2. Для любой вектор-функции $y(t)\in C_0^1(1,\infty)$ имеет место неравенство

$$\|y'-H_n y\|^2 \geqslant \|A_n^{-1}(3t)\,y'\|^2, \tag{2.3}$$

где матрица H_n определяется равенством (1.27) и

$$A_n(t)=\sqrt{3}\,diag\{t^{(n-1)},t^{(n-2)},\dots,1\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим снизу $J-\|u'-3^{-1}H_n u\|^2$, где $u(t)=(u_1,\dots,u_n)\in C_0^1(1,\infty)$.

$$J=\sum_{k=1}^{n-1}\|u_k'-3^{-1}u_{k+1}\|^2+\|u_n'\|^2\geqslant$$
$$\geqslant\sum_{k=1}^{n-1}\|t^{-(n-k)}(u_k'-3^{-1}u_{k+1})\|^2+\|u_n'\|^2.$$

Так как

$$\|a+b\|^2\geqslant\frac{1}{2}\|a\|^2-\|b\|^2, \tag{2.4}$$

то

$$J\geqslant\frac{1}{2}\|t^{-(n-1)}u_1'\|^2+\sum_{k=2}^{n-1}\Big\{\frac{1}{2}\|t^{-(n-k)}u_k'\|^2-$$
$$-3^{-2}\|t^{-(n-k+1)}u_k\|^2\Big\}+\|u_n'\|^2-3^{-2}\|t^{-1}u_n\|^2.$$

Так как для любой $u(t)\in C_0^1(0,\infty)$

$$\|t^{-k}u\|^2\leqslant4(2k-1)^{-2}\|t^{-(k-1)}u'\|^2,\quad k=1,2,\dots,$$

то

$$J\geqslant\frac{1}{2}\|t^{-(n-1)}u_1'\|^2+\sum_{k=2}^{n-1}\Big(\frac{1}{2}-\frac{4}{9(2(n-k+1)-1)^2}\Big)\times$$
$$\times\|t^{-(n-k)}u_k'\|^2+\frac{5}{9}\|u_n'\|^2.$$

Следовательно

$$\|u'-3^{-1}H_n u\|^2\geqslant\|A_n^{-1}(t)u'\|^2. \tag{2.5}$$

Сделав в левой части (2.3) подстановку $y=Su$,

$S=diag\{3^{n-k}\}_{k=1}^{n}$ и замечая, что

$S^{-1}H_nS=\frac{1}{3}H_n$, $A_n^{-1}(t)S^{-1}=A_n^{-1}(3t)$, в силу (2.5) получаем (2.3). Лемма доказана.

Нам понадобится также следующее неравенство, установленное в [15, стр. 1586].

Пусть матрица-функция $\xi(t)$ неотрицательна, $\xi(t)\in L^1_{loc}$.

Тогда для любой вектор-функции $y(t)\in C_0^1(N,\infty)$

$$\int_N^\infty\langle\xi(t)y(t),y(t)\rangle dt\leqslant3\sup_{\tau\geqslant N}\Big|\int_\tau^{\tau+1}\xi(t)dt\Big|(\|y'\|^2+\|y\|^2). \tag{2.6}$$

3. Непериодические возмущения оператора L (0.1)

Пусть λ_0 – нижняя грань оператора L (0.1) и $E(t,\lambda_0)=Z(t)e^{\Lambda t}$ – какое-нибудь из н.с. Ф.-решений уравнения (1.19). Занумеруем собственные числа матрицы Λ с учетом их геометрической кратности так, что

$$Re\lambda_j=0 \quad \text{пр.} \quad j=1,\dots,d\,, \quad Re\lambda_j\neq 0 \quad \text{при} \quad j=d+1,\dots,d+\ell\,,$$

и обозначим через $p_1,\dots,p_d\,,\ p_{d+1},\dots,p_{d+\ell}$

порядки соответствующих им жордановых клеток.

Пусть $p=\sum_{j=1}^{d}p_j\,,\quad m=\sum_{j=d+1}^{d+\ell}p_j\,,\quad p+m=n$

и матрица S приводит Λ к жордановой нормальной форме следующего вида

$$S^{-1}\Lambda S=\begin{pmatrix}\Lambda_1 & 0\\ 0 & \Lambda_2\end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

где $p\times p$ блок Λ_1, отвечает чисто мнимым собственным числам матрицы Λ, и $m\times m$ блок Λ_2 отвечает собственным числам, действительная часть которых отлична от нуля :

$$\Lambda_1=diag\left\{C_{p_j}(\lambda_j)\right\}_{j=1}^{d}\,,\quad Re\lambda_j=0, \tag{3.2}$$

$$\Lambda_2=diag\left\{C_{p_j}(\lambda_j)\right\}_{j=d+1}^{d+\ell}\,,\quad Re\lambda_j\neq 0, \tag{3.3}$$

где $C_q(\lambda)$ - $q\times q$ жорданова клетка $C_q(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \lambda\end{pmatrix}$.

Обозначим e_j^k $(k=\overline{0,p_j-1})$ ортонормированную систему из собственного вектора e_j^0 и присоединенной к нему цепочки, отвечающую j-ой жордановой клетке $C_{p_j}(\lambda_j)$ матрицы Λ_1 ;

$\mathfrak{M}_j$ – натянутое на $\left\{e_j^k\right\}_{k=0}^{p_j-1}$ простое циклическое подпространство.

Сопоставим блоку Λ_1 диагональные $p\times p$ матрицы

$$V(t)=diag\left\{e^{\lambda_j t}1_{p_j}\right\}_{j=1}^{d} \qquad (Re\,\lambda_j=0), \tag{3.4}$$

$$A(t)=\sqrt{3}\sum_{j=1}^{d}\oplus\ diag\left\{(3t)^{p_j-1},(3t)^{p_j-2},\dots,1\right\}. \tag{3.5}$$

В силу леммы 1.2 и теоремы 1, порядки жордановых клеток, отвечающих унимодулярным мультипликаторам уравнения (1.19), являются четными и числа $p_1,\dots,p_d$ равны половинам этих порядков.

ТЕОРЕМА **2.** Пусть λ_0 – нижняя грань оператора L (0.1) и $E(t,\lambda_0)=$ $=Z(t)e^{\Lambda t}$ - какое-нибудь н.с.Ф. - решение уравнения $Ly=\lambda_0 y$ (см. теорему 1). Тогда :

1°. Оператор L_q (0.4), (0.5) имеет не более конечного числа собственных значений левее λ_0, если

$$\overline{\lim_{x\to\pm\infty}} \left| x A(x) \int_x^{\infty\cdot \operatorname{sgn} x} V^*(t)\tilde{\eta}_{11}^-(t) V(t)\,dt\, A(x) \right| < \frac{1}{8}\mu_0 , \tag{A}$$

$$\overline{\lim_{|x|\to\infty}} \left| \int_x^{x+1} \tilde{\eta}_{22}^-(t)\,dt \right| < \frac{1}{6}\alpha\mu_0 . \tag{B}$$

Здесь матрицы $V(t)$, $A(x)$ определены (3.4), (3.5), $\tilde{\eta}_{11}^-(t)$, $\tilde{\eta}_{22}^-(t)$ – такие $p\times p$ и соответственно $m\times m$ матрицы, что

$$S^*Z^*(t)\eta^-(t)Z(t)S = \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_{11}^-(t) & \tilde{\eta}_{12}^-(t) \\ \tilde{\eta}_{21}^-(t) & \tilde{\eta}_{22}^-(t) \end{pmatrix},$$

где матрица S приводит Λ к жордановой нормальной форме специального вида (3.1), (3.2), (3.3), p – половина суммарной алгебраической кратности унимодулярных мультипликаторов уравнения $Ly=\lambda_0 y$, $m=n-p$,

$$\mu_0 = \min_{0\le t\le 1} \mu\,(S^*Z^*(t)P(t)Z(t)S) > 0 ,$$

$\alpha=\alpha(\Lambda_2)>0$ определяется равенством (2.2) при $T=\Lambda_2$ (3.3).

2°. Суммарная кратность отрицательного спектра оператора $L_\eta - \lambda_0 1_n$ бесконечна, если существует x_0 такое, что при $x\le x_0<0$ или при $x\ge x_0>0$ выполнено :

либо **2а)** для какого-нибудь $j_0\in[1,d]$

$$\langle \tilde{\eta}_{11}(x)\xi,\xi\rangle \le 0 \qquad \forall\xi\in\mathfrak{M}_{j_0}$$

и

$$\overline{\lim_{x\to(\operatorname{sgn} x_0)\infty}} \left| x^{2p_{j_0}-1} \int_x^{\infty\cdot\operatorname{sgn} x} \langle V^*(t)\tilde{\eta}_{11}(t)V(t)\,dt\, e_{j_0}^\circ , e_{j_0}^\circ\rangle \right| > \nu_0 A_{p_{j_0}}^2 ,$$

где

$$A_q^{-1} = \frac{\sqrt{2q-1}}{(q-1)!}\sum_{k=1}^{q}\frac{(-1)^{k-1}}{2q-k}\binom{q-1}{k-1},$$

$$\nu_0 = \max_{0\le t\le 1} |S^*Z^*(t)P(t)Z(t)S| ,$$

либо **2в)** $\tilde{\eta}_{22}(x)\le 0$ и найдутся $a>0$ и $x_n\to(\operatorname{sgn} x_0)\infty$ такие, что

$$\left| \int_{x_n}^{x_n+a} \tilde{\eta}_{22}(t)\,dt \right| > 2\nu_0\left(a\,|\Lambda_2|^2 + \frac{4|\Lambda_2|}{\sqrt{3}}\right).$$

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Оператор L_η (0.4), (0.5) имеет не более конечного числа собственных значений левее λ_0 (нижней грани оператора $L(0,1)$), если

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left| x^{2k-1}\int_x^{\infty\cdot\operatorname{sgn} x} \eta^-(t)\,dt \right| = 0,$$

где 2κ равняется максимальному из порядков жордановых клеток, отвечающих унимодулярным мультипликаторам уравнения $Ly = \lambda_0 y$.

Это следствие непосредственно вытекает из того, что для неотрицательных $n \times n$ матриц-функций $B(t) \geqslant 0$

$$n\left|\int_a^b B(t)\,dt\right| \geqslant sp\left(\int_a^b B(t)\,dt\right) \geqslant \int_a^b |B(t)|\,dt.$$

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Суммарная кратность отрицательного спектра оператора $L_\eta - \lambda_0 1_n$ бесконечна, если при $x \leqslant x_0 < 0$ или при $x \geqslant x_0 > 0$ $\eta(x) \leqslant 0$ и

$$\overline{\lim_{x \to (sgn\, x_0)\infty}} \left|x^{2\kappa-1}\int_x^{\infty\cdot sgn\, x} \mu(-\eta(t))\,dt\right| = \infty,$$

где 2κ равно максимальному из порядков жордановых клеток, отвечающих унимодулярным мультипликаторам уравнения $Ly = \lambda_0 y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. 1°. В силу принципа расщепления и теоремы 28 из [2,стр.60, 74] для доказательства достаточно показать, что при некотором $N>0$ на всех финитных функциях из $D(L_\eta)$ с носителями вне интервала $(-N,N)$ будет неотрицательным функционал

$$\begin{aligned} \Phi_{\eta^-}[y] = \left(\int_{-\infty}^{-N} + \int_N^\infty\right)\Big\{&\langle Py', y'\rangle - \langle Ry, y'\rangle - \\ -\langle R^* y', y\rangle &+ \langle (Q-\lambda_0 1_n)y, y\rangle - \langle \eta^- y, y\rangle\Big\}\,dt = \\ &= \Phi_{-N}[y] + \Phi_N[y]. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Рассмотрим $\Phi_N[y]$. В силу леммы 1.1 подстановка

$$y(t) = Z(t)SW(t)u(t),\quad W(t) = diag\{V(t), 1_m\} \tag{3.7}$$

преобразует $\Phi_N[y]$ к виду

$$\begin{aligned} \Phi_N[y] = \int_N^\infty &\langle PZSW(u' - \tilde\Lambda u), ZSW(u' - \tilde\Lambda u)\rangle\,dt - \\ &-\int_N^\infty \langle \eta^- ZSWu, ZSWu\rangle\,dt, \end{aligned} \tag{3.8}$$

где $\tilde\Lambda = \tilde\Lambda_1 \oplus \Lambda_2$, $\tilde\Lambda_1 = \Lambda_1 - \sum_{j=1}^{d} \oplus \lambda_j 1_{p_j}$.

