Теория операторов, субгармонические функции

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
Физико-технический институт низких температур

ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ, СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Сборник научных трудов

Киев Наукова думка 1991

УДК 517+519+531.19

Теория операторов, субгармонические функции : Сб. науч. тр./ АН УССР. Физ.-техн. ин-т низ. температур; Редкол. : Марченко В.А. (отв. ред.) и др. - Киев : Наук. думка, 1991. - 176 с. - ISBN 5-12-002405-X.

В сборнике помещены статьи, посвященные современным вопросам математической физики и теории функций: обратным задачам теории рассеяния, краевым задачам с мелкозернистой границей, асимптотическому поведению функций, субгармонических в конусе, распределению нулей целых функций одной и нескольких переменных, приложениям теории функций к теории вероятностей.

Для специалистов в области математической физики и теории функций.

Утверждено к печати ученым советом Физико-технического института низких температур АН УССР

Редакция физики и кибернетики

Редактор В.Я.Пекуровский

Т $\frac{1604010000-431}{М221(04)-91}$ 234-91

ISBN 5-12-002405-X

СОДЕРЖАНИЕ

УДК 517.946

И.А.Андерс, В.П.Котляров

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРА $\partial_x^2 + 2u\partial_x$

Получены необходимые и достаточные условия, характеризующие данные рассеяния для операторов $\partial_x^2 - v$, $\partial_x^2 + 2u\partial_x$ в классах функций, стремящихся к различным постоянным пределам при $x \to \pm\infty$.

В работе рассматривается прямая и обратная задачи для дифференциального уравнения

$$\psi'' + 2u\psi' + k^2\psi = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

с вещественной, абсолютно непрерывной функцией $u(x)$, которая удовлетворяет условиям

$$\int_0^\infty |u(x) - c_1|\,dx + \int_{-\infty}^0 |u(x) - c_2|\,dx < \infty, \tag{2}$$

$$\int_0^\infty (1 + x)|v(x) - c_1^2|\,dx + \int_{-\infty}^0 (1+|x|)|v(x) - c_2^2|\,dx < \infty, \tag{3}$$

где $v(x) = u_x'(x) + u^2(x)$. Для определенности будем считать, что $0 \le c_2^2 \le c_1^2$. Получены условия на данные рассеяния, необходимые и достаточные для восстановления функции $u(x)$ в классе абсолютно непрерывных функций, удовлетворяющих условиям суммируемости (2) и (3). Найдены формулы, позволяющие восстанавливать $u(x)$ по данным рассеяния с помощью уравнений Марченко. Оказалось, что имеет место неединственность восстановления $u(x)$ по этим данным.

Замечание. Если одно из чисел c_1 или c_2 равно нулю, то $u(x)$ определяется данными рассеяния однозначно. При этом, если $c_1 = c_2 = 0$, то коэффициент отражения при $k = 0$ должен удовлетворять дополнительному условию $-1 < r(0) < 1$.

Задача рассеяния для уравнения (1) при условиях (2) и (3)

ISBN 5-12-002405-X. Теория операторов, субгармонические функции. Киев, 1991.

тесно связана с задачей рассеяния для уравнения Шредингера на всей оси

$$f'' + (k^2 - v(x))f = 0 \tag{4}$$

с потенциалом $v(x)$, подчиненным условию (3). Такая задача для случая $0 = c_2^2 \neq c_1^2$ была изучена в работе [1]. Равенство нулю одной из постоянных для уравнения (4) не нарушает общности. Однако для уравнения (1) это не так. Поэтому будем предполагать, что постоянные c_1 и c_2, вообще говоря, отличны от нуля.

Пусть Γ_j – риманова поверхность функции $k_j(k) = \sqrt{k^2 - c_j^2}$, Γ_j^+ – ее верхний лист, $\partial\Gamma_j^+$ – граница Γ_j^+, состоящая из точек верхнего и нижнего разрезов k-плоскости по лучам $|k| \geq |c_j|$ ($j = 1, 2$). При $k \in \partial\Gamma_j^+$ определим решения Йоста уравнений (1) и (4), положив

$$\lim_{x \to \pm\infty} \varphi_j(x,k) e^{c_j x \mp i k_j(k) x} = 1,$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f_j(x,k) e^{\mp i k_j(k) x} = 1,$$

где знаки "+" и "-" соответствуют значениям $j = 1, 2$. Для функций $f_j(x,k)$ справедливы представления через операторы преобразования

$$f_j(x,k) = e^{\pm i k_j(k) x} \pm \int_x^{\pm\infty} B_j(x,y) e^{\pm i k_j(k) y}\, dy, \tag{5}$$

где, как известно [1, 2], $B_j(x,y)$ – решение задачи Гурса

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2}{\partial x^2} B_j(x,y) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} B_j(x,y) + v(x) B_j(x,y) = 0, \\ B_j(x,x) = \pm \frac{1}{2} \int_x^{\pm\infty} [v(y) - c_j^2]\, dy. \end{gathered} \tag{6}$$

Отсюда вытекает, что решения $\varphi_j(x,k)$ уравнения (1) представимы в виде

$$\varphi_j(x,k) = \omega_j(x) f_j(x,k), \tag{7}$$

где $\omega_j(x) = \exp\left[-c_j x + \int_x^{\pm\infty} (u(\xi) - c_j)\, d\xi\right]$. Это легко проверяется прямой подстановкой (7) в (1).

Введем коэффициенты перехода. Поскольку решения Йоста $\varphi_j(x,k)$, $\bar{\varphi}_j(x,k) = \varphi_j(x,-k)$ и $f_j(x,k)$, $\bar{f}_j(x,k) = f_j(x,-k)$ при $k \in \partial\Gamma_j^+$, $k \neq \pm|c_j|$, линейно независимы, то можно записать

$$\begin{aligned} \varphi_2(x,k) &= \hat{a}_1(k)\bar{\varphi}_1(x,k) + \hat{b}_1(k)\varphi_1(x,k), \\ \varphi_1(x,k) &= \hat{a}_2(k)\bar{\varphi}_2(x,k) + \hat{b}_2(k)\varphi_2(x,k), \end{aligned} \tag{8}$$

$$f_2(x,k)=a_1(k)\bar f_1(x,k)+b_1(k)f_1(x,k),$$
$$f_1(x,k)=a_2(k)\bar f_2(x,k)+b_2(k)f_2(x,k)$$

Из этих равенств имеем

$$\begin{aligned}\hat a_1(k)&=\omega_0 a_1(k)=\omega_0 W[f_2,f_1]/2ik_1,\\ \hat b_1(k)&=\omega_0 b_1(k)=\omega_0 W[\bar f_1,f_2]/2ik_1,\\ \hat a_2(k)&=\omega_0^{-1}a_2(k)=\omega_0^{-1}W[f_2,f_1]/2ik_2,\\ \hat b_2(k)&=\omega_0^{-1}b_2(k)=\omega_0^{-1}W[f_1,f_2]/2ik_2,\end{aligned}\tag{9}$$

где $\omega_0=exp\,[\int\limits_{-\infty}^{0}(c_2-u)d\xi+\int\limits_0^{\infty}(c_1-u)d\xi]$; $W[f_1,f_2]$ – вронскиан функций $f_1(x,k)$ и $f_2(x,k)$. Поскольку в силу (2) $0<\omega_0<\infty$, то коэффициенты отражения задач (1) и (4), как это следует из (9), совпадают, т.е.

$$\hat r_j(k)=\hat b_j(k)/\hat a_j(k)=b_j(k)/a_j(k)=r_j(k).$$

Согласно (7) функции $\psi_j(x,k)$ допускают аналитическое продолжение на верхний лист Γ_j^+ поверхности Γ_j, так как такое продолжение имеют функции $f_j(x,k)$, а $\omega_j(x)$ не зависит от k. Поэтому при комплексных k или из интервала $(-|c_2|,\ |c_2|)$ единственным решением уравнения (1), квадратично интегрируемым на левой полуоси с весом $\rho(x)=exp[2\int\limits_0^x u(\xi)d\xi]$, является функция $\psi_2(x,k)$, а квадратично интегрируемым решением с весом $\rho(x)$ на правой полуоси – $\psi_1(x,k)$. Следовательно, задача рассеяния для уравнения (1) имеет дискретный спектр при тех k_n, для которых $W[\psi_1,\psi_2]=0$, т.е. в нулях функций $a_j(k)$.

Кроме того, легко показать, что задача (1) не может иметь комплексных собственных значений. Поэтому дискретный спектр задачи (1), если он есть, располагается в интервале $(-|c_2|,\ |c_2|)$ и заведомо отсутствует, если $c_2=0$. Для собственных функций дискретного спектра

$$\psi_1(x,k_n)=\hat c_n^{(1)}\psi_2(x,k_n),\quad \psi_2(x,k_n)=\hat c_n^{(2)}\psi_1(x,k_n),\quad \hat c_n^{(1)}\hat c_n^{(2)}=1\ .$$

Те же числа k_n являются собственными значениями задачи (4), причем для квадратично интегрируемых собственных функций имеют место аналогичные равенства

$$f_1(x,k_n)=c_n^{(1)}f_2(x,k_n),\quad f_2(x,k_n)=c_n^{(2)}f_1(x,k_n),$$
$$c_n^{(1)}c_n^{(2)}=1,\qquad \hat c_n^{(1)}=\omega_0^{-1}c_n^{(1)},\quad \hat c_n^{(2)}=\omega_0 c_n^{(2)}\ .$$

Для обратных величин норм собственных функций легко устанавливаются равенства

$$(\hat{m}_n^{(j)})^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_j(x,k_n)|^2 |\rho(x) dx = \hat{c}_n^{(j)} \frac{ik_j(k_n)}{k_n} \dot{\hat{a}}_j(k_n),$$

$$(m_n^{(j)})^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} |f_j(x,k_n)|^2 dx = c_n^{(j)} \frac{ik_j(k_n)}{k_n} \dot{a}_j(k_n),$$

где точка означает дифференцирование по k. Отсюда следует, что ненулевые собственные значения обеих задач (1) и (4) являются простыми, а их нормировочные коэффициенты совпадают $(\hat{m}_n^{(j)} = m_n^{(j)})$. Нулевое собственное значение, если оно есть, является двукратным. Соответствующий нормировочный коэффициент вычисляется предельным переходом и равен $ic_1^{(j)}k_j(0)\ddot{a}_2(0)$. Кроме того, отметим, что симметрично расположенным собственным значениям $k_n = \pm\nu_n$, $|\nu_n| < |c_2|$ отвечают равные нормировочные коэффициенты.

Таким образом, набор величин $\{r_j(k), k_n, m_n^{(j)}\}$ $(j=1,2)$ представляет собой правые и левые данные рассеяния для задач (1) и (4). Иначе говоря, при выполнении условий (2) и (3) данные рассеяния для уравнений (I) и (4) совпадают. Охарактеризуем подробнее свойства этих данных. Легко устанавливаются следующие свойства коэффициентов перехода:

$$a_j(-k) = \bar{a}_j(k), \quad a_j(k-i0) = \bar{a}_j(k+i0), \quad |k| > |c_j|, \quad Im\, k = 0,$$

$$b_j(-k) = \bar{b}_j(k), \quad b_j(k-i0) = \bar{b}_j(k+i0),$$

$$k_1(k)a_1(k) = k_2(k)a_2(k), \quad k_1(k)b_1(k) = -k_2(-k)b_2(-k), \quad |k| > |c_1|,$$

$$a_j(-k) = \bar{a}_j(k) = a_j(k), \quad |k| < |c_2|, \quad Im\, k = 0, \tag{10}$$

$$b_2(k) = \bar{a}_2(k), \quad |c_2| < |k| < |c_1|, \tag{11}$$

$$\frac{k_1(k)}{k_2(k)} |a_1(k)|^2 = 1 + \frac{k_1(k)}{k_2(k)} |b_1(k)|^2 = \frac{k_2(k)}{k_1(k)} |a_2(k)|^2 = 1 + \frac{k_2(k)}{k_1(k)} |b_2(k)|^2, \tag{12}$$

$$a_j(k) = 1 + O(|k|^{-1}), \quad |k| \to \infty, \quad k \in \Gamma_j^+,$$

$$b_j(k) = O(|k|^{-1}), \quad k \to \pm\infty, \quad k \in \partial\Gamma_j^+,$$

$$a_j(k) = \frac{\alpha_j}{k_j(k)} + O(1), \quad b_j(k) = -\frac{\alpha_j}{k_j(k)} + O(1), \; k \to \pm|c_j|, \quad \alpha_j = \left.\frac{W[t_2, f_1]}{2i}\right|_{k=\pm|c_j|}.$$

Из (8) вытекает более тонкая характеристика поведения функций $a_j(k)$ и $b_j(k)$ при $k \to \pm|c_j|$:

$$\lim_{k_j(k)\to 0} k_j(k)a_j(k)[r_j(k)+1] = 0. \tag{13}$$

Отсюда следует, что в случае линейной независимости решений Йоста функции $r_j(k)$ непрерывны при всех $k \in \partial\Gamma_j^+$ и $r_j(\pm|c_j|) = -1$.

Ниже будет доказано, что $r_j(k)$ непрерывны во всех случаях и $r_j(\pm|c_j|)=-1$, если хотя бы одно из чисел c_j отлично от нуля (при $c_1=c_2=0$ функция $r_j(0)$ не обязательно равна -1). Поэтому функция $k_2(k)a_2(k)$ аналитична на листе Γ_2^+ и непрерывна вплоть до его границы $\partial\Gamma_2^+$. Как и в [2], можно показать, что функции $a_j(k)$ имеют лишь конечное число нулей, простота которых установлена выше. В силу (10) эти нули $k_n=\pm\vartheta_n$, где $|\vartheta_n|<|c_2|$, $n=\overline{1,N}$. Функции $a_j(k)\neq 0$ при $k\in\partial\Gamma_j^+$, что вытекает из (12) при $k\in\partial\Gamma_1^+$ и из (11) при $|c_2|<k\leq|c_1|$. В самом деле, если $a_2(k_0)=0$ при $|c_2|<|k_0|\leq|c_1|$, то и $b_2(k_0)=\bar{a}_2(k_0)=0$. Следовательно, $f_1(x,k_0)\equiv 0$, что невозможно. Отсюда, в частности, следует, что решения $f_j(x,k)$ при $k=\pm|c_1|$ являются линейно независимыми.

Для дальнейшего исследования свойств данных рассеяния, а также для решения обратной задачи необходимо получить уравнения Марченко из равенств (8) обычным образом с использованием формул ортогональности

$$\int_{\partial\Gamma_2^+} \exp\left[-ik_2(k)x\right]\frac{k\,dk}{k_2(k)}=4\pi\delta(x),\quad \int_{\partial\Gamma_2^+} \exp\left[-ik_2(k)x\right]\frac{dk}{k_2(k)}=0.$$

Имеем

$$B_1(x,z)+F_1(x+z)+\int_x^{\infty} B_1(x,y)F_1(y+z)\,dy=0,\quad x<z<\infty, \tag{14}$$

$$B_2(x,z)+F_2(x+z)+\int_{-\infty}^{x} B_2(x,y)F_2(y+z)\,dy=0,\quad -\infty<z<x, \tag{15}$$

где

$$F_1(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r_1\left(\sqrt{\mu^2+c_1^2}\right)e^{i\mu x}d\mu+\frac{1}{2\pi}\int_{|c_2|}^{|c_1|}\frac{e^{ik_1(k)x}\,k\,dk}{k_2(k)|a_2(k)|^2}+$$
$$+\sum_{n=1}^{N} m_n^{(1)}e^{ik_1(\vartheta_n)x};$$

$$F_2(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r_2\left(\sqrt{\mu^2+c_2^2}\right)e^{-i\mu x}d\mu+\sum_{n=1}^{N} m_n^{(2)}e^{-ik_2(\vartheta_n)x}.$$

Из уравнений (14) и (15), как и в [2], получим, что функции $F_j(x)$ абсолютно непрерывны и для любого $a>-\infty$

$$\int_a^{\infty}|F_j(\pm x)|\,dx<\infty,\quad \int_a^{\infty}(1+|x|)|F_j'(\pm x)|\,dx<\infty.$$

Ясно, что этим же свойством обладают и функции

$$R_j(x)=F_j(x)-\sum_{n=1}^{N} m_n^{(j)}e^{\pm ik_j(\vartheta_n)x}.$$

Докажем теперь, что $r_2(k)$ непрерывна при $k\in\partial\Gamma_2^+$ и в случае линейной зависимости функций $f_j(x,k)$ при $k=\pm|c_2|$. Здесь возможны два случая: а) $f_2(0,\ \pm|c_2|)=f_1(0,\ \pm|c_2|)=0$ и б) существует такое m, что $f_j'(0,\pm|c_2|)=mf_j(0,\pm|c_2|)$, $j=1,2$. Аналогично [3] можно показать, что в случае а)

$$2ik_2(k)a_2(k)=g_1(k)f_2'(0,k)-ik_2(k)\int_{-\infty}^{0}A^-(t)e^{-ik_2t}dt\cdot f_1'(0,k),$$

$$2ik_2(k)b_2(k)=g_1(k)\bar f_2'(0,k)+ik_2(k)\int_{-\infty}^{0}A^-(t)e^{ik_2t}dt\cdot f_1'(0,k),$$

где

$$A^-(t)=\int_{-\infty}^{t}B_2(0,y)dy\ ;\ g_1(k)=\int_0^\infty B_1(0,y)\left[e^{ik_1y}-e^{-\sqrt{c_1^2-c_2^2}y}\right]dy\ ,$$

и в случае б)

$$2ik_2(k)a_2(k)=ik_2(k)\left[-1+\int_{-\infty}^{0}\varphi(t)e^{-ik_2t}dt\right]f_1(0,k)-g_2(k)f_2(0,k),$$

$$2ik_2(k)b_2(k)=ik_2(k)\left[1-\int_{-\infty}^{0}\varphi(t)e^{ik_2t}dt\right]f_1(0,k)+g_2(k)\bar f_2(0,k),$$

где
$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{t}\left[B_{2x}'(0,y)-mB_2(0,y)\right]dy;$$

$$g_2(k)=ik_1+\sqrt{c_1^2-c_2^2}+\int_0^\infty\left[B_{1x}'(0,y)-mB_1(0,y)\right]\left[e^{ik_1y}-e^{-\sqrt{c_1^2-c_2^2}\,y}\right]dy\ .$$

Из этих формул следует $\lim\limits_{k_2(k)\to0}k_2(k)b_2(k)/k_2(k)a_2(k)=-1$,

откуда приходим к выводу, что функция $r_2(k)$ непрерывна при $k=\pm|c_2|$ и $r_2(\pm|c_2|)=-1$. Таким образом, если $c_1\neq0$ ($c_2^2\geq0$), то условие (13) можно заменить требованием непрерывности $r_j(k)$ при $k\in\partial\Gamma_j^+$ и $r_j(\pm|c_j|)=-1$. Если $c_1=c_2=0$, то, как показано в [3], $r_j(k)$ непрерывны при $k\in R$, но $r(0)=-1$ в случае линейной независимости решений $f_j(x,k)$ и $-1<r(0)<1$ – в виртуальном случае [2].

Переходя к вопросу о восстановлении функций $v(x)$ и $u(x)$, заметим, что набор данных рассеяния $\{r_j(k),\ \pm\partial_n,\ m_n^{(j)},\ n=\overline{1,N}\}$ является переполненным. Покажем, что при принятом условии $0\leq c_2^2<c_1^2$ минимальным является набор левых данных рассеяния

$$\left\{r_2(k),\ k\in\partial\Gamma_2^+,\ \ k_n=\pm\partial_n,\ |\partial_n|<|c_1|,\ m_n^{(2)}>0,\ n=\overline{1,N}\right\}\ ,\qquad(16)$$

т.е. по набору величин (16) можно восстановить все остальные величины, а именно $a_j(k)$, $b_j(k)$, $m_n^{(j)}$ и, следовательно, $r_1(k)$.

Восстановление всего набора данных рассеяния по правым данным $\{r_1(k),\ k_n,\ m_n^{(1)}\}$ возможно лишь в случае $c_1^2 = c_2^2$. Итак, пусть задан набор данных (16) и $k \in \Gamma_2^+$. Положим $z(k) = k + k_2(k)$. Соответствие $k \to z$ осуществляет конформное отображение Γ_2^+ на верхнюю полуплоскость z. Обратное отображение имеет вид $k(z) = \frac{1}{2}(z + c_2^2/z)$. Рассмотрим при $Im\, z \geq 0$ функцию

$$h(z) = \ln a_2(k(z)) \prod_{n=1}^{N} \frac{z-\bar{z}_n}{z-z_n} \frac{z+z_n}{z+\bar{z}_n},\quad z_n = \nu_n + i\sqrt{c_2^2 - \nu_n^2}, \tag{17}$$

которая аналитична в области $Im\, z > 0$, допускает оценку вида $h(z) = O(|z|^{-1})$ при $z \to 0$ и $h(\lambda) = h_1(\lambda) + i h_2(\lambda)$, где согласно (11), (12), (17)

$$h_1(\lambda) = -\frac{1}{2} \ln\left[\frac{k_2(k(\lambda))}{k_1(k(\lambda))}\left(1 - |r_2(k(\lambda))|^2\right)\right],\quad \lambda \in \sigma_R; \tag{18}$$

$$h_2(\lambda) = -\frac{1}{2} \arg r_2(k(\lambda)) + 2\sum_{n=1}^{N} \arg \frac{\lambda + z_n}{\lambda - z_n},\quad \lambda \in \sigma_I, \tag{19}$$

а множества σ_R и σ_I имеют вид

$$\sigma_R = \{\lambda : Im\,\lambda = 0,\ |\lambda| < c_-,\ |\lambda| > c_+\},\quad c_\pm = |c_1| \pm \sqrt{c_1^2 - c_2^2};$$
$$\sigma_I = \{\lambda : Im\,\lambda = 0,\ c_- < |\lambda| < c_+\}.$$

Поскольку $k_1(k)\,a_1(k) = k_2(k)\,a_2(k)$, то функция $h(z)$ ограничена в окрестности точек $\pm c_\pm$. Поэтому к ней применима формула Келдыша – Седова [4]. В результате получим

$$a_2(k) = \prod_{n=1}^{N} \frac{(k+k_2(k)-z_n)(k+k_2(k)+\bar{z}_n)}{(k+k_2(k)-\bar{z}_n)(k+k_2(k)+z_n)} \exp[h(z(k))], \tag{20}$$

где $\quad z(k) = k + k_2(k) = k + \sqrt{k^2 - c_2^2},\qquad z_n = \nu_n + i\sqrt{c_2^2 - \nu_n^2};$

$$h(z) = \frac{1}{\pi i g(z)}\left[\int_{\sigma_R} \frac{h_1(t) g(t)}{t - z} + i\int_{\sigma_I} \frac{h_2(t) g(t)}{t - z}\, dt\right];$$
$$g(z) = [(z + c_-)(z - c_+)]^{1/2}\,[(z + c_+)(z - c_-)]^{-1/2},$$

а функции $h_1(t)$ и $h_2(t)$ определены в (18), (19). Остальные данные рассеяния определяются по формулам

$$b_2(k) = r_2(k)\,a_2(k),$$
$$a_1(k) = k_2(k)\,a_2(k)/k_1(k),$$
$$b_1(k) = k_2(-k)\,b_2(-k)/k_1(k),$$

$$r_1(k) = -r_2(-k)a_2(-k)/a_2(k),$$
$$m_n^{(1)} = k_n^2 / (c_2^2 - k_n^2)\, \dot a_2^2(k_n)\, m_n^{(2)}, \quad n = \overline{1,N}.$$

Теорема. Для того чтобы набор величин

$$\{r_2(k),\ k \in \partial\Gamma_2^+,\ \ k_n = \pm\vartheta_n,\ |\vartheta_n| < |c_2|,\ m_n^{(2)} > 0,\ \ n = \overline{1,N}\} \tag{21}$$

являлся данными рассеяния уравнения (1) с некоторой функцией $u(x)$ и одновременно уравнения (4) с потенциалом $v(x)$, удовлетворяющим условиям (2) и (3), необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

1) функция $r_2(k)$ непрерывна при $k \in \partial\Gamma_2^+$ и удовлетворяет условиям

$$r_2(-k) = \bar r_2(k), \quad r_2(k - i0) = \bar r_2(k + i0),$$
$$|r_2(k)| < 1, \quad k \in \partial\Gamma_1^+ \setminus \{\pm|c_1|\}, \quad |c_1| > |c_2|,$$
$$|r_2(k)| = 1, \quad |c_2| \le |k| < |c_1|, \quad r_2(\pm|c_2|) = -1,$$
$$r_2(k) = O(|k|^{-1}), \quad k \to \pm\infty;$$

2) функция

$$R_2(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r_2\left(\sqrt{\mu_2^2 + c_2^2}\right) e^{-i\mu x}\, d\mu$$

абсолютно непрерывна, и ее производная $R_2'(x)$ при всех $a < \infty$ удовлетворяет неравенствам $\int_{-\infty}^{a}(1+|x|)\,|R_2'(x)|\,dx < \infty$;

3) функция $k_2(k)a_2(k)$ непрерывна в замыкании Γ_2^+, где функции $a_2(k)$ определена через числа k_n и функцию $r_2(k)$ по формулам (18)-(20);

4) функция

$$R_1(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r_1\left(\sqrt{\mu^2 + c_1^2}\right) e^{i\mu x}\, d\mu + \frac{1}{2\pi}\int_{|c_2|}^{|c_1|} \frac{e^{ik_1(k)x}\, k\, dk}{k_2(k)\,|a_2(k)|^2},$$

где $r_1(k) = -r_2(-k)a_2(-k)/a_2(k)$, абсолютно непрерывна, и для любого числа $a > -\infty$

$$\int_{a}^{\infty}(1 + |x|)\,|R_1'(x)|\,dx < \infty.$$

Необходимость сформулированных условий доказана выше. Достаточность этих условий для восстановления потенциала $v(x)$ уравнения (4), удовлетворяющего условию (3), проверяется аналогично [2]. При этом $v(x)$ определяется по данным рассеяния (21) однозначно с помощью формул (6) и уравнений Марченко (14) или (15).

Для восстановления потенциала $u(x)$ уравнения (1) по данным рассеяния (21) достаточно найти решение уравнения Риккати $u'(x) + u^2(x) = v(x)$ в классе абсолютно непрерывных функций, суммируемых в смысле выполнения условия (2). Можно показать, что если c_1 и c_2 отличны от нуля, то существует однопараметрическое семейство $u_\alpha(x)$ абсолютно непрерывных и суммируемых в смысле выполнения условия (2) решений уравнения Риккати, представимых в виде

$$u_\alpha(x) = \frac{d}{dx} \ln\left[\alpha f_1(x) + (1-\alpha) f_2(x)\right], \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \qquad (22)$$

где

$$f_j(x) = e^{\mp|c_j|x}\left[1 \pm \int_0^{\pm\infty} B_j(x, x+y)\, e^{\mp|c_j|y} dy\right];$$

$B_j(x,y)$ – решения уравнений Марченко (14) и (15), построенных по данным рассеяния (21). Таким образом, восстановление уравнения (1) при условиях (2) и (3) происходит неоднозначно, причем все уравнения (1) с функциями $u_\alpha(x)$ вида (22) имеют одни и те же данные рассеяния (21).

Если $c_2 = 0$, а $c_1 \neq 0$, то данные рассеяния (21) не содержат дискретный спектр и определяются лишь функцией $r_2(k)$. В этом случае существует только одно решение $u(x)$ уравнения Риккати, удовлетворяющее условию суммируемости (2). Таким решением является

$$u_0(x) = \frac{d}{dx} \ln f_2(x) = \frac{d}{dx} \ln\left[1 + \int_{-\infty}^{0} B_2(x, x+y) dy\right].$$

Все остальные решения (22) при $0 < \alpha \leq 1$ оказываются несуммируемыми в смысле (2), а именно $u_\alpha(x) \sim 1/x$, $x \to -\infty$. Таким образом, в этом случае ($c_2 = 0$) коэффициент отражения $r_2(k)$ однозначно определяет $u(x)$ в уравнении (1) с условиями (2) и (3).

Наконец, если $c_1 = c_2 = 0$, то все решения (22) уравнения Риккати оказываются несуммируемыми ($u(x) \sim 1/x$, $|x| \to \infty$), кроме случая, когда потенциал $v(x)$ уравнения Шредингера (4) является виртуальным, т.е. когда решения Йоста $f_1(x)$ и $f_2(x)$ линейно зависимы. Необходимым и достаточным условием виртуальности потенциала $v(x)$ является $-1 < r_2(0) < 1$. В этом случае $u(x)$ определяется однозначно по $r_2(k)$ и является абсолютно непрерывной и суммируемой на всей оси функцией, представимой по любой из формул

$$u(x) = \frac{d}{dx} \ln\left[1 + \int_x^{\infty} B_1(x,y) dy\right] = \frac{d}{dx} \ln\left[1 + \int_{-\infty}^{x} B_2(x,y) dy\right].$$

В качестве следствия отсюда находим, что функции $v(x)$ вида $u'(x) + u^2(x)$ и только они являются виртуальными потенциалами в уравнении Шредингера (4), если $u(x)$ – абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая условиям суммируемости (2) и (3) при $c_1 = c_2 = 0$.

В заключение авторы благодарят Е.Я.Хруслова за внимание к работе.

1. Буслаев В., Фомин В. К обратной задаче рассеяния для одномерного уравнения Шредингера на всей оси // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1962. – № 1, вып. 1. – С. 56–64.
2. Марченко В.А. Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. – Киев : Наук. думка, 1977. – 330 с.
3. Гусейнов И.М. О непрерывности коэффициента отражения одномерного уравнения Шредингера // Дифференц. уравнения. – 1985. – 21, № 11. – С. 1993–1995.
4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М. : Наука, 1973. – 736 с.

УДК 517.535.4

Г.Г.Брайчев

О НЕКОТОРЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО РОСТА

Для целых и аналитических в единичном круге функций логарифмического роста устанавливаются точные оценки центрального индекса, считающей функции корней, а также некоторых относительных характеристик. Предложенный метод позволяет получать сразу двусторонние оценки рассматриваемых величин.

Пусть $h(r)$ – вещественная функция на $[0,\infty)$ абсолютно непрерывная на каждом отрезке $[0,r]$ и удовлетворяющая условию*

$$\lim_{r\in E} \frac{r \ln r\, h'(r)}{h(r)} = 1, \tag{1}$$

где через E обозначено множество точек, в которых существует и конечна $h'(r)$. Например, функция $h(r) = (\ln r)^{\gamma(\ln r)}$, $\gamma(t)$ – уточненный порядок (см. [1]), удовлетворяет этому условию.

Пусть, далее, $f(z)$ – целая функция логарифмического порядка γ и $M(r) = \max\{|f(z)| : |z| \le r\}$. Будем писать $f(z) \in \{h(r); (t, T)\}$, если выполняются соотношения

$$\overline{\lim}\, \frac{\ln M(r)}{h(r)} = T, \quad \underline{\lim}\, \frac{\ln M(r)}{h(r)} = t, \tag{2}$$

и $f(z) \in \{h(r), T\}$, если выполнено только первое из условий (2).

* Все пределы рассматриваются при условии стремления аргумента к бесконечности, если не указано противное.

ISBN 5-12-002405-X. Теория операторов, субгармонические функции. Киев, 1991.

Пусть еще $[h(r), T] = \bigcup_{0\le\tau\le T}\{h(r), \tau\}$.

В статье получены точные оценки, описывающие поведение центрального индекса, коэффициентов Тейлора и нулей целых функций введенных классов и аналогичных классов, аналитических в единичном круге функций. В частности, доказываются результаты, анонсированные в [2].

В дальнейшем предполагается, что функция $h_1(r) = \frac{h(r)}{\ln r}$ неограниченно возрастает (в противном случае класс $[h(r), T]$ состоит из многочленов). Это условие автоматически выполняется, если в условии (1) $\gamma > 1$.

1. Поведение центрального индекса функций из $\{h(r);(t,T)\}$.

Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ – целая функция, $\mu(r) = \max_{n\ge 0} |f_n| r^n$ – ее максимальный член и $\nu(r) = \max\{n : |f_n| r^n = \mu(r)\}$ – центральный индекс. Поскольку для функций конечного порядка $\ln M(r) \sim \ln \mu(r)$, то в (2) можно заменить $\ln M(r)$ $\ln\mu(r)$, что мы и будем предполагать сделанным.

Обозначим $h_1(r) = \frac{h(r)}{\ln r}$ и $\Delta = \overline{\lim} \frac{\nu(r)}{h_1(r)}$, $\delta = \underline{\lim} \frac{\nu(r)}{h_1(r)}$.

Из результатов работы [3] вытекают следующие оценки, которые мы сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. Для $f(z) \in \{h(r);(t,T)\}$ выполняются соотношения

$$t \le \delta \le \gamma t \qquad \gamma T \le \Delta \le \begin{cases} T, & \text{если } \gamma = 1 \\ \gamma T \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)^{\gamma-1}, & \text{если } \gamma > 1. \end{cases}$$

Этих оценок достаточно для рассмотрения крайних случаев, поскольку из них непосредственно получаем

Следствие 1. Если $\gamma = 1$, то $t = \delta$ и $T = \Delta$.

Следствие 2. Если $\gamma > 1$, то $t = 0, \infty$ тогда и только тогда, когда соответственно $\delta = 0, \infty$ и $T = 0, \infty$ тогда и только тогда, когда соответственно $\Delta = 0, \infty$.

Для оставшихся случаев мы докажем следующее уточнение.

Теорема 2. Пусть $f(z) \in \{h(r);(t,T)\}$, $\gamma > 1$ и $0 < T < \infty$. Тогда справедливы неравенства $a_1\gamma T \le \delta$, $\Delta \le a_2\gamma T$, где a_1, a_2 – корни уравнения $\varphi(a) := (\gamma-1)a^s - \gamma a = -\frac{t}{T}$, $s = \frac{\gamma}{\gamma-1}$.

Доказательство. Отметим сначала, что уравнение $\varphi(a) = q$ $\forall q \in [0, 1]$ имеет два корня $a_1(q)$ и $a_2(q)$ непрерывно зависящих от q, причем $a_1(q)$ возрастает, $a_2(q)$ убывает на [0, 1] и

$$a_1(0)=0, \quad a_1(1)=1=a_2(1), \quad a_2(0)=s\gamma-1,$$

для $\forall \rho>0$ и $n\in N$ имеем $|f_n|\le \mu(\rho)\cdot\rho^{-n}$. Следовательно,

$$\ln\mu(r)=\ln|f_{\nu(r)}|r^{\nu(r)}\le \ln\mu(\rho)+\nu(r)\ln\frac{r}{\rho}. \tag{3}$$

Обозначим $\nu(r)_1=d(r)\gamma(T+\varepsilon)h_1(r)$ и положим в (3) $\rho=r^{\alpha(r)}$ с $\alpha(r)=[d(r)]^{\frac{1}{\gamma-1}}$. Тогда $\ln\mu(r)\le(T+\varepsilon)h(r^{\alpha(r)})+\nu(r)\ln r(1-\alpha(r))$. Аналогично тому, как это сделано в [1], показываем, что $h(r^{\alpha(r)})\sim[\alpha(r)]^{\gamma}h(r)$, $r\to\infty$. Поэтому, продолжая неравенства, получаем

$$\frac{t-\varepsilon}{T+\varepsilon}\le\frac{\ln\mu(r)}{(T+\varepsilon)h(r)}\le\beta_r[\alpha(r)]^{\gamma}+\gamma d(r)(1-\alpha(r))=$$

$$=(1-\gamma)d^{\gamma}(r)+\gamma d(r)+o(1),$$

где $\beta_r\to1$ и $r\to\infty$. Таким образом, для $r>R(\varepsilon)$ имеем $(\gamma-1)\times d^{\gamma}(r)-\gamma d(r)\le-\frac{t}{T}+\varepsilon$. Поскольку функция $\varphi(a)$ выпукла вниз, то $a_1^{\varepsilon}\le d(r)\le a_2^{\varepsilon}$, где a_1^{ε}, a_2^{ε} – корни уравнения $\varphi(a)=-\frac{t}{T}+\varepsilon$. Но тогда $a_1^{\varepsilon}\gamma(T+\varepsilon)\le\delta\le\Delta\le a_2^{\varepsilon}\gamma(T+\varepsilon)$, откуда и следует утверждение теоремы в случае $t>0$. Однако для $t=0$ левое неравенство тривиально, так как $a_1(0)=0$, а правое следует из теоремы 1, поскольку $a_2(0)=s^{\gamma-1}$.

Замечание. Теорема 2 является уточнением теоремы 1 в случае $\gamma>1$, $t>0$, что можно увидеть, оценивая корни уравнения $\varphi(a)=-\frac{t}{T}$, например, методом касательных. Позже мы укажем класс функций, для которых достигаются обе оценки теоремы 2, что говорит о точности этих оценок.

2. Особенности поведения тейлоровских коэффициентов функций класса $\{h(r),T\}$. Пусть $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n z^n$ – целая функция, а $y=G(x)$ – уравнение ее ломаной Адамара. Положим $F_n=e^{-G(n)}$, $R_n=\frac{F_{n-1}}{F_n}$ и пусть n_k – абсциссы вершин ломаной Адамара. Тогда $\forall n\in N$ $|f_n|\le F_n$, причем $|f_{n_k}|=F_{n_k}$. Характеристики роста t и T определяемые в (2), можно вычислить по формулам [4]:

$$\underline{\lim}\,\frac{\ln F_n}{n\rho(n)}=C(t), \quad \lim\frac{\ln F_n}{n\rho(n)}=C(T), \tag{4}$$

где $\rho(x)$ – функция, обратная к $h_1(e^t)$, а $C(\tau)=\frac{1-\gamma}{\gamma}(\tau\gamma)^{\frac{1}{1-\gamma}}$ (считаем, что $C(0)=-\infty$ и $C(\infty)=0$), $\gamma>1$.

Заметим, что верхний предел в (4) всегда достигается на последовательности (не обязательно на всей) значений центрального индекса n_k. Поэтому при вычислении T можно в (4) заменить F_n на $|f_n|$. Для нижнего предела это не так, в чем можно убедиться на примере, например, четных функций с $t > 0$. Для дальнейшего нам понадобятся следующие простые утверждения.

Предложение 1. Пусть $n(r)$ – считающая функция последовательности a_n, $0 \leq a_1 = \ldots = a_{n_1} < a_{n_1+1} = \cdots = a_{n_2} < a_{n_2+1} = \cdots$ и $H(x)$ – непрерывная неубывающая функция. Тогда

$$\overline{\lim} \frac{n(x)}{H(x)} = \overline{\lim} \frac{n_k}{H(a_{n_k})} = \overline{\lim} \frac{n}{H(a_n)}, \tag{5}$$

$$\underline{\lim} \frac{n(x)}{H(x)} = \underline{\lim} \frac{n_k}{H(a_{n_{k+1}})} = \underline{\lim} \frac{n}{H(a_n)}. \tag{6}$$

Предложение 2. Пусть $h(r)$ удовлетворяет условию (1) с $\gamma > 1$ а $\rho(x)$ – обратная функция к $h_1(e^t)$. Тогда

$$\Delta^{\frac{1}{\gamma-1}} = \overline{\lim} \frac{\rho(n)}{\ln R_n} = \overline{\lim} \frac{\rho(n_k)}{\ln R_{n_k}}, \tag{7}$$

$$\delta^{\frac{1}{\gamma-1}} = \underline{\lim} \frac{\rho(n)}{\ln R_n} = \underline{\lim} \frac{\rho(n_k)}{\ln R_{n_k+1}}. \tag{8}$$

Предложение 1 доказывается элементарно, формулы (7) и (8) – аналогично. Мы докажем формулу (7), причем ограничимся случаем $0 < \Delta < \infty$ (случаи $\Delta = 0, \infty$ не представляют трудностей). Центральный индекс $\nu(r)$ яв"яется считающей функцией последовательности R_n. По предложению 1

$$\Delta = \overline{\lim} \frac{\nu(r)}{h_1(r)} = \overline{\lim} \frac{n}{h_1(R_n)} = \overline{\lim} \frac{n_k}{h_1(R_{n_k})},$$

поэтому

$$\frac{n}{\Delta+\varepsilon} < h_1(R_n) < \frac{n}{\Delta-\varepsilon},$$

где левое неравенство выполняется для всех $n > n(\varepsilon)$, а правое – для $n = n_i \uparrow \infty$. Подействуем возрастающей функцией $\rho(x)$. При этом учтем, что $\rho(x)$ удовлетворяет соотношению $x\rho'(x) \sim \frac{\rho(x)}{\gamma-1}$, из которого следует $\rho(ax) \sim a^{\frac{1}{\gamma-1}} \rho(x)$ [1]. Тогда получим

$$(1-\varepsilon')\Delta^{\frac{1}{1-\gamma}} \rho(n) < \rho\left(\frac{n}{\Delta+\varepsilon}\right) < \ln R_n < \cdot (1+\varepsilon')\Delta^{\frac{1}{1-\gamma}} \rho(n),$$

где ε' стремится к нулю вместе с ε. Этим доказано первое равенство в (7). Второе равенство в (7) получаем, используя второе равенство в (5).

Отметим сразу, что отсюда и из следствия 1 теоремы 1 вытекает коэффициентная характеризация класса $\{h(r); (t, T)\}$ при $\gamma = 1$:

$$T = \overline{\lim} \frac{n}{h_1\left(\frac{F_{n-1}}{F_n}\right)}, \quad t = \underline{\lim} \frac{n}{h_1\left(\frac{F_{n-1}}{F_n}\right)}.$$

Следующая задача состоит в выяснении, насколько редко расположены значения центрального индекса $\nu(r)$ функции из $\{h(r); (t, T)\}$. Введем для этого следующую характеристику.

Редкостью неубывающей положительной последовательности $\{a_n\}$ назовем величину $c(a_n) = \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Очевидно, $c(a_n) \geqslant 1$ и чем больше $c(a_n)$, тем более редко расположены точки a_n на числовой прямой. Если $c(a_n) = 1$, то последовательность $\{a_n\}$ будем называть густой. Например, $a_n = a^{\ln n}$, $a > 1$, – густая последовательность, а редкость последовательности $a_n = a^n$ равна a.

Предложение 3. Для $f(z) \in \{h(r); (t, T)\}$, $T < \infty$ выполняется

$$c(n_k) \leqslant \frac{\Delta}{\delta} \leqslant \begin{cases} \frac{T}{t}; & \gamma = 1 \\ \frac{a_2}{a_1}; & \gamma > 1, \; a_1, \; a_2 \text{ – корни уравнения } \varphi(a) = -\frac{t}{T}. \end{cases}$$

Доказательство. Для $\delta = 0$ доказывать нечего. Если $\delta > 0$, то по предложению 2 для $k > K(\varepsilon)$

$$\frac{n_{k+1}}{h_1(R_{n_{k+1}})} < \Delta + \varepsilon, \quad \frac{n_k}{h_1(R_{n_{k+1}})} > \delta - \varepsilon > 0.$$

Значит, для этих k $\frac{n_{k+1}}{n_k} < \frac{\Delta + \varepsilon}{\delta - \varepsilon}$, что доказывает первое неравенство. Второе вытекает из следствия 1 теорем 1 и 2.

Аналогично, учитывая тот факт, что $\forall n \in (n_k, n_{k+1}]$ $R_n = R_{n_k}$, доказывается

Предложение 4. В условиях предложения 3 выполняется условие

$$c(h_1(R_n)) := \overline{\lim} \frac{h_1(R_{n+1})}{h_1(R_n)} \leqslant \frac{\Delta}{\delta},$$

а при $\gamma > 1$

$$c(\ln R_n) := \overline{\lim} \frac{\ln R_{n+1}}{\ln R_n} \leqslant \left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \leqslant \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}.$$

Из предыдущего при $t = T$ вытекает

Теорема 3. Пусть $h(r)$ удовлетворяет условию (1), а $p(x)$ – обратная функция к $h_1(e^t)$. Следующие условия для целой функции эквивалентны:

$$\exists \lim \frac{\ln M(r)}{h(r)} = T,$$

$$\exists \lim \frac{\nu(r)}{h_1(r)} = \gamma T, \quad \exists \lim \frac{n}{h_1\left(\frac{F_{n-1}}{F_n}\right)} = \gamma T,$$

а при $\gamma > 1$ еще
$$\exists \lim \frac{p(n)}{\ln \frac{F_{n-1}}{F_n}} = (\gamma T)^{\frac{1}{\gamma-1}},$$

$$\exists \lim \frac{\ln F_n}{n p(n)} = \frac{1-\gamma}{\gamma} (\gamma T)^{\frac{1}{1-\gamma}}.$$

Доказательство. Для $\gamma = 1$ применяем следствие 1 теоремы 1, для $\gamma > 1$, $T = 0$, ∞ – следствие 2 теоремы 1, а в остальных случаях теорему 2, предложение 2 и формулы (4).

Недостатком этого результата, как и формул (4), является то, что в них участвуют не сами коэффициенты Тейлора, а их регуляризация F_n. Однако, как отмечалось выше, при вычислении T можно F_n заменить $|f_n|$. Пусть m_k – последовательность из $\mathbb{N}$, на которой достигается верхний предел в (4), т.е. пусть

$$\lim \frac{\ln |f_{m_k}|}{m_k p(m_k)} = C(T). \tag{9}$$

Оказывается, что редкость последовательности m_k тесно связана с отношением T/t. В частном случае $t = T$ и $m_k = n_k$ (n_k – последовательность значений центрального индекса) эта связь прослежена еще Э.Линделефом и Ж.Валироном.

Мы докажем общую теорему, из которой, как следствия, получаются результаты Э.Линделефа и Ж.Валирона. Введем сначала следующие обозначения: $s = \frac{\gamma}{\gamma - 1}$, $d(c) = s$, если $c = 1$; $d(c) = \frac{c^s - 1}{c - 1}$, если $c > 1$ и $\Psi(c) = \left(\frac{s}{d(c)}\right)^{\gamma}(\gamma - 1)(d(c) - 1)$, $\psi(\infty) = 0$.

Теорема 4. Пусть $f(z) = \sum\limits_0^{\infty} f_n z^n \in \{h(r), T\}$, $T < \infty$, $\gamma > 1$ и выполнено условие (9). Тогда $t \geq T\psi(c)$, где $c = c(m_k)$ – редкость последовательности m_k.

Доказательство. Если $T = 0$ или $c = \infty$, то доказывать нечего. В остальных случаях согласно условию теоремы $\ln |f_{m_k}| = C(\tau_k) p_1(m_k)$ с $p_1(x) = x p(x)$ и $\tau_k \to T$ при $k \to \infty$. Построим ломаную G_1, проходящую через точки $(m_k, -\ln |f_{m_k}|)$; k-е звено этой ломаной имеет уравнение

$$G_1(m) = G_1(m_k) + \frac{G_1(m_{k+1}) - G_1(m_k)}{m_{k+1} - m_k}(m - m_k), \quad m \in [m_k, m_{k+1}].$$

Обозначим через E любую последовательность, стремящуюся к единице, и положим $c_k = \frac{m_{k+1}}{m_k}$, $\beta = \frac{m_k}{m}$. Тогда $C(\tau_k) = EC(T)$, $p_1(m_k) =$

$= E\beta^s \rho_1(m)$, $\rho_1(m_{k+1}) = E(c_k\beta)^s \rho_1(m)$, а так как $G_1(m_k) = -C(\tau_k) \times$ $\times \rho_1(m_k)$, то уравнение ломаной примет вид

$$G_1(m) = -C(T)\beta^s \rho_1(m)\left[E + \frac{Ec_k^s - E}{c_k - 1} \; \frac{1-\beta}{\beta}\right] =$$

$$= -C(T)\rho_1(m)\beta^s\left[1 + d(c_k)\frac{1-\beta}{\beta} + o(1)\right].$$

Для ломаной Адамара функции $f(z)$ (с уравнением $y = G(x)$) $G(m) \leq G_1(m)$, $m \geq 0$. Учитывая, что $\max\limits_{\beta}\left[\beta^s\left(1 + d\frac{1-\beta}{\beta}\right)\right] = \left(\frac{d}{\gamma}\right)^s (d-1)^{1-s}(\gamma-1)$, $d = d(c)$, возрастает, а $\varphi(c)$ убывает, получаем $C(t) = \underline{\lim}\frac{-G(m)}{\rho_1(m)} \geq$ $\geq \underline{\lim}\frac{-G_1(m)}{\rho_1(m)} = C(T)^{-s}\gamma(\gamma-1)\,\underline{\lim}\frac{d^s(c_k)}{(d(c_k)-1)^{s-1}} = C(T)\gamma^{-s}(\gamma-1)\frac{d^s(c)}{(d(c)-1)^{s-1}}$.

Сравнивая значения $C(t)$ и $C(T)$, получаем нужное неравенство.

Непосредственной проверкой легко убедиться, что при $\forall\lambda \geq 1$ числа $b_1(\lambda) = s^{\gamma-1}d^{1-\gamma}(\lambda)$ и $b_2(\lambda) = \lambda b_1(\lambda)$ являются корнями уравнения $\varphi(a) = -\frac{t}{T} = -\psi(\lambda)$, причем $b_2(\lambda)$ убывает от 1 до 0, а $b_2(\lambda)$ возрастает от 1 до $s^{\gamma-1}$ на $[1, \infty)$.

Если выполнены условия теоремы 4, то согласно ей имеем $\varphi(c) \leq \frac{t}{T} = \varphi(\lambda)$. Следовательно, $\lambda \leq c$ и, значит $a_1 = b_1(\lambda) \geq b_1(c)$, $a_2 = b_2(\lambda) \leq b_2(c)$. Это вместе с теоремой 2 дает следующий результат.

Теорема 5. Пусть выполнены условия теоремы 4, тогда $s^{\gamma-1}d^{1-\gamma}(c)\gamma T \leq \delta$, $\Delta \leq s^{\gamma-1}d^{1-\gamma}(c)c\gamma T$, где $c = c(m_k)$.

Замечание. Случай равенства в теореме 4, как это видно из доказательства, достигается, когда $G(m) = G_1(m)$, $m > m_0$, т.е. когда $m_k = n_k$, $k > K_0$ и предел (9) достигается на всей последовательности значений центрального индекса $\{n_k\}$. В этом случае корни уравнения $\varphi(a) = -\frac{t}{T}$ равны соответственно $b_1(c)$ и $b_2(c)$, $c = c(n_k)$. Сопоставляя теперь предложение 3 и теорему 5, получаем $c \leq \frac{\Delta}{\delta} \leq \frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2(c)}{b_1(c)} = c$.

Следовательно, для любой функции из $\{h(r), T\}$ для которой предел (9) достигается на всей последовательности $\{n_k\}$, имеют место знаки равенств в предложении 3, теоремах 2, 4 и 5. Можно показать, что для таких функций знак равенства будет и в предложении 4, что говорит о точности всех указанных утверждений.

Из предложений 3 и теоремы 4 вытекает известный результат Э.Линделефа – Ж.Валирона: для того чтобы $\exists \lim\frac{\ln M(r)}{h(r)} = T$, необходимо и достаточно, чтобы существовала густая последовательность натуральных чисел, на которой достигается предел (9).

В дополнение к результатам п. 1 мы можем сейчас установить сравнительный рост функций $\ln\mu(r)$ и $\nu(r)$. Обозначим

$$\alpha = \overline{\lim}\,\frac{\ln\mu(r)}{\nu(r)\ln r}, \qquad \beta = \underline{\lim}\,\frac{\ln\mu(r)}{\nu(r)\ln r}.$$

Очевидным образом выполняются неравенства $\frac{t}{\Delta}\leqslant\beta\leqslant\frac{t}{\delta}\leqslant\alpha\leqslant\frac{T}{\delta}$. Более точные неравенства для $\gamma>1$ (ср. [5]) дает

Теорема 6. Пусть $f(z)\in\{h(r);\,(t,T)\}$, $\gamma>1$, тогда

$$1-\frac{1}{s}\left(\frac{\Delta}{T\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\leqslant\alpha\leqslant 1-\frac{1}{s}\left(\frac{\delta}{T\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}},$$

$$1-\frac{1}{s}\left(\frac{\Delta}{t\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\leqslant\beta\leqslant 1-\frac{1}{s}\left(\frac{\Delta}{T\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Доказательство. Поскольку для $r\in[R_{n_k},R_{n_{k+1}})$ $\nu(r)=n_k$, то $\frac{p(n_k)}{\ln R_{n_{k+1}}}\leqslant\frac{p(\nu(r))}{\ln r}\leqslant\frac{p(n_k)}{\ln R_{n_k}}$.

Из этих неравенств вытекает, что

$$\overline{\lim}\,\frac{p(\nu(r))}{\ln r}=\Delta^{\frac{1}{\gamma-1}},\quad \underline{\lim}\,\frac{p(\nu(r))}{\ln r}=\delta^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Теперь утверждения теоремы следуют из представления

$$\frac{\ln\mu(r)}{\nu(r)\ln r}=1+\frac{\ln F_{\nu(r)}}{\nu(r)\ln r}=1+\frac{\ln F_{\nu(r)}}{\nu(r)p(\nu(r))}\,\frac{p(\nu(r))}{\ln r}$$

и формул (4).

3. О распределении нулей функций класса $[h(r),\,T]$. Пусть $f(z)\in\{h(r),\,T\}$ и α_n – последовательность ее нулей: $0<|\alpha_1|=\ldots=|\alpha_{n_1}|<|\alpha_{n_1+1}|=\ldots=|\alpha_{n_2}|<|\alpha_{n_2+1}|=\ldots$. Обозначим через $n(r)$ их считающую функцию и положим

$$N(r)=\int_0^r n(x)\,d(\ln x),\quad m(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta.$$

Для нахождения связи роста нулей с характеристиками t и T рассмотрим функцию $\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\alpha_1\ldots\alpha_n}$; $n(r)$ можно трактовать как ее центральный индекс, а $\exp\{N(r)\}$ – максимальный член. По формуле Иенсена имеем $m(r)=N(r)+\ln|f(0)|$. Этот прием позволяет получать оценки роста нулей из соответствующего результата для центрального индекса.

Перед формулировкой теоремы отметим равенства (см. [6])*)

---

*) Запись $\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}=\overline{\lim}\,\varphi(r)$ означает, что $\alpha=\overline{\lim}\,\varphi(r)$ и $\beta=\underline{\lim}\,\varphi(r)$.

$$\overline{\lim}\frac{\ln M(r)}{h(r)}=\overline{\lim}\frac{m(r)}{h(r)}.$$

Теперь из полученных выше результатов вытекает

Теорема 7. Пусть $h(r)$ удовлетворяет условию (1) с $\gamma>1$, $\rho(x)$ – обратная функция к $h_1(r)=\frac{h(r)}{\ln r}$ и $f(z)\in\{h(r);(t,T)\}$. Тогда

$$\overline{\lim}\frac{\sum_{k=0}^{n}\ln|\alpha_k|}{n\rho(n)}=\frac{-C(t)}{-C(T)}$$

и при $T<\infty$

$$\gamma T\leq\overline{\lim}\frac{n(r)}{h_1(r)}=\overline{\lim}\left(\frac{\rho(n)}{\ln|\alpha_n|}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\leq a_2\gamma T,$$

$$\gamma t\geq\underline{\lim}\frac{n(r)}{h_1(r)}=\underline{\lim}\left(\frac{\rho(n)}{\ln|\alpha_n|}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\geq a_1\gamma T,$$

где a_1 и a_2 – корни уравнения $(\gamma-1)a^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}-\gamma a=-\frac{t}{T}$. Кроме того, $\overline{\lim}\frac{n_{k+1}}{n_k}\leq\frac{a_2}{a_1}$ и $\overline{\lim}\frac{\ln|\alpha_{n+1}|}{\ln|\alpha_n|}\leq\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$. Для целой функции с нулями α_n условие $\ln M(r)\sim Th(r)$ выполняется тогда и только тогда, когда $\ln|\alpha_n|\sim(T\gamma)^{\frac{1}{1-\gamma}}\rho(n)$.

Для $\gamma=1$ имеем следующий результат.

Теорема 8. Пусть $\gamma=1$ и выполнены все остальные условия теоремы 7. Тогда

$$\overline{\lim}\frac{n}{h_1(|\alpha_n|)}=\frac{T}{t}.$$

При этом для модулей нулей и их кратностей

$$\overline{\lim}\frac{h_1(|\alpha_{n+1}|)}{h_1(|\alpha_i|)}\leq\frac{T}{t},\quad\overline{\lim}\frac{n_{k+1}}{n_k}\leq\frac{T}{t}.$$

Условие $\ln M(r)\sim Th(r)$ выполняется тогда и только тогда, когда $h_1(|\alpha_n|)\sim\frac{n}{T}$. В частности, для $h(r)=\ln r(\ln^{[q]}r)^{\alpha}$, где $\alpha>0$ и $\ln^{[q]}r=\ln(\ln^{[q-1]}r), q>0$ последнее соотношение эквивалентно такому: $\ln^{[q]}|\alpha_n|\sim\left(\frac{n}{T}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

4. Функции, аналитические в единичном круге. Для функций $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n z^n$, аналитических в единичном круге, мы сохраним прежние обозначения: $M(r)$, $\mu(r)$, $\nu(r)$, $n(r)$, $G(x)$, F_n, R_n. Через $A\{\rho;(t,T)\}$ обозначим класс аналитических в единичном круге

функций, для которых выполняется условие ($\rho > 0$)

$$\overline{\underline{\lim}}_{r\to 1-0} \frac{\ln\mu(r)}{\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{-\rho}} = {T \atop t}. \qquad (10)$$

Положим, далее

$$A[\rho;(t,T)] = \bigcup_{t\le\tau\le\sigma\le T} A\{\rho;(\tau,\sigma)\}, \quad A[\rho,T] = A[\rho;(0,T)].$$

При определении этих классов функций можно было бы использовать некоторый уточненный порядок $\rho(r)$. Мы этого не делаем, чтобы излишне не раздувать объем статьи. Перенос полученных результатов на случай уточненного порядка принципиальных трудностей не представляет.

То, что при определении характеристик роста (10) использован $\ln\mu(r)$, а не $\ln M(r)$, как в случае целых функций, имеет основанием тот факт, что эти величины не для всякой функции (даже из $A[\rho,T]$) эквивалентны. Так, например, соотношение

$$\ln M(r) \sim \ln\mu(r), \quad r\to 1-0 \qquad (11)$$

не имеет места для многочленов от $(1-z)^{-1}$. Но нетрудно проверить, что для $f(z)\in A[\rho,T]$, для которой $\mu(r) = (1-r)^{-\beta(r)}$ с $\beta(r)\to\infty$ при $r\to 1-0$ (как угодно медленно), соотношение (11) выполняется (см. [7]). Последнее имеет место для класса $A[\rho;(t,T)]$ при $t>0$, $T>\infty$. Регуляризованные коэффициенты функции $f(z)\in A\{\rho;(t,T)\}$ удовлетворяют условиям [7]:

$$\overline{\underline{\lim}} \frac{\ln F_n}{n_s} = {K(\rho)T^{\frac{1}{\rho+1}} \atop K(\rho)t^{\frac{1}{\rho+1}}}, \quad K(\rho) = (\rho+1)\rho^{-s}, \qquad (12)$$

где $s = \frac{\rho}{\rho+1}$. Аналогично случаю целых функций положим

$$ {\Delta \atop \delta} = \overline{\underline{\lim}}\, \nu(r)\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{\rho+1}.$$

Для оценки этих величин справедлива

Теорема 9. Для $f(z)\in A\{\rho;(t,T)\}$, $T<\infty$, выполняются оценки $t\rho \ge \delta \ge a_1 T\rho$, $T\rho \le \Delta \le a_2 T\rho$, где a_1, a_2 – корни уравнения $\varphi_1(a) := (\rho+1)a^s - \rho a = \frac{t}{T}$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$, $\delta' = \max\{\delta-\varepsilon, 0\}$. Для всех $r\in(r_\varepsilon, 1)$ получаем

$$\ln\mu(r) \ge \int_{r_0}^{r}\nu(t)\,d(\ln t) \ge -\delta'\int_{r_0}^{r}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{-\rho-1} d\left(\ln\frac{1}{t}\right) = \frac{\delta'}{\rho}\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{-\rho} + O(1).$$

Следовательно, $t\rho \ge \delta$. Аналогично получим неравенство $T\rho \le \Delta$. Для доказательства правых неравенств теоремы предположим сначала, что $\nu(r)$ неограничен. Из (12) для $n > n(\varepsilon)$ имеем $\ln F_n < K(\rho)\,\times$

$\times(T+\varepsilon)^{\frac{1}{\rho+1}} n^{s}$. Полагая $\vartheta(r)=d(r)\rho(T+\varepsilon)\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{-\rho-1}$, получим отсюда для $r\in(r_\varepsilon,1)\ \ln\mu(r)=\ln F_{\vartheta(r)}r^{\vartheta(r)}\le(T+\varepsilon)\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{-\rho}\varphi_1(d(r))$.

Таким образом, для достаточно близких к единице значений r $\varphi_1(d(r))\geqslant\frac{t'}{T+\varepsilon}$, где $t'=\max\{t-\varepsilon,0\}$.

Легко проверить, что $\varphi_1(x)$ выпукла вверх и уравнение $\varphi_1(x)=q\quad\forall q\in[0,1]$ имеет два корня – $x_1(q)$ и $x_2(q)$, причем $x_1(q)$ возрастает, $x_2(q)$ убывает на $[0,1]$ и выполняются равенства $x_1(0)=0,\ x_1(1)=1=x_2(1),\ x_2(0)=s^{-\rho-1}$.

В силу этих свойств $d(r)\in[x_1^\varepsilon,\ x_2^\varepsilon]$, где x_1^ε, x_2^ε – корни уравнения $\varphi_1(x)=\frac{t'}{T+\varepsilon}$. Отсюда следуют правые неравенства в утверждении теоремы в нашем случае. Если $\vartheta(r)$ ограничен, то непосредственно проверяем, что $d=\Delta=0$ и $t=T=0$. И в этом случае теорема остается в силе, если положить $\frac{0}{0}=1$.

В качестве следствия теоремы 9 так же, как и в предложениях 3 и 4, получаем оценку редкости последовательностей n_k и $(1-R_n)^{-1}$.

<u>Предложение 5</u>. Для $f(z)\in A\{\rho;(t,T)\}$, $T<\infty$ выполняются оценки

$$c(n_k)=\overline{\lim}\,\frac{n_{k+1}}{n_k}\le\frac{\Delta}{d}\le\frac{a_2}{a_1};\quad c\left(\frac{1}{1-R_n}\right)=\overline{\lim}\,\frac{1-R_n}{1-R_{n+1}}\le\left(\frac{\Delta}{d}\right)^{\frac{1}{\rho+1}}\le\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{\rho+1}}.$$

<u>Теорема 10</u>. Пусть для $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n z^n\in A[\rho;T]$, $T<\infty$ выполняется условие

$$\lim\frac{\ln|f_{m_k}|}{m_k^s}=K(\rho)T^{\frac{1}{\rho+1}}\quad\text{и}\quad c=\overline{\lim}\,\frac{m_{k+1}}{m_k},$$

тогда

$$t\geqslant T\,[\lambda(\rho)]^{\rho+1}d^{\rho}(c)(1-d(c)),\tag{13}$$

где $d(c)$ определено, как в теореме 4. Знак равенства в (13) достигается, если $m_k=n_k$ (значениям центрального индекса, $k>k_0$).

<u>Доказательство</u> проводится аналогично доказательству теоремы 4. Уравнение ломаной с вершинами в точках $(m_k,\ -\ln|f_{m_k}|)$ имеет вид (как и ранее, $c_k=\frac{m_{k+1}}{m_k}$, $\beta=\frac{m_k}{m}$)

$$G_1(m)=K(\rho)T^{\frac{1}{\rho+1}}m^s\beta^s\left\{\left[d(c_k)\left(\frac{1}{\beta}-1\right)+1\right]+o(1)\right\}.$$

Функция $l(\beta)=\beta^s\left[d(c_k)\left(\frac{1}{\beta}-1\right)+.\right]$ достигает минимума при $\beta=\beta_k\,\frac{d(c_k)}{\rho(1-d(c_k))}$, равного $K(\rho)d^{\rho}(c_k)(1-d(c_k))^{1-\rho}$. Поэтому

$$K(\rho)t^{\frac{1}{\rho+1}} = \underline{\lim}\,\frac{-G(m)}{m^s} \geqslant \underline{\lim}\,\frac{-G_1(m)}{m^s} = \underline{\lim}\,K(\rho)T^{\frac{1}{\rho+1}}l(\beta_k) =$$

$= K(\rho)T^{\frac{1}{\rho+1}}\left[K(\rho)d^s(c)(1-d(c))\right]^{1-s}$, что и дает утверждение теоремы.

Легко проверить, что числа $e_1(\lambda) = \left(\frac{d(\lambda)}{s}\right)^{\rho+1}$, $e_2(\lambda) = \lambda e_1(\lambda)$ являются корнями уравнения $\varphi_1(x) = \frac{t}{T} = K(\rho)d^{\rho}(\lambda)(1-d(\lambda))$, причем $e_1(\lambda)$ убывает от 1 до 0, а $e_2(\lambda)$ возрастает от 1 до $s^{-\rho-1}$ на $[1,\infty)$. Из этих замечаний, как и ранее, вытекают оценки $a_1 \geqslant e_1(c)$, $a_2 \leqslant {}_2(c)$, $\Delta \leqslant cd^s$, $c = c(n_k)$. В этих неравенствах, равно как и в предложении 5, имеют место знаки равенств, если $m_k = n_k$.