Оценим снизу первый интеграл в (3.8). Пусть $u(t) = (u_1, \ldots, u_n)$. Полагая $\vec u_1(t) = (u_1, \ldots, u_p)$ и $\vec u_2(t) = (u_{p+1}, \ldots, u_{p+m})$, в силу лемм 2.1 и 2.2 имеем

$$\int_N^\infty \langle PZSW(u'-\tilde\lambda u),\ ZSW(u'-\tilde\lambda u)\rangle dt \geqslant$$
$$\geqslant \mu_0(\|A^{-1}(t)\vec{u}_1'(t)\|^2+\alpha(\|\vec{u}_2'(t)\|^2+\|\vec{u}_2(t)\|^2)). \tag{3.9}$$

Оценим теперь сверху второй интеграл в (3.8). В силу позитивности $\eta^-(t)$ имеем

$$\int_N^\infty \langle \eta^- ZSWu,\ ZSWu\rangle dt \leqslant$$
$$\leqslant 2\int_N^\infty \langle \tilde\eta_{11}^-\ V\vec{u}_1,\ V\vec{u}_1\rangle dt + 2\int_N^\infty \langle \tilde\eta_{22}^-\vec{u}_2,\ \vec{u}_2\rangle dt. \tag{3.10}$$

С помощью интегрирования по частям получаем, что первое слагаемое в правой части (3.10) равно

$$4\mathrm{Re}\int_N^\infty \langle tA(t)\int_t^\infty V^*(\tau)\tilde\eta_{11}^-(\tau)V(\tau)d\tau A(t)t^{-1}A^{-1}(t)\vec{u}_1(t), A^{-1}(t)\vec{u}_1'(t)\rangle dt.$$

Так как $\|t^{-1}A^{-1}(t)\vec{u}_1(t)\| \leqslant 2\ \|A^{-1}(t)\vec{u}_1'(t)\|,$ то

$$2\int_N^\infty \langle \tilde\eta_{11}^-\ V\vec{u}_1,\ V\vec{u}_1\rangle dt \leqslant$$

$$\leqslant 8\sup_{x\geqslant N}|xA(x)\int_x^\infty V^*(t)\tilde\eta_{11}^-(t)V(t)dtA(x)|\cdot\|A^{-1}(t)\vec{u}_1'(t)\|^2. \tag{3.11}$$

Сравнивая (3.8)-(3.11), в силу неравенства (2.8) с $\xi(t)=\tilde\eta_{22}^-(t)$ и в силу условий (A) и (B) получаем неотрицательность $\Phi_N[y]$. Неотрицательность $\Phi_{-N}[y]$ доказывается аналогично.

2°. В силу принципа расщепления, теоремы 28, леммы 5 из [2, стр.60,62,74] для доказательства достаточно для любого $N>0$ построить непрерывную кусочно-гладкую финитную вектор-функцию $y_N(x)$ с носителем вне интервала $(-N, N)$, для которой $\Phi_\eta[y]<0$. Пусть $x_0>0$.

В случае **2**$^{a)}$ можно положить

$$y_N(x)=Z(x)SW(x)u_N(x),\quad u_N(x)=(u_1,\dots,u_p,0,\dots,0),$$
$$(u_1,\dots,u_p)=\sum_{k=0}^{p_{j_0}-1} e_{j_0}^k\varphi_N^{(k)}(x),$$

где $\varphi_N(x)$ - скалярная "пробная" функция из [2, стр.157] для двучленной операции порядка $2p_{j_0}$, $W(x)$ см. (3.7).

В случае **2**$^{в)}$ следует положить

$$y_N(x)=Z(x)Su_N(x),\quad u_N(x)=(0,\dots,0,\xi_1^N\psi_N(x),\dots,\xi_m^N\psi_N(x)),$$

где $\psi_N(x) = \psi(x - x_n + \frac{\sqrt{3}}{|\Lambda_2|})$ при $x_n \geqslant N + \frac{\sqrt{3}}{|\Lambda_2|}$,

$$\psi(x)= \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 0 \\ \frac{|\Lambda_2|}{\sqrt{3}} x & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{|\Lambda_2|} \\ 1 & \text{при} \quad \frac{\sqrt{3}}{|\Lambda_2|} \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{|\Lambda_2|} + a, \\ -\frac{|\Lambda_2|}{\sqrt{3}}(x - \frac{\sqrt{3}}{|\Lambda_2|} - a) + 1 & \text{при} \quad \frac{\sqrt{3}}{|\Lambda_2|} + a \leqslant x \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{|\Lambda_2|} + a \\ 0 & \text{при} \quad x \geqslant \frac{2\sqrt{3}}{|\Lambda_2|} + a \end{cases}$$

$\xi^N = (\xi_1^N, \ldots, \xi_m^N)$ – нормированный вектор такой, что

$$\left| \int_{x_n}^{x_n+a} \langle \tilde{\eta}_{22}(t) \xi^N, \xi^N \rangle dt \right| > 2\nu_0 (a|\Lambda_2|^2 + \frac{4|\Lambda_2|}{\sqrt{3}}).$$

Теорема доказана.

4. Непериодические возмущения оператора T (0.2)

ТЕОРЕМА 3. Пусть интервал $(-\beta, \beta)$ является спектральной лакуной оператора T (0.2)[3)] и суммарная кратность спектра возмущенного оператора T_ζ (0.4), (0.5) в интервале $(-\beta, \beta)$ равна $N \leqslant \infty$. Тогда

$$N_1 \leqslant N \leqslant N_2,$$

где через N_1, N_2 обозначены суммарные кратности отрицательного спектра операторов

$$L_1 y \equiv (T^2 - \beta^2 1_n) y + \{Re(\zeta(t) \hat{H}(t)) + \zeta^2(t)\} y \tag{4.1}$$

и, соответственно,

$$L_2 y \equiv (T^2 - \beta^2 1_n) y + 2\{2Re(\zeta(t) \hat{H}(t)) - \zeta^2(t)\} y \tag{4.2}$$

в $L_n^2(-\infty, \infty)$. Здесь

$$\hat{H}(t) = \mathcal{J} Z'(t) Z^{-1}(t) + \mathcal{J} Z(t) \Lambda Z^{-1}(t) + H(t),$$

---

3) Путем сдвига спектрального параметра к этому случаю сводится рассмотрение любой спектральной лакуны оператора T.

где $Z(t)e^{\Lambda t} = E(t,\beta^2)$ – произвольное н.с. Ф.– решение уравнения $(T^2-\beta^2 1_n)y=0$.[4)]

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем неравенство $N \leqslant N_2$ (неравенство $N_1 \leqslant N$ доказывается аналогично). Как известно [2, стр.29], суммарная кратность спектра оператора T_ζ в интервале $(-\beta,\beta)$ равна максимальной размерности лежащих в $D(T_\zeta)$ линейных многообразий, на которых

$$\| T_\zeta \varphi \| < \beta \| \varphi \|. \tag{4.3}$$

В силу существенной самосопряженности оператора T_ζ можно, не нарушая общности, считать вектор-функции $\varphi(x)$ финитными[5)].

Пусть $E(t,\beta^2) = Z(t)e^{\Lambda t}$ – какое-нибудь н.с.Ф.-решение уравнения $(T^2-\beta^2 1_n)y=0$. Преобразуем функционал $\|T_\zeta\varphi\|^2-\beta^2\|\varphi\|^2$ с помощью подстановки $\varphi = Z(t)u$. В силу леммы 1.1. такая замена преобразует функционал $\|T\varphi\|^2-\beta^2\|\varphi\|^2$ к виду

$$\|Z(-\Lambda u+u')\|^2 = \|\mathcal{J}Z(-\Lambda u+u')\|^2.$$

Учитывая это, получаем

$$\|T_\zeta\varphi\|^2-\beta^2\|\varphi\|^2 = \|T\varphi\|^2-\beta^2\|\varphi\|^2 +$$

$$+ 2\mathrm{Re}\,(T\varphi,\zeta\varphi)+\|\zeta\varphi\|^2 =$$

$$=\|\mathcal{J}Z(-\Lambda u+u')\|^2+2\mathrm{Re}\,(\mathcal{J}Z(-\Lambda u+u'),\zeta Zu)+$$

$$+\|\zeta Zu\|^2+2\mathrm{Re}\,([\mathcal{J}Z'Z^{-1}+\mathcal{J}Z\Lambda Z^{-1}+H]Zu,\zeta Zu).$$

Следовательно

$$\|T_\zeta\varphi\|^2-\beta^2\|\varphi\|^2 =$$

$$=\|\mathcal{J}Z(-\Lambda u+u')+\zeta Zu\|^2+2\mathrm{Re}\,(\hat{H}Zu,\zeta Zu).$$

4) Поскольку оператор T^2 является частным случаем L (0.1), то такие решения существуют в силу теоремы 1.

5) Кроме того, в силу леммы 5 из [2, стр.62, 74] можно считать, что $\varphi(x)\in D(L_2)$.

Таким образом, если неравенство (4.3) выполнено, то в силу (2.4) выполнено неравенство

$$\|\mathcal{J}Z(-\Lambda u+u')\|^2+$$

$$+2\{2(\operatorname{Re}(\zeta\hat{H})Zu,Zu)-(\zeta^2 Zu,Zu)\}<0,$$

то есть

$$\|T\varphi\|^2-\beta^2\|\varphi\|^2+2\{2(\operatorname{Re}(\zeta\hat{H})\varphi,\varphi)-(\zeta^2\varphi,\varphi)\}<0. \qquad (4.4)$$

А так как суммарная кратность отрицательного спектра оператора L_2 (4.2) равна максимальной размерности состоящих из финитных функций линейных многообразий, на которых выполнено (4.4), то $N\leqslant N_2$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. М.м. $U(1,\beta^2)$ уравнения $(T^2-\beta^2 1_n)y=0$ $(\beta\neq 0)$ подобна матрице $U_{-\beta}\oplus U_\beta$, где U_β и U_β – матрицы монодромии уравнений $Ty=-\beta y$ и $Ty=\beta y$ соответственно. Действительно :

$$U(1,\beta^2)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} U_\beta+U_{-\beta} & \frac{1}{\beta}(U_\beta-U_{-\beta})\mathcal{J} \\ -\beta\mathcal{J}(U_\beta-U_{-\beta}) & -\mathcal{J}(U_\beta+U_{-\beta})\mathcal{J}\end{pmatrix}=$$

$$=\Phi\begin{pmatrix} U_{-\beta} & 0 \\ 0 & U_\beta\end{pmatrix}\Phi^{-1},$$

где

$$\Phi=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\beta}1_n & \frac{1}{\beta}1_n \\ \mathcal{J} & -\mathcal{J}\end{pmatrix}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. М.Ш.Бирман. О спектре сингулярных граничных задач. Матем.сборник, 55(97), 2, 125–174, 1961.

2. И.М.Глазман. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М., 1963.

3. Б.Я.Скачек. Одне зауваження про спектр оператора Дірака. ДАН. УРСР, № 10, 1272–1274, 1965.

4. О.И.Куренбин. О дискретном спектре операторов Дирака и Паули. Сб. "Проблемы математической физики", вып. 3, изд. ЛГУ, 49–58, 1968.

5. М.Г.Крейн и Г.Я.Любарский. Об аналитических свойствах мультипликаторов периодических канонических дифференциальных систем положительного типа. Изв. АН СССР, матем. 26, № 4, 549-572, 1962.

6. В.Б.Лидский. Осцилляционные теоремы для канонической системы дифференциальных уравнений. ДАН СССР, 102, 5, 877-880, 1955.

7. В.А.Якубович. Осцилляторные свойства решений канонических уравнений. Матем. сборник 56(98), 1,3-42, 1962.

8. В.А.Якубович, В.М.Старжинский. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М., 1972.

9. Ю.Л.Далецкий, М.Г.Крейн. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., 1970.

10. Ф.Хартман. Обыкновенные дифференциальные уравнения. "Мир", М., 1970.

11. А.И.Мальцев. Основы линейной алгебры. ГТТИ, 1956.

12. Ф.Аткинсон. Дискретные и непрерывные граничные задачи, "Мир", М., 1968.

13. И.М.Гельфанд. Разложение по собственным функциям уравнения с периодическими коэффициентами. ДАН СССР, 73, 1117-1120, 1950.

14. Ф.С.Рофе-Бекетов. О спектре несамосопряженных дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами. ДАН СССР, 152, 6, 1312-1315, 1963.

15. Ф.С.Рофе-Бекетов. Самосопряженные расширения операторов в пространстве вектор-функций. ДАН СССР, 184, 5, 1034-1037, 1969.

16. Ф.С.Рофе-Бекетов. О самосопряженных расширениях операторов в пространстве вектор-функций. Теория функций, функциональный анализ и их приложения, вып.8, Харьков, 3-24, 1969.

17. Т.Като. Теория возмущений линейных операторов, "Мир", М., 1972.