Аналогично тому, как это сделано в п. 3, получается результат о нулях функций из класса $A[\rho;(\tau,\sigma)]$. Ввиду полной аналогии мы приводим только его формулировку.

<u>Теорема 11</u>. Пусть α_n – нули функции $f(z)\in A[\rho;(\tau,\sigma)]$, $\sigma<\infty$, $0<|\alpha_1| = \dots = |\alpha_{n_1}| < |\alpha_{n_1+1}| = \dots = |\alpha_{n_2}| < \dots$ и $n(r)$ – их считающая функция. Если

$$\overline{\underline{\lim}}_{r\to 1-0}\,\frac{(\ln\frac{1}{r})^{\rho}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta = {}^{T}_{t},$$

то

$$\overline{\underline{\lim}}\,\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\ln\left|\frac{1}{\alpha_k}\right|}{n^s} = {}^{K(\rho)T^{\frac{1}{\rho+1}}}_{K(\rho)t^{\frac{1}{\rho+1}}}$$

и выполняются неравенства

$$\rho T \leqslant \overline{\lim}_{r\to 1-0}\,n(r)\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{\rho+1} = \overline{\lim}\,n\left(\ln\frac{1}{|\alpha_n|}\right)^{\rho+1} \leqslant a_2\rho T,$$

$$\rho t \geqslant \underline{\lim}_{r\to 1-0}\,n(r)\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{\rho+1} = \underline{\lim}\,n\left(\ln\frac{1}{|\alpha_n|}\right)^{\rho+1} \geqslant a_1\rho T,$$

где a_1 и a_2 – корни уравнения $(\rho+1)a^s - \rho a = \frac{t}{T}$. При этом для модулей нулей и их кратностей выполняются неравенства

$$\overline{\lim}\,\frac{1-|\alpha_n|}{1-|\alpha_{n+1}|} \leqslant \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{\rho+1}},\quad \overline{\lim}\,\frac{n_{k+1}}{n_k} \leqslant \frac{a_2}{a_1}.$$

Далее, условие $\int_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta \sim 2\pi\sigma(1-r)^{-\rho}$, $r\to 1-0$, выполняется тогда и только тогда, когда

$$|\alpha_n| = 1 - \left(\frac{\sigma\rho}{n}\right)^{\frac{1}{\rho+1}} + o\left(n^{-\frac{1}{\rho+1}}\right).$$

1. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. - М. : Гостехтеоретиздат, 1956. - 632 с.
2. Брайчев Г.Г. Об особенностях поведения корней целых функций логарифмического роста // Всесоюз. симпоз. по теории приближ. функций, Уфа, 1987 г. - Уфа : Изд-во Башк. ун-та, 1987. - С. 54-56.
3. Братищев А.А., Коробейник Ю.Ф. О некоторых характеристиках роста субгармонических функций // Мат. сб. - 1978. - 106, вып. 1. - С. 44-65.
4. Srivastava G.S., Juneja O.P. On the entire functions of slow growth // Roszniki Pol. Tow. Mat. - 1964. - 24. - P. 133-141.
5. Srivastava G.S., Juneja O.P. A unified approach to the study of certain growth estimates of entire functions // Ann. math. pura ed appl. - 1985. - 139. - P. 1-13.
6. Гольдберг А.А. Интеграл по полуаддитивной мере и его приложения к теории функций. II // Мат. сб. - 1963. - 61. вып. 2. - С. 334-349.
7. Juneja O.P., Kapoor G.P. Analytic functions - growth aspects.- London: Acad. press, 1985. - 292 p.

УДК 517.547.22+519.21.2

А.М.Вишнякова

О РОСТЕ ФУНКЦИЙ, ХРЕБТОВЫХ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

Доказано, что если аналитическая в верхней полуплоскости хребтовая функция не имеет нулей и удовлетворяет условию $\underline{\lim}_{y\to+\infty} y^{-1}\ln^+\ln^+ f(iy)=a,\ 0<a<\infty$, то $\ln^+\ln^+ f(iy)\leqslant ay + O(\ln^2 y),\ y\to+\infty$. Показано также, что в последнем неравенстве знак $\leqslant$ нельзя заменить знаком $=$, даже если в правой части величину $O(\ln^2 y)$ заменить произвольной фиксированной функцией $\psi(t)=o(t),\ t\to+\infty$.

Аналитическая в полосе $\{z : a<\operatorname{Im} z<b\}$ функция f называется хребтовой, если она там удовлетворяет неравенству

$$|f(z)|\leqslant f(i\operatorname{Im} z). \tag{1}$$

Неравенству (1) удовлетворяют, в частности, все целые или аналитические в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ характеристические функции вероятностных распределений.

И.В.Островский в [1] доказал, что если аналитическая в $\mathbb{C}_+$ хребтовая функция f не имеет нулей, то выполняется импликация

$$\underline{\lim}_{y\to+\infty} y^{-1}\ln^+\ln^+ f(iy)=0 \Longrightarrow \overline{\lim}_{y\to+\infty}(\ln y)^{-1}\ln^+\ln^+ f(iy)<\infty \tag{2}$$

(об истории вопроса см. в [1]).

В левой части (2) нельзя заменить " $=0$ " на " $<\infty$ ", как

ISBN 5-12-002405-X. Теория операторов, субгармонические функции. Киев, 1991.

показывает пример характеристической функции распределения Пуассона $f(z) = \exp\{\lambda(e^{iz} - 1)\}$, $\lambda > 0$. В настоящей статье будут рассматриваться аналитические в $\mathbb{C}_+$ хребтовые функции, не имеющие нулей и удовлетворяющие условию

$$\varliminf_{y \to +\infty} y^{-1} \ln^+ \ln^+ f(iy) = a, \qquad 0 < a < \infty . \tag{3}$$

В.В.Зимогляд в [2], в частности, доказал, что если целая четная хребтовая функция f не имеет нулей и удовлетворяет (3), то $\ln^+ \ln^+ f(iy) \le ay + O(\sqrt{y})$, $y \to +\infty$. Цель настоящей статьи – доказательство теоремы, содержащей более точную оценку.

Теорема 1. Пусть аналитическая в $\mathbb{C}_+$ функция f не имеет нулей и удовлетворяет (3). Тогда

$$\ln^+ \ln^+ (iy) \le ay + O(\ln^2 y), \qquad y \to +\infty . \tag{4}$$

Доказательство теоремы 1 проводится методом, аналогичным использованному в работе [3].

Следующая теорема показывает, что в (4) знак $\le$ нельзя заменить знаком $=$, даже если в правой части величину $\bar{o}(\ln^2 y)$ заменить произвольной фиксированной функцией $\psi(y) = \bar{o}(y)$, $y \to +\infty$.

Теорема 2. Пусть неотрицательная функция ψ, определенная при $1 \le t < \infty$, удовлетворяет условию $\psi(t) = \bar{o}(t)$, $t \to +\infty$. Тогда существует аналитическая в $\mathbb{C}_+$ характеристическая функция f, удовлетворяющая условию (3) при $a = 1$ и такая, что

$$\ln^+ \ln^+ f(iy) \le y - \psi(y), \qquad y \ge 0 .$$

Замечание. В теореме 1 условие, что функция f не имеет нулей в $\mathbb{C}_+$, отбросить нельзя. Это показывает следующий пример. Обозначим через $\{a_k\}_1^\infty$ монотонно стремящуюся к бесконечности последовательность положительных чисел со считающей функцией $n(r) \sim r^{l(r)}$, $r \to +\infty$, где $l(r) = \frac{1}{2}(b + a + (b - a)\sin \ln \ln \ln r)$, $0 < a < b < 1$. В [4, с. 91-93] доказано, что целая функция

$$g(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{a_k}\right)$$

допускает асимптотику

$$\ln g(r) \sim \frac{\pi}{\sin \pi l(r)} r^{l(r)} + \bar{o}(r^{l(r)}), \qquad r \to +\infty ,$$

откуда

$$\varlimsup_{r \to +\infty} \frac{\ln \ln g(r)}{\ln r} = b, \qquad \varliminf_{r \to +\infty} \frac{\ln \ln g(r)}{\ln r} = a .$$

Поскольку g имеет неотрицательные коэффициенты, функция $f(z) = g(e^{-iz})/g(1)$ является целой характеристической функцией. Из свойств функции g следует, что

$$\overline{\lim_{y\to+\infty}} \frac{\ln\ln f(iy)}{y} = b > a = \lim_{y\to+\infty} \frac{\ln\ln f(iy)}{y},$$

поэтому функция f не удовлетворяет неравенству (4).

<u>Доказательство теоремы 1.</u> Не уменьшая общности, можно считать, что $a = 1$ и, кроме того, что функция $f(iy)$ монотонно возрастает при $y \geqslant 0$, $f(0) = 1$. Обозначим $g(z) = \ln f(iz)$, $g(0) = 0$. Функция g вляется аналитической в правой полуплоскости, и условие (1) влечет неравенство $\operatorname{Re} g(z) \leqslant g(\operatorname{Re} z)$. Кроме того, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-1}\ln^+ g(x) = 1$. Введем функцию $\varphi(z) = g(z)e^{-z}$. Через $\Pi(k,r,R)$ обозначим прямоугольник $\Pi(k,r,R) = \{z = x+iy : r \leqslant x \leqslant R,\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi k\}$, $k \in \mathbb{N}$.

1. По теореме Коши

$$\int_{\partial\Pi(k,r,R)} e^{-\frac{z}{k}}\varphi(z)\,dz = 0,$$

$$\int_{\partial\Pi(k,r,R)} e^{-\frac{3z}{2k}}\varphi(z)\,dz = 0,$$

откуда

$$\int_r^R \big(\varphi(x) - \varphi(x+2\pi ki)\big)e^{-\frac{x}{k}}\,dx =$$
$$= i\int_0^{2\pi k}\left\{\varphi(r+iy)e^{-\frac{r}{k}} - \varphi(R+iy)e^{-\frac{R}{k}}\right\}e^{-i\frac{y}{k}}\,dy,$$
$$\int_r^R \big(\varphi(x) + \varphi(x+2\pi ki)\big)e^{-\frac{3x}{2k}}\,dx =$$
$$= i\int_0^{2\pi k}\left\{\varphi(r+iy)e^{-\frac{3r}{2k}} - \varphi(R+iy)e^{-\frac{3R}{2k}}\right\}e^{-i\frac{3y}{2k}}\,dy.$$

Отделяя вещественную часть, получаем

$$\int_r^R \big(\varphi(x) - \operatorname{Re}\varphi(x+2\pi ki)\big)e^{-\frac{x}{k}}\,dx =$$
$$= \operatorname{Im}\int_0^{2\pi k}\left\{\varphi(R+iy)e^{-\frac{R}{k}} - \varphi(r+iy)e^{-\frac{r}{k}}\right\}e^{-i\frac{y}{k}}\,dy, \tag{5}$$
$$\int_r^R \big(\varphi(x) + \operatorname{Re}\varphi(x+2\pi ki)\big)e^{-\frac{3x}{2k}}\,dx =$$

$$= Im \int_0^{2\pi k} \left\{ \varphi(R+iy)e^{-\frac{3R}{2k}} - \varphi(r+iy)e^{-\frac{3r}{2k}} \right\} e^{-i\frac{3y}{2k}} . \tag{6}$$

2. Для продолжения доказательства понадобится оценить по модулю интеграл

$$I_\lambda(x) = \int_0^{2\pi k} \varphi(x+iy)e^{i\lambda y}dy .$$

Имеем

$$|I_\lambda(x)| \le 2\pi k \max\left\{|\varphi(x+iy)| : 0 \le y \le 2\pi k\right\} =$$

$$= 2\pi k e^{-x} \max\left\{|g(x+iy)| : 0 \le y \le 2\pi k\right\} . \tag{7}$$

Для получения окончательной оценки понадобится следующая

Лемма (см. [1]). Пусть аналитическая в полосе $\{z : 0 < Re\, z < R\}$, $R > 2$, функция h, $h(R/2) > 0$, удовлетворяет неравенству $Re\, h(z) \le h(Re\, z)$. Тогда для всех x, $1 \le x \le R-1$,

$$\max\left\{|h(x+iy)| : 0 \le y \le 2\pi k\right\} \le CR \exp\frac{2\pi^2 k}{R} \max\left\{h(0), h(R)\right\} ,$$

где $C > 0$ – абсолютная постоянная.

Доказательство. В полосе $\{z : 0 < Re\, z < R\}$ выполняется неравенство $Re\, h(z) \le \max\{h(0), h(R)\}$. Функция $\zeta(z) = tg\frac{\pi(2z-R)}{4R}$ конформно отображает полосу $\{z : 0 < Re\, z < R\}$ на круг $\{\zeta : |\zeta| < 1\}$, $\zeta(R/2) = 0$. Поэтому функция $h_1(\zeta) = h(z(\zeta)) - h(R/2)$ аналитична в круге $\{\zeta : |\zeta| < 1\}$, $h_1(0) = 0$ и, кроме того, $Re\, h_1(\zeta) \le \max\{h(0), h(R)\}$. По теореме Каратеодори

$$|h(z) - h(R/2)| \le \frac{2|\zeta(z)|}{1-|\zeta(z)|} \max\left\{h(0), h(R)\right\} \le$$

$$\le \frac{4}{1-|\zeta(z)|^2} \max\left\{h(0), h(R)\right\}. \tag{8}$$

Имеем

$$1 - |\zeta(z)|^2 \ge \cos\frac{\pi(2x-R)}{2R} \exp\left(-\frac{\pi|y|}{R}\right) > \frac{2}{R} \exp\left(-\frac{\pi|y|}{R}\right) .$$

Подставляя последнюю оценку в (8), получаем

$$|h(x+iy)| \le 16R \exp\frac{\pi|y|}{R} \max\left\{h(0),\ h(R)\right\} ,$$

откуда непосредственно следует утверждение леммы.

Применяя лемму к функции g при $R = x+1$, получим из (7) для всех $x > 1$

$$|I_\lambda(x)| \le Cke^{-x}(x+1)\exp\left(\frac{2\pi^2 k}{x+1}\right) g(x+1) =$$

$$= Ck(x+1)\exp\left(\frac{2\pi^2 k}{x+1}\right)\varphi(x+1) \tag{9}$$

(здесь и далее через C обозначаются не обязательно одинаковые положительные постоянные).

3. С учетом неравенства (9) получаем из (5) и (6) соответственно (при $1 \leq r < R < \infty$)

$$\int_r^R \left(\varphi(x) - Re\,\varphi(x+2\pi ki)\right)e^{-\frac{x}{k}}dx \leq$$

$$\leq Ck\left(\exp\left\{-\frac{r}{k}+\frac{2\pi^2 k}{r+1}\right\}(r+1)\varphi(r+1)+\exp\left\{-\frac{R}{k}+\frac{2\pi^2 k}{R+1}\right\}(R+1)\varphi(R+1)\right), \tag{10}$$

$$\int_r^R \left(\varphi(x) + Re\,\varphi(x+2\pi ki)\right)e^{-\frac{3x}{2k}}dx \leq$$

$$\leq Ck\left(\exp\left\{-\frac{3r}{2k}+\frac{2\pi^2 k}{r+1}\right\}(r+1)\varphi(r+1)+\exp\left\{-\frac{3R}{2k}+\frac{2\pi^2 k}{R+1}\right\}(R+1)\varphi(R+1)\right). \tag{11}$$

Замечая, что $\varphi(x) - Re\,\varphi(x+2\pi ki) = e^{-x}(g(x) - Re\,g(x+2\pi ki)) \geq 0$, получаем из (10) неравенство

$$\int_r^R \left(\varphi(x) - Re\,\varphi(x+2\pi ki)\right)e^{-\frac{3x}{2k}}dx \leq$$

$$\leq Ck\left(\exp\left\{-\frac{r}{k}+\frac{2\pi^2 k}{r+1}\right\}(r+1)\varphi(r+1)+\exp\left\{-\frac{R}{k}+\frac{2\pi^2 k}{R+1}\right\}(R+1)\varphi(R+1)\right) \tag{12}$$

Складывая (11) и (12), записываем (при $1 \leq r < R < \infty$)

$$\int_r^R \varphi(x)e^{-\frac{3x}{2k}}dx \leq Ck\left(\exp\left\{-\frac{r}{k}+\frac{2\pi^2 k}{r+1}\right\}(r+1)\varphi(r+1)+\right.$$

$$\left.+\exp\left\{-\frac{R}{k}+\frac{2\pi^2 k}{R+1}\right\}(R+1)\varphi(R+1)\right). \tag{13}$$

Поскольку $\underline{\lim}_{R\to\infty} R^{-1}\ln g(R) = 1$, а $\varphi(R) = e^{-R}g(R)$, то $\underline{\lim}_{R\to\infty} \exp\times$ $\times\left(-\frac{R}{k}+\frac{2\pi^2 k}{R+1}\right)(R+1)\varphi(R+1) = 0$. Выберем последовательность $\{R_k\}$, $R_k \to \infty$, на которой достигается нижний предел. Устремим в (13) $R\to\infty$ по последовательности $\{R_k\}$. Получаем, что интеграл, стоящий слева в (13), сходится и

$$\int_r^\infty \varphi(x)e^{-\frac{3x}{2k}}dx \leq Ck(r+1)\exp\left\{-\frac{r}{k}+\frac{2\pi^2 k}{r+1}\right\}\varphi(r+1), \quad r \geq 1. \tag{14}$$

Оценим снизу интеграл, стоящий слева в (14). Выберем произвольное $\lambda > 1$. Имеем

$$\int_r^\infty \varphi(x)e^{-\frac{3x}{2k}}dx \geq \int_{\lambda(r+1)}^\infty \varphi(x)e^{-\frac{3x}{2k}}dx \geq g(\lambda(r+1))\frac{e^{-\lambda(r+1)(1+3/(2k))}}{1+3/(2k)} =$$

$$= \varphi\left(\lambda(r+1)\right)\frac{e^{-3\lambda(r+1)/(2k)}}{1+3/(2k)} .$$

Подставляя последнюю оценку в (14), получаем (при $r \geq 1$)

$$\varphi\left(\lambda(r+1)\right) \leq Ck(r+1)\exp\left\{-\frac{r}{k}+\frac{3\lambda(r+1)}{2k}+\frac{2\pi^2 k}{r+1}\right\}\varphi(r+1) .$$

Подставив в последнее равенство $k=[r]+1$, получим

$$\varphi\left(\lambda(r+1)\right) \leq C(\lambda)(r+1)^2\varphi(r+1) , \tag{15}$$

где $C(\lambda)$ зависит только от λ. Итерируя последнее неравенство, получаем для любого $x \geq 2$

$$\varphi(x) \leq [C(\lambda)]^n\left(\frac{x}{\lambda}\right)^2\left(\frac{x}{\lambda^2}\right)^2\cdot\ldots\cdot\left(\frac{x}{\lambda^n}\right)^2\varphi\left(\frac{x}{\lambda^n}\right)=$$

$$= [C(\lambda)]^n\frac{x^{2n}}{\lambda^{n(n+1)}}\varphi\left(\frac{x}{\lambda^n}\right).$$

Итерировать можно, пока $x\lambda^{-n}\geq 2$. Выберем $n=[\log_\lambda \frac{x}{2}]$. Записываем

$$\varphi(x) \leq x^{\log_\lambda(C(\lambda))}\exp\left(\frac{\ln^2 x}{\ln\lambda}\right)\varphi(2\lambda) .$$

Поскольку $\lambda>1$ произвольно велико, то из последнего неравенства следует

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{\ln^+\varphi(x)}{\ln^2 x} = \overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{\ln^+\ln^+ f(ix)-x}{\ln^2 x} = 0 .$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Не уменьшая общности, можно считать, что ψ – непрерывная монотонно стремящаяся к бесконечности функция, $\psi(1)=1$, а $\psi(t)t^{-1}$, монотонно убывая, стремится к нулю. Обозначим через θ определенную на интервале (0, 1) функцию, обратную к $\psi(t)t^{-1}$. Рассмотрим целую функцию

$$g(z) = a\int_0^1 e^{xz}\, e^{-(1-x)\theta(1-x)}dx ,$$

где a выбрано так, чтобы $g(0)=1$. Легко видеть, что функция $y\theta(y)$ убывает на (0; 1), поэтому и $\exp(-(1-x)\theta(1-x))$ является монотонно убывающей. Поэтому имеем оценку (при $0<\varepsilon<1$)

$$g(t) \leq a\left(e^{\varepsilon t} + e^{t-(1-\varepsilon)\theta(1-\varepsilon)}\right) .$$

Полагая $\varepsilon = 1-\psi(t)t^{-1}$, получаем $g(t)\leq 2a\exp(t-\psi(t))$. В качестве целой характеристической функции f, существование которой утверждается в теореме 2, возьмем $f(z)=\exp\left\{\frac{1}{2a}\left(g(-iz)-1\right)\right\}$.

Теорема 2 доказана.

Выражаю благодарность И.В.Островскому за постановку задачи.

1. Островский И.В. О росте целых и аналитических в полуплоскости хребтовых функций // Мат. сб. - 1982. - 119 (161), вып. 1. - С. 150-159.
2. Зимогляд В.В. О росте целых функций, удовлетворяющих специальным неравенствам // Теория функций, функцион. анализ и их прил. - 6. - С. 30-41.
3. Вишнякова А.М., Островский И.В. Аналог теоремы Марцинкевича для целых хребтовых функций, не имеющих нулей в угловой области // Докл. АН УССР. Сер. А. - 1987. - № 9. - С. 8-12.
4. Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. - М. : Наука, 1970. - 591 с.

УДК 517+519.46

И.В.Воевода

БОРЕЛЕВСКИЕ ПОЛЯ ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ СЕПАРАБЕЛЬНЫХ ГРУПП И ИХ СВЯЗНЫЕ КОМПОНЕНТЫ

Рассмотрены борелевские поля локально компактных сепарабельных (л.к.с.) групп и их связные компоненты; доказано, что связные компоненты также образуют борелевское поле. Описана структура поля борелевских л.к.с. групп. Доказано, что подмножества связных л.к.с. групп и вполне несвязных л.к.с. групп являются борелевскими во множестве всех польских групп.

К.Сазерленд [1] построил естественную параметризацию польских групп, т.е. групп, являющихся полным сепарабельным метрическим пространством с левоинвариантной метрикой и непрерывными групповыми операциями относительно топологии, заданной с помощью этой метрики. В работе [1] также были рассмотрены борелевские поля польских групп. Подобные объекты возникают в связи с классификацией возможных действий л.к.с. групп на алгебрах фон Неймана. Автор отметил, что осталось много открытых задач, связанных с этими объектами.

В настоящей статье рассмотрены борелевские поля л.к.с. групп и доказано, что поля связных компонент таких групп являются также борелевскими. Кроме того, доказано, что подмножества связных и вполне несвязных л.к.с. групп являются борелевскими подмножествами во множестве польских групп. Подобная теорема доказана в [1] для локально компактных, компактных, дискретных и абелевых групп,

ISBN 5-12-002405-X. Теория операторов, субгармонические функции. Киев, 1991.

причем К.Сазерленд заметил, что доказательство для топологически определенных типов групп представляет значительную трудность.

<u>Термины, основные определения, предварительные сведения.</u> Пусть $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Рассмотрим множество PG пар $(\mu d) \in N^{N \times N} \times [0; 1]^{N \times N}$, удовлетворяющих следующим аксиомам:

1. μ – "групповая операция" на N, т.е.

1) $\mu(\mu(m,n), p) = \mu(m, \mu(n, p))$ для $m, n, p \in N$;

2) $\mu(0, n) = \mu(n, 0) = n$ для $n \in N$;

3) $k \in N \to \mu(k, n)$ – сюръективно для $n \in N$, как $k \to \mu(n,k)$.

2. d – метрика на N:

1) $d(m,n) = d(n,m)$ для $m, n \in N$;

2) $d(m,n) = 0 \iff m = n$;

3) $d(m,n) \leq d(m,p) + d(p,n)$, $m, n, p \in N$.

3. (N, μ, d) – топологическая группа с левоинвариантной d:

1) если $\tau_\mu(n)$ – единственное решение уравнения $\mu(k, n) = 0$, то τ_μ d-непрерывно;

2) μ является d-непрерывным;

3) $d(\mu(m,n), \mu(m,p)) = d(n,p)$, $m, n, p \in N$.

<u>Теорема</u> [1]. Пространство PG пар (μ, d), удовлетворяющих условиям 1–3, является стандартным борелевским пространством в относительной борелевской структуре.

В [1] вводится следующее определение борелевского отображения.

Если для всякого $x \in X$, где (X, μ) – пространство Лебега, G_x – польская группа, то отображение $x \to G_x$ называется борелевским, когда существуют борелевское отображение $f : X \to PG$ и отображение $\{\theta_x : x \in X\}$, где $\theta_x : G_x \to G(f(x))$ – изоморфизм польских групп для всякого $x \in X$.

Далее, в [1, с. 1073] доказана

<u>Теорема</u>. Отображение $x \to G_x$ из стандартного борелевского пространства X в польские группы является борелевским тогда и только тогда, когда $Y = \bigcup_x G_x$ допускает стандартную борелевскую структуру, такую, что:

1) проекция $\pi : Y \to X$ борелевская;

2) относительная борелевская структура на $G_x = \pi^{-1}(x)$ совпадает со структурой, порожденной топологией;

3) отображения $(y,y')\in Y*Y=\{(y,y')\in Y\times Y: \pi(y)=\pi(y')\}\to$ $\to yy'\in Y$; $y\in Y\to y^{-1}\in Y$ борелевские;

4) существует счетный набор отображений $g_k: X\to Y$, где $g_k(x)\in G_x$ для всех x и метрик δ_x на G_x, совместимых с топологией, таких, что:

а) $\{g_k(x)\}: k\in N$ плотны в G_x для $x\in X$;

б) отображение $y\in Y\to \delta_{\pi(y)}=(y;g_k(\pi(y)))$ борелевское для всех $k\in N$.

Примем за определение борелевского поля групп следующее утверждение [1].

$Y=\bigcup_z G_z$ называется борелевским полем групп, если:

1) проекция $\pi: Y\to Z$ – борелевское отображение;

2) отображения $(y,y')\in Y*Y=\{(y,y')\in Y\times Y: \pi(y)=\pi(y')\}\to$ $\to (yy')\in Y$; $y\in Y\to y^{-1}$ борелевские;

3) есть счетный набор борелевских отображения $\{g_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ $g_k: Z\to Y$; $g_k(z)\in G_z$, $z\in Z$ и метрик δ_z на G_z, совместимых с топологией, таких, что:

а) $\{g_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ плотны в G_z, $z\in z$;

б) отображение $y\in Y\to \delta_{\pi(y)}(y,g_k(\pi(y)))$ – борелевское; $k\in N$.

Пусть $A_z\in X$, $z\in Z$, где $(X;\mu_x),(z,\mu_z)$ – пространства Лебега. Тогда A_z называется полем множеств в $X\times Z$.

A_z называется борелевским полем множеств в $X\times Z$.

Наряду с PG в [1] введено пространство $\mathcal{P}\mathcal{G}$:

$$\mathcal{P}\mathcal{G}=\{(\mu,d,\varphi)\in PG\times[0,1]^N\};\ \varphi\in\overline{\Phi(\mu,d)},$$

где $\Phi(\mu,d)=\{\varphi_n^{(\mu,d)},\ n\in N\}$, $\varphi_n^{(\mu,d)}(m)=1/2\,(d(m,n)+$ $+d(\tau_\mu(m),\tau_\mu(n))$, $\mu(\tau_\mu(n),n)=0$.

В [1] доказано, что $\mathcal{P}\mathcal{G}$ является стандартным борелевским пространством. Мы будем использовать это понятие в п. 3.

<u>1. Поля связных компонент</u>. Рассмотрим поля связных компонент поля л.к.с. групп.

Докажем сначала несколько вспомогательных лемм.

<u>Лемма 1.1</u>. Пусть G – л.к.с. группа, U – открытая, симметричная окрестность единицы в G. Тогда $H_n=\bigcup_{k=1}^{\infty}U^k$ – открытая подгруппа G. Кроме того, для всякого заданного счетного плотного подмножества $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}\subset G$ и окрестности единицы $V\subset U$ верно $H_U=\bigcup_{k:g_k\in U}Vg_k$.

<u>Доказательство.</u> $H_U=\bigcup_{k=1}^{\infty}U^k$, $v\in U^n$, $v=x_1,\dots,x_n$, где $x_k\in U$, $k=1,2,\dots,n$.

Для всякого n существует такая окрестность V_n единицы в G, что $V_n^n \subset U$.

Поскольку $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ всюду плотно в G, то существует g_{k_1}, такое, что $x_1 g_{k_1} \in V_n$; существует g_{k_2}, такое, что $g_{k_1}^{-1} x_2 g_{k_2} \in V_n$ и т.д. Наконец, существует g_{k_n}, такое, что $g_{k_n}^{-1} x_n g_{k_n} \in V_n$, и, таким образом, для всякого $v \in U^n$ существует g_{k_n}, такое, что $v g_{k_n} \in U$. Следовательно, $\bigcup_{n=1}^{\infty} U^n \subset \bigcup_{k: g_k \in U} U g_k$. Но $\bigcup_{k: g_k \in U} U g_k \subset \bigcup_{k=1} U^2$, так как $g_k \in U$, в результате получим $H_U = \bigcup_{k: g_k \in U} U g_k$. Затем, пусть $V \subset U$, тогда $\bigcup_{k: g_k \in U} V g_k \subset H_U = \bigcup_{k: g_k \in U} U g_k$.
Докажем обратное включение. Для этого достаточно доказать, что $U \subset \bigcup_{k: g_k \in U} V g_k$. Пусть это неверно, т.е. существует $x \in U$, такой, что $x \notin \bigcup_{k: g_k \in U} V g_k$.

Поскольку $x \in U$, то $x^{-1} \in U$, и существует такая окрестность $V_1 \subset V$, что $x^{-1} V_1 \subset U$. В силу того что $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ всюду плотно в U, существует $g_t \in x^{-1} V_1$. Поэтому $x g_t \in V_1$, т.е. $x \in V_1 g_t^{-1}$. Но $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ – группа, U – симметричная окрестность, значит, существует $g_{t_1} = g_t^{-1}$, такое, что $g_{t_1} \in U$. Следовательно, $x \in V_1 g_{t_1}$, т.е. получили противоречие. Таким образом. $H_U = \bigcup_{k=1} V g_k$.

<u>Лемма 1.2</u>. Пусть G – л.к.с. группа. Тогда любая ее открытая подгруппа G_1 содержит связную компоненту G_0 группы G.

<u>Доказательство.</u> Пусть G_0 – связная компонента группы G. Тогда $G_0 = (G_0 \cap G_1) \cup (G_0 \cap (G \setminus G_1))$. Таким образом, G_0 представлена в виде объединения двух непересекающихся замкнутых множеств*), из которых одно должно быть пусто, так как G_0 связна. Но $G_0 \cap G_1 = \emptyset$, так как это пересечение содержит единицу группы G, тогда $G_0 \cap (G \setminus G_1) = \emptyset$ ∎.

<u>Лемма 1.3</u>. Пусть $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность открытых симметричных окрестностей единицы л.к.с. группы G; $\rho(U_n) = \max_{x,y \in U_n} d(x,y)$, $\rho(U_n) \to 0$; e – единица группы G; $\{H_{U_n}\}_{n=1}^{\infty}$ – соответствующая последовательность открытых групп, построенных, как и в лемме 1:1; G_0 – связная компонента группы G. Тогда $\bigcap_{n=1}^{\infty} H_{U_n} = G_0$.

<u>Доказательство.</u> Канонический гомоморфизм $\varphi: G \to G/G_0$ открыт и непрерывен (см. [2]).

Пусть R – открытая окрестность единицы в G/G_0, тогда так как G/G_0 – вполне несвязная группа, то для всякой R в G/G_0 су-

*) Очевидно, что открытая подгруппа всегда замкнута.

ществует открытая компактная подгруппа N_R группы G/G_0, такая, что $N_R \subset R$ (см. [2]).

Из леммы 1.2 получим $G_0 \subset \varphi^{-1}(N_R)$, поскольку N_R открыта, а φ открыт и непрерывен.

Пусть $\{R_j\}_{j=1}^{\infty}$ - убывающая последовательность открытых окрестностей $\tilde{e}$ в G/G_0, такая, что $\tilde{\rho}(R_j) \to 0$, где $\tilde{e}$ - единица группы G/G_0; $\tilde{\rho}(R_j)$ - диаметр окрестности R_j, тогда $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} N_{R_j} = \tilde{e}$.

Проведем преобразование: $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \varphi^{-1}(N_j) = \varphi^{-1}(\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} N_{R_j}) = \varphi^{-1}(\tilde{e}) = G_0$. Если теперь $\rho(U_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, то существует такое n_{0j}, что для всякого $n > n_{0j}$: $\bar{U}_n \subset \varphi^{-1}(N_{R_j})$ для любого фиксированного j, так как $\varphi^{-1}(N_{R_j})$ открыто в G. Тогда $H_{U_n} \subset \varphi^{-1}(N_{R_j})$, так как $\varphi^{-1}(N_{R_j})$ - группа. Таким образом, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} H_{U_n} \subset \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \varphi^{-1}(N_{R_j}) = G_0$, т.е. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} H_{U_n} \subset G_0$. Обратное включение верно по лемме 1.2, так как H_{U_n} - открытая подгруппа для $n = 1,2,\dots$, и $G_0 \subset H_{U_n}$, $n = 1,2,\dots$

Таким образом, связная компонента представлена в виде пересечения убывающей последовательности открытых групп H_{U_n} ■.

Теорема 1.4. Если $\{G_z\}_{z\in Z}$ - борелевское поле л.к.с. групп, то поле $\{G_{0z}\}_{z\in Z}$ связных компонент этих групп также является борелевским.

Доказательство. Пусть $V_{z,n} = \{v_z : \rho_z(e_z, v_z) < \frac{1}{n}\}$ - борелевское поле открытых окрестностей в поле группы G_z, где ρ_z - метрика группы G_z, e_z - единица группы G_z, $\{V_{z,n}\}_{n=1}$ - фундаментальная последовательность борелевских полей открытых окрестностей единицы, $z \in Z$. Следовательно, в силу леммы 1.1 $G_{z,n} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} V_{z,n}^k$ - борелевское поле открытых подгрупп $\bigcup\limits_{z\in Z} G_z$.

Тогда из леммы 1.3 получим $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_{z,n} = G_{z,0}$, а из этого равенства сразу следует, что $\{G_{z,0}\}_{z\in Z}$ - борелевское поле групп■.

2. Структура поля борелевских л.к.с. групп.

Теорема 2.1. Пусть $\{G_z\}_{z\in Z}$ - борелевское поле л.к.с. групп, $\{G_{z,0}\}_{z\in Z}$ - поле их связных компонент. Тогда множества $Z_1 = \{z\in Z : G_{z,0} = e_z\}$, где e_z - единица G_z, $Z_2 = \{z\in Z : G_{z,0} = G_z\}$, $Z_3 = \{z \in Z,\ G_{z,0}$ - открытая подгруппа $G_z\}$, являются борелевскими.

Доказательство. Из теоремы 1.4: $\{G_{z,0}\}_{z\in Z}$ - борелевское поле групп. Следовательно, существуют $\{g_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ - борелевские функции, всюду плотные в $G_{z,0}$, $z \in Z$. Тогда $Z_1 = \{ z \in Z_1 : g_1(z) = \ldots = g_k(z) = \ldots = e_z \}$. Но $\{g_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ – борелевские функции, поэтому $Z_1 = \{ z \in Z : e_z = g_1(z) = g_2(z) = \cdots \}$ – борелевское множество.

В [1] доказано следующее утверждение.

Если

1) $\bigcup_{z \in Z} G_z$ – борелевское поле групп;

2) $\bigcup_{z \in Z} N_z$ – борелевское поле групп, N_z – замкнутая нормальная подгруппа G_z, $z \in Z$,

то $\bigcup_{z \in Z} G_z / N_z$ – также борелевское поле групп ([1], теорема 3.1, с. 1077).

Следовательно, $G_z / G_{z,0}$ – борелевское поле групп. Пусть $z \in Z_2$, т.е. $G_z = G_{z,0}$, $G_z / G_{z,0} = e_z$, и получим $Z_2 = \{ z \in Z : G_z / G_{z,0} = \tilde{e}_z \}$, а это борелевское множество, что легко доказать, пользуясь рассуждениями, примененными при доказательстве борелевских свойств Z_1.

Если теперь $z \in Z_3$, то $H_z = G_z / G_{z,0}$ – дискретная группа. Как доказал К.Сазерленд, подмножество D дискретных групп параметрического пространства PG является борелевским. Пусть $\varphi : Z \to PG$, где $\varphi : z \to H_z$, тогда $\{ z \in Z : \varphi(z) \in D \}$ – борелевское подмножество, поскольку D – борелевское подмножество и φ – борелевское отображение по определению. Но $Z_3 = \{ z \in Z : G_{z,0}$ – открыта $\} = \{ z \in Z : H_z$ – дискретна $\} = \{ z \in Z : \varphi(z) \in D \}$. Поэтому множество Z_3 – борелевское ■.

3. Подмножество связных локально компактных сепарабельных групп и его борелевость. Целью настоящего пункта является доказательство теоремы 3.1. Аналогичное утверждение относительно дискретных, абелевых, л.к.с. групп доказано в [1, с. 1072], но в этой статье отмечено, что для топологически определенных типов групп эта задача является сложной.

Теорема 3.1. Множество л.к.с. связных групп – борелевское подмножество во множестве всех л.к.с. групп.

Доказательство. Рассмотрим борелевское подмножество (см. [1], с. 1071)

$$E(0, m, N) = \left\{ (\mu, d, \varphi) : \left| \varphi_0^{(\mu,d)}(m) - \varphi(m) \right| < \frac{1}{N} \right\} \cap \mathcal{PG}.$$

Но тогда $\bigcap_m E(0, m, N) = V_N$ – также борелевское подмножество в $\mathcal{PG}$. Заметим, что V_N при каждом фиксированном (μ, d) – открытая окрестность единицы в $G(\mu, d)$.

Теперь рассмотрим $H_{V_n} = \bigcup_k V_n^k$ = подгруппу $G(\mu,d)$ при каждом фиксированном (μ,d). Борелевские свойства этого множества в $\mathcal{P}\mathcal{Y}$ доказываются аналогично доказательству теоремы 1.4.

Рассмотрим $B_0 = \bigcap_n H_{V_n} \cap B$, где $B = \pi^{-1}(D)$; $D = \{(\mu,d) : G(\mu,d)$ – л.к.с. группа$\} \subset PG$; $\pi : \mathcal{P}\mathcal{Y} \to PG$ – борелевское отображение; D – борелевское множество, как доказано в [1], поэтому B и B_0 – борелевские множества.

Тогда введем $E_k = \{(\mu,d) : \varphi_k(\mu,d) \subset B \setminus B_0\}$ – борелевское подмножество в PG, так как $B \setminus B_0$ – борелевское подмножество, а $\{\varphi_k(\mu,d)\}_{k=1}^{\infty}$ – всюду плотное в $G(\mu,d)$ счетное семейство борелевских отображений из PG в $\mathcal{P}\mathcal{Y}$ (см. [1]). Следовательно, $\bigcup_{k\in N} E_k$ – также борелевское подмножество в PG.

Таким образом, $D \setminus (D \cap (\bigcup_k E_k))$ – также борелевское множество, но это то множество, на котором $G(\mu,d) = G(\mu,d)_0$ ∎.

Замечание 3.2. Множество л.к.с. вполне несвязных групп – борелевское подмножество в множестве всех л.к.с. групп.

Доказательство. Доказываем аналогично теореме 3.1, имея в виду, что в терминах теоремы 3.1 множество $E = \{(\mu,d) : B_0 = e(\mu,d)\}$ борелевское, так как B_0 борелевское.

1. Sutherland C.E. A Borel parametrization of Polish group // Publs. Res. Inst. Math. Sci. - 1985. - 21, N 6. - P.1067-1086.
2. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. - М. : Гостехтеоретиздат, 1954. - 515 с.

УДК 51 .55

Е.Е.Давыдова

УСЛОВИЯ МЕДЛЕННОГО РОСТА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА ВДОЛЬ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ГИПЕРПЛОСКОСТИ

Если множество F из $\mathbb{R}^n$ имеет не слишком быстро растущие на бесконечности лакуны, то показано, что целые в $\mathbb{C}^n$ функции экспоненциального типа, ограниченные на множестве E, плотном относительно F, допускают рост вдоль вещественной гиперплоскости, зависящий от размеров лакун, типа и супремума функций на E.

В работе используются следующие обозначения: $\mathbb{C}^n$ – n-мерное линейное комплексное пространство; $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y =$

ISBN 5-12-002405-X. Теория операторов, субгармонические функции. Киев. 1991.

$= y = (y_1, \dots, y_n)$ – векторы из $\mathbb{R}^n$. В пространстве $\mathbb{C}^n$ рассматриваются нормы: $|z|_p = \{|z_1|^p + \dots + |z_n|^p\}^{1/p}$, $1 \le p < \infty$, и $|z|_\infty = \max\{|z_j| : j = 1, \dots, n\}$. Условимся через $K(x, h)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $h > 0$, обозначать гиперкуб $\{y \in \mathbb{R}^n : |x - y|_\infty \le h\}$. Полагаем $k! = k_1! \dots k_n!$, $z^k = z_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot z_n^{k_n}$, где $k = (k_1, \dots, k_n)$ – мультииндекс, а $z \in \mathbb{C}^n$; $mes_n[A]$ служит для обозначения лебеговой меры борелевского множества $A \subset \mathbb{R}^n$. Через $P(x, y)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, обозначается произведение n ядер Пуассона для полуплоскостей, т.е.

$$P(x,y) = \pi^{-n} \prod_{j=1}^{n} |y_j| (x_j^2 + y_j^2)^{-1}, \quad y_1 \cdot \ldots \cdot y_n \ne 0.$$

Назовем целую функцию $f(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, целой функцией экспоненциального типа не выше σ, если величина $\sup\{|f(z)| \exp(-A|z|_1 : z \in \mathbb{C}^n\}$ конечна при любом $A > \sigma$. Если, кроме того, при каждом $A < \sigma$ этот супремум бесконечен, то $f(z)$ называют целой функцией экспоненциального типа σ.

В работе рассматриваются два типа плотности одних подмножеств $\mathbb{R}^n$ относительно других. Первый тип плотности определяется следующим образом. Пусть E и F – подмножества $\mathbb{R}^n$, причем E борелевское. Множество E называется плотным (по мере Лебега) относительно F, если найдутся такие положительные константы L и δ, что $\inf\{mes_n[E \cap K(x, h)] : x \in F\} = \delta$. Множества, плотные относительно $\mathbb{R}^n$, принято называть относительно плотными.

Плотность второго типа означает следующее. Пусть E и F – подмножества $\mathbb{R}^n$, $\delta > 0$, а $\sup\{\inf[|x - y|_1 : y \in E] : x \in F\} = \delta$. Тогда множество E называется δ-сетью для F.

Отметим, что множества E, плотные в смысле любого из этих определений, не обязаны быть подмножествами F, а δ-сети могут быть дискретными.

Начало тому направлению исследований, к которому примыкает настоящая работа, положил следующий классический результат Картрайт [1]: для любой целой функции $f(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, экспоненциального типа $\sigma < \pi$ выполняется неравенство $\sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\} \le C \sup\{|f(m)| : m \in \mathbb{Z}\}$, где конечная величина $C = C(\sigma)$ не зависит от функции $f(z)$. Теорема Картрайт неоднократно уточнялась и обобщалась (см. [2-6, 10, 11]), но до недавнего времени речь всегда шла о целых функциях одного комплексного переменного. Простой многомерный аналог теоремы Картрайт легко получается редукцией к одному переменному, если множество E, на котором модуль целой функции ограничен априори, является прямым произведением подмножеств вещественной оси. В начале 70-х годов были получены следующие аналоги результата Картрайт, в которых множество E не обязано быть прямым произведением одномерных.

Теорема А (Б.Я.Левин [7]). Пусть E – относительно плотное подмножество $\mathbb{R}^n$. Тогда каждому $\sigma \in (0,\infty)$ отвечает такая величина $\Gamma_\sigma = \Gamma_\sigma(E) < \infty$ что, какова бы ни была целая функция $f(z)$ экспоненциального типа не выше σ, выполняется неравенство

$$\sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}^n\} \leq \Gamma_\sigma \sup\{|f(y)| : y \in E\}.$$

Эта теорема была сообщена Б.Я.Левиным в докладе на Всесоюзной конференции по теории функций комплексного переменного (Харьков, 1971 г.), причем не только для целых, но и для плюрисубгармонических в $\mathbb{C}^n$ функций конечной степени. В.Э.Кацнельсон [8] установил, что утверждение этой теоремы остается справедливым для более общего класса полисубгармонических в $\mathbb{C}^n$ функций конечной степени.

Теорема В (В.Н.Логвиненко [9]). Пусть E – δ-сеть в $\mathbb{R}^n$, а натуральное число $p > 8n$. Тогда для любого положительного σ, удовлетворяющего условию $2p\sigma\delta < 1$, и любой целой функции $f(z)$ экспоненциального типа не выше σ справедливо неравенство

$$\sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}^n\} \leq (1-\delta\sigma)^{-1} \sup\{|f(y)| : y \in E\}.$$

Естественно возникает вопрос, каким будет поведение целой функции $f(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, экспоненциального типа на вещественной гиперплоскости $\mathbb{R}^n$, если известно, что она ограничена на множестве, более редком, чем относительно плотное или δ-сеть в $\mathbb{R}^n$. Докажем две следующие теоремы.

Теорема С (В.Н.Логвиненко [12]). Пусть измеримое множество $F \subset \mathbb{R}^n$ таково, что при некотором $\alpha > 0$

$$\int\limits_{CF\setminus K(0,e)} (\ln|x|_\infty)^{-\alpha} dx < \infty, \tag{1}$$

а E – плотное относительно F множество. Тогда любым положительным σ и ε отвечает такая величина $C = C(E, F, \sigma, \varepsilon) < \infty$, что для каждой целой функции $f(z)$ экспоненциального типа не выше σ, модуль которой ограничен на E, при всех $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$|f(x)| \leq C \sup\{|f(y)| : y \in E\} \exp\{\varepsilon(\ln + |x|_2))^{\alpha/n}\}. \tag{2}$$

Эта оценка точна в следующем смысле. Каковы бы ни были σ-положительное число и положительная функция $\psi(R)$, $R > 0$, для которой при любом $\varepsilon > 0$ выполняется $\lim\limits_{R\to\infty} \psi(R)\exp\{-\varepsilon(\ln R)^{\alpha/n}\} = 0$, найдутся измеримое множество $F \subset R^n$, удовлетворяющее условию (1), и целая функция $f(z)$ экспоненциального типа не выше σ, модуль которой ограничен на F, а

$$\lim_{|x|_2 \to \infty} \sup \left\{ (\varphi(|x|_2))^{-1} |f(x)| \right\} = \infty .$$

Теорема Д (Е.Д.Толстяк [14]). Пусть измеримое множество $F \subset R^n$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_{CF \setminus K(0,1)} |x|_2^{-\alpha n} dx < \infty, \quad 0 < \alpha < 2/(n+2). \tag{3}$$

Любым положительным ε и σ отвечает такая величина $C = C(E, F, \sigma, \varepsilon) < \infty$, что для каждой целой функции $f(z)$ экспоненциального типа не выше σ при каждом x из R^n выполняется оценка

$$|f(x)| \le C \sup\{|f(y)| : y \in F\} \exp\{|x|_2^{\alpha+\varepsilon}\}. \tag{4}$$

В теореме 1 показано, что оценку (4) можно уточнить, и полученный результат при этом не улучшить.

Теорема 1. Пусть F – подмножество R^n, удовлетворяющее условию (3) при α из интервала (1), а E – множество, плотное относительно F. Тогда для чисел $\sigma > 0$ и $\varepsilon > 0$ найдется такая величина $C = C(E, F, \sigma, \varepsilon) < \infty$, что для любой целой функции $f(z)$ экспоненциального типа не выше σ, при каждом $x \in R^n$ верна оценка

$$|f(x)| \le C \sup\{|f(y)| : y \in E\} \exp\{\varepsilon |x|_\infty^\alpha\},$$

которая не улучшаема в том же смысле, что и оценка (2) теоремы С.

Теорема 2. Пусть измеримое множество F из R^n удовлетворяет (3), а положительное число $\alpha < 1/(n+1)$, E – δ-сеть для F, число $\sigma > 0$ таково, что $4p\sigma\delta < 1$, где p – наименьшее натуральное число, для которого справедливо $p > en$. Тогда любому $\varepsilon > 0$ отвечает такая величина $C = C(E, F, \sigma, \varepsilon) < \infty$, что для каждой целой функции $f(z)$ экспоненциального типа не выше σ при всех $x \in R^n$ выполняется неравенство

$$|f(x)| \le C \exp\{|f(y)| : y \in E\} \exp\{\varepsilon |x|_\infty^{\alpha(n+1)}\}.$$

Следствие 1. Пусть удовлетворяются условия теоремы 1, но целая функция $f(z)$, $z \in C^n$, из класса $L^q(E)$, т.е. $\int_E |f(x)|^q dx < \infty$. Тогда любому положительному ε отвечает такая величина $C = C(E, F, \sigma, \varepsilon) < \infty$, что при всех $R > 0$ верно

$$\int\limits_{K(0,R)} |f(x)|^q dx \le C \left\{ \int_E |f(x)|^q dx \right\} \exp\{\varepsilon R^\alpha\}.$$

Следствие 2. Если выполнены условия теоремы 2, но $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ – дискретная несгущающаяся δ-сеть и $f(z)$ из класса $l^q(E)$, т.е. $\sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k)|^q < \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая величина $C = C(E, F, \sigma, \varepsilon) < \infty$, что при каждом положительном R справедлива оценка

$$\int_{K(0,R)} |f(x)|^q dx \leq C\left\{\sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k)|^q\right\} \exp\left(\varepsilon R^{\alpha(n+1)}\right).$$

Доказательства теорем 1 и 2 основаны на модификации аппроксимационного метода, предложенного В.Н.Логвиненко в [9, 12].

1. Модификация аппроксимационного метода В.Н.Логвиненко и другие вспомогательные результаты. Основу аппроксимационного метода составляют леммы 1–3.

Лемма 1. Пусть $f(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$ – целая функция экспоненциального типа не выше σ, $0 < \sigma < \infty$, $\sum_{|k|_1=0}^{\infty} c_k z^k$ – ее разложение в степенной ряд, p – какое-нибудь натуральное число, большее $\sigma e n$. Тогда для $\varepsilon > 0$ найдется такая величина $B(\varepsilon) < \infty$, что для произвольного $m \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\max\left\{\left|f(z) - \sum_{|k|_1=0}^{pm} c_k z^k\right| : |z|_\infty \leq m/\sigma\right\} \leq$$

$$\leq B(\varepsilon) \sup\left\{|f(z)| \exp\left\{-(\sigma+\varepsilon/2)|z|_1\right\} : z \in \mathbb{C}^n\right\}\left(e(\sigma+\varepsilon)n/p\right)^{pm}. \qquad (5)$$

Доказательство этой леммы дословно повторяет доказательство соответствующего утверждения из [9]. Мы лишь выделили в явном виде зависимость коэффициента при $(e(\sigma+\varepsilon)n/p)^{pm}$ от функции $f(z)$.

Лемма 2. Пусть $f(z)$ – целая функция экспоненциального типа не выше σ, а

$$A = A_{f,\varepsilon} = \sup\left\{|f(z)| \exp\left\{-(\sigma+\varepsilon/2)|z|_1\right\} : z \in \mathbb{C}^n\right\}.$$

Найдутся числа $\omega = \omega_\varepsilon \in (0,1)$, $B = B(\varepsilon) > 0$ и равномерно сходящаяся к $f(z)$ на каждом компакте в $\mathbb{C}^n$ последовательность целых в $\mathbb{C}^n$ функций $\{\varphi_m(z)\}_{m=1}^{\infty}$ экспоненциального типа не выше $pc\sigma$, где p – натуральное число, большее en, а $c = 2 + e^{2n}(2\sin 1/2)^{-1}$, такие, что справедливы импликации:

1) $x \in K(0, m/\sigma) \Rightarrow |\varphi_m(x)| \leq |f(x)| + A \cdot B \cdot \omega^m$;

2) $x \in K(0, m/(2c\sigma)) \Rightarrow |\varphi_m(x)| \geq 2^{-n}|f(x)| - A \cdot B \cdot \omega^m$;

3) $|x|_\infty \geq m/\sigma \Rightarrow |\varphi_m(x)| \leq A \cdot B \cdot \omega^m$.

Интересно сравнить лемму 2 с ее аналогом, использовавшимся ранее (лемма 2 работы [9]). У В.Н.Логвиненко размеры компактов, на которых $|\varphi_m(x)|$ оценивается через $|f(x)|$ сверху и соответственно снизу, относятся как $\sqrt{m}$. В нашей лемме отношение этих размеров не превосходит конечной константы. Этого удалось достичь за счет повышения величин экспоненциальных типов функций $\varphi_m(z)$ в конечное число раз.

Доказательство. Достаточно доказать лемму при $\sigma = 1$. Общий случай сводится к этому с помощью гомотетии $z \to z/\sigma$. Зафиксируем натуральное число $p > en$, число $c = 2 + e^{2n}(2\sin 1/2)^{-1}$ и достаточно малое положительное ε, удовлетворяющее неравенству $p > e(1+\varepsilon)n$. Пусть $A_{f,\varepsilon} = \sup\left\{|f(z)|e^{-(1+\varepsilon/2|z|_1)}: z \in \mathbb{C}^n\right\}$. Если $\sum\limits_{|k|_1=0}^{\infty} c_k z^k$ – разложение $f(z)$ в степенной ряд, то через $P_{pm}(z)$ обозначим отрезок этого ряда $\sum\limits_{|k|_1=0}^{pm} c_k z^k$. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ определим функцию $\varphi_m(z) = P_{pm}(z) g_{m,n}(z)$, где

$$g_{m,n}(z) = \prod_{i=1}^{n} \int_{-1/2}^{1/2} \left[\frac{\sin(cz_i/m - y)}{cz_i/m - y}\right]^{pm} dy \times \left\{\int_{-1/2}^{1/2} \left[\frac{\sin y}{y}\right]^{pm} dy\right\}^{-n}.$$

Очевидно, $\varphi_m(z)$ – целая функция экспоненциального типа не выше pc.

То обстоятельство, что функция $\varphi_m(z)$ удовлетворяет свойству 1), следует из леммы 1. Действительно, поскольку

$$\left|\int_{-1/2}^{1/2} \left[\frac{\sin(x-y)}{(x-y)}\right]^{pm} dy\right| = \left|\int_{-1/2+x}^{1/2+x} \left[\frac{\sin y}{y}\right]^{pm} dy\right| \leq \int_{-1/2}^{1/2} \left[\frac{\sin y}{y}\right]^{pm} dy,$$

поскольку $\sup\left\{|g_{m,n}(x)| : x \in \mathbb{R}^n\right\} = 1$. Значит, при $|x|_\infty \leq m$

$$|\varphi_m(x)| \leq |P_{pm}(x)| \leq |f(x)| + |f(x) - P_{pm}(x)| \leq |f(x)| + AB \cdot \left\{\frac{e(1+\varepsilon)n}{p}\right\}^{pm}.$$

Докажем, что функция $\varphi_m(z)$ обладает свойством 2). Для этого заметим, что при любом $t \in [-1/2, 1/2]$ выполняется оценка

$$\int_{-1/2+t}^{1/2+t} \left[\frac{\sin y}{y}\right]^{pm} dy \geq \int_0^1 \left[\frac{\sin y}{y}\right]^{pm} dy = \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} \left[\frac{\sin y}{y}\right]^{pm} dy + \int_{1/2}^{1} \left[\frac{\sin y}{y}\right]^{pm} dy \geq \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} \left[\frac{\sin y}{y}\right]^{pm} dy.$$

Отсюда вытекают неравенства $\min\{|g_{m,n}(x)| : x \in K(0, m/(2c))\} \geq 2^{-n}$ и $AB\omega^m \geq |f(x) - P_{pm}(x)||g_{m,n}(x)| \geq |f(x)g_{m,n}(x)| - |\varphi_m(x)| \geq 2^{-n}|f(x)| - |\varphi_m(x)|$.

Сложней доказывается выполнение условия 3). Из оценки тейлоровских коэффициентов функции $f(x)$ вытекает, что

$$|P_{pm}(x)| \leq A \prod_{j=1}^{n} S(|x_j|), \quad \text{где} \quad S(t) = \sum_{\nu=1}^{pm} ((1+\varepsilon)t)^{\nu} (\nu!)^{-1}.$$

Если $t \geq 0$, то $S(t) \leq \exp(2t)$, а если $t \geq pm$, то

$$S(t) \leq \frac{t^{pm}}{(pm)!} \sum_{\nu=0}^{pm} \frac{2^{\nu}(pm)^{\nu-pm}(pm)!}{\nu!} \leq \frac{e^{pm}}{(pm)!} \sqrt{3\pi pm}\, t^{pm}. \qquad (6)$$

В предположении, что $|y| \leq 1/2$, а $|x_j| \geq m$, получим

$$\left|\frac{\sin(cx_j/m - y)}{cx_j/m - y}\right|^{pm} \leq \left(\left|\frac{cx_j}{m}\right| - \left|\frac{x_j}{m}\right|\right)^{-pm} = \left(\frac{p-1}{m}|x_j|\right)^{-pm}. \qquad (7)$$

Кроме того,

$$\left\{\int_{-1/2}^{1/2} \left[\frac{\sin y}{y}\right]^{pm} dy\right\}^{-1} \leq (2 \sin 1/2)^{-pm}. \qquad (8)$$

Из (6)-(8) вытекает следующая оценка функции $g_{m,n}(x)$ на множестве $|x|_\infty \geq m$:

$$|g_{m,n}(x)| \leq \prod_{m \leq |x_j| \leq pm} \left\{\frac{c-1}{m}|x_j| 2 \sin 1/2\right\}^{-pm}. \qquad (9)$$

Учитывая (9), получаем неравенство для $|\varphi_m(x)|$ на $CK(0,m)$:

$$|\varphi_m(x)| \leq A \prod_{j:|x_j|<m} S(|x_j|) \times \prod_{j:m \leq |x_j| < pm} S(|x_j|) \times ((2 \sin 1/2)(c-1)|x_j|/m)^{-pm} \times$$

$$\times \prod_{j:|x_j| \geq pm} S(|x_j|)(2(c-1)(\sin 1/2)|x_j|/m)^{-pm} = AB\pi_1\pi_2\pi_3. \qquad (10)$$

Оценим каждый из сомножителей π_i, $i = 1, 2, 3$, отдельно:

$$\pi_1 \leq \exp\left\{2 \sum_{j:|x_j|<m} |x_j|\right\} \leq \exp\left\{2m \operatorname{card}\{j : |x_j| < m\}\right\}. \qquad (11)$$

Несложно получить неравенства и для сомножителей π_2 и π_3:

$$\pi_2 \leq \prod_{j:m \leq |x_j| < pm} e^{2|x_j|} (2(c-1)|x_j|/m \sin 1/2)^{-pm} \leq$$

$$\leq \prod_{j:m \leq |x_j| < pm} \{e^2 m/((2 \sin 1/2)(c-1)|x_j|)\}^{pm} \leq \prod_{j:m \leq |x_j| < pm} \{e^2/(2(\sin 1/2)(c-1))\}^{pm}; \qquad (12)$$

$$\Pi_3 \le \prod_{j:|x_j|\ge pm} e^{pm}/(pm)!\sqrt{3\pi pm}\,|x_j|^{pm}\left\{\frac{|x_j|}{m}2(c-1)\sin 1/2\right\}^{-pm} =$$

$$= \left\{e^{pm}/(pm)!\sqrt{3\pi pm}\left(2(c-1)(\sin 1/2)/m\right)^{-pm}\right\}^{\operatorname{card}\{j:|x_j|\ge pm\}}. \qquad (13)$$

Из оценок (10)–(13), учитывая, что $|x|_\infty \ge m$, $c=2+e^{2n}(2\sin 1/2)^{-1}$, выводим

$$|\varphi_m(x)| \le Ae^{2pm\operatorname{card}\{j:0\le|x_j|<pm\}}\left[e^2/((c-1)p)\right]^{pm\operatorname{card}\{j:|x_j|\ge pm\}}\times$$

$$\times(2\sin 1/2)^{-pm\operatorname{card}\{j:m\le|x_j|<pm\}}(c-1)^{-pm\operatorname{card}\{j:m\le|x_j|<pm\}} \le$$

$$\le AB\left[\frac{e^{2n}}{2(c-1)\sin 1/2}\right]^{pm}.$$

Лемма 2 полностью доказана.

Нам понадобится следующая лемма, являющаяся частным случаем утверждения, доказанного в [13].

Лемма 3. Пусть $f(z)$, $z\in\mathbb{C}^n$ – целая функция экспоненциального типа σ и

$$\int_{\mathbb{R}^n} P(t,1)\ln^+|f(t)|\,dt<\infty. \qquad (14)$$

Тогда при любом $x\in\mathbb{R}^n$

$$\ln|f(x)|\le\inf\left\{\sigma|y|_1+\int_{\mathbb{R}^n}P(t-x,y)\ln|f(t)|\,dt : y\in\mathbb{R}^n,\ y_1\cdot\ldots\cdot y_n\ne 0\right\}.$$

2. Доказательство теоремы 1. Вначале докажем теорему 1 в следующих предположениях:

1) $\sup\{|f(y)| : y\in F\}<\infty$;

2) $M_{f,F}=\max(1,\sup\{|f(y)|:y\in F\},\ \sup\{|f(z)|\exp\{-(\sigma+\varepsilon)|z|_1 : z\in\mathbb{C}^n\}\})=1$;

3) $0<\sigma\le 1$.

Сопоставим функции $f(z)$ аппроксимирующую последовательность $\{\varphi_m(z)\}_{m=1}^{\infty}$ из леммы 2. Согласно лемме 3 при $\mathbb{L}=(L,\ldots,L)\in R^n$, где положительная величина $L=L_m$ будет выбрана далее, и любом $x\in\mathbb{R}^n$

$$\ln|\varphi_m(x)|\le cpLn+\ln\sup\{|f(y)|:y\in F\}+$$

$$+\int_{K(0,m)\cap CF}P(t-x,\mathbb{L})\ln|\varphi_m(t)|\,dt+a_m. \qquad (15)$$

Здесь числа p и c те же, что и в лемме 2, а величина a_m не зависит от функции $f(x)$ и $a_m \to 0$ при $m \to 0$.

Положим $\mu_m = \max\{|\varphi_m(x)| : x \in K(0,m)\}$. Из условия (3) следует, что найдется такое число $D = D(F,\sigma) < \infty$, что при любом $m \in N$

$$mes_n [K(0,m) \cap C, F] \leq D m^{\alpha n}.$$

Пусть $L = L_m = 2^{1/n} D m^{\alpha}/\varkappa$. При таком выборе L из (15) следует

$$\ln \mu_m \leq cp L n + \ln \sup\{|f(y)| : y \in F\} + \frac{1}{2} \ln \mu_m + a_m$$

или

$$\mu_m \leq S_1 \sup\{|f(y)| : y \in F\}^2 \exp(2^{1+1/n} pcn D m^{\alpha} \varkappa^{-1}), \qquad (16)$$

где S_1 – некоторая положительная постоянная, не зависящая от функции $f(x)$ и m. Из свойства 2) функции $\varphi_m(x)$ доказанного в лемме 2, вытекает, что при некоторой конечной величине $S_3 = S_3(F,\sigma)$ не зависящей от $f(x)$, выполняется

$$|f(x)| \leq S_3 \sup\{|f(y)| : y \in F\}^2 \exp(2^{1+1/n} pcn D |x|_\infty^{\alpha} \varkappa^{-1}). \qquad (17)$$

Каково бы ни было положительное ε, найдется такое $R_\varepsilon > 0$, что

$$\int\limits_{CF \setminus K(0,R_\varepsilon)} |x|_\infty^{-\alpha n} dx \leq [\varepsilon \varkappa / (2^{1+1/n} pcn D)]^n.$$

Обозначим через F_ε множество $K(0, R_\varepsilon) \cup F$. Для него соотношение (17) можно переписать в виде

$$|f(x)| \leq S_3(F_3,\sigma) \sup\{|f(y)| : y \in F_\varepsilon\}^2 \exp(\varepsilon |x|_\infty^{\alpha}). \qquad (18)$$

Очевидно, что

$$\sup\{|f(y)| : y \in F_\varepsilon\} = \max(\sup\{|f(y)| : y \in K(0,R_\varepsilon) \setminus F\},$$
$$\sup\{|f(y)| : y \in F\}) \leq S_\varepsilon(F_\varepsilon,\sigma) \sup\{|f(y)| : y \in F\}^2 \exp(2^{1+1/n} pcn \times$$
$$\times D \varkappa^{-1} R_\varepsilon^{\alpha}) + \sup\{|f(y)| : y \in F\} = \sup\{|f(y)| : y \in F\} \times (S_3(F_\varepsilon,\sigma) \times$$
$$\times \exp(2^{1+1/n} pcn \varkappa^{-1} R_\varepsilon^{\alpha}) + 1) \leq C(F,\sigma,\varepsilon) \sup\{|f(y)| : y \in F\}. \qquad (19)$$

Из (18) и (19) следует

$$|f(x)| \leq C(F,\sigma,\varepsilon) \sup\{|f(y)| : y \in F\}^2 \exp(\varepsilon |x|_\infty^{\alpha}) \leq$$
$$\leq C(F,\sigma,\varepsilon) \sup\{|f(y)| : y \in F\} \exp(\varepsilon |x|_\infty^{\alpha}). \qquad (20)$$

Если функция $f(x)$ не удовлетворяет предположениям 2), 3), то для $f_1(x) = f(x\sigma) M_{f,F}^{-1}$ эти условия уже выполняются. При подстановке $f_1(x)$ в (20) получаем оценку для $f(x)$ с произвольными $M_{f,F}<\infty$ и $0<\sigma<\infty$, где константа $C=C(F,\sigma,\varepsilon)<\infty$ не зависит от $f(x)$.