18. В.В.Мартынов. Условия дискретности и непрерывности спектра в случае самосопряженной системы дифференциальных уравнений четного порядка, Дифф. ур. 1, 12, 1965, 1578-1591.

ON PERTURBATIONS OF THE SPECTRUM OF SELF-ADJOINT DIFFERENTIAL OPERATORS WITH PERIODIC MATRIX COEFFICIENTS

V.I.Khrabustovski

For non-periodic perturbations of self-adjoint operators L and T in $L_n^2(-\infty,\infty)$ with periodic (the period equals 1) matrix coefficients sufficient conditions are established for finity or infinity of the number of discrete levels that appear in a semi-infinite spectral lacuna of the operator

$$Ly=-(P(t)y'-R(t)y)'-R^*(t)y'+Q(t)y \qquad (P(t)>0)$$

and in each spectral lacuna of the operator

$$Ty=Jy'+H(t)y \qquad (-J=J^*=J^{-1}).$$

Non-degenerate self-adjoint matrix Floquet-solutions of the equation $Ly=\lambda y$ are constructed for λ not exceeding the lower boundary of the operator L.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1 9 7 3 выпуск 1У

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПОСЛЕКРИТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ПОЛОГИХ СТРОГО ВЫПУКЛЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

В.И. Бабенко

Постановка задачи

1. В работе изучается динамика выпучивания пологих строго выпуклых оболочек вращения в начальной послекритической стадии. Рассматривается потеря устойчивости оболочки, происходящая под действием нормальной нагрузки и сопровождающаяся выпучиванием как всей оболочки, так и ее части, причем в первом случае считается, что край оболочки упруго заделан. Предполагается, что оболочка односвязная, достаточно тонкая, линейно-упругая.

Исходным пунктом исследования является предположение А.В.Погорелова о том, что форма оболочки в начальной послекритической стадии близка к бесконечно малым разрывным изгибаниям срединной поверхности недеформированной оболочки [1] . Для описания напряженно-деформированного состояния оболочки используются нелинейные уравнения теории пологих оболочек [2] , для решений которых с помощью метода М.И.Вишика и Л.А.Люстерника [3] строятся асимптотические разложения, в основном приближении описывающие разрывные изгибания формы недеформированной оболочки и ее безмоментное напряженное состояние. Для решений головной системы уравнений II итерационного процесса метода [3] при нагрузках, близких к критическим, строятся асимптотические представления с помощью метода Н.Н.Боголюбова и Ю.А.Митропольского [4] . Это позволило получить в замкнутом виде окончательные результаты – зависимость деформации от нагрузки и критические значения параметров при динамическом нагружении.

Асимптотический метод [3] для определения критических нагрузок пологих строго выпуклых оболочек, выпучивание которых происходит у края, применялся ранее в работах [5] , [6] , причем решение головной системы II итерационного процесса производилось численным способом.

2. Потеря устойчивости пологих строго выпуклых оболочек вращения под действием нормальной нагрузки происходит тогда, когда нагрузка достигает своего критического значения, определяемого уравнением [6] , [7] [1])

$$\sup_{(z)} \left(-\frac{2}{\theta^2}\int_0^z Z\, z\, dz\right)=4. \tag{1}$$

Здесь

$$\varepsilon^2=\frac{\delta}{z_0\theta_0\sqrt{12(1-\nu^2)}}\,, \quad \frac{\partial\theta}{\partial z}>0\,, \quad \theta(1)=1,$$

z_0 – радиус основания оболочки, $z\cdot z_0$ – радиус параллели, $\theta\cdot\theta_0$ – угол на-

1) Мы здесь не рассматриваем такие закрепления оболочек (например, свободное опирание [5] , [6]), при которых выпучивание оболочки происходит у ее края при нагрузках меньших, чем (1).

клона меридиана недеформированной оболочки к плоскости ее основания, $ZE\delta\varepsilon^2\theta_0^3/r_0$ – нормальная нагрузка, δ – толщина оболочки, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, ε – малый параметр относительной тонкостенности оболочки.

Мы предполагаем, что потеря устойчивости оболочки сопровождается выпучиванием ее части ($r \leqslant r_*$), где r_* – радиус одной из параллель, на которых достигается равенство (1) (исключение составляет, например, сферическая оболочка при внешнем давлении, где (1) достигается одновременно на всей поверхности оболочки, потеря устойчивости в этом случае может произойти выпучиванием любой ее части). Поэтому представляется естественным предположение, что в общем случае деформация оболочки в начальной послекритической стадии будет осесимметрична.

3. Нелинейные уравнения динамики пологих оболочек и краевые условия [2] в случае осесимметричной деформации оболочек вращения можно привести к виду

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\varepsilon^3 L(v) + (\theta - \varepsilon v)\psi\right] = Z - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \qquad (2)$$

$$\varepsilon L(\psi) - \theta v + \frac{v^2}{2} = 0,$$

$$\frac{\psi}{r} < \infty, \quad \frac{v}{r} < \infty \quad (\text{при } r = 0) \qquad (3)$$

$$w = 0 \quad (\text{при } r = 1) \qquad (4)$$

Если потеря устойчивости оболочки происходит вдали от края ($r_* \neq 1$), то остальные краевые условия при $r = 1$ мы не будем уточнять, предполагая лишь, что закрепление края оболочки достаточно жесткое, чтобы критическая нагрузка определялась уравнением (1). Если выпучивание происходит у края ($r_* = 1$), то, в качестве примера, мы рассмотрим упругую заделку края, тогда, кроме (4), при $r = 1$ должны выполняться условия

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} - \nu\psi = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial r} + \nu v = -\frac{1}{\varepsilon} k v. \qquad (5)$$

В формулах (2) – (5) введены обозначения

$$L(\ ) = r\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r(\ )\right], \quad v = \frac{\partial w}{\partial r};$$

$\varepsilon r_0 \theta_0 w$ – нормальная составляющая прогиба срединной поверхности оболочки, $E\delta\varepsilon^2\theta_0^2\psi/r$ – радиальное усилие, $t\sqrt{\gamma r_0^2/E\varepsilon\theta_0^3}$ – время, γ – плотность материала, k – безразмерный коэффициент, характеризующий жесткость заделки края.

Построение асимптотических представлений

4. Асимптотические представления для решений системы (2) при сколь угодно малых значениях параметра ε строим [3] в виде рядов

$$w = \sum_{k=0} \varepsilon^k \overline{w}_k + g(r)\sum_{k=0} \varepsilon^k \overline{\overline{w}}_k,$$

$$\psi = \sum_{k=0} \varepsilon^k \overline{\psi}_k + g(r)\sum_{k=0} \varepsilon^k \overline{\overline{\psi}}_k, \qquad (6)$$

где $g(r)$ сглаживающая функция

$$g(r)=\begin{cases} 1 & \text{при} \quad |r-r_*|<a\ ,\ 1-a<r<1 \\ 0 & \text{при} \quad r<2a\ ,\ 1-3a<r<1-2a, \end{cases}$$

$$a\equiv 0{,}2\min(r_*,1-r_*).$$

Систему уравнений для определения функций W_K, ψ_K получаем при помощи 1 итерационного процесса, подставляя в (2) первые суммы из (6) и приравнивая затем нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\theta\bar\psi_K)=Z_K-\frac{\partial^2\bar W_K}{\partial t^2}-$$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[L\left(\frac{\partial\bar W_{K-3}}{\partial r}\right)-\sum_{m+n=K-1}\bar\psi_m\frac{\partial\bar W_n}{\partial r}\right], \tag{7}$$

$$\frac{\partial\bar W_K}{\partial r}=L(\bar\psi_{K-1})+\frac{1}{2}\sum_{m+n=K-1}\frac{\partial\bar W_m}{\partial r}\frac{\partial\bar W_n}{\partial r},$$

где $K=0,1,\ldots;\quad \bar\psi_{-1}=\bar W_{-1}=\bar W_{-2}=\bar W_{-3}\equiv 0;$

$$Z_K=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\left(Z-\sum_{i=0}^{K-1}\varepsilon^i Z_i\right)/\varepsilon^K\right].$$

Если потеря устойчивости оболочки сопровождается выпучиванием ее части $(r\leqslant r_*)$, то решение головной системы уравнений (7) с учетом условий (3), (4) запишем в виде

$$\bar W_0(r,t)=\begin{cases} -h(t) & \text{при} \quad r\leqslant r_* \\ 0 & \text{при} \quad r_*<r\leqslant 1 \end{cases} \tag{8}$$

$$\bar\psi_0(r,t)=\begin{cases} \frac{1}{\theta}\left[\int_0^r Z_0\, r dr+\frac{r^2}{2}\frac{d^2h}{dt^2}\right] & \text{при} \quad r\leqslant r_* \\ \frac{1}{\theta}\left[\int_0^r Z_0\, r dr+c(t)\right] & \text{при} \quad r_*<r\leqslant 1, \end{cases} \tag{9}$$

где $h(t)$, $c(t)$ – функции, подлежащие определению. При докритических деформациях $h(t)=c(t)=0$. Тождественно не равные нулю смещения $h(t)$ соответствуют послекритическим деформациям. Уравнение (8) описывает разрывные бесконечно малые изгибания исходной формы оболочки, которые в данном случае сводятся к смещению на $h(t)$, как целого, части оболочки ($r\leqslant r_*$)вдоль оси симметрии.

Для того, чтобы устранить разрывы при $r=r_*$ в первых суммах рядов (6) и удовлетворить краевым условиям, построим функции типа погранслоя W_K, $\bar{\bar\psi}_K$, систему уравнений для которых получим с помощью II итерационного процесса. Для этого подставим ряды (6) при $g(r)\equiv 1$ в систему (2), упростим ее с учетом уравнений (7). Затем разлагая в (2) коэффициенты при $\bar W_K$, $\bar\psi_K$ в ряды Тейлора по $\varepsilon\tilde S=r_*-r$ в окрестности параллели $r=r_*$ и приравнивая нулю слагаемые при одинаковых степенях ε, получим искомую систему уравнений, определяющих $\bar{\bar W}_K$, $\bar{\bar\psi}_K$ в окрестности $r=r_*$. Выпишем головную систему уравнений для $\bar{\bar W}_0(\tilde S)$, $\bar{\bar\psi}_0(S)$.

$$z_* \frac{\partial^2 \bar{V}_0}{\partial \tilde{S}^2} - \theta_* \bar{\psi}_0 - \bar{\bar{V}}_0 [\bar{\psi}_0 + \bar{\bar{\psi}}_0] = 0, \tag{10}$$

$$z_* \frac{\partial^2 \bar{\bar{\psi}}_0}{\partial \tilde{S}^2} + \theta_* \bar{\bar{V}}_0 + \frac{1}{2} \bar{\bar{V}}_0^2 = 0,$$

где $\quad \theta_* = \theta(z_*)\,, \quad \bar{\bar{V}}_0 = \dfrac{\partial \bar{\bar{W}}_0}{\partial \tilde{S}}\,, \quad \dfrac{z_*}{\varepsilon} \gg 1\,, \quad \dfrac{1-z_*}{\varepsilon} \gg 1.$

Функции $\bar{\bar{W}}_0(\tilde{S})$ и $\bar{\bar{\psi}}_0(\tilde{S})$ должны удовлетворять условиям

$$\bar{\bar{W}}_0(\tilde{S}) = \bar{\bar{\psi}}_0(\tilde{S}) = 0 \qquad \text{при} \qquad \tilde{S} = \pm\infty \tag{11}$$

и условиям сшивки при $\tilde{S} = 0$. Последние получаем из условий гладкости формы деформированной оболочки при $z = z_*$

$$\left[\frac{\partial \psi}{\partial z} - \nu \frac{\psi}{z}\right] = [v] = [w] = 0, \tag{12}$$

$$([f] \equiv f(z_* + 0) - f(z_* - 0))$$

и условий непрерывности нормальных усилий, изгибающего момента и перерезывающей силы

$$[\psi] = \left[\frac{\partial V}{\partial z}\right] = \left[\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right] = 0.$$

Подставляя в (12) и (13) ряды (6) и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε, находим условия сшивки при $z = z_*$ для функций $\bar{W}_K$, $\bar{\psi}_K$ и $\bar{\bar{W}}_K$, $\bar{\bar{\psi}}_K$. Выпишем эти условия для функций W_0, $\bar{\psi}_0$ и $\bar{\bar{W}}_0$, $\bar{\bar{\psi}}$.

$$[\bar{\bar{V}}_0] = \left[\frac{\partial \bar{V}_0}{\partial \tilde{S}}\right] = \left[\frac{\partial \bar{\bar{\psi}}_0}{\partial \tilde{S}}\right] = [\bar{\psi}_0] + [\bar{\bar{\psi}}_0] = 0, \tag{14}$$

$$h = -[\bar{\bar{W}}_0], \tag{15}$$

$$\left[\frac{\partial^2 \bar{V}_0}{\partial \tilde{S}^2}\right]. \tag{16}$$

Непосредственно из первого уравнения системы (10) следует, что при выполнении условий (14), условие (16) эквивалентно требованию $[\bar{\bar{\psi}}_0] = 0$, т.е. (см.(9))

$$c(t) = \frac{z_*^2}{2} \frac{d^2 h}{dt^2}.$$

Будем предполагать, что функции $\bar{\bar{V}}_0$, $\bar{\bar{\psi}}_0$ – четные, тогда для их построения достаточно рассмотреть систему (10) на полуоси с краевыми условиями

$$\bar{\bar{V}}_0 = \bar{\bar{\psi}}_0 = 0 \qquad (\text{при} \quad \tilde{S} = \infty), \tag{17}$$

$$\frac{\partial \bar{\bar{\psi}}_0}{\partial \tilde{S}} = \frac{\partial \bar{V}_0}{\partial \tilde{S}} = 0 \qquad (\text{при} \quad \tilde{S} = 0). \tag{18}$$

При этом для $h(t)$ из (15) получим

$$h(t) = 2\bar{\bar{W}}_0\Big|_{z = z_*}, \tag{19}$$

где $\bar{\bar{W}}_\circ(z)$ – нетривиальное решение системы (10) с краевыми условиями (17), (18).