Теперь снимем ограничение 1). При этом, конечно, не ограничивая общности, можно считать, что выполнены условия 2), 3). Построим последовательность аппроксимирующих $f(x)$ целых функций $\{\varphi_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$, существование которой гарантирует лемма 2. Через μ_m обозначим $\sup\{|\varphi_m(y)|: y\in F\}$, через $\nu_m - \sup\{|\varphi_m(y)|: y\in K(0,m)\}$. Применение результата (20) к функциям $\varphi_m(x)\mu_m^{-1}$ при каждом $\varepsilon>0$ дает связь между μ_m и ν_m:

$$\nu_m \leq C(F,\sigma,\varepsilon)\mu_m e^{\varepsilon m^{\alpha}}.$$

Чтобы получить еще одно соотношение для ν_m и μ_m, воспользуемся плотностью множества E в F и леммой 3. Пусть числа $L<\infty$ и $\delta>0$ характеризуют плотность E в F:

$$\inf\{ mes_n [K(x,L)\cap E]: x\in F\}=\delta.$$

Заметим, что в этом случае найдется $\eta\in(0,1)$, для которого

$$\sup\left\{ \int_{R^n\setminus E} P(t-x,L)dt : x\in E\right\}=1-\eta.$$

Тогда при любом x из F справедлива оценка

$$\ln|\varphi_m(x)|\leq c\rho L n+\int_{K(0,m)\cap E} P(t-x,L)\ln|\varphi_m(t)|dt+\int_{K(0,m)\setminus E} P(t-x,L)\ln|\varphi_m(t)|dt.$$

Поскольку вектор $x\in F$ произволен, то из свойства 1) леммы 2 следует

$$\ln\mu_m\leq c\rho L n+\ln\sup\{|f(t)|: t\in E\}+(1-\eta)\ln\nu_m+a_m,$$

где постоянные a_m стремятся к 0 при стремлении m к ∞.

Две оценки для μ_m и ν_m и свойство 2) функций $\varphi_m(x)$ в лемме 2 дают следующий рост модуля функции $f(x)$ на R^n:

$$|f(x)|\leq C(F,E,\sigma,\varepsilon)\sup\{|f(t)|: t\in E\}^{1/\eta}\exp(\varepsilon|x|_\infty^{\alpha})\leq$$
$$\leq C(F,E,\sigma,\varepsilon)\sup\{|f(t)|: t\in E\}\exp(\varepsilon|x|_\infty^{\alpha}).$$

Замечание. Из доказательства видно, что константу $C=C(F,E,\sigma,\varepsilon)$ можно выбрать зависящей не от множества E, а от величин L и δ, характеризующих плотность E относительно множества F.

Итак, для завершения доказательства теоремы 1 осталось установить точность оценки.

Возьмем последовательность положительных чисел $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющих условию $\sum_{k=1}^{\infty} c_k = 1$. По ней построим другую последовательность $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$m_1 > e, \quad c_1 e^{m_1^\alpha} > 2(\psi(m_1)+1).$$

Предположим, что первые $k-1$ члена последовательности $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ найдены. Выберем m_k удовлетворяющим условиям

$$m_k > m_{k-1}^2, \quad c_k\{exp(k^{-2} m_k^\alpha)\} > 2(k\psi(m_k)+1).$$

По выстроенной последовательности зададим множество $F \subset \mathbb{R}^n$, определив его дополнение, $CF = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} B(M_k, k^{-2} m_\ell^\alpha)$, где $M_k = (m_k, \ldots, m_k) \in \mathbb{R}^n$, а $B(x, L) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y-x|_2 \le L\}$. Множество F удовлетворяет условию (3). Определим функцию

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos\left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n} (z_j - m_k)^2 - (k^{-2} m_k^\alpha)^2}\right).$$

С одной стороны, $f(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, а с другой –

$$f(M_k) \geqslant \frac{c_k exp(k^{-2} m_k^\alpha)}{2} - 1 > k\psi(m_k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Точность оценки установлена.

3. Доказательство теоремы 2. Рассмотрим случай, когда целая функция $f(z)$ экспоненциального типа не выше σ ограничена на множестве E в $\mathbb{R}^n$, являющемся δ-сетью для множества $F \subset \mathbb{R}^n$.

Доказательство почти без изменений повторяет рассуждения в статье В.Н.Логвиненко [12].

Дополним E до 2δ-сети во всем $\mathbb{R}^n$ следующим образом. Пусть

$$D_0 = CF \cap K(0,1); \quad D_m = CF \cap \{K(0, e^{m+1}) \setminus K(0, e^m)\}, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

и $\{t^{(m,1)}, \ldots, t^{(m,N_m)}\}$ – такой набор точек из D_m, что:

а) в метрике, порожденной нормой $|\cdot|_1$, они отстоят друг от друга и от F не меньше, чем на δ;

б) для любого $x \in D_m$ справедливо

$$\min\{|x-y|_1 : y \in F \cup \{t^{(m,1)}, \ldots, t^{(m,N_m)}\}\} < \delta.$$

При этом, конечно, мы считаем, что множество E замкнуто. Число N_m легко оценивается сверху. Поскольку внутренности гиперкубов $\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x - t^{(m,k)}|_1 < \delta/2\}$, $k = 1, \ldots, N_m$ содержатся в D_m и не пересекаются, то

$$\frac{2^n}{n!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^n N_m \le mes_n[D_m], \quad m \in \mathbb{N}.$$

Значит, $\sum\limits_{m=1}^{\infty} N_m e^{-\alpha n m} < \infty$.

Зададимся настолько малым $\varepsilon > 0$, чтобы $4\rho(\sigma+\varepsilon)\delta < 1$. Сопоставим добавленным нами точкам функцию

$$\varphi(z) = \varphi_\varepsilon(z) = \prod_{k=1}^{N_0}\left(1-\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\sin(\eta(z_j-t_j^{0,k})}{\eta(z_j-t_j^{(0,k)})}\right)^2\right) \times$$

$$\times \prod_{m=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{N_m}\left(1-\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\sin(c(z_j-t_j^{m,k})/e^{m\alpha n})}{c(z_j-t_j^{(m,k)})/e^{m\alpha n}}\right)^2\right).$$

Здесь $\eta = \varepsilon/(4N_0)$, а $c = \varepsilon/(4\sum\limits_{m=1}^{\infty} N_m e^{-m\alpha n})$.

Функция $\varphi(z)$ целая. Действительно, при $|z|_\infty < e^{m_0}$

$$\sum_{m=m_0+n}^{\infty}\sum_{k=1}^{N_m}\left|\prod_{j=1}^{n}\frac{\sin(c(z_j-t_j^{(m,k)})e^{-m\alpha n})}{c(z_j-t_j^{(m,k)})e^{-m\alpha n}}\right|^2 \le$$

$$\le \sum_{m=m_0+n}^{\infty}\left(e^{-m\alpha n}N_m\right)e^{2m\alpha n+m\alpha n}\left(c(e^m-e^{m_0})\right)^{-2} = \gamma(m_0) < \infty.$$

Оценим рост $\varphi(z)$:

$$|\varphi(z)| \le \exp\left\{\left(2\eta N_0 + 2c\sum_{m=1}^{\infty} e^{-m\alpha n}N_m\right)\times\sum_{j=1}^{n}|\operatorname{Im} z_j|\right\} = \exp\left\{\varepsilon\sum_{j=1}^{n}|\operatorname{Im} z_j|\right\}.$$

Поэтому целая функция $f(z)\varphi(z)$ имеет экспоненциальный тип не выше $\sigma+\varepsilon$. По теореме В

$$\sup\{|f(x)\varphi(x)| : x\in\mathbb{R}^n\} \le (1-2(\sigma+\varepsilon)\delta)^{-1}\sup\{|f(t)| : t\in E\}. \qquad (21)$$

В слое $K(0, e^{m_0+1})\setminus K(0, e^{m_0})$, где число m_0 достаточно велико,

$$\prod_{k=1}^{N_0}\left(1-\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\sin(\eta(x_j-t_j^{(0,k)}))}{\eta(x_j-t_j^{0,k})}\right)^2\right) \ge \left(1-(\eta(e^{m_0}-e))^{-2}\right)^{N_0} \ge$$

$$\ge 1 - N_0/(\eta(e^{m_0}-e))^2 \ge \frac{1}{2}.$$

Если считать сумму $\sum\limits_{m=1}^{\infty} N_m e^{-m\alpha n}$ достаточно малой величиной (этого можно добиться, рассматривая вместо F множество $F_1 = F\cup G$, где G – подходящим образом выбранное ограниченное измеримое множество), то

$$\prod_{m=1}^{m_0-2}\prod_{k=1}^{N_m}\left(1-\prod_{j=1}^{n}\left[\frac{\sin\left(c(x_j-t_j^{(m,k)})e^{-m\alpha n}\right)}{c(x_j-t_j^{(m,k)})e^{-m\alpha n}}\right]^2\right)\geqslant$$

$$\geqslant\prod_{m=1}^{m_0-2}\prod_{k=1}^{N_m}\left(1-\frac{e^{2m\alpha n}}{\left(c(e^{m_0}-e^{m+1})\right)^2}\right)\geqslant 1-\sum_{m=1}^{m_0-2}\frac{e^{\alpha nm}}{c^2(e^{m_0}-e^{m+1})^2}\geqslant\frac{1}{2},$$

$$\prod_{m=m_0+2}^{\infty}\prod_{k=1}^{N_m}\left(1-\prod_{j=1}^{n}\left[\frac{\sin\left(c(x_j-t_j^{(m,k)})e^{-m\alpha n}\right)}{c(x_j-t_j^{(m,k)})e^{-m\alpha n}}\right]^2\right)\geqslant$$

$$\geqslant 1-\left(\sum_{m=m_0+2}^{\infty}N_m e^{-m\alpha n}\right)\left(c(1-c^{-1})\right)^{-2}\geqslant\frac{1}{2}.$$

Из трех последних неравенств следует, что при $x\in K(0,e^{m_0+1})\setminus$ $\setminus K(0,e^{m_0})\cup\bigcup_{m=m_0}^{m_0+1}\bigcup_{k=1}^{N_m}\left\{x\in\mathbb{R}^n\frac{c|x-t^{(m,k)}|_\infty}{e^{m\alpha n}}\leqslant(1-2^{-1/N_m})\right.$ выполнена оценка $|\varphi(x)|\geqslant 32^{-1}$. Кроме того,

$$mes_n\left[\bigcup_{m=m_0-1}^{m_0+1}\bigcup_{k=1}^{N_m}\left\{x\in\mathbb{R}^n\frac{c|x-t^{(m,k)}|_\infty}{e^{m\alpha n}}\leqslant(1-2^{-1/N_m})^{-1}\right\}\right]\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{m=m_0-1}^{m_0+1}N_m\left\{2\frac{e^{m\alpha n}}{c}\left(1-2^{-1/N_m}\right)^{-1}\right\}^n\leqslant$$

$$\leqslant c\sum_{m=m_0-1}^{m_0+1}\left[N_m e^{-m\alpha n}\right]e^{\alpha n(n+1)m}. \tag{22}$$

Обозначим через $\tilde{F}$ множество, где $|\varphi(x)|\geqslant 32^{-1}$. Из (22) следует, что

$$\int_{CF\setminus K(0,1)}|x|_\infty^{-\alpha n(n+1)}dx<\infty. \tag{23}$$

Кроме того, при любом $x\in F$ согласно (21) выполняется оценка

$$|f(x)|\leqslant 32\left(1-2(\sigma+\varepsilon)\delta\right)^{-1}\sup\left\{|f(t)|:t\in E\right\}.$$

Согласно теореме 1 найдется такая величина $C=C(\tilde{F},\sigma,\varepsilon)<\infty$, что при любом $x\in\mathbb{R}^n$ верно неравенство

$$|f(x)|\leqslant C\exp\left\{\varepsilon|x|_\infty^{\alpha(n+1)}\right\}\sup\left\{|f(t)|:t\in E\right\}.$$

4. Следствия из теорем 1 и 2. Доказательство следствия 1. Пусть константы L и δ характеризуют плотность множества E относительно F. Рассмотрим $H_f = \{x \in E : |f(x)|^q \geq 2/\sigma \int_E |f(t)|^q dt\}$. Из оценки

$$\int_E |f(t)|^q dt \geq \int_{H_f} |f(t)|^q dt \geq 2\, mes_n [H_f] \left(\int_E |f(t)|^q dt \right) / \delta$$

следует, что $mes_n [H_f] \leq \delta/2$. Обозначим $E_f = E \setminus H_f$. Очевидно, что множество E_f плотно относительно множества F. Константы $L_1 = L$ и $\delta_1 \geq \delta/2$ характеризуют его плотность. На множестве E_f функция $f(z)$ ограничена. В силу теоремы 1 и замечания на всем $\mathbb{R}^n$

$$|f(x)| \leq C(F, L, \delta/2, \sigma, \varepsilon) \left\{ \int_E |f(t)|^q dt \right\}^{1/q} \exp(\varepsilon |x|_\infty^\alpha). \qquad (24)$$

После возведения в степень q обеих частей неравенства (24) и последующего интегрирования по $K(0,R)$, получаем требуемый результат.

Доказательство следствия 2. Если $E = \{x_k\}_{k=1}^\infty$ – несгущающаяся δ-сеть для F и $\sum_{k=1}^\infty |f(x_k)|^q < \infty$, то $|f(x_j)|^q \leq \sum_{k=1}^\infty |f(x_k)|^q$ для всех точек из E.

В условиях применимости теоремы 2 для $x \in \mathbb{R}^n$ при всех $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$|f(x)| \leq C(F, E, \sigma, \varepsilon) \left\{ \sum_{k=1}^\infty |f(x_k)|^q \right\}^{1/q} \exp\left(\varepsilon |x|_\infty^{\alpha(n+1)}\right). \qquad (25)$$

Возведение в степень q обеих частей (25) и интегрирование по $K(0,R)$ завершает доказательство следствия 2.

1. Cartwright M.I. On certain integral function of order 1 // Quqrt. J. Math. - 1936. - 7. - P. 46-55.
2. Boas R.P., Scheffer A.C. A theorem of Cartwright // Duke Math. J. - 1942. - 9, N4. - P. 879-883.
3. Duffin R.I., Scheffer A.C. Power series with bounded coefficients // Amer. J. Math. - 1945. - 67, N 141. - P. 141-154.
4. Бернштейн С.Н. Перенесение свойств тригонометрических полиномов на целые функции конечной степени // Изв. АН СССР. Сер. мат. - 1949. - 12, № 5. - С. 421-444.
5. Ахиезер Н.И., Левин Б.Я. Об интегрировании целых функций конечной степени // Зап. мат. отд-ния физ.-мат. ф-та ХГУ и Харьк. мат. о-ва. Сер. 4. - 1952. - 23. - С. 3-26.
6. Agmon S. Functions of exponential type in an angle and singularities of Teylor Series // Trans. Amer. Math. Soc. - 1951. - 70, N5. - P. 492-508.
7. Левин Б.Я. Субгармонические мажоранты и их приложения // Тез. докл. Всесоюз. конф. по теории функции комплекс. перем., Харьков, сент. 1971. - Харьков, 1971. - С. 111-113.

8. Кацнельсон В.Э. Эквивалентные нормы в пространстве целых функций // Мат. сб. – 1973. – 92 (134), вып. 19. – С. 34-54.
9. Логвиненко В.Н. Об одном многомерном обобщении теоремы М.Картрайт // Докл. АН СССР. – 1974. – 219, № 3. – С.546-549.
10. Панеях Б.П. О некоторых задачах гармонического анализа // Там же. – 1962. – 142, № 5. – С. 1026-1029.
11. Логвиненко В.Н., Середа Ю.Ф. Эквивалентные нормы в пространствах целых функций экспоненциального типа // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1974. – Вып. 20. – С. 62-78.
12. Логвиненко В.Н. Условия ограниченности и условия медленного роста вдоль вещественной гиперплоскости целых функций экспоненциального типа // Сиб. мат. журн. – 1988. – 29, № 4. – С. 126-138.
13. Левин Б.Я., Логвиненко В.Н. О классах субгармонических в R^n функций ограниченных на некоторых множествах // Успехи мат. наук. – 1983. – 28, вып. 1. – С. 65-90.
14. Толстяк Е.Д. О целых функциях экспоненциального типа, медленно растущих вдоль всей вещественной гиперплоскости. – Киев, 1988. 22 с – Деп. в УкрНИИНТИ 05.10.88, № 2558.

УДК 517.1

А.Э.Еременко, М.И.Островский, М.Л.Содин

О НОСИТЕЛЕ РИССОВСКОГО ЗАРЯДА δ-СУБГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Доказана следующая теорема. Пусть $w(z)$ – δ-субгармоническая функция, μ – ее рисссовский заряд, $N=\{z: w(z)=0\}$, N^* – множество точек плотности (по Лебегу) множества N, содержащихся в N. Тогда $|\mu|(N^*)=0$, где $|\mu|$ – вариация заряда μ.

Для области $D\subset\bar{\mathbb{C}}$ через $\omega_D(\cdot, z)$, $z\in D$, обозначаем гармоническую меру на ∂D в точке z. Б.Эксендаль доказал [1, 2], что гармоническая мера ω_D взаимно сингулярна с плоской мерой Лебега m_2, и высказал гипотезу, что мера ω_D сингулярна относительно меры Хаусдорфа $m_{1+\varepsilon}$ при любом $\varepsilon>0$. Эта гипотеза была недавно доказана П.Джон эм и Т.Волффом [3]; для односвязных областей D ее доказал ранее Н.Г.Макаров [4]. Данный круг вопросов оказался тесно связанным с различными проблемами эргодической теории и теории динамических систем [5, 6], теории операторов [4] и теории распределения значений целых функций [7, 8].

Пусть D – область, обладающая функцией Грина, $\infty\in D$. Продолжив функцию Грина с полюсом в ∞ нулем в $\mathbb{C}\setminus D$, получим неотрицательную субгармоническую в $\mathbb{C}$ функцию. Риссовская мера этой функции совпадает с гармонической мерой $\omega_D(\cdot, \infty)$. Поэто-

ISBN 5-12-002405-X. Теория операторов, субгармонические функции. Киев, 1991.

му следующий результат, доказанный авторами в [7], является некоторым обобщением теоремы Б.Экеендаля*).

Обозначим через A^* множество точек плотности (по Лебегу) множества A, содержащихся в A.

Пусть $u \geq 0$ – субгармоническая функция в области $D \subset \bar{\mathbb{C}}$ и $\mu = \mu_u$ – ее риссовская мера, $N = \{ z \in D : u(z) = 0 \}$. Тогда $\mu(N^*) = 0$.

В настоящей статье мы покажем, что условие неотрицательности излишне и это утверждение справедливо для произвольных δ-субгармонических функций. Напомним, что функция называется δ-субгармонической в области D, если она представима в виде разности двух субгармонических в D функций. Вообще говоря, δ-субгармоническая функция определена не всюду, а лишь квазивсюду в D, т.е. вне некоторого множества нулевой емкости. Риссовский заряд δ-субгармонической функции – это разность соответствующих риссовских мер.

<u>Теорема</u>. Пусть $w(z)$ – δ-субгармоническая функция в области $D \subset \mathbb{C}$, μ – ее риссовский заряд, $N = \{ z : w(z) = 0 \}$. Тогда $|\mu|(N^*) = 0$, где $|\mu|$ – вариация заряда μ.

Для доказательства понадобится несколько лемм.

<u>Лемма 1.</u> Пусть $F \subset \mathbb{C}$ – компакт со связным дополнением $CF = \mathbb{C} \setminus F$. Тогда $\omega_{CF}(F^*) = 0$.

Доказательство этой леммы имеется в работах [5, 7].

<u>Лемма 2.</u> Пусть D_1 и D_2 – области, D_1 ограничена, $\bar{D}_1 \subset D_2$ и w – δ-субгармоническая функция в D_2. Тогда существует финитная δ-субгармоническая в $\mathbb{C}$ функция w_1, такая, что $w(z) = w_1(z)$, $z \in D_1$.

Простое доказательство этой леммы опускаем.

<u>Лемма 3.</u> Пусть $F \subset \mathbb{C}$ – компакт, D_j – связные компоненты его дополнения CF, $\omega_j = \omega_{D_j}$ – их гармонические меры, w – δ-субгармоническая функция в $\mathbb{C}$, равная нулю на F, μ – ее риссовский заряд. Если для всех j $\omega_j(G) = 0$, то $|\mu|(F \cap G) = 0$.

<u>Доказательство.</u> В силу леммы 2 можем считать, что функция w финитна. Пусть $\{ D_j \}$ – все связные компоненты множества CF. Легко видеть, что справедливо разложение $w = \sum w_j$, в котором w_j – δ-субгармонические функции, причем $w_j(z) = 0$, $z \notin D_j$. Поэтому достаточно доказать лемму для случая, когда $D = CF$ – область. Тогда w – потенциал Грина,

---

*) Отметим, что меры $\omega_D(\cdot, z_1)$ и $\omega_D(\cdot, z_2)$ взаимно абсолютно непрерывны при $z_1, z_2 \in D$.

$$w(z) = -\int_D G(z,\zeta)\, d\mu(\zeta). \tag{1}$$

Продолжим функцию Грина $z \to G(z,\zeta)$ нулем в $\mathbb{C} \setminus D$, тогда представление (1) будет справедливо квазивсюду в $\mathbb{C}$. Имеем

$$G(z,\zeta) = -\log|z-\zeta| + \int_{\mathbb{C}} \log|z-t|\,\omega(dt,\zeta). \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), получаем

$$w(z) = \int_D \log|z-\zeta|\, d\mu(\zeta) - \int_D d\mu(\zeta) \int_{\mathbb{C}} \log|z-t|\,\omega(dt,\zeta) =$$

$$= \int_D \log|z-\zeta|\, d\mu(\zeta) + \int_{\mathbb{C}} \log|z-\zeta|\, d\varkappa(\zeta), \tag{3}$$

где заряд $\varkappa$ определен следующим образом:

$$\varkappa(X) = -\int_D \omega(X \cap \partial D, t)\, d\mu(t) \tag{4}$$

для любого борелевского множества $X \subset \mathbb{C}$. Из (3) следует, что сужение риссовского заряда функции w на $\mathbb{C} \setminus D$ совпадает с $\varkappa$, а из (4) – что вариация заряда $\varkappa$ абсолютно непрерывна относительно гармонической меры ω. Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть X – измеримое множество в $\mathbb{C}$, $A \subset X^*$ – компакт. Тогда найдется такой компакт $F \subset X$, что $A \subset F^*$.

Доказательство. Положим $r_n = \frac{1}{n}$, $\varepsilon_n = \frac{1}{n^2}$. Для каждого натурального n выберем конечную ε_n-сеть $\{x_{n_j}\}$ в A. Пусть $B(x,t) = \{z : |z-x| < t\}$. Найдем такие компакты $F_{n_j} \subset X \cap B(x_{n_j}, r_n)$, что

$$m_2(F_{n_j}) \geq (1-\varepsilon_n)\, m_2(X \cap B(x_{n_j}, r_n)). \tag{5}$$

Положим $F = A \cup (\bigcup_{n,j} F_{n,j})$. Множество F – компакт. В самом деле, если z – предельная точка для $\bigcup_{n,j} F_{n_j}$, то найдется последовательность

$$z_{n_s, j_s} \in F_{n_s, j_s}, \quad z_{n_s, j_s} \to z, \quad n_s \to \infty.$$

Однако тогда и $x_{n_s, j_s} \to z$, следовательно, $z \in A \subset F$.

Покажем, что компакт F искомый. Пусть $z \in A$, $r_{n-1} < r < r_{n-2}$. Тогда для некоторого j выполняется

$$m_2(F \cap B(z,r)) \geq m_2(F \cap B(x_{n_j}, r-\varepsilon_n)) \geq$$

$$\geq m_2(F_{n_j} \cap B(x_{n_j}, r-\varepsilon_n)) \geq m_2(F_j \cap B(x_{n_j}, r_n)).$$

Напомним, что $F_{n_j} \subset B(x_{n_j}, r_n)$ и воспользуемся (5):

$$m_2(F \cap B(x,r)) \geq (1-\varepsilon_n)\, m_2(X \cap B(x_{n_j}, r_n)) \geq$$

$$\geq (1-\varepsilon_n)\, m_2(X \cap B(x, r_n - \varepsilon_n)) \geq$$

$$\geq (1-\varepsilon_n)\, m_2(X \cap B(x, r_{n+1})).$$

Поскольку $x \in A \subset X^*$, выполняется

$$m_2(X \cap B(x, r_{n+1})) \geq (1-\eta_{n+1})\pi r_{n+1}^2 ,$$

где $\eta_n = \eta_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому

$$m_2(F \cap B(x,r)) \geq (1-\varepsilon_n)(1-\eta_{n+1})\left(\frac{r_{n+1}}{r}\right)^2 \pi r^2 =$$

$$= (1-\delta_n)\pi r^2, \quad \delta_n = \delta_n(x) \to 0 , \quad n \to \infty ,$$

и лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть $A \subset N^*$ – компакт. Покажем, что $|\mu|(A) = 0$. Воспользовавшись леммой 4, выберем компакт $F \subset N$ так, чтобы выполнялось условие $A \subset F^*$. Пусть D_j – связные компоненты множества $\mathbb{C} \setminus F$, а ω_j – их гармонические меры. В силу леммы 1 $\omega_j(A) = 0$, и из леммы 3 следует, что $|\mu|(A) = 0$. Теорема доказана.

Следствие. Пусть в условиях теоремы N_1–тонкая внутренность множества N, т.е. множество точек из N, в которых $CN = \mathbb{C} \setminus N$ разрежено. Тогда $|\mu|(N_1) = 0$.

Доказательство. Воспользуемся критерием Винера и покажем, что $N_1 \subset N^*$. Пусть CN разрежено в точке $x \in N$, тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\log(1/C_l(F_n))} < \infty , \tag{6}$$

где $F_n = CN \cap \{\zeta : 2^{-n-1} < |x - \zeta| < 2^{-n}\}$; C_l – логарифмическая емкость.

Обозначим через $\bar{F}_n$ круговую проекцию множества F_n на луч $\zeta = x + t,\ t > 0$. Тогда, согласно известным оценкам [9, гл. II], имеем

$$C_l(F_n) \geq C_l(\bar{F}_n) \geq \frac{1}{2}|F_n| \geq \frac{m_2(F_n)}{\pi 2^{n+1}}. \tag{7}$$

Если $x \notin N^*$, то для некоторой подпоследовательности (n_k) справедливо $m_2(F_{n_k}) \geq \varepsilon 2^{-n_k}$, и, воспользовавшись (7), мы получим

$$C_l(F_{n_k}) \geq \frac{\varepsilon}{8\pi} 2^{-2n_k} ,$$

$$\frac{n_k}{\log(1/C_l(F_{n_k}))} \geq const,$$

что противоречит (6). Следствие доказано.

1. Oksendal B. Null sets for measures orthogonal to R (x) // Amer. J. Math. - 1972. - 94, N 2. - P. 331-342.
2. Oksendal B. Bownian motion and sets of harmonic measure zero // Pacif. J. Math. - 1981. - 95, N 2. - P. 179-192.
3. Jones P., Wolff T. Hausdorff dimension of harmonic measure in the plane // Acta Math. - 1988. - 161, N 1-2. - P. 131-144.
4. Макаров Н.Г. Определяющие подмножества, носитель гармонической меры и возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве // Докл. АН СССР. - 1984. - 247, № 5. - С. 1033-1037.
5. Carleson L. On the support of harmonic measure for the sets of Cantor type // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. - 1985.- 10. - P. 113-123.
6. Makarov N.G., Volberg A.L. On the harmonic measure of discontinuous fractals. - Leningrad, 1986. - 39p. - (Prepr. LOMI, E-6-86).
7. Еременко А.Э., Содин М.Л. Доказательство условной теоремы Литтлвуда о распределении значений целых функций // Изв. АН СССР. - 1987. - 51, № 2. - С. 421-428.
8. Lewis J., Wu J-M. On conjectures of Arakelyan and Littlewood // J. d'Analyse Math. - 1988. - 50. - P. 259-283.
9. Ландкоф Н.С. Основы современной теории потенциала. - М. : Наука, 1966. - 432 с.

УДК 513.88:519.21

В.А.Золотарев, А.А.Янцевич

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КРИВЫЕ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Изучаются классы нестационарных случайных процессов, которые рассматриваются как кривые в гильбертовом пространстве, порожденном эрмитовым ядром $K(t,s)$. Выделение классов нестационарных кривых осуществляется с помощью уравнений в частных производных, которым, по предположению, удовлетворяет $k(t,s)$.

Случайный процесс z_t естественно изучать [1, 2] как кривую в гильбертовом пространстве H, воспроизводящим ядром для которого является корреляционная функция (КФ) $K(t,s) = \langle z_t, z_s \rangle$. Поскольку ядро $K(t,s)$ по сути определяет кривую z_t в H, то характерные свойства z_t проявляются в свойствах $K(t,s)$. Классическим примером такой связи являются стационарные случайные процессы. Так, при стационарности z_t корреляционная функция

ISBN 5-12-002405-X. Теория операторов, субгармонические функции. Киев, 1991.

$K(t,s) = K(t-s)$ и $z_t = U_t z_0$, где U_t – унитарная однопараметрическая сильно непрерывная полугруппа. Таким образом, с одной стороны, $K(t,s)$ является решением уравнения $(\partial_t + \partial_s)K(t,s) = 0$, а с другой – z_t удовлетворяет задаче Коши $\partial_t z_t = iAz$, $(z_t/_{t=0} = z_0)$, где $A = A^*$ – инфинитезимальный оператор U_t, причем самосопряженность A является следствием того, что $K(t,s)$ – решение упомянутого выше уравнения.

В данной работе изучаются случайные процессы z_t в H, порождаемые задачей Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dz_t}{dt} = A(t) z_t, \\ z_t/_{t=0} = z_0. \end{cases} \tag{1}$$

В общем случае анализ $z_t = T_t z_0$ затруднителен, ибо оператор-функция T_t не является полугруппой. Однако при определенных ограничениях на $A(t)$, которые удобно формулировать в терминах $K(t,s)$, такой анализ z_t может быть проведен. Постулируя уравнение в частных производных для $K(t,s)(L_{t,s} K(t,s) = 0)$, приходим к нелинейному операторному уравнению для $A(t)$, решение которого позволяет получать спектральные разложения некоторых классов нестационарных случайных кривых.

1. Пусть $K(t,s) = \langle z_t, z_s \rangle$ удовлетворяет уравнению

$$(\partial_t^2 - \partial_s^2) K(t,s) = 0. \tag{2}$$

Тогда из (1) и (2) получаем соотношение

$$\left\langle \left(\frac{dA}{dt} + A^2(t) \right) z_t, z_s \right\rangle = \left\langle z_t, \left(\frac{dA}{ds} + A^2(s) \right) z_s \right\rangle. \tag{3}$$

Обозначим $B(t) = \dfrac{dA}{dt} + A^2(t)$, тогда $\langle B(t) z_t, z_s \rangle = \langle z_t, B(s) z_s \rangle$.