Аналогично получается система уравнений, определяющая $\bar{\bar{W}}_K$, $\bar{\bar{\Psi}}_K$ в окрестности края (z = 1). Так, головная система этих уравнений совпадает с (10), если в (10) положить z_* = 1. Граничные условия при z = 1 для функций, входящих в ряды (6) находим из условий закрепления края оболочки также, как условия сшивки при $z = z_*$ мы получали из (12), (13). Например, в случае упругой заделки края из уравнений (15) получаем

$$\frac{\partial \bar{\bar{\Psi}}_\circ}{\partial \tilde{S}} = 0\,, \qquad \frac{\partial V_\circ}{\partial \tilde{S}} = K\bar{V}_\circ \qquad (\text{при } z = 1) \tag{20}$$

Если $z_* \neq 1$, то $\bar{W}_\circ \big|_{z=1} = 0$. Тогда из (4) следует, что $\bar{\bar{W}}_\circ\big|_{z=1} = 0$, поэтому [2] в окрестности края $\bar{\bar{W}}_\circ = \bar{\bar{\Psi}}_\circ = 0$.

Смещение $h(t)$, если z_* = 1, определяется из условия (4), т.е.

$$h(t) = \bar{\bar{W}}_\circ \big|_{z=z_*}\,, \tag{21}$$

где $\bar{\bar{W}}_\circ$ – нетривиальное решение системы (10) с краевыми условиями (17), (20) в случае упругой заделки.

При докритических деформациях $h(t) \equiv 0$, поэтому $\bar{\bar{W}}\big|_{z=z_*} = 0$ и в окрестности параллели $z = z_*$ $\bar{\bar{W}}_\circ = \bar{\bar{\Psi}}_\circ \equiv 0$.

5. Перепишем систему (10) следующим образом

$$\frac{d^2\xi}{ds^2} + \xi - 2\beta^2(\eta+\xi) - \beta F = 0, \tag{22}$$

$$\frac{d^2\eta}{ds^2} + \eta + 2\xi - 2\beta^2(\eta+\xi) - \beta f = 0. \tag{23}$$

Здесь введены обозначения

$$\beta^2 = \frac{1}{8}\left[4 - P + \left(\frac{z_*}{\theta_*}\right)^2 \frac{d^2h}{dt^2}\right], \quad P = \frac{2}{\theta_*^2}\int_0^{z_*} Z_\circ\, z\,dz\,, \tag{24}$$

$$s = \sqrt{\theta_*/z_*}\;\tilde{S}, \quad \eta = \frac{\bar{\bar{V}}_\circ + \bar{\bar{\Psi}}_\circ}{2\theta_*\beta}\,, \quad \xi = \frac{\bar{\bar{V}}_\circ - \bar{\bar{\Psi}}_\circ}{2\theta_*\beta}\,,$$

$$F = \frac{\eta+\xi}{4}(3\eta - \xi)\,, \quad f = \frac{\eta+\xi}{4}(\eta - 3\xi), \quad 1 \ll \frac{\beta}{\varepsilon} \ll \frac{1}{\varepsilon}\,.$$

При нагрузках, близких к критическим (при малых β), для нетривиальных решений системы (22), (23) на полуоси, удовлетворяющих условию

$$\xi = \eta = 0 \qquad (\text{при } s = \infty) \tag{25}$$

---

2) Предполагается, что рассматриваемые в работе условия закрепления края оболочки (см. предыдущую сноску) обеспечивают однородность краевых условий для $\bar{\bar{W}}_\circ$, $\bar{\bar{\Psi}}_\circ$, при z = 1.

строим ассимптотические представления в виде рядов [3]

$$\eta = \sum_{\kappa=1} \eta_\kappa(\rho,\varphi)\cdot\beta^\kappa + \rho\cdot\cos\varphi, \tag{26}$$

$$\xi = \sum_{\kappa=1} \xi_\kappa(\rho,\varphi)\,\beta^\kappa,$$

где $\eta_\kappa(\rho,\varphi)$ и $\xi_\kappa(\rho,\varphi)$ – периодические функции аргумента φ с периодом 2π. Функции $\rho(S)$ и $\varphi(S)$ определяются дифференциальными уравнениями

$$\frac{d\rho}{ds} = \sum_{\kappa=1} \beta^\kappa \rho_\kappa(\rho), \tag{27}$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \sum_{\kappa=1} \beta^\kappa \Phi_\kappa(\rho) + 1.$$

Подставляя ряды (26), (27) в уравнения (22), (23) и разлагая левые части этих уравнений в ряды по степеням малого параметра β, приравниваем нулю коэффициенты при одинаковых степенях β.

$$\frac{\partial^2 \xi_\kappa}{\partial\varphi^2} + \xi_\kappa = -2\sum_{\kappa=m+\bar m} \partial_m \xi_{\bar m} + 2\rho\cos\varphi\,\delta_\kappa^2 + \Xi_\kappa, \tag{28}$$

$$\frac{\partial^2 \eta_\kappa}{\partial\varphi^2} + \eta_\kappa + 2\xi_\kappa = 2(\rho_\kappa \sin\varphi + \rho\Phi_\kappa\cos\varphi) + H_\kappa. \tag{29}$$

Здесь κ = 1,2, ... ;

$$\Xi_\kappa = F_{\kappa-1} - \Big[\sum_{\kappa=m+\bar m} D_m \xi_{\bar m} - 2(\xi_{\kappa-2} + \eta_{\kappa-2})\Big];$$

$$H_\kappa = f_{\kappa-1} - \Big[-D_\kappa^\Phi \sin\varphi + D_\kappa^\rho \cos\varphi + \sum_{\kappa=m+\bar m}(2\partial_m + D_m)\eta_{\bar m} -$$

$$- 2(\delta_\kappa^2 \rho\cos\varphi + \xi_{\kappa-2} + \eta_{\kappa-2})\Big];$$

$$\partial_\kappa = \left(\Phi_\kappa \frac{\partial}{\partial\varphi} + \rho_\kappa \frac{\partial}{\partial\rho}\right)\frac{\partial}{\partial\varphi};$$

$$D_\kappa = \sum_{\kappa=m+\bar m}\Big\{\rho_m\left(\rho_{\bar m}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial\rho_m}{\partial\rho}\right)\frac{\partial}{\partial\rho} + \Phi_m\Phi_{\bar m}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} +$$

$$+ \Big[(\Phi_m\rho_{\bar m} + \Phi_{\bar m}\rho_m)\frac{\partial}{\partial\rho} + \rho_m\frac{d\Phi_{\bar m}}{d\rho}\Big]\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big\};$$

$$D_\kappa^{\Phi} = \sum_{\kappa=m+\bar m} \frac{\rho_m}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho \; \Phi_{\bar m});$$

$$D_\kappa^{\rho} = \sum_{\kappa=m+\bar m} \left(\rho_m \frac{d\rho_{\bar m}}{d\rho} - \rho \Phi_m \Phi_{\bar m}\right);$$

$\delta_\kappa^2 = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \kappa = 2 \\ 0 & \text{при} \quad \kappa \neq 2; \end{cases}$ F_κ и f_κ – коэффициенты разложений F и f в ряды по параметру β, которые мы получаем, подставляя (26) в F и f. Именно $F = \sum_{\kappa=0} \beta^\kappa F_\kappa$, $f = \sum_{\kappa=0} \beta^\kappa f_\kappa$.

Коэффициенты разложений $\rho_\kappa(\rho)$, $\Phi_\kappa(\rho)$ рядов (27) и первую гармонику аргумента φ функции $\xi_\kappa(\rho, \varphi)$ мы определяем так, чтобы уравнения (28) и (29) определяли $\xi_\kappa(\rho, \varphi)$ и $\eta_\kappa(\rho, \varphi)$, как периодические функции аргумента φ. Именно

$$\xi_\kappa^{(+)} = \rho_\kappa \sin\varphi + \rho \Phi_\kappa \cos\varphi + \frac{1}{2} H_\kappa^{(+)} \tag{30}$$

$$-D_\kappa^{\Phi} \sin\varphi + D_\kappa^{\rho} \cos\varphi - \delta_\kappa^2 \rho \cos\varphi - \frac{1}{2}\left(\Xi_\kappa^{(+)} - \sum_{\kappa=m+\bar m} \partial_m H_{\bar m}^{(+)}\right) = 0$$

$$\rho_\kappa < \infty, \quad \Phi_\kappa < \infty \quad \text{при} \quad \rho \to 0. \tag{31}$$

Здесь через $S^{(+)}(\varphi)$ обозначена первая гармоника аргумента φ функции $S(\varphi)$. Функции $\xi_\kappa^{(-)} = \xi_\kappa - \xi_\kappa^{(+)}$, $\eta_\kappa^{(-)} = \eta_\kappa - \eta_\kappa^{(+)}$ находим из уравнений (28), (29), которые с учетом уравнений (30), (31) можно записать теперь так :

$$\frac{\partial^2 \xi_\kappa^{(-)}}{\partial \varphi^2} + \xi_\kappa^{(-)} = \Xi_\kappa^{(-)} - 2\sum_{\kappa=m+\bar m} \partial_m \xi_m^{(-)},$$

$$\frac{\partial^2 \eta_\kappa^{(-)}}{\partial \varphi^2} + \eta_\kappa^{(-)} = -2\xi_\kappa^{(-)} + H_\kappa^{(-)},$$

где $\kappa = 1, 2 \ldots;$

$$\Xi_\kappa^{(-)} = \Xi_\kappa - \Xi_\kappa^{(+)}; \quad H_\kappa^{(-)} = H_\kappa - H_\kappa^{(+)}.$$

Имеющийся произвол в определении η_κ^{+} устраняем, полагая $\eta_\kappa^{(+)} = 0$.

Описанным выше способом мы нашли асимптотическое представление для η и ξ в третьем приближении. Именно,

$$\eta = \rho\cos\varphi + \beta\eta_1 + \beta^2\eta_2; \quad \xi = \beta\xi_1 + \beta^2\xi_2. \tag{32}$$

$$\frac{d\rho}{ds} = \beta \mathcal{P}_1 + \beta^2 \mathcal{P}_3 ; \qquad \frac{d\varphi}{ds} = 1 + \beta^2 \Phi_2 ; \tag{33}$$

$$\eta_1 = \frac{\rho^2}{8}(-5 - \cos 2\varphi) ; \quad \xi_1 = \frac{\rho^2}{8}(3 - \cos 2\varphi) + \mathcal{P}_1 \sin\varphi ;$$

$$\eta_2 = \frac{\rho^3}{256}\cos 3\varphi + \frac{7}{12}\rho \mathcal{P}_1 \sin 2\varphi ; \quad \mathcal{P}_2 = \Phi_1 = \Phi_3 = 0 ;$$

$$\xi_2 = \frac{\rho^3}{64}\cos 3\varphi + \frac{1}{4}\rho \mathcal{P}_1 \sin 2\varphi - \frac{11}{64}\rho^3 \cos\varphi ;$$

$$\mathcal{P}_1 = -\rho\sqrt{1 - \frac{7}{32}\rho^2} ; \qquad \Phi_2 = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{9}{32}\rho^2\right) ;$$

$$\mathcal{P}_2 = \frac{\rho}{4\mathcal{P}_1}\left[1 - \rho + \frac{3}{16}\rho^2 + \frac{427}{64}\rho^3 + \frac{81}{5\cdot 32^2}\rho^5 - \frac{1309}{36\cdot 32}\rho^6\right].$$

Решение системы (33) представим в виде

$$\rho = \rho_0(s) + \beta^2 \hat{\rho}_2(s) + O(\beta^4) ; \qquad \varphi = s + \varphi_0 + \beta^2 \int_0^s \Phi_2(\rho)\, ds ,$$

где

$$\hat{\rho}_0(s) = \frac{\sqrt{32/7}}{ch[\beta(s + s_0)]} \tag{35}$$

постоянные s_0 и φ_0 подлежат определению из краевых условий для η и ξ при $s = 0$. Выражение для функции $\hat{\rho}_2(s)$ мы не выписываем, т.к. его вид нам в дальнейшем не понадобится.

Из краевых условий (18), (20) следует, что при $s = 0$

$$\frac{\partial \xi}{\partial s} - \frac{\partial \eta}{\partial s} = 0 ,$$

поэтому

$$\sin\varphi_0 = -\frac{4}{3}\beta^2 \mathcal{P}_1 \Big|_{s=0} + O(\beta^3).$$

6. Используя асимптотическое представление (32), найдем асимптотическое выражение для $\overline{W}_0\big|_{s=0}$

$$\overline{W}_0\Big|_{s=0} = -\beta\sqrt{\theta_* r_*}\int_0^\infty (\eta + \xi)\, ds =$$

$$= \frac{8}{7}\sqrt{\theta_* r_*}\,\left[1 - th(\beta s_0)\right]\beta + O(\beta^3).$$

Уравнения (19) и (21), определяющие смещение h, примут теперь следующий вид

$$h = c_z \cdot \frac{8}{7}\sqrt{\theta_* z_*}\,[1 - th(\beta s_0)]\beta + O(\beta^3) > 0, \tag{36}$$

где

$$c_z = \begin{cases} 2 & \text{при} \quad z_* \neq 1 \\ 1 & \text{при} \quad z_* = 1 . \end{cases}$$

Заметим, что полученное выражение для h положительно. Это означает, что движение части оболочки ($z \leqslant z_*$), описывающее в основном приближении значительные деформации оболочки при нагрузках, близких к критическим, сопровождается смещениями в сторону вогнутости оболочки.

При соответствующем подборе условий нагружения (вида внешней нагрузки Z) и начальных краевых условий для задачи (2) - (4) уравнение (36) позволяет выяснить многие вопросы динамики оболочки при нагрузках, близких к критическим.

Выпучивание оболочки вдали от края

7. Из второго краевого условия (18) находим, что при $z_* \neq 1$

$$th(\beta s_0) = O(\beta^2). \tag{37}$$

Тогда уравнение (36) с учетом обозначений (24) можно переписать в следующем виде

$$\ddot{h} = h^2 - \Delta p \qquad (h > 0), \tag{38}$$

где $\quad \tau = \frac{\theta_*}{z_*}\sqrt{\frac{49/32}{\theta_* z_*}}, \qquad \Delta p = \frac{32}{49}\cdot\theta_* z_* (4 - P),$

слагаемые порядка h^4 опущены, точки над h означают дифференцирование по τ.

Пусть $h \to 0$, $\dot{h} \to \dot{h}(\tau')$ при $\tau \to \tau'$. Тогда для описания деформации оболочки при $\tau > \tau' - 0$, вообще говоря, следует рассмотреть следующие члены рядов (6). Если же рассматриваемая система (оболочка - внешняя нагрузка)- консервативна, либо характерное время $\Delta\tau$ изменения внешней нагрузки порядка единицы, то, не прибегая к последующим приближениям, поведение оболочки при $\tau > \tau' - 0$ можно проследить в основном приближении с помощью уравнения (38). Действительно, последующие приближения существенны при малых деформациях $h \sim \varepsilon$. Эти деформации будут происходить в оболочке в течение малого отрезка времени порядка $\varepsilon / \dot{h}(\tau')$. Поэтому мы полагаем, что

$$\dot{h}(\tau' + 0) = -\dot{h}(\tau'); \quad h(\tau' + 0) = 0, \tag{39}$$

если $\dot{h}(\tau' - 0) = \dot{h}(\tau')$; $\quad h(\tau - 0) = 0,$

если же $\dot{h}(\tau - 0) = h(\tau - 0) = 0, \qquad (40)$

то $\dot{h}(\tau) = h(\tau) \equiv 0 \qquad$ при $\quad \tau \geqslant \tau' - 0.$

Последние уравнения соответствуют малым (докритическим) деформациям оболочки.

Пусть

$$W\Big|_{t=0} = W_0 \ , \quad \frac{\partial W}{\partial t}\Big|_{t=0} = \dot{W}_0$$

– начальные условия задачи (2) – (4), тогда

$$h\Big|_{\tau=0} = W_0\Big|_{\varepsilon=0} \equiv h_0 \ ; \quad \dot{h}\Big|_{\tau=0} = \frac{d\tau}{dt}\dot{W}_0\Big|_{\varepsilon=0} \equiv \dot{h}_0 \tag{41}$$

– начальные условия задачи (38) – (40).

8. Пусть $\Delta p = \Delta p^\circ \equiv const$, тогда задача (38) – (41) имеет первый интеграл

$$\frac{\dot{h}^2 - \dot{h}_0^2}{2} = \frac{h^3 - h_0^3}{3} - (h - h_0)\Delta p^\circ. \tag{42}$$

Из уравнений (38–40), (42) следует, что если $\Delta p^\circ < 0$ или $h_0 > \sqrt{\Delta p^\circ}$, то при $\tau > 0$ оболочка выпучивается при любых значениях $\dot{h}_0$, т.е. прогиб оболочки h, скорость его изменения и ускорение со временем возрастают (если $\dot{h}_0 < 0$, то выпучивание начинается после некоторого отклонения оболочки до состояния $h = 0$).

При $\dot{h}_0 = 0$, $h_0 = \sqrt{\Delta p^\circ}$ (43)

имеем $\ddot{h} \equiv 0$, т.е. при $\tau > 0$ оболочка будет находиться в состоянии равновесия, которое является неустойчивым, т.к. при сколь угодно малых $\dot{h} > 0$ оболочка будет выпучиваться при $\tau > 0$. Уравнение (43) определяет зависимость прогибов оболочки h_0 от нагрузки P, которую оболочка воспринимает в состоянии равновесия в начальной послекритической стадии. Из (43) при $h_0 = 0$ для верхней критической нагрузки получаем значение $P_* = 4$ (1). Если начальный прогиб оболочки таков, что $0 \le h_0 \le \sqrt{\Delta p^\circ}$, то при достаточно малых $\dot{h}_0$ оболочки будут совершать нелинейные колебания, период и амплитуда которых легко определяются непосредственно из уравнения (42). Если же начальный импульс $\dot{h}_0$ превысит критическое значение

$$\dot{h}_{0*} = (\sqrt{\Delta p^\circ} - h_0)\sqrt{\tfrac{2}{3}(2\sqrt{\Delta p^\circ} + h_0)}\,, \tag{44}$$

то оболочка потеряет устойчивость (она начнет выкручиваться при $\tau > 0$).

9. В случае сферического сегмента, находящегося под действием внешнего давления, $r_* = \Theta_*$. Критический импульс $\dot{h}_{0*} \cdot \frac{d\tau}{dt}$ убывает с уменьшением r_*. Полный импульс, сообщаемый оболочке при $\tau = 0$, будет равен $\pi r_*^2 \dot{h}_{0*} \cdot \frac{d\tau}{dt}$. Он убывает с уменьшением r_*, поэтому потеря устойчивости сферической оболочки при внешнем давлении сопровождается выпучиванием достаточно малой части оболочки.

10. Пусть

$$\dot{h}_0 < \dot{h}_{0*} \ ; \quad \Delta p = \begin{cases} \Delta p^\circ - v\tau & \text{при } 0 \le \tau \le \tau'' \\ \Delta p^\circ - v\tau'' & \text{при } \tau'' < \tau \end{cases} \tag{45}$$

В этом случае уравнение (38) на отрезке $[0,\tau'']$ совпадает с уравнением Пенлеве, имеющим особую точку [8].

Будем рассматривать настолько малые значения скорости нагружения v, чтобы $1/v$ значительно превышало период колебаний системы (38) - (42), (45) при $v = 0$ (амплитуду этих колебаний обозначим через α). Найдем критическое время τ_* такое, что для значений $\tau'' < \tau_*$ оболочка не выпучивается при $\tau > \tau''$, а для $\tau'' > \tau_*$ оболочка выпучивается при $\tau > \tau''$. Значение τ_* находим, воспользовавшись теорией адиабатических инвариантов [9], для систем с "медленным временем".

$$\tau_* = \frac{\Delta p^\circ}{v}\left\{1-\left[\frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{12}\int_0^{\bar{a}}\sqrt{x^3-\bar{a}^3-3(x-\bar{a})}\,dx\right]^{\frac{4}{5}}\right\}.$$

Здесь $\bar{a} = \alpha/\sqrt{\Delta p^\circ}$.

Упругая заделка края

11. Рассмотрим теперь потерю устойчивости с выпучиванием всей оболочки ($z_* = \theta_* = 1$). Из условия упругой заделки края (20) находим

$$th(\beta s_\circ) = -\frac{K}{2\beta}\left[1-\cos\varphi_\circ\,\beta\frac{32}{7}\sqrt{1-\frac{K}{2\beta}}\right]+O(\beta^2).$$

Тогда уравнение движения (36) с точностью до членов порядка h^3 можно записать так $(0 < h > 8K/7)$

$$\ddot{h} = (2h-\tfrac{8}{7}K)^2 - \Delta p. \tag{47}$$

Это уравнение можно получить из (38) с помощью замены

$$h \to 2h - \tfrac{8}{7}K\ ;\quad \tau \to \sqrt{2}\,\tau\,,$$

поэтому все выводы и формулы, полученные в п.п. 7,8,10 переносятся непосредственно и на случай $K \leq 0$ ($K = 0$ соответствует шарнирному опиранию). В случае $K > 0$ уравнение (47) позволяет проследить за динамикой выпучивания и за кривой нагрузка-прогиб (43) при $h > \frac{8}{7}K$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.В.Погорелов. Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек. Изд-во "Наука", М., 1967.

2. Х.М.Муштари, К.З.Галимов. Нелинейная теория упругих оболочек. Таткнигиздат. Казань, 1957.

3. М.И.Вишик, Л.А.Люстерник. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Усп. матем. наук, **12**, вып. 5, 1957.

4. Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Физматгиз, 1958.

5. Л.С.Срубщик, Асимптотический метод определения критических нагрузок пологих строго выпуклых оболочек вращения, ПММ, 36, вып.4, 705–716, 1972.

6. В.И.Бабенко. Неустойчивость безмоментных консервативных оболочек. Труды ФТИНТ. Математическая физика и функциональный анализ, вып. 3, Харьков, 1972.

7. В.И.Бабенко. Геометрическое исследование неустойчивости безмоментных оболочек, Укр. геометр. сб., вып.12. Изд-во ХГУ, Харьков, 1972.

8. Н.П.Еругин. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений, Изд-во "Наука", 1971.

9. Н.Н.Моисеев, Асимптотические методы нелинейной механики, Изд-во "Наука", 1969.

THE ASYMPTOTIC ANALYSIS OF THE POST - CRITICAL BEHAVIOUR OF SHALLOW STRICTLY CONVEX SHELLS OF REVOLUTION

V.I.Babenko

Dynamics of bulging of shallow strictly convex shells of revolution at the initial post-critical stage is investigated. Loss of stability under normal load followed by bulging of both the shell as a whole and its part is considered, the edge of the shell being referred to as elastically fixed in the first case. The shell is supposed to be shallow sufficiently thin, linearly elastic.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1 9 7 3 выпуск 1У

О СУЩЕСТВЕННОЙ САМОСОПРЯЖЕННОСТИ СИММЕТРИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА С ПЛОТНЫМ МНОЖЕСТВОМ КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИХ ВЕКТОРОВ

В.Э. Кацнельсон

Симметрический оператор S с областью определения D_S, действующий в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, называется существенно самосопряженным, если его замыкание $\overline{S}$ является самосопряженным оператором в $\mathfrak{H}$.

Многие задачи функционального анализа и математической физики с необходимостью приводят к исследованию существенной самосопряженности возникающих в этих задачах симметрических операторов.