В том случае, когда $B(t)$ не зависит от t, из (3) получаем $B = B^*$, а для $A(t)$ – операторное уравнение Риккати

$$\frac{dA}{dt} + A^2 = B. \tag{4}$$

Для z_t имеем уравнение второго порядка с постоянным операторным коэффициентом

$$z_t'' = B z_t \tag{5}$$

Если воспользоваться спектральным разложением B и искать решение (4) в виде

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t, \lambda)\, dE_\lambda \,, \tag{6}$$

то для φ получаем скалярное уравнение Риккати

$$\frac{d\varphi}{dt} + \varphi^2 = \lambda \,, \tag{7}$$

решение которого имеет вид $\varphi(t,\lambda) = \sqrt{\lambda}\, th \sqrt{\lambda}\, t$ и, следовательно,

$$A(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\lambda}\, th \sqrt{\lambda}\, t\, dE_\lambda \,, \tag{8}$$

а для z_t из (5) получаем спектральное представление

$$z_t = \int_{-\infty}^{\infty} ch \sqrt{\lambda}\, t\; d\zeta(\lambda) \,, \tag{9}$$

где $d\zeta(\lambda) = dE_\lambda z_0$, т.е. $\zeta(t)$ – стандартная кривая в H с ортогональными приращениями.

Для $K(t, s)$ из (9) получаем

$$K(t,s) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ch \sqrt{\lambda}\,(t-s) + ch \sqrt{\lambda}\,(t+s) \right] dF(\lambda) \,, \tag{10}$$

где $\Delta F(\lambda) = \langle \zeta(\lambda + \Delta\lambda) - \zeta(\lambda),\; \zeta(\lambda + \Delta\lambda) - \zeta(\lambda) \rangle$.

Если $B \geq 0$, то $\lambda \in [0, +\infty)$, и для $K(t, s)$ имеем

$$K(t,s) = \frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} \left[ch \sqrt{\lambda}\,(t-s) + ch \sqrt{\lambda}\,(t+s) \right] dF(\lambda) \,, \tag{11}$$

если $B \leq 0$, то $\lambda \in (-\infty, 0]$ и для $K(t, s)$, получаем представление

$$K(t,s) = \frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} \left[\cos \sqrt{\lambda}(t-s) + \cos \sqrt{\lambda}(t+s) \right] d\tilde{F}(\lambda), \tag{12}$$

где

$$\tilde{F}(\lambda) = -F(-\lambda).$$

Из (9) также следует, что z_t можно представить в виде суммы двух ортогональных кривых $z_t = z_t^{(1)} + z_t^{(2)}$, где $z_t^{(1)} = \int_0^{\infty} ch \sqrt{\lambda}\, t\, d\zeta_1(\lambda)$, $z_t^{(2)} = \int_0^{\infty} \cos \sqrt{\lambda}\, t\; d\zeta_2(\lambda)$, $K^{(l)}(t,s)$ $(l = 1,2)$ имеет вид (11), (12) и $\langle \zeta_1(\lambda_1),\; \zeta_2(\lambda_2) \rangle = 0$, $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, +\infty)$.

2. Аналогично можно исследовать и тот случай, когда $K(t, s)$ является решением уравнения в частных производных вида $(\partial_t^2 + \partial_s^2) \times$

$\times K(t,s) = 0$. В этом случае для $A(t)$, получаем также уравнение $\frac{dA}{dt} + A^2 = iB$ ($B = B^*$, т.е. iB косоэрмитов). Тогда

$$A(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{i\lambda}\, th\sqrt{i\lambda}\, dE_\lambda ,$$

а дальнейшие рассуждения повторяют п. 1.

3. Пусть $K(t,s)$ является решением уравнения

$$\left\{(\partial_t^2 - p(t)) - (\partial_s^2 - p(s))\right\} K(t,s) = 0 . \tag{13}$$

тогда, выбирая $A(t)$ в виде $A(t) = D(t) + q(t) I$, для $D(t)$ получаем уравнение

$$\frac{dD}{dt} + D^2 + 2q(t) D + p(t) I = B \qquad (B = B^*) , \tag{14}$$

где $q(t)$ – решение скалярного уравнения Риккати

$$\frac{dq}{dt} + q^2 = p(t). \tag{15}$$

Используя спектральное разложение B и представляя $D(t)$ в виде

$$D(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t,\lambda)\, dE_\lambda , \tag{16}$$

для $y(t,\lambda)$ получаем уравнение

$$\frac{dy}{dt} + y^2 + 2q(t)y + p(t) = \lambda . \tag{17}$$

Решение уравнения (17) имеет вид [13]:

$$y(t,\lambda) = \left\{ ln\left[u(t,\lambda) exp\left(-\int q(t) dt\right)\right]\right\}'_t ,$$

где $u(t,\lambda)$ – решение уравнения $u'' - \lambda u = 0$.

Следовательно, по $p(t)$ и решению уравнения (15) полностью восстанавливается $A(t)$.

4. Пусть, наконец, $K(t,s)$ удовлетворяет уравнению

$$(\partial_t^3 - \partial_s^3) K(t,s) = 0 . \tag{18}$$

Тогда для $A(t)$ получаем нелинейное операторное уравнение

$$\frac{d^2A}{dt^2} + 3A\frac{dA}{dt} + A^3 = B . \tag{19}$$

Если $B = B^* = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda$, то, полагая $A(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t,\lambda)\, dE_\lambda$, для $y(t, \lambda)$ получаем уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3y\,\frac{dy}{dt} + y^3 = \lambda . \tag{20}$$

Представляем y в виде $y = (\ln\varphi)'_t$, из (20) получаем

$$\varphi''' = \lambda\varphi.$$

Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 – корни уравнения $\xi^3 = \lambda$. Тогда с учетом начальных условий для φ: $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$, $\varphi''(0) = \lambda$, получаем

$$\varphi(t,\lambda) = \frac{\lambda}{(\xi_1-\xi_2)(\xi_1-\xi_3)(\xi_2-\xi_3)}\left[(\xi_2-\xi_3)e^{\xi_1 t} + (\xi_1-\xi_3)e^{\xi_2 t} + (\xi_1-\xi_2)e^{\xi_3 t}\right].$$

Следовательно,

$$A(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (\ln\varphi(t,\lambda))'\, dE_\lambda .$$

Заметим, что уравнение (1) может быть решено в явном виде, если оператор-функция $A(t)$ имеет представление $A(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t,\lambda)\, dE_\lambda$ (частные случаи выбора $\varphi(t,\lambda)$ были рассмотрены ранее в пп. 1-4).

Действительно, если искать решение (1) в виде $x_t = \int_{-\infty}^{\infty} y(t,\lambda)\, dE_\lambda x_0\ (y/_{t=0} = 1)$, то для $y(t,\lambda)$ получаем уравнение $y' = \varphi(t,\lambda)y$, $y/_{t=0} = 1$, и, следовательно,

$$x_t = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\int_0^t \varphi(\tau,\lambda)\, d\tau\right) d\zeta(\lambda), \qquad d\zeta(\lambda) = dE_\lambda x_0 ,$$

а

$$K(t,s) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(t,\lambda)}\, \psi(s,\lambda)\, d\lambda ,$$

где

$$\psi(t,\lambda) = \exp\left(\int_0^t \varphi(\tau,\lambda)\, d\tau\right).$$

5. Рассмотренные выше примеры позволяют указать общий подход для изучения нестационарных линейно представимых кривых в гильбертовых пространствах.

Предположим, что x_t – кривая в гильбертовом пространстве H, такая, что $M_t x_t = 0$, где

$$M_t = \sum_{l=0}^{n} A_l(t)\frac{d^l}{dt^l}\,,\; A_l(t) \in [H, H]\,,\ \text{вообще}\ [A_l,\ A_m] \neq 0\,.$$

Пусть КФ $K(t, s)$ удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению в частных производных $L_{t,s} K(t,s) = 0$. Из предыдущих примеров ясно, что $L_{t,s}$ и M_t не независимы.

В частности, для $A_k(t)$ вида $A_k(t) = a_k(t)I$, где $a_k(t) \in \in C[0,T]$, в качестве $L_{t,s}$ можно взять $M_t \bar{M}_s$.

Будем в дальнейшем считать $H = \overline{Vz_t}$. Пусть $L_{t,s} = L_t + N_s$, а $M_t = \frac{d}{dt} - A(t)$. Тогда $z_t = T_{t,0}\, z_0$, где $T_{t,s}$ – переходной оператор: $\frac{dT_{t,s}}{dt} = A(t)\,T_{t,s}$, $T_{t,t} = I$; в дальнейшем будем обозначать $T_{t,0} = T_t$. Далее, пусть

$$L_t z_t = -B_1 z_t\,, \quad N_s z_s = -B_2 z_s\,, \tag{21}$$

где B_l не зависят от t.

Тогда $L_{t,s} K(t,s) = \langle z_t,\, (-B_1^* + N_s) z_s \rangle = \langle (-B_2^* + L_t) z_t,\, z_s \rangle = 0$. Отсюда

$$(N_s - B_1^*)\, T_s = 0, \quad (L_t - B_2^*)\, T_t = 0\,. \tag{22}$$

Из (21) и (22) имеем $N_t = \bar{L}_t$ и $B_1^* = B_2$.

Следуя идеям, изложенным в начале статьи, и полагая, например, $L_t = \partial_t^2$, между $A(t)$ и B можно установить связь $\frac{dA}{dt} + A^2 = B$, т.е. снова получить нелинейное операторное уравнение Риккати.

Таким образом, в рассматриваемом случае замкнутую систему уравнений можно представить в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dz_t}{dt} = A(t)\, z_t\,, \\ (\partial_t^2 + \partial_s^2)\, K(t,s) = 0 \\ \dfrac{dA}{dt} + A^2 = B_1\,. \end{cases}$$

Отметим, что из первого и третьего уравнений этой системы следуют уравнения (21), имеющие вид $z_t'' = B_1 z_t$ с начальными условиями

$$z_t \big|_{t=0} = z_0\,, \quad \frac{dz_t}{dt}\Big|_{t=0} = A(0)\, z_0\,.$$

Рассмотрим теперь кратко более общий случай, когда $L_{t,s} = L_t + N_s + M_t R_s$, M_t и R_s коммутируют, т.е. $[M_t, R_s] = 0$, где L_t, N_s, M_t, R_s – скалярные операторы.

Тогда $L_{t,s} K(t,s) = 0$ дает соотношение

$$\langle L_t z_t, z_s\rangle + \langle z_t, \bar{N}_s z_s\rangle + \langle M_t z_t, \bar{R}_s z_s\rangle = 0, \tag{23}$$

$$L_t z_t = B_1^* z_t.$$

Пусть $M_t z_t = B_2^* z_t$. Тогда из (23) имеем $\langle z_t, (B_1 + B_2 \bar{R}_s + \bar{N}_s) z_s\rangle = 0$, откуда $(B_1 + B_2 \bar{R}_s + \bar{N}_s) z_s = 0$.

Если выбрать $R_t = \partial_t$, $N_t = \partial_t^2$ и считать, что z_t удовлетворяет уравнению (1), то для $A(t)$ получаем нелинейное операторное уравнение $\frac{dA}{dt} + A^2 + B_2 A + B_1 = 0$, а для z_t имеем следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{d^2 z_t}{dt^2} + (B_1 + B_2 A) z_t = 0, \\ z_t /_{t=0} = z_0, \\ \frac{dz_t}{dt} /_{t=0} = A(0)_0. \end{cases}$$

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. - М. : Наука, 1965. - 654 с.
2. Лившиц М.С., Янцевич А.А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. - Харьков : Изд-во Харьк. ун-та, 1971. - 160 с.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М. : Наука, 1965. - 70[illegible] с.

УДК 517.981

В.М.Кадец

ЗВЕЗДНОСТЬ ОБЛАСТИ ПРЕДЕЛОВ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СУММ РИМАНА ВЕКТОРНОЗНАЧНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть f - ограниченная функция, отображающая отрезок [0; 1] в сепарабельное банахово пространство X. Доказано, что множество пределов последовательностей интегральных сумм Римана функции f является звездным.

В настоящей статье мы снова обращаемся к относительно малоизученному (все основные работы на эту тему приведены в списке литературы) вопросу о структуре множества $I(f)$ пределов интегральных сумм Римана функции, действующей из отрезка [0; 1] в банахово пространство X.

ISBN 5-12-002405-X. Теория операторов, субгармонические функции. Киев, 1991.

Напомним определения. Функцию $f:[0;1]\to X$ назовем ограниченной, если $\sup\{\|f(t)\|: t\in[0;1]\}<\infty$. Для каждого разбиения Γ отрезка $[0;1]$ точками $0=a_1<b_1=a_2<b_2=\ldots<b_n=1$ и любого выбора T точек $\{t_i\}_{i=1}^n$, $t_i\in]a_i;\ b_i[$ можно записать интегральную сумму Римана функции f

$$S(f,\Gamma,T)=\sum_{i=1}^n f(t_i)(b_i-a_i).$$

Диаметром разбиения Γ будем называть наибольшую длину $d(\Gamma)$ отрезков $\Delta_k=[a_k;\ b_k]$. Функция интегрируема по Риману, если для любой неограниченно измельчающейся последовательности $(\Gamma_n,\ T_n)$ (т.е. такой, что $d(\Gamma_n)\to 0$) существует сильный предел интегральных сумм $S(f,\Gamma_n,T_n)$. В этом случае предел не зависит от выбора Γ_n и T_n и обозначается $\int\limits_0 f(t)\,dt$. Если функция f не интегрируема по Риману, то предел последовательности $S(f,\Gamma_n,T_n)$ зависит от выбора последовательности разбиений Γ_n и точек T_n (в частности, предел может не существовать). В этом случае мы вводим в рассмотрение множество

$$\dot I(f)=\left\{x\in X:\exists\{\Gamma_n,T_n\}_{n=1}^{\infty},\ \ d(\Gamma_n)\to 0,\ \ x=\lim_{n\to\infty}S(f,\Gamma_n,T_n)\right.$$

и называем его областью пределов римановых сумм функции f.

Ф.Хартман [1] показал, что для ограниченной функции в конечномерном пространстве $\dot I(f)$- выпуклое множество. Этот результат верен [2, 3-6] и для многих бесконечномерных пространств, однако не для всех: как показали М.Накамура и И.Амемия [3], существует ограниченная функция, отображающая отрезок в несепарабельное пространство $l_1(\Gamma)$, для которой $\dot I(f)$ состоит ровно из двух точек. Теорема Хартмана переносится даже не на все сепарабельные пространства [4]. Однако, как мы покажем в дальнейшем в сепарабельнозначном случае $\dot I(f)$ всегда является звездным множеством.

Введем еще одно понятие. Интегральную сумму $S(f,\Gamma,T)$ назовем ε-смешиваемой, если для любого разбиения $\tilde\Gamma$, вписанного в Γ, любого выбора $\tilde T$ точек $\tilde t_i$ и любого $\lambda\in[0;1]$ можно найти такое третье разбиение Γ_λ и точки T_λ, что $d(\Gamma_\lambda)\le d(\Gamma)$ и

$$\|S(f,\Gamma_\lambda,T_\lambda)-[\lambda S(f,\Gamma,T)+(1-\lambda)S(f,\tilde\Gamma,\tilde T)]\|\ . \qquad (1)$$

В дальнейшем через μ^* будем обозначать внешнюю, а через μ_* - внутреннюю меру Лебега.

Лемма 1. Пусть f - ограниченная функция, отображающая отрезок $[0;1]$ в сепарабельное банахово пространство X. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно построить ε-смешиваемую интегральную сумму $S(f, \Gamma, T)$.

Доказательство. Обозначим $\sup\{\|f(t)\| : t \in [0,1]\}$ через M. Тогда все значения функции f лежат в шаре B с центром в нуле и радиусом M. Разобьем B в объединение попарно не пересекающихся множеств $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ с диаметрами, не превосходящими $\varepsilon/4$ (это означает, что если $x, y \in B_i$ при некотором i, то $\|x-y\| \leq \varepsilon/4$). Такое разбиение множества B возможно ввиду сепарабельности пространства X. Рассмотрим множества $f^{-1}(B_i)$ – прообразы множеств B_i. Это система непересекающихся, вообще говоря, неизмеримых множеств, покрывающих в совокупности весь отрезок $[0;1]$. Выберем такой номер n, чтобы внешняя мера множества $A = \bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(B_k)$ была больше, чем $1 - \varepsilon/(8M)$. Приступим к построению требуемого разбиения Γ. Покроем множество $A_1 = f^{-1}(B_1)$ счетным числом непересекающихся отрезков так, чтобы суммарная длина этих отрезков равнялась $\mu^*(f^{-1}(B_1)) + \varepsilon/(8Mn)$. Выделим из этих отрезков конечное число отрезков $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{m_1}$ так, чтобы суммарная длина этих отрезков Δ_i $(1 \leq i \leq m_1)$ была больше, чем $\mu^*(f^{-1}(B_1))$. Обозначим ту часть множества $f^{-1}(B_2)$, которая не попала в $\bigcup_{k=1}^{m_1} \Delta_k$, через A_2. Понятно, что $f(A_2) \subset B_2$. Проделаем с A_2 ту же процедуру, что и с A_1, и выберем отрезки Δ_{m_1+1}, $\Delta_{m_1+2}, \dots, \Delta_{m_2}$ таким образом, чтобы основная часть множества A_2 попала в объединение этих отрезков, сумма длин отрезков Δ_i $(m_1 < i \leq m_2)$ была заключена между $\mu^*(A_2)$ и $\mu^*(A_2) + \varepsilon/(8Mn)$ и все Δ_i при $i \in [1, m_2]$ попарно не пересекались. Повторим этот процесс по индукции n раз, причем на j-м шаге множество A_j будем определять как $f^{-1}(B_j) \setminus \bigcup_{k=1}^{m_{j-1}} \Delta_k$. В результате получим отрезки Δ_k $(1 \leq k \leq m_n)$ суммарной длины не меньше, чем $1 - \varepsilon/(8M)$; причем для каждого k найдется такой номер $j(k) \in [1, n]$, что

$$\sum_{k=1}^{m_n} \mu_*\left[\Delta_k \setminus f^{-1}(B_{j(k)})\right] < \varepsilon/(8M).$$

Присоединим к отрезкам $\{\Delta_k\}_1^{m_n}$ еще конечное число отрезков $\{\Delta_k\}_{k=m_n+1}^{N}$ так, чтобы $\{\Delta_k\}_1^{N}$ образовывали покрытие отрезка $[0;1]$. Тогда $\sum_{k=m_n+1}^{N} |\Delta_k| \leq \varepsilon/(8M)$. Определим $j(k)$ при $k > m_n$ произвольным образом. Тогда

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_*\left[\Delta_k \setminus f^{-1}(B_{j(k)})\right] < \varepsilon/(8M).$$

Разбиение, порожденное отрезками Δ_k, обозначим через Γ. Выбор T точек $t_k \in \Delta_k$ осуществим следующим образом: если $\Delta_k \cap \cap f^{-1}(B_{j(k)}) \neq \emptyset$, то $t_k \in f^{-1}(B_{j(k)})$, а если указанное пересечение пусто, то $t_k \in \Delta_k$ выбираем произвольно.

Докажем, что $S(f, \Gamma, T)$ является ε-смешиваемой интегральной суммой. Пусть $\tilde{\Gamma}$ – разбиение отрезка $[0;1]$ на отрезки c_k, а $\tilde{T}$ – произвольный выбор точек $\tilde{t}_k \in c_k$. По определению, $S(f, \tilde{\Gamma}, \tilde{T}) = \sum f(\tilde{t}_k)|c_k|$. Пусть, далее разбиение $\tilde{\Gamma}$ вписано в Γ, т.е. все концы отрезков Δ_k служат концами некоторых отрезков c_k. Построим требуемое разбиение Γ_λ. Для этого заменим каждый отрезок c_k отрезком c_k' так, что $c_k' \subset c_k$, $\tilde{t}_k \in c_k'$, $|c_k'| = (1-\lambda)|c_k|$. Каждое множество $\Delta_k \setminus \bigcup_i c_i'$ состоит из конечного числа отрезков r_j. Разбиение Γ_λ образуем, взяв все отрезки c_k' и все отрезки r_j. Ясно, что

$$\sum_{c_i' \subset \Delta_k} |c_i'| = (1-\lambda)|\Delta_k|; \quad \sum_{r_i \subset \Delta_k} |r_i| = \lambda|\Delta_k|. \tag{2}$$

Выбор точек T_λ осуществим следующим образом. На отрезках c_i' возьмем те же точки $\tilde{t}_i$, что были на отрезках c_i. Обозначим множество тех i, при которых $r_i \subset \Delta_k$ и $r_i \cap f^{-1}(B_{j(k)}) \neq \emptyset$, через U_k. Для отрезков r_i при $i \in U_k$ точки t_i^* выберем принадлежащими $f^{-1}(B_{j(k)})$. Если $i \notin \bigcup_{k=1}^{N} U_k$, то $t_i^* \in r_i$ выберем произвольным образом. Согласно неравенству (2)

$$\sum_{i \notin \bigcup_{k=1}^{N} U_k} |r_i| \le \frac{\varepsilon}{4M}; \quad \sum_{k=1}^{N} \Big| |\Delta_k|\lambda - \sum_{i \in U_k} |r_i| \Big| \le \varepsilon/(4M). \tag{3}$$

Интегральная сумма $S(f, \Gamma_\lambda, T_\lambda)$ записывается следующим образом:

$$S(f, \Gamma_\lambda, T_\lambda) = \sum f(\tilde{t}_i)|c_i'| + \sum_{k=1}^{N} \sum_{i \in U_k} f(t_i^*)|r_i| +$$

$$+ \sum_{i \notin \bigcup U_k} f(t_i^*)|r_i| = (1-\lambda)S(f, \tilde{\Gamma}, \tilde{T}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} \sum_{i \in U_k} f(t_i^*)|r_i| + \sum_{i \notin \bigcup U_k} f(t_i^*)|r_i|.$$

Поэтому ввиду неравенств (3)

$$\| S(f, \Gamma_\lambda, T_\lambda) - \lambda S(f, \Gamma, T) - (1-\lambda) S(f, \tilde{\Gamma}, \tilde{T}) \| =$$

$$= \Big\| \sum_{k=1}^{N} \Big(\sum_{i \in U_k} f(t_i^*)|r_i| - \lambda f(t_k)|\Delta_k| \Big) + \sum_{i \notin \cup U_k} f(t_i^*)|r_i| \Big\| \leq$$

$$\leq \Big\| \sum_{k=1}^{N} \Big(\sum_{i \in U_k} (f(t_i^*) - f(t_k))|r_i| + f(t_k) \Big(\sum_{i \in U_k} |r_i| - \lambda |\Delta_k| \Big) \Big) \Big\| +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{4M} M \leq \Big\| \sum_{k=1}^{N} \Big(\sum_{i \in U_k} (f(t_i^*) - f(t_k))|r_i| \Big) \Big\| + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} .$$

Если $U_k \neq \varnothing$, то $f(t_k)$ и $f(t_i^*)$ при $i \in U_k$ все лежат в $B_{j(k)}$ – множестве с диаметром, не превосходящим $\varepsilon/4$. Следовательно,

$$\Big\| \sum_{k=1}^{N} \Big(\sum_{i \in U_k} (f(t_i^*) - f(t_k))|r_i| \Big) \Big\| \leq \frac{\varepsilon}{4} ,$$

и мы получаем требуемое неравенство (1). Лемма 1 доказана.

Замечание 1. По конструкции видно, что разбиение Γ в лемме 1 можно было взять сколь угодно мелким.

Лемма 2. Пусть X – сепарабельное пространство, $f:[0;1] \to X$ – ограниченная функция. Тогда найдется элемент $x \in I(f)$, который для любого $\varepsilon > 0$ с любой степенью точности можно приблизить ε-смешиваемыми интегральными суммами функции f, причем диаметры разбиений, порождающих эти интегральные суммы, могут быть взяты сколь угодно малыми.

Доказательство. Положим $M = \sup\{\|f(t)\| : t \in [0,1]\}$. Выберем $\varepsilon_n \searrow 0$ так, что $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$. Построим по индукции последовательность интегральных сумм $S_n = S(f, \Gamma_n, T_n)$ со свойствами:

1. S_n является ε_n-смешиваемой суммой, и $d(\Gamma_n) < \varepsilon_n$;
2. $\|S_{n+1} - S_n\| \leq \varepsilon_n$ при всех n .

Если нам это удастся, последовательность интегральных сумм S_n будет сходиться (вследствие абсолютной сходимости ряда $S_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(S_{n+1} - S_n)$). Ввиду соотношения $\lim_{n \to \infty} d(\Gamma_n) = 0$ предел x интегральных сумм S_n лежит в $I(f)$. Понятно, что этот элемент x можно с любой степенью точности приблизить ε-смешиваемыми интегральными суммами так, как это требуется в утверждении леммы 2.

Приступим к построению. Выберем сумму $S_1 = S(f, \Gamma_1, T_1)$, повторив конструкцию из леммы 1 с $\varepsilon = \varepsilon_1$ и позаботившись (в соответствии с замечанием 1), чтобы выполнялось неравенство $d(\Gamma_1) < \varepsilon_1$.

Тогда сумма S_1 будет ε_1-смешиваемой. Пусть N, B_i, Δ_k и числа $j(k)$ те же самые, что и в лемме 1. Тогда для них будет выполняться неравенство (2) с $\varepsilon = \varepsilon_1$. Чтобы получить разбиение Γ_2, проведем на каждом из отрезков Δ_k построение, аналогичное лемме 1. Разобьем каждое из множеств B_i на счетное число подмножеств с не превосходящими $\varepsilon_2/4$ диаметрами. Перенумеруем все эти подмножества и обозначим их B_i'. Новое разбиение Γ_2 отрезка $[0; 1]$, состоящее из отрезков $\{\Delta_i'\}_{i=1}^{N'}$, выберем так, чтобы для каждого i нашелся индекс $j'(i)$ со свойством

$$\sum_{i=1}^{N'} \mu_* \left[\Delta_i' \setminus f^{-1}(B'_{j'(i)})\right] < \frac{\varepsilon_2}{(4M)} \tag{4}$$

и чтобы для тех i, для которых $\Delta_i' \subset \Delta_k$, множество $B'_{j'(i)}$ было "почти всегда" подмножеством в $B_{j(k)}$. Это "почти всегда" понимаем в следующем смысле: если H_k – множество индексов i, для которых $\Delta_i' \subset \Delta_k$, но $B'_{j'(i)} \not\subset B_{j(k)}$, то

$$\sum_{k=1}^{N} \mu\left(\bigcup_{i\in H_k} \Delta_i'\right) < \varepsilon_1/(4M) . \tag{5}$$

Возможность этого следует из неравенства (2).

Выбор T_2 точек t_i' осуществим так, что при $\Delta_i' \cap f^{-1}(B'_{j'(i)}) \neq \emptyset$ точка t_i' принадлежит $f^{-1}(B'_{j'(i)})$. Из неравенства (5) и того, что $d(B_{j(k)}) < \varepsilon_1/4$, получаем

$$\| S(f, \Gamma_1, T_1) - S(f, \Gamma_2, T_2) \| < \varepsilon_1 ,$$

а из (4) получаем, что $S_2 = S(f, \Gamma_2, T_2)$ – ε_2-смешиваемая интегральная сумма.

Проведя на каждом из отрезков разбиения Γ_2 снова конструкцию из леммы 1, сможем получить ε_3-смешиваемую интегральную сумму S_3, для которой $\|S_3 - S_2\| \leqslant \varepsilon_2$. Повторяя приведенное рассуждение, получим требуемую последовательность S_n. Лемма 2 доказана.

Лемма 2 показывает, в частности, непустоту множества $\dot{I}(f)$ для функции со значениями в сепарабельном пространстве. Впервые этот результат был получен Эллисом [7]. Простые примеры показывают, что в несепарабельном пространстве $l_1(\Gamma)$ теорема Эллиса может не выполняться.

<u>Теорема</u>. Пусть f – ограниченная функция, определенная на отрезке $[0; 1]$, со значениями в сепарабельном пространстве X. Тогда $\dot{I}(f)$ – звездное множество.

<u>Доказательство.</u> Пусть $x \in I(f)$ – тот элемент, который, со-

гласно лемме 2, можно приблизить ε-смешиваемыми интегральными суммами функции f. Докажем, что x – центр звездности множества $\dot{I}(f)$. Пусть $y \in \dot{I}(f)$, $\lambda \in [0;1]$. Нам нужно показать, что $\lambda x+(1-\lambda)y$ также лежит в $\dot{I}(f)$. Зададимся произвольным $\varepsilon>0$ и выберем $(\varepsilon/4)$-смешиваемую сумму $S(f,\Gamma,T)$, для которой $d(\Gamma)<\varepsilon$ и $\|x-S(f,\Gamma,T)\| \leq \varepsilon/4$. Пусть n – количество интервалов в разбиении Γ. Выберем сумму $S(f,\Gamma_1,T_1)$, для которой

$$d(\Gamma_1)<\frac{\varepsilon}{8n \sup\|f(t)\|}\,;\ \|y-S(f,\Gamma_1,T_1)\|\leq\varepsilon/4.$$

Присоединим к разбиению Γ_1 все концы интервалов из разбиения Γ. Полученное разбиение обозначим $\tilde{\Gamma}$. На тех отрезках из $\tilde{\Gamma}$, которые совпадают с отрезками из Γ_1, сохраним выбор точек $t_i \in T_1$, а на отрезках, получившихся в результате добавления к Γ_1 концов отрезков из Γ, выберем точки t_i произвольным образом. Обозначим полученный выбор точек через $\tilde{T}$. Суммарная длина отрезков из Γ_1, на которые попали концы отрезков из Γ, не превосходит $nd(\Gamma_1)<\varepsilon/(8\sup\|f(t)\|)$. Поэтому $\|S(f,\Gamma_1,T_1)-S(f,\tilde{\Gamma},\tilde{T})\|\leq\varepsilon/4$ и $\|y-S(f,\tilde{\Gamma},\tilde{T})\|\leq\varepsilon/2$. Разбиение $\tilde{\Gamma}$ вписано в Γ. Поэтому ввиду $(\varepsilon/4)$-смешиваемости суммы $S(f,\Gamma,T)$ получаем существование разбиения Γ_λ и точек T_λ, для которых $d(\Gamma_\lambda)\leq d(\Gamma)\leq\varepsilon$ и

$$\|S(f,\Gamma_\lambda,T_\lambda)-\lambda x-(1-\lambda)y\|\leq$$

$$\leq\|S(f,\Gamma_\lambda,T_\lambda)-\lambda S(f,\Gamma,T)-(1-\lambda)S(f,\tilde{\Gamma},\tilde{T})\|+$$

$$+\lambda\|x-S(f,\Gamma,T)\|+(1-\lambda)\|y-S(f,\tilde{\Gamma},\tilde{T})\|\leq\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε это означает, что $\lambda x+(1-\lambda)y\in I(f)$. Теорема доказана.

В заключение пользуюсь случаем выразить глубокую признательность профессорам Т.Андо, И.Амемии и И.Гальперину, приславшим интересную информацию по истории вопроса.

1. Hartman P. On the limits of Riemann approximating sums // Quart. J. Math. Oxford Ser. - 1947. - 18. - P. 124-127.
2. Halperin I, Miller N. An inequality of Steinitz and the limits of Riemann sums // Trans. Roy. Soc. Canada. Sect. III.- 1954. - 48. - P. 27-29.
3. Nakamura M., Ameiya I. On the limits of Riemann sums of functions in Banach spaces // J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. 1. - 1966. - 19. - P. 135-145.
4. Кадец В.М., Кадец М.И. Об условиях выпуклости множества пределов римановых сумм векторнозначной функции // Мат. заметки. - 1984. - 35, вып. 2. - С. 161-167.

5. Кадец В.М. Интегральные суммы Римана и геометрия банахова пространства // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1987. – № 12. – С.12–14.
6. Кадец В.М. Область слабых пределов интегральных сумм Римана абстрактной функции // Изв. вузов. Математика. – 1988. – № 9. – С. 39–46.
7. Ellis H.W. On the limits of Riemann sums // J. London Math. Soc. – 1959. – 34. – P. 93-100.

УДК 517.547.2

И.В.Островский

РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ МАКСИМУМА МОДУЛЯ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ ДО ЕЕ НУЛЕВОГО МНОЖЕСТВА

Для целых функций конечного порядка и нормального типа получены асимптотические при $|\zeta|\to\infty$ оценки снизу величины $R(\zeta,f)=\inf\{|z-\zeta|: f(z)=0\}$, где $\zeta\in\{\zeta: |f(\zeta)|=M(|\zeta|,f)\}$.