В терминах неймановской теории расширений симметрических операторов непосредственно может быть получен критерий существенной самосопряженности симметрического оператора. В неймановской теории с каждым симметрическим оператором S связывается зависящее от комплексного параметра λ семейство линейных многообразий $\mathfrak{M}_\lambda$: $\mathfrak{M}_\lambda = (S-\lambda I)\, D_S$ и их ортогональных дополнений $\mathfrak{N}_\lambda : \mathfrak{N}_\lambda = \mathfrak{M}_\lambda^\perp$. Подпространства $\mathfrak{N}_\lambda$ называются дефектными. В каждой из полуплоскостей $Im\lambda > 0$ и $Im\lambda < 0$ размерность подпространства $\mathfrak{N}_\lambda$ не зависит от λ, и таким образом, с каждым симметрическим оператором связывается пара чисел (m,n) : $m = dim\, \mathfrak{N}_\lambda$ при $Im\lambda < 0$, $n = dim\, \mathfrak{N}_\lambda$ при $Im\lambda > 0$. Числа m и n называются индексами дефекта оператора S. Если оператор S полуограничен снизу, то есть $\inf\limits_{\substack{\|x\|=1\\ x\in D_S}} (Sx,x) > -\infty$, то его индексы дефекта равны.

Следующий критерий лежит в основе неймановской теории расширений.

Симметрический оператор существенно самосопряжен тогда и только тогда, когда он имеет индексы дефекта $(0,0)$.

Мы изложим здесь критерии существенной самосопряженности другого типа. В этих критериях утверждается, что симметрический оператор S будет существенно самосопряженным, если существует достаточно богатое множество векторов $x \in D_{S^\infty}$ таких, что последовательность $\{\|S^n x\|\}$ не слишком быстро растет.

Обозначим здесь

$$D_{S^\infty} = \bigcap_{n>0} D_{S^n}\,.$$

Эти критерии применимы иногда в таких ситуациях, когда непосредственное исследование индексов дефекта симметрического оператора неосуществимо.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Вектор $x \in D_{S^\infty}$ называется аналитическим относительно оператора S, если

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left\{\frac{\|S^n x\|}{n!}\right\}^{\frac{1}{n}} < \infty\,.$$

Вектор $x \in \mathcal{D}_{S^\infty}$ называется квазианалитическим относительно оператора S, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| S^n x \|^{-\frac{1}{n}} = \infty. \tag{1}$$

Вектор $x \in \mathcal{D}_{S^\infty}$ называется стильтьесовским относительно оператора S, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| S^n x \|^{-\frac{1}{2n}} = \infty. \tag{2}$$

ТЕОРЕМА 1. Если существует полное в $\mathfrak{H}$ множество векторов, квазианалитических относительно симметрического оператора S, то оператор S существенно самосопряжен.

ТЕОРЕМА 2. Если существует полное в $\mathfrak{H}$ множество векторов, стильтьесовских относительно полуограниченного снизу симметрического оператора S, то оператор S существенно самосопряжен.

Первой теоремой такого типа была теорема Э. Нельсона [1], в которой устанавливалась существенная самосопряженность симметрического оператора, обладающего полным множеством аналитических векторов.

Наши теоремы 1 и 2 не являются новыми. Теорема 1 была установлена Нуссбаумом [2], теорема 2 (или близкие к ней утверждения) приведена в работах [3] - [5]. Во всех работах [2] - [5] используются методы и результаты теории моментов.

Наше доказательство теорем 1 и 2 более непосредственное. Мы доказываем, что в условиях теорем 1 и 2 оператор S имеет индексы дефекта $(0, 0)$, используя лишь традиционный в вопросах квазианалитичности аппарат - теорему единственности Карлемана - Островского, дающую решение "проблемы Ватсона". При этом удается дать единообразное доказательство теорем 1 и 2, и становится прозрачным, почему в предположении полуограниченности S можно разрешить последовательности $\| S^n x \|$ расти, грубо говоря, вдвое быстрее, чем в случае, когда полуограниченность не предполагается.

ПРОБЛЕМА ВАТСОНА. Пусть m_n, $0 \leqslant n < \infty$ некоторая последовательность положительных чисел, а $f(\lambda)$ - функция, аналитическая в полуплоскости $Im(\lambda) > \gamma$ ($\gamma > 0$) - некоторая константа), и удовлетворяющая при некоторых $M < \infty$ и $C < \infty$ условиям

$$|f(\lambda)| \leqslant C \cdot M^n \cdot m_n \cdot \frac{1}{|\lambda|^n} \quad (Im\,\lambda > \gamma, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots). \tag{3}$$

Какой должна быть последовательность $\{m_n\}$, чтобы из условий (3) вытекало, что $f(\lambda) \equiv 0$.

Ответ на этот вопрос формулируется в терминах функции $T(z)$:

$$T(z) = \sup_{0 \leqslant n < \infty} \frac{z^n}{m_n}.$$

ТЕОРЕМА КАРЛЕМАНА-ОСТРОВСКОГО. Пусть для аналитической в полуплоскости $Im\,\lambda > \gamma$ функции $f(\lambda)$ выполняются неравенства (3). Если последовательность $\{m_n\}$ такова, что выполняется условие

$$\int^{\infty} \frac{\ln T(r)}{r^2}\, dr = \infty , \tag{4}$$

то $f(\lambda) \equiv 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если последовательность $\{m_n\}$ удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_n^{-\frac{1}{n}} = \infty , \tag{5}$$

то выполняется условие (4), и значит, $f(\lambda) \equiv 0$.

Если последовательность $\{m_n\}$ логарифмически выпукла, то есть выполняются неравенства

$$m_n^2 \leqslant m_{n-1} \cdot m_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

то условия (4) и (5) эквивалентны.

Доказательство теоремы Карлемана-Островского и связанные с ней факты изложены в [6]. (см. также [7] , § 15.5).

Заметим, что если S – симметрический оператор, а $x \in \mathcal{D}_{S^\infty}$, то последовательность $\| S^n x \|$ логарифмически выпукла. В самом деле,

$$\| S^n x \|^2 = (S^n x , S^n x) = \\ = (S^{n-1} x, S^{n+1} x) \leqslant \| S^{n-1} x \| \cdot \| S^{n+1} x \| .$$

Заметим также, что если λ_0 – любое комплексное число, а $x \in \mathcal{D}_{S^\infty}$, то для некоторого $R < \infty$, зависящего только от x и λ_0 , выполняются неравенства

$$\| (S - \lambda_0 I)^n x \| \leqslant R^n \cdot \| S^n x \| \\ (n = 0, 1, 2, 3, \dots), \tag{6}$$

и таким образом, если x квазианалитический или стильтьесовский вектор относительно оператора S , то он будет являться соответственно квазианалитическим или стильтьесовским вектором относительно оператора $S - \lambda_0 I$. В самом деле,

$$\| (S - \lambda_0 I)^n x \| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \| S^k x \| \cdot | \lambda_0 |^{n-k} . \tag{7}$$

Так как последовательность $\{\| S^k x \|\}_{k=0}^{\infty}$ логарифмически выпукла, то выполняются неравенства

$$\| S^k x \| \leqslant \| S^n x \|^{\frac{k}{n}} \cdot \| x \|^{1-\frac{k}{n}} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots ; \ 1 \leqslant n < \infty). \tag{8}$$

Из (7) и (8) следует, что

$$\| (S - \lambda_0 I)^n x \| \leqslant \left\{ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot |\lambda_0|^{n-k} \cdot \left(\frac{\| x \|}{\| S^n x \|} \right)^{\frac{n-k}{n}} \right\} \times \\ \times \| S^n x \| = \left[1 + |\lambda_0| \cdot \left(\frac{\| x \|}{\| S^n x \|} \right)^{\frac{1}{n}} \right]^n \times \| S^n x \| .$$

Неравенство (8) при $k=1$ означает, что

$$\left(\frac{\|x\|}{\|S^n x\|}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{\|x\|}{\|Sx\|}.$$

Таким образом, неравенства (6) выполняются с

$$R=\left(1+|\lambda_0|\cdot\frac{\|x\|}{\|Sx\|}\right).$$

Приступаем к доказательству наших теорем.

Мы дадим единообразное доказательство теорем 1 и 2. При этом мы будем считать пока, что индексы дефекта оператора равны (в условиях теоремы 2 это выполняется автоматически : S полуограничен; в условиях теоремы 1 от этого дополнительного предположения мы избавимся позже).

Предположим, что оператор S не является существенно самосопряженным. Пусть λ_0 - какое-нибудь число, $Im\,\lambda_0>0$, если мы находимся в условиях теоремы 1, и λ_0 вещественно, $0<\lambda_0<\mu_S$, если мы находимся в условиях теоремы 2.

Здесь и далее

$$\mu_S=\inf_{\substack{\|x\|=1\\ x\in D_S}}(Sx,x)$$

- нижняя грань оператора S, причем мы, не теряя общности, считали, что $\mu_S>1$. (Иначе вместо оператора S мы будем рассматривать оператор $S+aI$ при достаточно большом положительном a).

Так как индексы дефекта оператора S равны, то оператор S допускает самосопряженные расширения. Выберем какое-нибудь самосопряженное расширение $\widetilde{S}$ оператора S, если мы находимся в условиях теоремы 1. Если же мы находимся в условиях теоремы 2, то выберем самосопряженное расширение $\widetilde{S}$ оператора S, имеющее ту же, что и S, нижнюю грань (например, расширение по Фридрихсу). Пусть

$$R(\lambda)=(\widetilde{S}-\lambda I)^{-1}$$

- резольвента оператора $\widetilde{S}$.

Если $x\in D_{S^\infty}$, то при любом n и при любом λ, не принадлежащем спектру $\widetilde{S}$, $\lambda\neq\lambda_0$, имеет место равенство

$$R(\lambda)x=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(\lambda-\lambda_0)^{k+1}}(\widetilde{S}-\lambda_0 I)^k x+$$
$$+\frac{1}{(\lambda-\lambda_0)^n}R(\lambda)(\widetilde{S}-\lambda_0 I)^n x.$$

Так как $\widetilde{S}$ - расширение оператора S, то для любого $x\in D_{S^\infty}$ имеют место равенства

$$R(\lambda)x=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(\lambda-\lambda_0)^{k+1}}(S-\lambda_0 I)^k x+ \tag{9}$$
$$+\frac{1}{(\lambda-\lambda_0)^n}R(\lambda)(S-\lambda_0 I)^n x \qquad (n=0,1,2,\dots).$$

Так как оператор S не является существенно самосопряженным, и его индексы дефекта равны, то дефектное подпространство $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ ненулевое.

Пусть $u \in \mathfrak{N}_{\lambda_0}$, $u \neq 0$. Так как $(S - \lambda_0 I)^k x \in \mathfrak{N}_{\lambda_0}$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$, то из (9) следует, что выполняются равенства

$$(R(\lambda)x, u) = \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)}(x, u) + \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)^n} \times$$
$$\times (R(\lambda)(S - \lambda_0 I)^n x, u) \qquad (x \in \mathcal{D}_{S^\infty},\ n = 1, 2, 3, \dots).$$

Зафиксируем вектор $x \in \mathcal{D}_{S^\infty}$ и рассмотрим функцию

$$f_x(\lambda) = (R(\lambda)x, u) - \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)}(x, u). \tag{10}$$

Функция $f_x(\lambda)$ аналитична вне множества $\sigma \cup \{\lambda_0\}$, где σ – спектр оператора $\tilde{S}$. Так как $\| R(\lambda) \| = \frac{1}{d(\lambda, \sigma)}$, где $d(\lambda, \sigma)$ – расстояние от точки λ до множества σ, то для функции $f_x(\lambda)$ выполняются неравенства

$$|f_x(\lambda)| \leqslant \frac{1}{d(\lambda, \sigma)} \cdot \frac{1}{|\lambda - \lambda_0|^n} \cdot \|u\| \cdot \|(S - \lambda_0 I)^n x\| \tag{11}$$
$$(n = 1, 2, 3, \dots).$$

Пусть оператор S удовлетворяет условиям теоремы 1 (и дополнительному условию равенства индексов дефекта оператора S), и пусть x – квазианалитический относительно оператора S вектор, $x \neq 0$. Пусть $\gamma > \operatorname{Im} \lambda_0$ – фиксировано. Из (6) и (11) следует, что для функции $f_x(\lambda)$ выполняется неравенство

$$|f_x(\lambda)| \leqslant C M^n \|S^n x\| \cdot \frac{1}{|\lambda|^n} \quad (\operatorname{Im} \lambda > \gamma),$$
$$n = 0, 1, 2, \dots),$$

где

$$C = \frac{1}{\gamma}\|u\|, \quad M = \left(1 + |\lambda_0| \frac{\|x\|}{\|Sx\|}\right) \sup_{\operatorname{Im}\lambda > \gamma} \frac{1}{\left|1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right|}.$$

Так как последовательность $\{\|S^n x\|\}$ удовлетворяет условию (1), то из теоремы Карлемана – Островского (точнее, из замечания к ней) следует, что $f_x(\lambda) \equiv 0$. Таким образом, для любого квазианалитического вектора x выполняется равенство

$$(R(\lambda)x, u) = \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)}(x, u) \qquad (\operatorname{Im} \lambda > \gamma).$$

Так как $(R(\lambda)x, u)$ – аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Im} \lambda > 0$ функция, а $\operatorname{Im} \lambda_0 > 0$, то это равенство может выполняться, лишь если $(x, u) = 0$. Но так как по условию теоремы 1 множество всех квазианалитических векторов плотно в $\mathfrak{H}$, то отсюда следует, что $u = 0$. Это противоречит выбору u. Полученное противоречие показывает, что в условиях теоремы 1 (при сделанном дополнительном предположении) S – существенно самосопряженный оператор.

Освободимся теперь от сделанного дополнительного предположения о равенстве индексов дефекта оператора S. С этой целью рассмотрим пространство $H=\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H}$ – внешнюю ортогональную сумму двух экземпляров пространства $\mathfrak{H}$, и оператор $\hat{S}=S\oplus(-S)$ – внешнюю ортогональную сумму операторов S и $-S$. Оператор $\hat{S}$ – симметрический, и если (m,n) – индексы дефекта оператора S, то оператор $\hat{S}$ имеет индексы дефекта $(m+n,\ m+n)$. Если x,y – квазианалитические относительно S векторы, то $x\oplus y$ – квазианалитический относительно $\hat{S}$ вектор. Таким образом, $\hat{S}$ – симметрический оператор в H, обладающий полным в H множеством квазианалитических векторов. По доказанному, $\hat{S}$ существенно самосопряжен, значит, $m+n=0, m=0, n=0$ и S – существенно самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$.

Теорема 1 доказана в полном объеме.

Завершим теперь доказательство теоремы 2.

Функция $f_x(\lambda)$, определенная в (10), аналитична в этой ситуации вне множества $[\mu_S,\infty)\cup\{\lambda_0\}$ и удовлетворяет неравенствам (11). Пусть Π – полуполоса в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $\Pi=\{\lambda:\ \operatorname{Re}\lambda\geq 0,\ |\operatorname{Im}\lambda|\leq 1\}$.

Так как $\sigma\subset[\mu_S,\infty)$, то если $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\Pi$, будем иметь $d(\lambda,\sigma)\geq 1$, и значит, $\|R(\lambda)\|\leq 1$. Поэтому для функции $f_x(\lambda)$ выполняются неравенства

$$|f_x(\lambda)|\leq C\cdot M^n\cdot\|S^n x\|\cdot\frac{1}{|\lambda|^n} \qquad (\lambda\in\mathbb{C}\setminus\Pi,\quad n=0,1,2,\ldots), \tag{12}$$

где

$$C=\|u\|,\quad M=\left(1+|\lambda_0|\cdot\frac{\|x\|}{\|Sx\|}\right)\sup_{\lambda\in\mathbb{C}\setminus\Pi}\frac{1}{\left|1-\frac{\lambda_0}{\lambda}\right|}.$$

Так как неравенства (12) выполняются не в полуплоскости, а на существенно большем множестве $\mathbb{C}\setminus\Pi$, то сделать из (12) заключение о тождественном равенстве нулю функции $f_x(\lambda)$, можно, требуя от вектора x не условия (1), а более слабого условия (2).

В самом деле, введем в рассмотрение функцию $g_x(\lambda)$, определенную в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda>1$,

$$g_x(\lambda)=f_x(\lambda^2).$$

Если $\operatorname{Im}\lambda>1$, то $\lambda^2\in\mathbb{C}\setminus\Pi$. Таким образом, для аналитической в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda>1$. Функции $g_x(\lambda)$ выполняются неравенства

$$|g_x(\lambda)|\leq C\cdot M^n\cdot\|S^n x\|\cdot\frac{1}{|\lambda|^{2n}} \qquad (\operatorname{Im}\lambda>1,\ n=0,1,2,\ldots). \tag{13}$$

Неравенства (13) можно трактовать как неравенства

$$|g_x(\lambda)|\leq C\cdot M^{n}\cdot m_n\cdot\frac{1}{|\lambda|^n} \qquad (\operatorname{Im}\lambda>1,\quad n=0,1,2,\ldots),$$

где

$$m_{2n}=\|S^n x\|,\quad m_{2n+1}=\infty \qquad (n=0,1,2,\ldots).$$

Если x – стильтьесовский относительно S вектор, то выполняется условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_n^{-\frac{1}{n}} = \infty ,$$

и по теореме Карлемана-Островского, $g_x(\lambda) = 0$, а значит, и $f_x(\lambda) \equiv 0$, $(x, u) = 0$. Завершается доказательство теоремы 2 так же, как и доказательство теоремы 1.

Автор считает своим долгом отметить, что в близких ситуациях теорему единственности Карлемана-Островского использовал В.И.Мацаев, однако эти исследования Мацаева нигде не были опубликованы.

ЛИТЕРАТУРА

1. E.Nelson.Analytic vectors,"Ann.of Math.",70(1959),N°3, 572-615.
Русский перевод : "Математика" (Сборник переводов), 1962, 6, № 3, 89-131).

2. A.E.Nussbaum.Quasi-analytic vectors,"Arkiv Math.",1965, 6,N°2,179-191.

3. A.E.Nussbaum.A note on quasi-analytic vectors,"Studia Math.",1969,33,N°3,305-309.

4. D.Masson,W.K.McClary.Classes of C^∞ vectors and essential self-adjointness."J.Funct.Anal.".,1972,10,N°1, 19-32.

5. B.Simon.The theory of semi-analytical vectors.a new proof of a theorem of Masson and McClary,"Indiana Univ.Math. Journ.",1971,20,N°12,1145-1151.

6. С.Мандельбройт. Квазианалитические классы функций, М.-Л., Гостехиздат, 1936.

7. Г.Е.Шилов. Математический анализ. Функции одного переменного. Часть 3. "Наука", Главная редакция физ.мат.литературы, Москва, 1970.

Примечание при корректуре.

Во время нахождения статьи в печати автору стали известны работы M.Hasegava."On quasi-analytic vectors for dissipative operators". Proc.Amer.Math.Soc.,29(1971),81-84.

P.R.Chernoff."Some remarks on quasi-analytic vectors". Trans.of the Amer.Math.Soc.,vol.167 (1972),105-113

ON SUBSTANTIAL SELF-ADJOINT CHARACTER OF THE SYMMETRICAL OPERATOR WITH A COMPACT SET OF QUASIANALYTICAL VECTORS

V.E.Katznelson

A new uniform proof of criteria of substantial self-adjoint character of the symmetrical and asymmetrical semi - bounded operators is proposed.

ВОЗМУЩЕНИЕ ОПЕРАТОРА ХИЛЛА, ИМЕЮЩЕЕ ПЕРВЫЙ МОМЕНТ И ОТЛИЧНЫЙ ОТ НУЛЯ ИНТЕГРАЛ, ВНОСИТ В ДАЛЕКИЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЛАКУНЫ ПО ОДНОМУ ДИСКРЕТНОМУ УРОВНЮ

Ф.С. Рофе-Бекетов

В работе [1] было показано, что в каждой из достаточно далеких спектральных лакун возмущенного оператора Хилла

$$y'' + \{\lambda - q(x) - p(x)\} y = 0, \quad (-\infty < x < \infty), \tag{1}$$

при условии

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)|p(x)|\,dx < \infty \tag{2}$$

может появиться не более двух собственных значений 1) ($p(x)$, $q(x)$ – вещественны, $q(x+1) = q(x) \in \mathcal{L}^1_{loc}$). Затем в [2] при дополнительном требовании $x^2 p(x) \in \mathcal{L}^1(-\infty, \infty)$ было показано, что если

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx \neq 0, \tag{3}$$

то собственные значения появляются в каждой достаточно далекой лакуне, и если при этом $p(x)$ не меняет знака и $|p(x)| < const$, то каждая далекая лакуна содержит в точности одно собственное значение.

Мы докажем теорему, сформулированную в заглавии, при условиях (2),(3). Будем пользоваться обозначениями из [1]. Как отмечено в [1], собственные числа задачи (1) являются корнями определителя Вронского

$$W(\lambda) = E_1(x,\lambda) E_2'(x,\lambda) - E_1'(x,\lambda) E_2(x,\lambda), \tag{4}$$

причем, когда $\varphi(1,\lambda) = 0$, то одно из невозмущенных решений $e_j(x,\lambda)$, а с ним и $E_j(x,\lambda)$ ($j = 1$ или 2), тождественно по x обращается в нуль, и следует взять вместо них решения с другой нормировкой, а потому, как легко видеть, собственные числа задачи (1) в лакуне $(\lambda_k', \lambda_k'')$ ($k = 0, 1, \ldots$) есть те и только те значения λ, при которых

$$\widetilde{W}(\lambda) \overset{def}{=} \frac{1}{\varphi(1,\lambda)} W(\lambda) = 0, \qquad \lambda \in (\lambda_k', \lambda_k''). \tag{5}$$

При этом мы считаем, что $\varphi(1,\lambda_k) \neq 0$, где λ_k – любая из точек λ_k', λ_k''. Этого всегда можно добиться подходящим сразу для всех лакун выбором начала координат на оси x. (Для каждой фиксированной лакуны такая возможность показана в [2]). Тогда

$$\operatorname{sgn} \varphi(1,\lambda_k') = -\operatorname{sgn} \varphi(1,\lambda_k''), \tag{6}$$

как следует из [3, гл.VIII] (см.также [2]). Используя лемму 3 из [1], находим:

$$K_x'(x,t,\lambda) E_j(x,\lambda) - K(x,t,\lambda) E_j'(x,\lambda) = E_j(t,\lambda), \quad (j=1,2), \tag{7}$$

$$(e_1 E_2' - e_1' E_2)(x,\lambda) = W(\lambda) + \int_{-\infty}^{x} p(t) e_1(t,\lambda) E_2(t,\lambda)\,dt, \tag{8}$$

---

1) При достаточной малости интеграла (2) это верно для каждой лакуны.

где обозначено

$$w(\lambda)=(e_1 e_2'-e_1' e_2)(x,\lambda)\ ; \quad w(\lambda_k')=w(\lambda_k'')=0. \tag{9}$$

Отсюда

$$W(\lambda)=(e_1 E_2'-e_1' E_2)(x,\lambda)-\int_x^{\infty}[K(x,t,\lambda)E_2'(x,\lambda)-$$
$$-K_x'(x,t,\lambda)E_2(x,\lambda)]p(t)e_1(t,\lambda)dt=$$
$$=w(\lambda)+\int_{-\infty}^{\infty}p(t)e_1(t,\lambda)E_2(t,\lambda)dt=w(\lambda)+J(\lambda), \tag{10}$$

где

$$J(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x)e_1(x,\lambda)e_2(x,\lambda)dx+$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}p(x)e_1(x,\lambda)dx\int_{-\infty}^{x}K(x,t,\lambda)p(t)e_2(t,\lambda)dt=J_1(\lambda)+J_2(\lambda), \tag{11}$$

Используя асимтотику решений при $\lambda_k \to \infty$ и теорему Римана-Лебега, а также оценку для $K(x,t,\lambda)$ из [1], получаем :

$$J_1(\lambda_k)=\{\max_x|e_1(x,\lambda_k)|^2\}\{\tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}p(x)dx+o(1)\},$$

$$|J_2(\lambda_k)|\leq\frac{C}{\sqrt{|\lambda_k|}}\{\max_x|e_1(x,\lambda_k)|^2\}\{\int_{-\infty}^{\infty}|p(x)|dx\}\{\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)|p(x)|dx\},$$

и поэтому при достаточно больших λ_k, в силу (3), (9)-(11) и (5), (6)

$$sgn\,\widetilde{W}(\lambda_k')=-sgn\,\widetilde{W}(\lambda_k''),\quad(\lambda_k\to\infty). \tag{12}$$

Значит, в каждой далекой лакуне есть собственные числа, но не больше двух (см. [1]). Покажем, что функция $\widetilde{W}(\lambda)$, регулярная в каждой лакуне, может иметь там лишь простые корни. В силу сказанного, это будет означать вместе с (12), что далекие лакуны содержат по одному собственному числу. Стандартным приемом легко показать, что

$$E_1E_2=\frac{d}{dx}(E_1'\dot{E}_2-E_1\dot{E}_2')=\frac{d}{dx}(E_2'\dot{E}_1-E_2\dot{E}_1'),$$

где точка означает дифференцирование по λ. Отсюда, если $\widetilde{W}(\tilde{\lambda})=0$, то есть $\tilde{\lambda}$ - собственное число и решения $E_1(x,\tilde{\lambda}), E_2(x,\tilde{\lambda})$ линейно зависимы, получаем:

$$\int_{-\infty}^{0}+\int_{0}^{\infty}(E_1E_2)(x,\tilde{\lambda})dx=(E_1'\dot{E}_2-E_1\dot{E}_2')(0,\tilde{\lambda})-(E_2'\dot{E}_1-E_2\dot{E}_1')(0,\tilde{\lambda}),$$

то есть

$$\int_{-\infty}^{\infty}(E_1E_2)(x,\tilde{\lambda})dx=-\dot{W}(\tilde{\lambda}),$$

или, меняя нормировку, что не влияет на справедливость равенства

$$\dot{\widetilde{W}}(\tilde{\lambda})=-\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{(E_1E_2)(x,\lambda)}{\varphi(1,\lambda)}\right\}_{\lambda=\tilde{\lambda}}dx\neq 0,$$

и потому корни $\widetilde{W}(\lambda)$ - простые. Теорема доказана.[2)]

Замечание. Если при условиях теоремы $p(x)$ не меняет знака, а интеграл (2) достаточно мал, то в каждой конечной лакуне появляется одно собственное число. (При условии малости второго момента $p(x)$, $sgn\,p(x)=const$, этот результат получен в [2]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф.С.Рофе-Бекетов, ДАН СССР, 156, № 3, 1964.
2. В.А.Желудев, Проблемы матем.физики, вып.2, 1967; вып.4, 1970. Изд-во ЛГУ.
3. Э.А.Коддингтон, Н.Левинсон, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, 1958.