Постановка вопроса, обсуждаемого в данной статье, такова. Пусть $[\rho,\sigma]$ – класс всех целых функций f не выше порядка $\rho>0$ и типа $\sigma>0$, $M(r,f)=\max\{|f(z)|: |z|\le r\}$. Точка ζ называется точкой максимума модуля, если $|f(\zeta)|=M(|\zeta|,f)$. Требуется получить асимптотическую при $|\zeta|\to\infty$ оценку снизу величины

$$R(\zeta,f)=\min\{|z-\zeta| : f(z)=0\}.$$

В работе [1] доказаны соотношения

$$\varlimsup_{|\zeta|\to\infty} |\zeta|^{-1}\{\ln M(|\zeta|,f)\}^{1/2} R(\zeta,f)>0,$$

$$\varliminf_{\substack{|\zeta|\to\infty\\ |\zeta|\notin E_\varepsilon}} |\zeta|^{-1}\{\ln M(|\zeta|,f)\}^{1/2+\varepsilon} R(\zeta,f)>0,\quad \forall\varepsilon>0,$$

где $E_\varepsilon\subset(0,\infty)$ – множество конечной логарифмической меры. Отличие наших результатов от результатов [1] состоит, в частности, в том, что мы даем оценки для $R(\zeta,f)$, справедливые для всех достаточно больших $|\zeta|$.

Теорема 1. Если $f\in[\rho,\sigma]$, то

$$\varliminf_{|\zeta|\to\infty} |\zeta|^{\rho-1} R(\zeta,f)\ge(e^2\rho\sigma)^{-1}. \tag{1}$$

Для подклассов класса $[\rho,\sigma]$ оценка (1) может быть усилена.

ISBN 5-12-002405-X. Теория операторов, субгармонические функции. Киев, 1991.

Обозначим через $[\rho,\sigma]_{reg}$ подкласс $[\rho,\sigma]$, состоящий из функций, для которых существует $\lim\limits_{r\to\infty} r^{-\rho}\ln M(r,f)$. Мы покажем, что если $f\in[\rho,\sigma]_{reg}$, то $\lim\limits_{|\zeta|\to\infty}|\zeta|^{\rho-1}R(\zeta,f)=\infty$, причем скорость стремления к ∞ тем больше, чем быстрее стремится к своему пределу при $r\to\infty$ величина $r^{-\rho}\ln M(r,f)$.

Теорема 2. Предположим, что $f\in[\rho,\sigma]_{reg}$ и

$$\ln M(r,f)=\sigma r^{\rho}+O(\psi(r)),\quad r\to\infty, \tag{2}$$

где $\psi(r)>0$ – неубывающая функция, такая, что $\psi(r)=O(r^{\rho})$, $\psi(2r)=O(\psi(r))$, $r\to\infty$. Тогда

$$\varliminf_{|\zeta|\to\infty}|\zeta|^{\rho-1}R(\zeta,f)\sqrt{\psi(|\zeta|)|\zeta|^{-\rho}}>0. \tag{3}$$

Обозначим через $[\rho,\sigma]^{+}$ подкласс $[\rho,\sigma]$, состоящий из функций с неотрицательными коэффициентами Тейлора. Следующая теорема показывает, что оценка (1) хотя и несколько уточняется в подклассе $[\rho,\sigma]^{+}$, однако даже в этом подклассе является неулучшаемой в смысле порядка по ρ и σ, $\rho\to\infty$, $\sigma\to\infty$.

Теорема 3. Если $f\in[\rho,\sigma]^{+}$, то

$$\varliminf_{|\zeta|\to\infty}|\zeta|^{\rho-1}R(\zeta,f)\geqslant(e\rho\sigma)^{-1}. \tag{4}$$

Существуют функции $f\in[\rho,\sigma]^{+}$, для которых

$$\varliminf_{|\zeta|\to\infty}|\zeta|^{\rho-1}R(\zeta,f)\leqslant\pi(e\rho\sigma)^{-1}. \tag{5}$$

Отметим одно применение теоремы 3. В работе [2] установлено, что для любой целой функции f, положительной на полуоси $[0,\infty)$, найдется целая функция g, такая, что произведение fg имеет неотрицательные коэффициенты Тейлора. Вопрос о минимальном возможном росте произведения fg остается открытым. Из теоремы 3 вытекает зависимость этого роста от близости нулей функции f к полуоси $[0,\infty)$. В частности, порядок ρ произведения fg может быть оценен снизу следующим образом. Определим на полуоси $[0,\infty)$ функцию $R_1(x,f)=\min\{|z-x|: f(z)=0\}$, $x\geqslant 0$. Применяя теорему 3 к функции fg, видим, что

$$\rho\geqslant\inf\left\{t:\varliminf_{x\to\infty}x^{t-1}R_1(x,f)>0\right\}.$$

Например, для функции

$$f(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-z\exp(-k+ie^{-2k})\right)\left(1-z\exp(-k-ie^{-2k})\right),$$

имеющей порядок нуль, произведение fg необходимо имеет бесконечный порядок.

Вспомогательные утверждения. Введем, следуя [1], функцию

$$K(r,f)=(d/d\ln r)\ln M(r,f)=rM'(r,f)/M(r,f)$$

(в точках излома функции $M(r,f)$ берется правая производная). Поскольку функция $\ln M(r,f)$ выпукла относительно $\ln r$, то $K(r,f)$ неубывающая на $(0,\infty)$. Докажем о ней две простые леммы.

Лемма 1. Если $f\in[\rho,\sigma]$, то

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-\rho}K(r,f)\le e\rho\sigma\,. \tag{6}$$

Доказательство. При любом $k>1$ имеем

$$\ln M(kr,f)\ge\int_r^{kr}K(t,f)\frac{dt}{t}\ge K(r,f)\ln k\,,$$

откуда $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\, r^{-\rho}K(r,f)\le(\ln k)^{-1}k^{\rho}\sigma$.

Беря минимум по $k>1$, получаем утверждение леммы 1.

Лемма 2. Если выполняется (2), то

$$K(r,f)=\rho\sigma r^{\rho}+O\left(\sqrt{r^{\rho}\varphi(r)}\right),\qquad r\to\infty. \tag{7}$$

Доказательство. Из (2) следует, что при $1<k\le 2$ имеем

$$|\ln M(kr,f)-\ln M(r,f)-\sigma(k^{\rho}-1)r^{\rho}|\le C\varphi(r),\quad 1\le r<\infty, \tag{8}$$

где $C>0$ не зависит от r и k. Поскольку

$$\ln M(kr,f)-\ln M(r,f)=\int_r^{kr}K(t,f)\frac{dt}{t}\,,$$

$$K(r,f)\ln k\le\int_r^{kr}K(t,f)\frac{dt}{t}\le K(kr,f)\ln k\,,$$

то из (8) следует, что

$$K(r,f)\le\sigma(\ln k)^{-1}(k^{\rho}-1)r^{\rho}+C(\ln k)^{-1}\varphi(r),$$

$$K(r,f)\ge\sigma(\ln k)^{-1}(1-k^{-\rho})r^{\rho}-C(\ln k)^{-1}\varphi(r).$$

Полагая $k=1+\sqrt{\varphi(r)r^{-\rho}}$, убеждаемся в справедливости (7).

Доказательство теоремы 1. Пусть ζ – точка максимума модуля функции f, $|\zeta|=r$, $\varphi_{\zeta}(z)=f(\zeta+z)/f(\zeta)$, $Q=Q(h,\zeta)=\max\{|\varphi_{\zeta}(z)|:|z|\le h\}$ (≥ 1). С помощью леммы 1 заключаем, что

$$\ln Q(h,\zeta)\le\ln M(r+h,f)-\ln M(r,f)=\int_r^{r+h}K(t,f)\frac{dt}{t}\le$$

$$\le K(r+h,f)h(r+h)^{-1} \le (e\rho\sigma + o(1))h(r+h)^{\rho-1}, \quad r\to\infty .$$

Используя прием из [1], рассмотрим функцию

$$\eta_\zeta(z) = Q(\varphi_\zeta(z)-1)(Q^2-\varphi_\zeta(z))^{-1}.$$

Очевидно, $|\eta_\zeta(z)| \le 1$ при $|z| \le h$ и $\eta_\zeta(0)=0$. По лемме Шварца отсюда следует, что $|\eta_\zeta(z)| \le |z|h^{-1}$, $|z| \le h$, откуда

$$Q|\varphi_\zeta(z)-1| \le |z|h^{-1}(Q^2-1) + |z|h^{-1}|\varphi_\zeta(z)-1| .$$

Поэтому

$$|\varphi_\zeta(z)-1| \le |z|(Q^2-1)(Qh-|z|)^{-1}, \quad |z| \le h .$$

Величина, стоящая в правой части полученного неравенства, будет строго меньше 1, если $|z| < hQ^{-1}$. При этих значениях z функция $\varphi_\zeta(z)$, а следовательно, и $f(\zeta+z)$ не обращаются в нуль. Отсюда вытекает, что

$$R(\zeta,f) \ge hQ^{-1}(h,\zeta) \ge h\exp\left\{-(e\rho\sigma+o(1))h(r+h)^{\rho-1}\right\}.$$

Полагая $h = r^{-\rho}(e\rho\sigma)^{-1}$, убеждаемся в справедливости (1).

Доказательство теоремы 2. Пусть ζ – точка максимума модуля функции f, $|\zeta| = r$, $\varphi_\zeta(\tau) = (f(\zeta e^\tau)/f(\zeta))e^{-K(r,f)\tau}$, $q = q(h,\zeta) = \max\{|\varphi_\zeta(\tau)| : |\tau| \le h\}$, $0<h\le 1$. С помощью леммы 2 заключаем, что при $-1 \le t \le 1$ выполняется

$$\ln M(re^t,f) - \ln M(r,f) - K(r,f)t = \sigma r^\rho(e^{\rho t}-1-\rho t) +$$
$$+\int_r^{re^t}\left\{(K(u,f)-\rho\sigma u^\rho)-(K(r,f)-\rho\sigma r^\rho)\right\}\frac{du}{u} \le$$
$$\le Cr^\rho t^2 + C|t|\sqrt{r^\rho\varphi(r)}, \quad 1\le r<\infty ,$$

где $C>0$ не зависит от r и t. Поэтому

$$q(h,\zeta) \le \exp\left\{Cr^\rho h^2 + Ch\sqrt{r^\rho\varphi(r)}\right\}, \quad 0<h\le 1, \quad 1\le r<\infty .$$

Рассматривая функцию $q(\varphi_\zeta(\tau)-1)(q^2-\varphi_\zeta(\tau))^{-1}$, устанавливаем с помощью рассуждений, аналогичных проведенным при доказательстве теоремы 1, что $\varphi_\zeta(\tau) \ne 0$ в круге $\{\tau : |\tau| < hq^{-1}(h,\zeta)\}$. Образ этого круга при отображении $\tau \to z = \zeta e^\tau$ содержит круг $\{z : |z-\zeta| < rC_1hq^{-1}(h,\zeta)\}$, где C_1 – абсолютная постоянная. Поэтому

$$R(\zeta,f) \ge C_1rhq^{-1}(h,\zeta) = C_1rh\exp\left\{-Cr^\rho h^2 - Ch\sqrt{r^\rho\varphi(r)}\right\}.$$

Полагая $h = 1/\sqrt{r^\rho\varphi(r)}$, убеждаемся в справедливости (3).

Доказательство теоремы 3. Если $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $a_k \ge 0$, то либо множество всех точек максимума модуля совпадает с полуосью $[0,\infty)$, либо для некоторого целого $n\geq 2$ выполняется $f(ze^{2\pi i/n})\equiv f(z)$ – в этом случае множество точек максимума модуля совпадает с системой лучей $\{z: \arg z = 2\pi k/n\}$, $k=0,1,\dots,$ $n-1$. Это вытекает из того, что равенство $|\sum_{k=0}^{\infty}a_k\zeta^k| = \sum_{k=0}^{\infty}a_k|\zeta|^k$ может иметь место в том и только в том случае, когда при всех $k\in\{k: a_k\neq 0\}$ $\arg\zeta^k = 0 \pmod{2\pi}$. Поэтому без уменьшения общности можно изучать величину $R(\zeta,f)$ только при $\zeta\in(0,\infty)$.

Пусть точка $z=re^{i\varphi}$, $|\varphi|<\pi$, является нулем функции f. Записываем

$$f(r)=f(r)-f(re^{i\varphi})=\sum_{k=1}^{\infty}a_kr^k(1-e^{ik\varphi})\leq|\varphi|\sum_{k=1}^{\infty}ka_kr^k=|\varphi|rf'(r),$$

откуда

$$|\varphi|\geq 1/K(r,f)\geq(e\rho\sigma+o(1))^{-1}r^{-\rho},\quad r\to\infty. \tag{9}$$

Предположим, что (4) не имеет места. Тогда найдутся последовательность $\zeta_k\uparrow\infty$ и число $\varepsilon>0$, такие, что

$$R(\zeta_k,f)\leq(e\rho\sigma+\varepsilon)^{-1}\zeta_k^{1-\rho}=o(\zeta_k),\quad k\to\infty. \tag{10}$$

По определению величины R существуют нули $z_k=r_ke^{i\varphi_k}$ функции f, такие, что $|z_k-\zeta_k|=R(\zeta_k,f)$. Заметим, что в силу (10) имеем $r_k=(1+o(1))\zeta_k$, $\varphi_k=o(1)$, $k\to\infty$ Поскольку $\zeta_k>0$, то, используя ζ_k, получаем $R(\zeta_k,f)\geq|\operatorname{Im} z_k|=r_k\varphi_k(1+o(1))\geq$ $\geq(e\rho\sigma+o(1))r_k^{1-\rho}=(e\rho\sigma+o(1))^{-1}\zeta_k^{1-\rho}$, $k\to\infty$, что противоречит (10). Тем самым (4) доказано.

Покажем, что функцией $f\in[\rho,\sigma]^+$, для которой выполнено (5), является

$$f(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+(z\rho_k^{-1})^{[a\rho_k^{\rho}]}\right), \tag{11}$$

где $1<\rho_k\uparrow\infty$, $(\rho_{k-1}^{\rho}\ln\rho_k)/\rho_k^{\rho}\to 0$ $(k\to\infty)$, $a=e\rho\sigma$.

Пусть $\rho_n<r\leq\rho_{n+1}$. Имеем

$$\ln M(r,f)=\ln f(r)=[a\rho_n^{\rho}]\ln(r/\rho_n)+$$
$$+\sum_{k=1}^{n-1}[a\rho_k^{\rho}]\ln(r/\rho_k)+\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+(\rho_k/r)^{[a\rho_k^{\rho}]}\right)+$$
$$+\sum_{k=n+1}^{\infty}\ln\left(1+(r/\rho_k)^{[a\rho_k^{\rho}]}\right)=[a\rho_n^{\rho}]\ln(r/\rho_n)+S_1+S_2+S_3;$$

$$S_1 \leq a \ln r \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k^\rho = a \ln r \cdot O(\rho_{n-1}^\rho) = a \ln r \frac{\rho_n^\rho}{\ln \rho_n} \cdot O\left(\frac{\rho_{n-1}^\rho \ln \rho_n}{\rho_n^\rho}\right) =$$

$$= O(r^\rho), \quad r \to \infty;$$

$$S_2 \leq \sum_{k=1}^{n} (\rho_k/r)^{[a\rho_k^\rho]} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (\rho_{n-1}/\rho_n)^{a\rho_k^\rho - 1} = O(1), \quad r \to \infty;$$

$$S_3 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} (r/\rho_k)^{[a\rho_k^\rho]} \leq 1 + \sum_{k=n+2}^{\infty} (\rho_{n+1}/\rho_{n+2})^{a\rho_k^\rho - 1} = O(1), \quad r \to \infty.$$

Таким образом,

$$r^{-\rho} \ln M(r,f) = a(\rho_n/r)^\rho \ln(r/\rho_n) + O(1) \leq$$

$$\leq a \max\{x^{-\rho} \ln x : x > 1\} + O(1) = a(e\rho)^{-1} + O(1), \quad r \to \infty. \quad (12)$$

Тем самым доказано, что $f \in [\rho, \sigma]^+$. (Полагая в первом равенстве в (12) $r = e^{1/\rho} \rho_n$, без труда убеждаемся, что f имеет в точности порядок ρ и тип σ.)

Функция f обращается в нуль в точках $z_n = \rho_n \exp\{\pi i/[a\rho_n^\rho]\}$. Поэтому

$$R(\rho_n, f) \leq |z_n - \rho_n| = 2\rho_n \sin\{\pi/(2[a\rho_n^\rho])\} = (\pi/a + o(1))\rho_n^{1-\rho}.$$

Поскольку $a = e\rho\sigma$, то для f имеет место (5).

<u>Примыкающий результат об аналитических характеристических функциях</u>. В заключение приведем результат, основная часть которого получается с помощью приемов, аналогичных использованным при доказательстве теоремы 3. Он, как нам кажется, может представлять интерес в связи с проблемой распределения нулей аналитических в полуплоскости характеристических функций (а.х.ф.) ([3, 4]).

Аналитическая в полуплоскости $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ и непрерывная в ее замыкании функция f называется а.х.ф., если она допускает представление

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izu} P(du), \quad \operatorname{Im} z \geq 0, \quad (13)$$

в котором P – вероятностная мера на $\mathbb{R}$, а интеграл сходится абсолютно. Ясно, что а.х.ф. положительна на мнимой полуоси $\{z : z = iy, \ y \geq 0\}$. Возникает вопрос об асимптотической при $y \to +\infty$ оценке снизу величины

$$\tilde{R}(y, f) = \min\{|z - iy| : f(z) = 0\}.$$

Как известно [5, с. 43], функция $b(y,f)=\ln f(iy)$ выпукла на полуоси $[0,\infty)$. Возможны два случая: а) существует (возможно, отрицательный) конечный предел $\sigma=\lim\limits_{y\to\infty} y^{-1}b(y,f)$; б) $\lim\limits_{y\to\infty} y^{-1}\times b(y,f)=+\infty$. В случае б) введем порядок $\rho(\geq 1)$ и тип σ функции b обычным образом: $\rho=\overline{\lim\limits_{y\to\infty}}(\ln y)^{-1}\ln b(y,f)$, $\sigma=\lim\limits_{y\to\infty} y^{-\rho}b(y,f)$. Обозначим $H(\rho)=(\rho/(\rho-1))^{\rho-1}$, $\rho>1$, $H(1)=1$; заметим, что $H(\rho)\uparrow e$ при $\rho\uparrow\infty$.

Теорема 4. В случае а) выполняется

$$\lim_{y\to\infty}\tilde{R}(y,f)=\infty. \tag{14}$$

В случае б) выполняется

$$\underline{\lim_{y\to\infty}}\, y^{\rho-1}\tilde{R}(y,f)\geq (H(\rho)\rho\sigma)^{-1}. \tag{15}$$

Существует а.х.ф. f, для которой b имеет порядок $\rho>1$, тип $\sigma>0$ и выполняется

$$\underline{\lim_{y\to\infty}}\, y^{\rho-1}\tilde{R}(y,f)\leq \pi (H(\rho)\rho\sigma)^{-1}. \tag{16}$$

Доказательство. В случае а) имеем $f(iy)=\exp\{(\sigma+o(1))y\}$, $y\to+\infty$, и, полагая в (13) $z=iy$, $y\to+\infty$, видим, что мера P сосредоточена на полуоси $[-\sigma,\infty)$, причем точка $-\sigma$ принадлежит носителю меры. Пусть $z=x+iy$, $y>0$. Записываем

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\{e^{i\sigma z}f(z)\}&=\int_{-\sigma}^{\infty}e^{-y(u+\sigma)}\cos x(u+\sigma)P(du)=\\&=\int_{-\sigma}^{-\sigma+\pi/(2|x|)}+\int_{-\sigma+\pi/(2|x|)}^{\infty}\geq\\&\geq e^{-\pi y/(4|x|)}\frac{\sqrt{2}}{2}P([-\sigma,-\sigma+\pi/(4|x|)])-e^{-\pi y/(2|x|)}.\end{aligned}$$

Последнее выражение становится положительным при достаточно большом y, каково бы ни было фиксированное x. Тем самым (14) доказано.

В случае б) имеем $b'(y,f)\uparrow\infty$, и нам понадобится неравенство

$$\overline{\lim_{y\to\infty}}\, y^{1-\rho}b'(y,f)\leq H(\rho)\rho\sigma. \tag{17}$$

Это неравенство получается аналогично (6). Имеем $(k>1)$

$$b(ky,f)\geq\int_{y}^{ky}b'(u,f)\,du\geq b'(y,f)y(k-1),$$

$$\overline{\lim_{y\to\infty}}\, y^{1-\rho} b'(y,f) \le \sigma k^{\rho}/(k-1)$$

и, беря минимум по k, получаем (17).

Пусть точка $z = x+iy$, $y>0$, является нулем функции f. Записываем

$$f(iy) = f(iy) - f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-yu}(1-e^{ixu})P(du) \le$$

$$\le |x| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-yu}|u|P(du) = |x|\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-yu}(-u)P(du) + \right.$$

$$\left. + 2\int_0^{\infty} e^{-yu} u P(du)\right\} = |x|\left\{(f(iy))' + O(1)\right\}, \quad y\to+\infty.$$

Отсюда следует, что $|x| \ge (1+O(1))/b'(y,f)$, $y\to\infty$, и, рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 3, получаем (15).

В качестве примера а.х.ф. f, для которой выполняется (16), можно взять $f(z) = g(e^{-iz})$, где

$$g(w) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + (w/p_k)^{[a \ln^{\rho-1} p_k]}\right),$$

$$1 < p_k \uparrow \infty, \quad \lim_{k\to\infty}(\ln p_{k-1}/\ln p_k) = 0, \quad a = H(\rho)\rho\sigma, \ \rho > 1.$$

Рассуждение, аналогичное проведенному при исследовании функции (11), показывает, что $\overline{\lim_{r\to\infty}}\,(\ln r)^{-\rho}\ln g(r) = \sigma$. Поэтому функция $b(y,f) = \ln g(e^y)$ имеет порядок ρ и тип σ. Поскольку точки $z_n = i\ln p_n + \pi/[a \ln^{\rho-1} p_n]$ являются нулями функции f, получаем (16).

Замечание. М.Л.Содин любезно указал простой пример, характеризующий точность оценки (3) в теореме 2. Рассмотрим σ-функцию Вейерштрасса

$$f(z) = z \prod_{a\in A\setminus\{0\}} \left(1 - \frac{z}{a}\right) \exp\left(\frac{z}{a} + \frac{z^2}{2a^2}\right),$$

где A – множество всех точек плоскости с целыми координатами. Как показано в [6, с. 346], имеем $\ln M(r,f) = (\pi/4)r^2 + O(1)$, $r\to\infty$. Следовательно, $f \in [2, \pi/4]_{reg}$ и выполнено (2) с $\rho=2$, $\sigma=\pi/4$, $\varphi(r)\equiv 1$. Очевидно, что $R(\zeta,f) \le 1/\sqrt{2}$. Таким образом, оценку (3) в общем случае нельзя усилить, заменив в ней " > 0" на " = ∞ ".

Выражаю глубокую признательность А.А.Гольдбергу за внимание к работе.

1. Macintyre A.J. Wiman's method and the "flat regions" of integral functions // Quart. J. Math. - 1938. - 9. - P. 81-88.
2. Островский И.В. О нулевых множествах целых периодических эрмитово-позитивных функций // Теория функций, функцион. анализ и их прил. - 1982. - 37. - С. 102-110.
3. Островский И.В. Арифметика вероятностных распределений // Теория вероятностей и ее применение. - 1986. - 31, вып. 1. - С. 3-30.
4. Вишнякова А.М., Островский И.В. Аналог теоремы Марцинкевича для целых хребтовых функций, не имеющих нулей в угловой области // Докл. АН УССР. Сер. А. - 1987. - № 9. - С. 8-11.
5. Линник Ю.В., Островский И.В. Разложения случайных величин и векторов. - М. : Наука, 1972. - 480 с.
6. Hayman W.K. The local growth of power series: a survey of the Wiman-Valiron method // Canad. Math. Bull. - 1974. - 17. - P. 317-358.

УДК 517.53

Д.Е.Папуш

ОБ АНАЛОГЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО РЯДА ЛАГРАНЖА ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ТОЧЕК В $\mathbb{C}^l$

В статье решается задача интерполяции с дискретной последовательностью в $\mathbb{C}^l$ в классе целых функций, имеющих индикатор не выше заданного. В качестве средства использован специальный интерполяционный ряд, являющийся (в некотором смысле) обобщением одномерного ряда Лагранжа.

В теории функций одного переменного традиционными являются задачи интерполяции, т.е. задачи, в которых изучается вопрос о существовании и представлении функции определенного класса, принимающей в заданных точках заданные значения. Этим вопросам посвящены многочисленные исследования.

Одним из методов решения одномерных задач интерполяции является использование ряда Лагранжа. В частности, этот метод применялся в работах Б.Я.Левина [1], А.Ф.Леонтьева [2, 3], О.М.Фирсаковой [4] и других авторов для интерполяции в различных классах целых функций, задаваемых условиями на рост. Чем более тонкая характеристика роста определяет класс, в котором должна лежать интерполирующая функция, тем более жесткие условия приходится налагать на множество узлов интерполяции.

В многомерном случае задачи интерполяции трактуются как задачи продолжения функции с необходимыми условиями роста с аналитического p-мерного множества. Методы решения таких задач суще-

ISBN 5-12-002405-X. Теория операторов, субгармонические функции. Киев, 1991.

ственно отличаются от одномерных. Это связано в первую очередь с недискретностью аналитических множеств. В настоящей работе предпринята попытка применить при $\rho = 0$ (т.е. для дискретных аналитических множеств) одномерные методы, построив некоторый аналог ряда Лагранжа. Основной сложностью при этом является необходимость построения канонической функции, обращающейся в нуль в заданных точках пространства $\mathbb{C}^l$. В качестве такой функции будем использовать каноническое произведение $\pi(z)$, построенное по заданной дискретной последовательности. Отличительной чертой этой функции является то, что ее нулевое множество состоит из счетного набора гиперплоскостей, для каждой из которых некоторая точка заданной последовательности является основанием перпендикуляра, опущенного на эту гиперплоскость из начала координат. Для таких функций (так называемых функций с "плоскими" нулями) автором [5, 6] были получены аналоги одномерных теорем, позволяющие использовать их в качестве "кирпичей", из которых строится аналог ряда Лагранжа для многомерного пространства.

Перейдем к формулировке необходимых определений и результатов.

Пусть $A = \{a^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ – дискретная последовательность точек пространства $\mathbb{C}^l$ конечного порядка $\rho > 0$ [*)]. Через $\pi(z)$ обозначим каноническое произведение, построенное по последовательности A:

$$\pi(z) = \prod_{k=1}^{\infty} G_p\left(\langle z, a^{(k)} |a^{(k)}|^{-2} \rangle\right), \tag{1}$$

где число $p \in \mathbb{Z}^+$ такое, что выполнена пара условий

$$\sum^{\infty} |a^{(k)}|^{-p} = \infty, \quad \sum^{\infty} |a^{(k)}|^{-p-1} < \infty \quad ; \tag{2}$$

$G_p(u)$ – первичный множитель Вейерштрасса; $\langle z, w \rangle = z_1 w_1 + \dots + z_l w_l$ – эрмитово скалярное произведение. Как было показано в [5], функция $\pi(z)$ имеет порядок роста ρ, а ее нулевое множество есть счетное объединение гиперплоскостей $H_k = \{z \in \mathbb{C}^l : \langle z, a^{(k)} \rangle = |a^{(k)}|^2\}$, для которых точки $a^{(k)}$ суть основания перпендикуляров, опущенных на H_k из начала координат.

Пусть $\rho(r) \to \rho$ – некоторый уточненный порядок [**)]. Через

---

*) $\rho = \overline{\lim_{t \to \infty}} (\ln t)^{-1} \ln n_A(t)$, где $n_A(t)$ – считающая функция точек последовательности A в шаре радиуса t.

**) Уточненным порядком называется функция $\rho(r) \in C^1(\mathbb{R}^+)$, удовлетворяющая условиям $\lim_{r \to \infty} \rho(r) = \rho$, $\lim_{r \to \infty} r\rho'(r) \ln r = 0$.

$L(z)$ всюду в дальнейшем будем обозначать радиальный индикатор функции $\pi(z)$ относительно $\rho(r)$:

$$L(z) = \overline{\lim_{t \to \infty}}\, t^{-\rho(t)} \ln |\pi(tz)| .$$

Отметим, что в силу результата Л.Грумена [7] функция $L(z)$ непрерывна.

Будем решать задачу свободной интерполяции с последовательности A в классе целых функций, радиальный индикатор которых относительно $\rho(\cdot)$ не превосходит $L(z)$. Это означает, что нас будут интересовать условия на последовательность A, при которых для всякой последовательности $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ комплексных чисел, удовлетворяющих условию

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \left(\frac{\ln |w_k|}{|a^{(k)}|^{\rho(|a^{(k)}|)}} - L\left(a^{(k)} |a^{(k)}|^{-1}\right) \right) \leq 0 , \qquad (3)$$

существует целая функция $f(z)$, такая, что

1) $f(a^{(k)}) = w_k \quad \forall k = 1, 2, \dots ;$

2) $L_r(f; z) \overset{def}{=\!=} \overline{\lim_{t \to \infty}}\, t^{-\rho(t)} \ln |f(tz)| \leq L(z) .$

При этом решение задачи $\{$1), 2)$\}$ будет искаться в виде специального ряда, являющегося (в некотором смысле) аналогом одномерного ряда Лагранжа.

Введем в рассмотрени функции

$$\pi_k(z) = \pi(z) \left(|a^{(k)}| - \langle z, a^{(k)} |a^{(k)}|^{-1} \rangle \right)^{-1} .$$

Лемма 1. Имеет место оценка

$$|\pi_k(z)| \leq \max\{ |\pi(z')| : |z - z'| \leq 2 \} . \qquad (4)$$

Доказательство. Рассмотрим множество

$$\Gamma_k = \{ z \in \mathbb{C}^l : ||a^{(k)}| - \langle z, a^{(k)} |a^{(k)}|^{-1} \rangle| \leq 1 .$$

На дополнении множества Γ_k $|\pi_k(z)| \leq \pi(z)$. Следовательно, там же справедлива оценка (4).

Пусть $z \in \Gamma_k$; $z^0 = z + a^{(k)} (1 - \langle z, a^{(k)} |a^{(k)}|^{-2} \rangle)$ – проекция точки z на гиперплоскость H_k. Рассмотрим в $\mathbb{C}^l$ круг

$$K = \{ z' \in \mathbb{C}^l : z' = z^0 + r e^{i\theta} a^{(k)} |a^{(k)}|^{-1},\ r \in [0, 1],\ \theta \in [0, 2\pi] \} .$$

Заметим, что

а) $z \in K$, так как $z = z^0 + a^{(k)} |a^{(k)}|^{-1} (\langle z, a^{(k)} |a^{(k)}|^{-1} \rangle - |a^{(k)}|)$;

и $|\langle z, a^{(k)} |a^{(k)}|^{-1} \rangle - |a^{(k)}|| \leq 1$;

б) граница круга K лежит на границе множества Γ_k, так как

$$z' = z^0 + e^{i\theta} a^{(k)} |a^{(k)}|^{-1} \Rightarrow ||a^{(k)}| - \langle z, a^{(k)} |a^{(k)}|^{-1} \rangle| = 1 .$$

Следовательно,

$$\pi_k(z) \leq \max_{z' = z^0 + e^{i\theta} a^{(k)} |a^{(k)}|^{-1}} |\pi_k(z')| \leq \max_{z' = z^0 + e^{i\theta} a^{(k)} |a^{(k)}|^{-1}} |\pi(z')| \leq$$

$$\leq \max_{|z - z'| \leq 2} |\pi(z')| .$$

Лемма доказана.

Следствие 1.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists r_\varepsilon > 0, \quad \forall r > r_\varepsilon \ \forall z \in \mathbb{C}^l : |z| = 1$$

$$r^{-\rho(r)} \ln |\pi_k(rz)| \leq L(z) + \varepsilon . \tag{5}$$

Доказательство. Данное утверждение немедленно следует из оценки (4), отмеченной выше непрерывности функции $L(z)$ и известного свойства радиального индикатора (см. [8, с. 286, свойство в]).

Для дальнейшего нам понадобится один частный факт о функциях с "плоскими" нулями, который мы сейчас сформулируем.

Теорема A*). Для всякого уточненного порядка $\rho(r) \to \rho$ и всякого $c_0 > 0$ существует целая функция с правильным множеством "плоских" нулей**), имеющая относительно $\rho(r)$ радиальный индикатор, равный $c_0 |z|^\rho$.

Перейдем теперь непосредственно к интерполяционной задаче $\{1), 2)\}$.