2) Примечание при корректуре. Как сообщил автору М.Ш.Бирман, аналогичный результат иным путем получила Н.Е.Фирсова, работа которой будет опубликована.

УДК 519.53 ОПИСАНИЕ КЛАССА I_0 В ОДНОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ ПОЛУГРУППЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР. И.В.Островский. Математическая физика и функциональный анализ, вып. IУ, 1973, стр. 3–12.

Доказано, что в полугруппе вероятностных мер, рассмотренной Дж.Кингменом (Acta Math. , 109, 1963, 11–53) в связи со сферически симметричным случайным блужданием, класс мер, не имеющих простых делителей, совпадает с классом распределений Рэлея. Как следствие получается, что в полугруппе n -мерных ($n \geqslant 2$) сферически симметричных вероятностных мер с операцией обычной свертки законы Гаусса и только они не имеют простых делителей.

Библиографических ссылок 11.

УДК 519.21 ЗАМЕЧАНИЕ ОБ АРГУМЕНТЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ. И.В.Островский, П.М.Флексер, Математическая физика и функциональный анализ, вып, IУ, 1973, стр. 13–14.

Построен пример характеристической (в теоретико-вероятностном смысле) функции $\varphi(t)$, не имеющей корней на интервале (-1,1) и такой, что для непрерывной на (-1,1) ветви $\arg \varphi(t)$ выполняется $\int_{-1}^{1} |\arg \varphi(t)|\, dt = \infty$.

Библиографических ссылок 2.

УДК 518.3 ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЯХ С РАСХОДЯЩИМСЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ К НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ. Г.Р.Белицкий . Математическая физика и функциональный анализ, вып. IУ, 1973, стр. 15–17.

Установлено, что одномерные аналитические ростки диффеоморфизмов с расходящимся преобразованием к линейной форме порождают (в групповом смысле) группу всех аналитических ростков с единичной по модулю линейной частью.

Библиографических ссылок 2.

УДК 517.55 ОБ АППРОКСИМАЦИИ ПЛЮРИСУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ. П.З.Агранович. Математическая физика и функциональный анализ, вып. IУ, 1973, стр. 18–22.

Известно, что плюрисубгармоническую функцию на каждом внутреннем компакте ее области определения можно аппроксимировать монотонно убывающей последовательностью плюрисубгармонических функций класса C^∞ .

В этой статье решается вопрос: когда такого рода аппроксимация возможна во всей области, и доказана следующая теорема.

Теорема. Всякая плюрисубгармоническая на псевдовыпуклом открытом множестве Ω в $\mathbb{C}^n$ функция $u(z)$ есть предел монотонно убывающей последовательности плюрисубгармонических функций из $C^\infty(\Omega)$.

Библиографических ссылок 2.

УДК 513.88; 517.51 О ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЯХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА В ПРОСТРАНСТВЕ С ВЕСОМ. Ю.И.Любарский. Математическая физика и функциональный анализ, вып. IУ, 1973, стр. 23–36.

В работе строится теория почти-периодических функций для пространства $B_{\mathcal{D}}$, состоящего из всех целых функций $f(z)$ экспоненциального типа таких, что

$$\|f\|_{B_{\mathcal{D}}} = \sup_{z \in \mathbb{C}} \{ |f(z)| e^{-|z| h_{\mathcal{D}}(\arg z)} \} < \infty,$$

где $\mathcal{D}$ – выпуклый компакт в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $h_{\mathcal{D}}(\theta)$ – его опорная функция.

Библиографических ссылок 3.

УДК 517.63 **ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ ДЛЯ АБСТРАКТНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ.** Г.Н.Гестрин. Математическая физика и функциональный анализ, вып. 1У, 1973, стр. 37–51.

В работе развит метод построения устойчивых разностных схем для задачи Коши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -Au \; ; \quad u\Big|_{t=+0} = \varphi \; ; \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=+0} = \psi \, , \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

где A – неограниченный существенно самосопряженный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве, $(A>0)$. Указанная конечно-разностная схема имеет вид :

$$u_{k+1} = S_n^{(1)} u_k + S_n^{(2)} v_k \qquad u_0 = \varphi \; ; \quad v_0 = \psi$$

$$v_{k+1} = -A_n S_n^{(2)} u_k + S_n^{(1)} v_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Здесь A_n – есть последовательность ограниченных самосопряженных положительных операторов, аппроксимирующая оператор A, $S_n^{(1)}$ и $S_n^{(2)}$ определяются формулами

$$S_n^{(1)} = \sum_{p=0}^{N} (-1)^p \frac{A_n^p \tau^{2p}}{(2p)!} \; ; \quad S_n^{(2)} = \sum_{p=0}^{N} (-1)^p \frac{A_n^p \tau^{2p+1}}{(2p+1)!} \; ; \quad \tau = \frac{T}{n} \, ,$$

N – произвольное нечетное число. Устанавливается сходимость элементов к решению задачи.

Библиографических ссылок 3.

УДК 517.946 **НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ ГРИНА ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ.** Г.В.Сузиков. Математическая физика и функциональный анализ, вып. 1У, 1973, стр. 52–63.

В работе изучаются свойства решений первой краевой задачи для самосопряженного эллиптического уравнения второго порядка в области, граница которой состоит из конечного числа незамкнутых гладких поверхностей. Исследовано поведение производных функций Грина в окрестности края поверхности и найдено представление для функции Грина.

Библиографических ссылок 5.

УДК 517.946 **УСРЕДНЕННОЕ ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА.** Г.В.Сузиков. Математическая физика и функциональный анализ, вып. 1У, 1973, стр. 64–73.

В работе исследована одна смешанная краевая задача для эллиптического самосопряженного уравнения второго порядка. Выведены усредненные граничные условия для предельных решений.

Библиографических ссылок 7.

УДК 517.946 **КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В ОБЛАСТЯХ С МЕЛКОЗЕРНИСТОЙ ГРАНИЦЕЙ.** В.Н.Фенченко. Математическая физика и функциональный анализ, вып. 1У, 1973, стр. 74–92.

Рассматривается электромагнитное поле в среде, содержащей большое число мелких проводящих включений $F_i^{(N)}$. Для оценки влияния включений на поле вводятся тензоры

$$P_{j,k}^{(i,N)} = \delta_{j,k}\tau_i^{(N)} + p_{j,k}^{(i,N)},$$

$$M_{j,k}^{(i,N)} = \delta_{j,k}\tau_i^{(N)} + m_{j,k}^{(i,N)},$$

где $\tau_i^{(N)}$ – объем включения, а $p_{j,k}^{(i,N)}$, $m_{j,k}^{(i,N)}$ – тензоры его поляризации и виртуальной массы.

Показано, что в случае, когда число включений возрастает, а их суммарный объем $\tau^{(N)}\to 0$ поле $\vec{E}^{(N)}(x)$, $\vec{H}^{(N)}(x)$ может быть представлено в виде :

$$\vec{E}^{(N)}(x) = \vec{E}^{(0)}(x) + \tau^{(N)}\vec{V}_E(x) + o(\tau^{(N)}),$$

$$\vec{H}^{(N)}(x) = \vec{H}^{(0)}(x) + \tau^{(N)}\vec{V}_H(x) + o(\tau^{(N)}).$$

Здесь $\vec{E}^{(0)}(x)$, $\vec{H}^{(0)}(x)$ – поле в однородной среде, а для функций $\vec{V}_E(x)$, $\vec{V}_H(x)$ дано явное выражение.

Из полученного представления следует, что среда с большим числом проводящих включений может рассматриваться как сплошная с иными параметрами.

Библиограчиеских ссылок 7.

УДК 517.94

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ КАЧЕСТВЕННОГО СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА. А.Г.Брусенцев.

Математическая физика и функциональный анализ, вып. 1У, 1973, стр. 93–116.

В работе дается обоснование принципа расщепления для эллиптических систем произвольного порядка и с помощью этого принципа в комбинации с методом циклических априорных оценок устанавливаются некоторые достаточные условия отсутствия предельного спектра у эллиптических систем в $\mathcal{L}_2(R^n)$, в частности, у одномерной и трехмерной систем Дирака, а также у операции $(-\Delta)^m + Q(x)$ с комплекснозначным $Q(x)$. Кроме того, получены достаточные условия совпадения минимального и максимального операторов, порожденных эллиптической системой в $\mathcal{L}_2(R^n)$.

Библиографических ссылок 27.

УДК 517.94

О ВОЗМУЩЕНИИ СПЕКТРА САМОСОПРЯЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ МАТРИЧНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ. В.И. Храбустовский.

Математическая физика и функциональный анализ, вып. 1У, 1973, стр. 117–138.

Для непериодических возмущений самосопряженных операторов L и T в $L_n^2(-\infty,\infty)$ с периодическими (периода 1) матричными коэффициентами устанавливаются достаточные признаки конечности либо бесконечности числа дискретных уровней, возникающих в полубесконечной спектральной лакуне оператора

$$Ly = -(P(t)y' - R(t)y)' - R^*(t)y' + Q(t)y \quad (P(t)>0)$$

и в каждой из спектральных лакун оператора

$$Ty = \mathcal{J} y' + H(t) y \qquad (-\mathcal{J} = \mathcal{J}^* = \mathcal{J}^{-1}).$$

Строятся невырожденные самосопряженные матричные Флоке-решения уравнения $Ly = \lambda y$ при $\lambda \leq$ нижней грани оператора L.

Библиографических ссылок 18.

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПОСЛЕКРИТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ПОЛОГИХ СТРОГО ВЫПУКЛЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ. В.И.Бабенко. Математическая физика и функциональный анализ, вып. 1У, 1973, стр. 139-150.

Изучается динамика выпучивания пологих строго выпуклых оболочек вращения в начальной послекритической стадии. Рассматривается потеря устойчивости оболочки, происходящая под действием нормальной нагрузки и сопровождающаяся выпучиванием как всей оболочки, так и ее части, причем в первом случае считается, что край оболочки упруго заделан. Предполагается, что оболочка односвязная, достаточно тонкая, линейно упругая.

Библиографических ссылок 9.

УДК 513.88

О СУЩЕСТВЕННОЙ САМОСОПРЯЖЕННОСТИ СИММЕТРИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА С ПЛОТНЫМ МНОЖЕСТВОМ КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИХ ВЕКТОРОВ. В.Э.Кацнельсон. Математическая физика и функциональный анализ, вып. 1У, 1973, стр. 151-157.

Приводится новое единообразное доказательство существенной самосопряженности симметрического и симметрического полуограниченного операторов, обладающих плотным множеством квазианалитических, соответственно, стильтьесовских векторов. Доказательство проводится сведением к теореме единственности Т.Карлемана - А.Островского, дающей условие разрешимости проблемы Г.Ватсона.

Библиографических ссылок 7.

УДК 517.94

ВОЗМУЩЕНИЕ ОПЕРАТОРА ХИЛЛА, ИМЕЮЩЕЕ ПЕРВЫЙ МОМЕНТ И ОТЛИЧНЫЙ ОТ НУЛЯ ИНТЕГРАЛ ВНОСИТ В ДАЛЕКИЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЛАКУНЫ ПО ОДНОМУ ДИСКРЕТНОМУ УРОВНЮ. Ф.С.Рофе-Бекетов. Математическая физика и функциональный анализ, вып. 1У, 1973, стр. 158-159.

Доказана теорема, сформулированная в заглавии, продолжающая исследования автора и В.А.Желудева.

Библиографических ссылок 3.