Теорема 1. Пусть $A = \{a^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ – последовательность попарно различных точек пространства $\mathbb{C}^l$ конечного порядка $\rho > 0$, для которой выполнены условия $\pi_k(a^{(k)}) \neq 0 \ \forall k$ и

$$\lim_{k \to \infty} \left[\frac{\ln |\pi_k(a^{(k)})|}{|a^{(k)}|^{\rho(|a^{(k)}|)}} - l\left(a^{(k)} |a^{(k)}|^{-1}\right) \right] = 0 . \tag{6}$$

Тогда для любой последовательности комплексных чисел $\{w_k\}_{k=1}^\infty$, удовлетворяющих условию (3), существует целая функция $f(z)$, решающая интерполяционную задачу $\{1), 2)\}$ и представимая в виде

$$f(z) = \sum_{k=1}^\infty \frac{w_k \pi_k(z) \omega_k(z)}{\pi_k(a^{(k)}) \omega_k(a^{(k)})} , \tag{7}$$

---

*) Для случая $\rho(r) = \rho$ эта теорема (в чуть менее общем виде) впервые была получена А.Б.Секериным [9]. В приведенной формулировке она принадлежит автору [6].

**) Определение правильного множества "плоских" нулей см. в [6]. Отметим, что целая функция с правильным множеством "плоских" нулей является функцией П – вполне регулярного роста в смысле определения, данного в обзоре Л.И.Ронкина [10]; см. также [5, 6].

где $\omega_k(z)$ – некоторые целые функции с "плоскими" нулями, $\omega_k(a^{(k)})\neq 0$.

Доказательство. Если ряд (7) сходится равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{C}^l$, то он представляет собой функцию, удовлетворяющую условию 1). Покажем, что можно подобрать функции $\omega_k(z)$ так, чтобы описанная выше сходимость имела место и выполнялось условие 2).

В силу (6) и (3)

$$\begin{aligned} &\ln|\pi_k(a^{(k)})| \geq L(a^{(k)}) + \varphi_1(|a^{(k)}|), \\ &\ln|w_k| \leq L(a^{(k)}) + \varphi_2(|a^{(k)}|), \end{aligned} \tag{8}$$

где функции φ_j, $j = 1, 2$, удовлетворяют условию

$$\lim_{k\to\infty} |a^{(k)}|^{-\rho(|a^{(k)}|)}\varphi_j(|a^{(k)}|) = 0 .$$

Обозначим $\varphi(|a^{(k)}|) = \varphi_1(|a^{(k)}|) + \varphi_2(|a^{(k)}|)$. Из оценок (8) получаем

$$|a^{(k)}|^{-\rho(|a^{(k)}|)} \ln\left|\frac{w_k}{\pi_k(a^{(k)})}\right| \leq \frac{\varphi(|a^{(k)}|)}{|a^{(k)}|^{\rho(|a^{(k)}|)}} = 0 \tag{9}$$

при $k\to\infty$.

Воспользуемся теоремой о существовании уточненного порядка (см. [1, с. 52, теорема 16], согласно которой существует уточненный порядок $\tilde\rho(r)\to\tilde\rho$ (отметим, что, возможно, $\tilde\rho<\rho$), такой, что

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} |a^{(k)}|^{-\tilde\rho(|a^{(k)}|)}\varphi(|a^{(k)}|) \leq 1^{*)} . \tag{10}$$

Анализ доказательства упомянутой теоремы показывает, что выбор уточненного порядка $\tilde\rho(r)$ в данной ситуации можно осуществить так, чтобы выполнялось еще и условие**)

$$\lim_{r\to\infty} r^{\tilde\rho(r)-\rho(r)} = 0 . \tag{11}$$

Определим теперь функцию $\rho_1(r) = \frac{1}{2}(\rho(r) + \tilde\rho(r))$ и построим целую функцию $\omega(z)$ с правильным множеством "плоских" нулей, имеющую относительно уточненного порядка $\rho_1(r)$ радиальный индикатор

---

*) В упомянутой теореме рассматривается не последовательность, а функция, заданная на положительном луче, однако в рассматриваемом вопросе это различие несущественно.

**) Подробно это построение проведено в работе А.Ф.Гришина [11, с. 38].

$L_{\rho_1}(\omega; z) = 3|z|^{\rho_1}$; такая функция существует в силу теоремы A.

Напомним теперь, что α-мерой Карлесона ограниченного множества $D \subset \mathbb{C}^l$ называется величина $\alpha\text{-}mes\, D \overset{def}{=} \inf \sum r_j^\alpha$, где $\inf$ берется по всевозможным покрытиям $\bigcup_j B(z^{(j)}; r_j) \supset D$; здесь, как обычно, $B(z;r) = \{w \in \mathbb{C}^l : |z - w| < r\}$. Если теперь E – множество в $\mathbb{C}^l$ (возможно, неограниченное), то его относительной α-мерой назовем величину

$$\overline{\alpha - mes}\, E = \varlimsup_{R \to \infty} R^{-\alpha} [\alpha - mes\,(E \cap B(0; R))] .$$

Если $\overline{\alpha - mes}\, E = 0$, то множество E называется C_0^α-множеством*). Если множество E является C_0^α-множеством при любом $\alpha > 2l - 2$, то оно называется C_0-множеством.

Поскольку целая функция $\omega(z)$ есть функция вполне регулярного роста (см. сноску на с. 78), то, согласно известному результату В.С.Азарина о сходимости вне исключительных множеств (см. [12, с. 165, лемма 4.5.1]), найдется такое C_0-множество E, что

$$\lim_{\substack{|z| \to \infty \\ z \bar{\in} E}} |z|^{-\rho_1(|z|)} \ln|\omega(z)| = 3 . \tag{12}$$

Отметим, что множество E при $r > r_0$, где r_0 достаточно велико, не может покрывать целиком сферу радиуса r с центром в начале координат. Поэтому для $a^{(k)}$, таких, что $|a^{(k)}| > r_0$, т.е. $k > k_0$, существует унитарный оператор U_k, такой, что $U_k a^{(k)} \bar{\in} E$. Обозначим

$$\left.\begin{array}{ll} 1 & \text{при } k \le k_0 \\ \omega(U_k z) & \text{при } k > k_0 \end{array}\right\} = \omega_k(z) .$$

Покажем, что ряд (7) в этом случае сходится равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{C}^l$ и его сумма удовлетворяет условию 2). В силу (12) и выбора функций ω_k при $|a^{(k)}| > r_1$,

$$\ln|\omega_k(a^{(k)})| \ge 2|a^{(k)}|^{\rho_1(|a^{(k)}|)} .$$

Поэтому при $r > r_2$ в силу (9) и (10)

$$\ln\left|\frac{w_k}{x_k(a^{(k)})\omega_k(a^{(k)})}\right| < \varphi(|a^{(k)}|) - 2|a^{(k)}|^{\rho_1(|a^{(k)}|)} <$$
$$< -\frac{1}{2}|a^{(k)}|^{\rho_1(|a^{(k)}|)}$$

---

*) Впервые это определение с заменой α на $2l - 2 + \alpha$ было дано в работе В.С.Азарина [12, с. 162].

Оценим снизу величину $|a^{(k)}|^{\rho_1(|a^{(k)}|)}$. В силу оценки считающей функции $n_A(t)$ (см. [5, с. 119]) и того, что функция $\pi(z)$ имеет не выше, чем нормальный, тип при порядке $\rho(r)$, имеем

$$k \leq n_A(|a^{(k)}|) \leq c|a^{(k)}|^{\rho(|a^{(k)}|)}.$$

Поэтому

$$|a^{(k)}|^{\frac{1}{2}\rho(|a^{(k)}|)} \geq \sqrt{k/c}.$$

Но $|a^{(k)}|^{\rho_1(|a^{(k)}|)} > |a^{(k)}|^{\frac{1}{2}\rho(|a^{(k)}|)}$, и при $|a^{(k)}| > r_2$ мы имеем

$$\ln\left|\frac{w_k}{\pi_k(a^{(k)})\omega_k(a^{(k)})}\right| < -\frac{1}{2}\sqrt{k/r},$$

или, что то же самое,

$$\left|\frac{w_k}{\pi_k(a^{(k)})\omega_k(a^{(k)})}\right| \leq \exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{k/c}\right).$$

и, следовательно, ряд (7) сходится равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{C}^{l}$.

Осталось проверить, что $L_f(f;z) \leq L(z)$, где через $f(z)$ обозначена сумма ряда (7). При $|z| > r_3$

$$\ln|\omega(z)| < \gamma|z|^{\rho_1(|z|)} = \gamma|z|^{\rho_1(|z|)-\rho(|z|)}|z|^{\rho(|z|)}.$$

Следовательно, в силу (11) $\ln|\omega(z)| < \delta|z|^{\rho(|z|)}$ при $|z| > r_4(\delta)$. Отсюда в свою очередь следует, что при $k > k_0$ и $|z| > r_4(\delta)$ $\ln|\omega_k(z)| < \delta|z|^{\rho(|z|)}$. Выбирая $|z| > \max(r_4(\delta), r_\delta)$, где r_δ – из условия (5) следствия 1, получаем

$$|z|^{-\rho(|z|)}\ln|\pi_k(z)\omega_k(z)| \leq L\left(\frac{z}{|z|}\right) + 2\delta \quad \forall k. \tag{13}$$

Поскольку (13) справедливо при всяком $\delta > 0$, то отсюда и из вида (7) интерполирующей функции заключаем, что $L_f(f;z) \leq L(z)$. Теорема доказана.

Естественно возникает вопрос о существенности условия (6) для того, чтобы имелось решение интерполяционной задачи {1), 2)} в виде ряда (7). Частичный ответ на него дает следующее утверждение.

<u>Теорема 2</u>. Пусть $A = \{a^{(k)}\}_1^{\infty}$ – последовательность попарно различных точек пространства $\mathbb{C}^l$ конечного порядка $\rho > 0$, и пусть множество гиперплоскостей с основаниями перпендикуляров $\{a^{(k)}\}$ есть нулевое множество некоторой целой функции вполне регулярного роста относительно некоторого уточненного порядка $\rho(r) \to \rho$. Тогда чтобы для любой последовательности комплексных чисел $\{w_k\}$, удовлетворяющих условию (3), существовала функция $f(z)$, решаю-

щая интерполяционную задачу $\{1), 2)\}$ и представимая в виде (7), необходимо выполнение условия (6).

Доказательство. Прежде всего отметим, что если $\rho \bar{\in} \mathbb{Z}$, то само каноническое произведение $\pi(z)$, построенное по последовательности A с помощью формулы (1), будет функцией вполне регулярного роста. Если $\rho \in \mathbb{Z}$, то найдется однородный многочлен $q(z)$ степени ρ, такой, что функция $\pi(z)\exp(q(z))$ будет иметь вполне регулярный рост. Всюду в дальнейшем через $\pi(z)$ мы обозначаем функцию вполне регулярного роста, фигурирующую в условии теоремы (см. [6]); она отличается от канонического произведения (1) разве лишь экспоненциальным множителем.

Предположим теперь, что условие (6) не выполняется, т.е.

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\ln|\pi_k(a^{(k)})|}{|a^{(k)}|^{\rho(|a^{(k)}|)}} - L(a^{(k)}|a^{(k)}|^{-1})\right) = -\gamma < 0 .$$

Тогда найдется такая последовательность $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$, что

$$\lim_{j\to\infty}\left(\frac{\ln|\pi_{k_j}(a^{(k_j)})|}{|a^{(k_j)}|^{\rho(|a^{(k_j)}|)}} - L\left(a^{(k_j)}|a^{(k_j)}|^{-1}\right)\right) = -\gamma . \tag{14}$$

Прореживая по необходимости последовательность $\{a^{(k_j)}\}$, можно добиться, чтобы она удовлетворяла следующим условиям:

I) $\lim\limits_{j\to\infty} a^{(k_j)}|a^{(k_j)}|^{-1} = \zeta^0$, где ζ^0 - некоторая точка на единичной сфере в $\mathbb{C}^2$;

II) произведение $\sigma(z) = \prod\limits_{j=1}^{\infty}\left(1 - \langle z, a^{(k_j)}|a^{(k_j)}|^{-2}\rangle\right)$ сходится (это будет выполнено, например, если выбрать порядок последовательности $\{a^{(k_j)}\}$ меньше единицы);

III) при $j<i$ $$\frac{|\langle a^{(k_i)}, a^{(k_j)}\rangle|}{|a^{(k_j)}|^2} > 2 ;$$

IV) при $j>i$ $$\frac{|\langle a^{(k_i)}, a^{(k_j)}\rangle|}{|a^{(k_j)}|^2} < \frac{1}{(i-j)^2} ;$$

V) порядок последовательности $\{a^{(k_j)}\}$ меньше ρ.

Обозначим $b^{(j)} = a^{(k_j)}$, $j = 1, 2, \ldots$.

Предположим теперь, что существует функция $f(z)$, представимая в виде (7) и решающая интерполяционную задачу $\{1), 2)\}$ для последовательности $\{w_k\}$, заданной следующим образом:

$$w_{k_j} = \exp\left(L(b^{(j)}|b^{(j)}|^{-1})|b^{(j)}|^{\rho(|b^{(j)}|)}\right)$$

$$w_k = 0 \qquad \forall l \in \{k_j\}_{j=1}^{\infty} .$$

Легко видеть, что для $\{w_k\}$ выполнено условие (3). Рассмотрим интерполирующую функцию

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\exp\left(L(b^{(j)}|b^{(j)}|^{-1})|b^{(j)}|^{\rho(|b^{(j)}|)}\right)\pi_{k_j}(z)\omega_{k_j}(z)}{\pi_{k_j}(b^{(j)})\omega_{k_j}(b^{(j)})} .$$

В силу условия 2) $L_f(f;z) \le L(z)$.

Положим $\Phi(z) = f(z)\sigma(z)[\pi(z)]^{-1}$. Очевидно, что функция $\Phi(z)$ целая. В силу условия У) на последовательность $\{b^{(j)}\}$ и того, что $\pi(z)$ – функция вполне регулярного роста, получаем

$$L_f(\Phi;z) = L_f(f;z) - L(z) \le 0 . \tag{15}$$

Обозначив

$$\sigma_j(z) = \sigma(z)\left(|b^{(j)}| - \langle z, b^{(j)}|b^{(j)}|^{-1}\rangle\right)^{-1},$$

оценим величину $|\Phi(b^{(j)})|$. Записываем

$$\Phi(b^{(j)}) = f(b^{(j)})\sigma_j(b^{(j)})\pi_{k_j}(b^{(j)}) =$$

$$= \frac{\exp\left(L(b^{(j)}|b^{(j)}|^{-1})|b^{(j)}|^{\rho(|b^{(j)}|)}\right)\sigma_j(b^{(j)})}{\pi_{k_j}(b^{(j)})} .$$

Поэтому

$$\ln|\Phi(b^{(j)})| = L(b^{(j)}|b^{(j)}|^{-1})|b^{(j)}|^{\rho(|b^{(j)}|)} + \ln|\sigma_j(b^{(j)})| - \ln|\pi_{k_j}(b^{(j)})| .$$

Оценим второе слагаемое. Имеем

$$\ln|\sigma_j(b^{(j)})| = -\ln|b^{(j)}| + \ln\left|\prod_{i\ne j}\left(1 - \frac{\langle b^{(j)}, b^{(i)}\rangle}{|b^{(i)}|^2}\right)\right| .$$

В силу свойств III) и IV) последовательности $\{b^{(j)}\}$ заключаем, что

$$\ln\left|\prod_{i\ne j}\left(1 - \frac{\langle b^{(j)}, b^{(i)}\rangle}{|b^{(i)}|^2}\right)\right| \ge$$

$$\ge \ln\left|\prod_{i>j}\left(1 - \frac{\langle b^{(j)}, b^{(i)}\rangle}{|b^{(i)}|^2}\right)\right| \ge \ln\left|\prod_{s=1}^{\infty}(1 - s^{-2})\right| = c_0 .$$

Поэтому $\ln|\sigma_j(b^{(j)})| \ge c_0 - \ln|b^{(j)}|$. Следовательно,

$$\frac{\ln|\Phi(b^{(j)})|}{|b^{(j)}|^{\rho(|b^{(j)}|)}} \ge \frac{c_0 - \ln|b^{(j)}| - \ln|\pi_{k_j}(b^{(j)})|}{|b^{(j)}|^{\rho(|b^{(j)}|)}} + L\left(\frac{b^{(j)}}{|b^{(j)}|}\right).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $j \to \infty$, с учетом предположения (14) получаем

$$\varlimsup_{j\to\infty} |z^{(j)}|^{-\rho(|z^{(j)}|)} \ln|\varphi(z^{(j)})| \geq \gamma > 0 .$$

Последнее неравенство, однако, противоречит (15), так как из него в силу известного свойства радиального индикатора (см. [8, с.286]) следует, что $L_p(\bar{\Phi}; \zeta^o) \geq \gamma$, где ζ^o - точка из условия I) на последовательность $\{z^{(j)}\}$. Следовательно, предположение о невыполненности условия (6) из формулировки рассматриваемой теоремы приводит к противоречию. Теорема доказана.

В заключение автор приносит благодарность Л.И.Ронкину за постоянное внимание к работе.

1. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. - М. : Гостехтеоретиздат, 1956. - 632 с.
2. Леонтьев А.Ф. Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка // Докл. АН СССР. - 1948. - 61, № 5. - С. 785-787.
3. Леонтьев А.Ф. Об интерполировании в классе функций конечного порядка нормального типа // Там же. - 1949. - 66, № 2. - С. 153-156.
4. Фирсакова О.С. Некоторые вопросы интерполирования с помощью целых функций // Там же. - 1958. - 120, № 3. - С. 477-480.
5. Папуш Д.Е. О росте целых функций с "плоскими" нулями // Теория функций, функцион. анализ и их прил. - 1987. - Вып. 48. - С. 117-125.
6. Папуш Д.Е. О регулярности роста целых функций с "плоскими" нулями. 1, 2. - Харьков : Изд-го Харьк. ун-та, 1986. - Деп. в УкрНИИНТИ, № 393 Ук-86, 1056 Ук-86.
7. Gruman L. The regularity of growth of entire function whose zeroes are hyperplanes // Ark. Mat. - 1972. - 10, N 1.-P.23-31.
8. Ронкин Л.И. Введение в теорию целых функций многих переменных. - М. : Наука, 1971. - 432 с.
9. Секерин А.Б. О полноте системы кратных экспонент // Исследования по теории аппроксимации функций. - Уфа, 1981. - С. 78-91.
10. Ронкин Л.И. Целые функции // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. математики. Фундам. направления. - 1986. - 9. - С. 5-36.
11. Гришин А.Ф. О множествах регулярности роста целых функций // Теория функций, функцион. анализ и их прил. - 1984. - Вып. 42. - С. 37-43.
12. Азарин В.С. Об асимптотическом поведении субгармонических функций конечного порядка// Мат. сб. Н.С. - 1979. - 108, вып. 2. - С. 147-167.

УДК 517.535.4

Л.Р.Подошев

О НЕКОТОРЫХ ПРИЗНАКАХ ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНОГО РОСТА ФУНКЦИИ, СУБГАРМОНИЧЕСКОЙ В R^m

Доказаны признаки вполне регулярного роста субгармонической функции конечного порядка в m-мерном пространстве, имеющей сферический индикатор внутри конуса, аналогичные теоремам М.Картрайт, Б.Я.Левина о вполне регулярном росте голоморфной функции конечного порядка с тригонометрическим индикатором внутри угла.

Введение. Пусть $SH(\rho(r))$ - класс субгармонических в m-мерном пространстве R^m функций конечного порядка $\rho>0$ и нормального типа при уточненном порядке $\rho(r)$, $\rho(r)\to\rho$. Индикатор $h(x,u)$ и нижний индикатор $\underline{h}(x,u)$ функции u при уточненном порядке $\rho(r)$ определяются [1, 2] соответственно равенствами

$$h(x,u)=\Big(\overline{\lim_{t\to\infty}}\, u_t\Big)^*(x),$$

$$\underline{h}(x,u)=\inf_{T}\Big(\overline{\lim_{\substack{t\to\infty\\ t\in T}}}\, u_t\Big)^*(x),$$

где $T\subset(0,\infty)$ - множество, имеющее точку сгущения на ∞; $*$ обозначает полунепрерывную сверху регуляризацию

$$(\cdot)^*(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\|x-x'\|<\varepsilon}(\cdot)(x'),$$

$$u_t(x)=u(tx)t^{-\rho(t)}.$$

Верны равенства [1]

$$h(x,u)=\sup{}^*\{v(x): v\in Fr[u]\},$$

$$\underline{h}(x,u)=\inf\{v(x): v\in Fr[u]\},$$

где $Fr[u]$ - предельное множество функции u.

Отметим, что индикаторы однозначно определены своими значениями на единичной сфере, так как являются однородными по x функциями степени ρ, т.е.

$$\underline{h},\ h(x,u)=\|x\|^{\rho}\underline{h},\ h\Big(\frac{x}{\|x\|},u\Big).$$

ISBN 5-12-002405-X. Теория операторов, субгармонические функции. Киев, 1991.

Будем говорить, что $u \in SH(\rho(r))$ – функция вполне регулярного роста (ф.в.р.р.) на луче rx, $r>0$, если $h(x,u)=\underline{h}(x,u)>-\infty$. Скажем также, что $u \in SH(\rho(r))$ – ф.в.р.р. на множестве D, если u является ф.в.р.р. для всех $x \in D$.

Рассмотрим следующий вопрос: каким соотношениям должны удовлетворять функции h, g, определенные на единичной сфере $S_1 \subset \mathbb{R}^m$, чтобы для любого уточненного порядка $\rho(r)$, $\rho(r) \to \rho$ существовала функция $u \in SH(\rho(r))$, такая, чтобы выполнялись равенства

$$h(x,u) = h(x), \quad x \in S_1, \tag{0.1}$$

$$\underline{h}(x,u) = g(x), \quad x \in S_1. \tag{0.2}$$

При $m=2$ в [3, 6, 7] получены необходимые и достаточные условия для выполнения равенств (0.1), (0.2). В данной работе приводятся для $m>2$ необходимые условия на функции h, g для выполнения равенств (0.1), (0.2).

Нам понадобятся следующие обозначения: $\mathcal{D} \subset\subset S_1$ область на единичной сфере, границей которой является гладкий контур l, такой, что поверхность $K_l \overset{def}{=} \{rx : x \in l,\ r>0\}$ дважды непрерывно-дифференцируема; $K_{\mathcal{D}} \overset{def}{=} \{rx : x \in \mathcal{D},\ r>0\}$ – конус, определяемый областью $\mathcal{D}$; n_ζ^+ – направление внешней нормали к $K_{\mathcal{D}}$ в точке $\zeta \in K_p$; n_ζ^- – направление внутренней нормали к $K_{\mathcal{D}}$ в точке $\zeta \in K_l$;

$$K(\zeta, n_\zeta^\pm, \delta) \overset{def}{=} \left\{ p : \cos(p-\zeta,\ n_\zeta^\pm) > 1-\delta \right\}, \quad 0<\delta<1;$$

$$B(\zeta,R) \overset{def}{=} \left\{ x : \|x-\zeta\| < R \right\}, \quad S(\zeta,R) \overset{def}{=} B(\zeta,R) \cap S_1;$$

$$\pi(v,\zeta,R) \overset{def}{=} \frac{1}{d_m R^m} \int\limits_{B(\zeta,R)} v(x)\,dx$$

– среднее значение функции v по шару $B(\zeta,R)$, dx – элемент m-мерного объема; d_m – объем единичного шара в $\mathbb{R}^m$.

Пусть L – сферический оператор:

$$L = \sum_{i=0}^{m-2} \frac{1}{\Pi} \frac{\partial}{\partial\theta_i} \frac{\Pi}{\Pi_i} \frac{\partial}{\partial\theta_i},$$

где θ_i – сферические координаты $0 \le \theta_0 < 2\pi$, $0 \le \theta_i \le \pi$, $i=1, 2, \dots, m-2$, а Π и Π_i определены равенствами

$$\Pi = \prod_{0}^{m-2} \sin^j\theta_j, \quad \Pi_i = \prod_{i+1}^{m-2} \sin^2\theta_j, \quad \Pi_{m-2} = 1.$$

Отметим, что L – сферическая часть оператора Лапласа.

Будем называть функцию $h(x)$ ρ-сферической в области $\mathcal{D}$, если $Lh+\rho(\rho+m-2)h=0$ при $x \in \mathcal{D}$.

Обозначим через $\lambda_{\mathcal{D}}$ первое собственное значение краевой задачи

$$\begin{aligned} &Ly + \lambda y = 0, \quad x \in \mathcal{D}, \\ &y\big|_{x \in l} = 0. \end{aligned} \tag{0.3}$$

Пусть $\rho_{\mathcal{D}}$ – положительный корень уравнения $z(z+m-2)=\lambda_{\mathcal{D}}$, $y_{\mathcal{D}}$ – собственная функция, отвечающая собственному значению $\lambda_{\mathcal{D}}$, $y_{\mathcal{D}}(x) > 0$, $x \in \mathcal{D}$.

Пусть функции h, g определены на единичной сфере S_1. Рассмотрим следующие предложения:

(A) $$h(x) = g(x), \quad x \in \mathcal{D};$$

(B) существует $\zeta \in \mathcal{D}$, такая, что $h(\zeta) = g(\zeta) > -\infty$;

(C) существует $\zeta \in l$, такая, что $h(\zeta) = g(\zeta) > -\infty$ и $\pi(r^{\rho}h(x), \zeta, r) = h(\zeta) + o(r)$ при $r \to 0$;

(D) существуют $\zeta \in l$, $\delta > 0$, такие, что $h(\zeta) = g(\zeta) > -\infty$ и

$$\lim_{x \to \zeta} \frac{h(x) - g(x)}{\| x - \zeta \|} = 0,$$

$$x \in K(\zeta, n_{\zeta}^{-}, \delta) \cap S_1$$

(E) $\rho_{\mathcal{D}} = \rho$ и существуют $\zeta \in l$, $\gamma > 0$, такие, что функция $h(x)$ непрерывнодифференцируема при $x \in S(\zeta, \gamma)$.

Верна следующая

Теорема 1. Пусть $h(x)$, $g(x)$ – полунепрерывные сверху функции, определенные на единичной сфере $S_1 \subset \mathbb{R}^m$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$h(x) \geq g(x), \quad x \in S_1, \quad h(x) \not\equiv g(x),$$

$h(x)$ – ρ-сферическая функция при $x \in \mathcal{D}$. Тогда если существует $u \in SH(\rho(r))$, такая, что

$$\bar{h}(x, u) = h(x), \quad \underline{h}(x, u) = g(x), \quad x \in S_1,$$

то выполняются импликации:

C1) $(B) \Rightarrow (A)$;

C2) $(C) \Rightarrow (A)$;

C3) $(D) \Rightarrow (A)$;

C4) $(E) \Rightarrow (A)$.

Следствие. Если индикатор функции $u \in SH(\rho(r))$ является

ρ-сферической функцией в области $\mathscr{D}_1 \subset S_1$ и $\rho_{\mathscr{D}_1} < \rho$, то u – функция вполне регулярного роста в конусе $K_{\mathscr{D}_1}$.

Отметим, что выполнение импликации С1) эквивалентно результату, полученному в [10, с. 99, теорема 4.6], и приводится в данной работе для полноты изложения. Импликацию С2) можно рассматривать как обобщение на субгармонические функции в R^m теоремы Б.Я.Левина о вполне регулярном росте голоморфной функции с тригонометрическим индикатором [4, с. 214, теорема 7, импликацию С4) – как обобщение результата Н.М.Черных [8], следствие – как обобщение теоремы М.Картрайт [9].

1. Доказательство теоремы 1.

1.1. Докажем выполнение импликации С1). Предположим противное: существует $x_0 \in \mathscr{D}$, такая, что $h(x_0) > g(x_0)$. Тогда существует $v_0 \in Fr[u]$, такая, что

$$v_0(x_0) < h(x_0). \tag{1.1}$$

Отметим, что в силу инвариантности $Fr[u]$ относительно преобразования $(\cdot)_\tau$:

$$v_\tau(x) \stackrel{def}{=} v(\tau x)\tau^{-\rho},$$

для любой функции $v \in Fr[u]$ выполняется неравенство

$$v(\tau x) \le \tau^\rho h(x), \quad x \in S_1, \quad \tau > 0$$

Обозначим $\quad H(y) \stackrel{def}{=} |y|^\rho h\left(\frac{y}{|y|}\right)$.

Поскольку по условию теоремы $h(x)$ – ρ-сферическая функция при $x \in \mathscr{D}$, то $H(y)$ – гармоническая при $y \in K_{\mathscr{D}}$. Поэтому с учетом инвариантности $Fr[u]$ относительно преобразования $(\cdot)_\tau$ функция

$$v_1(y) = v_\tau(y) - H(y) \tag{1.2}$$

субгармоническая и неположительная в $K_{\mathscr{D}}$, причем $v_1(x_0) < 0$. Отсюда в силу принципа максимума получаем

$$v_1(x) < 0, \quad x \in K_{\mathscr{D}}. \tag{1.3}$$

Записываем $v_1(\zeta) = v_0(\zeta) - h(\zeta) < 0$, откуда $g(\zeta) \le v_0(\zeta) < h(\zeta)$, что приводит к противоречию.

Доказательство выполнения импликации С1) ничем не отличается от приведенного в [6] при рассмотрении случая, когда $m = 2$. Здесь мы повторяем его для полноты изложения.

1.2. Докажем выполнение импликации С2). Предположим противное. Получим, рассуждая так же, как и в п. 1.1., субгармоническую в $K_{\mathscr{D}}$ функцию v_1, удовлетворяющую (1.3), причем v_1 обращается в нуль в некоторой точке $\zeta \in l$ и $v_1(x) \le 0$, $\forall x \in R^m$.

Наряду с введенными уже обозначениями мы будем пользоваться следующими: S_R – сфера радиуса R в $\mathbb{R}^m$ с центром в начале координат,

$$K_{\mathcal{P}}^R \overset{def}{=} K_{\mathcal{P}} \cap B(0,R), \quad l_R \overset{def}{=} K_1 \cap S_R,$$

$$K^{\varepsilon}(q, n_q^{\pm}, \delta) \overset{def}{=} K(q, n_q^{\pm}, \delta) \cap B(q, \varepsilon).$$

Нам понадобится следующая лемма, доказательство которой будет приведено в разделе 2.

Лемма 1. Пусть $v_1(x)$ – субгармоническая функция в конусе $K_{\mathcal{P}}$, $v_1(x)<0$, $x \in K_{\mathcal{P}}$. Тогда для любых $R>0$, $\delta>0$ найдутся $M>0$, $\varepsilon>0$, такие, что для любых $q \in l_R$ и $x \in K^{\varepsilon}(q, n_q^-, \delta)$ выполняется неравенство

$$v_1(x) \leq -M\|x-q\|. \tag{1.4}$$

Воспользуемся леммой 1. Положим $R=1$, $q=\zeta$ и для некоторого $\delta>0$ найдем $M>0$, $\varepsilon>0$ так, что

$$v_1(x) \leq -M\|x-\zeta\|, \quad x \in K^{\varepsilon}(\zeta, n_{\zeta}^-, \delta). \tag{1.5}$$

Отсюда получаем при $0<r<\varepsilon$

$$\mathcal{A}(v_1, \zeta, R) \leq \frac{1}{d_m R^m} \int_{K^R(\zeta, n_{\zeta}^-, \delta)} v_1(x)\,dx \leq -CR, \tag{1.6}$$

где C – положительная постоянная, зависящая от m и δ. Учитывая, что по условию

$$\mathcal{A}(H, \zeta, r) = h(\zeta) + o(r), \quad r \to 0, \tag{1.7}$$

выберем $r_0>0$ так, чтобы при $r<r_0$

$$\mathcal{A}(H, \zeta, r) < h(\zeta) + \frac{Cr}{2}. \tag{1.8}$$

Учитывая (1.6), (1.8), получаем при $r<\min(r_0, \varepsilon)$

$$\mathcal{A}(v_0, \zeta, r) = \mathcal{A}(v_1, \zeta, r) + \mathcal{A}(H, \zeta, r) < h(\zeta) - \frac{Cr}{2} = v_0(\zeta) - \frac{Cr}{2},$$

что противоречит субгармоничности функции v_0.

1.3. Докажем выполнение импликации С3). Предполагая противное, найдем так же, как и в п. 1.1, субгармонические функции v_0, v_1, удовлетворяющие (1.1)-(1.5).

Имеем

$$0 = \lim_{x \to \zeta} \frac{h(x) - g(x)}{\|x-\zeta\|} = \lim_{x \to \zeta} \frac{h(x) - g(x)}{\|x-\zeta\|} \geq$$

$$x \in K(\zeta, n_\zeta^-, \delta) \cap S_1 \qquad x \in K^\varepsilon(\zeta, n_\zeta^-, \delta) \cap S_1$$

$$\geqslant \varliminf_{x \to \zeta} \frac{h(x) - v_0(x)}{\|x - \zeta\|} = \varliminf_{x \to \zeta} - \frac{v_1(x)}{\|x - \zeta\|} \geqslant M > 0 .$$

$$x \in K^\varepsilon(\zeta, n_\zeta^-, \delta) \cap S_1 \qquad x \in K^\varepsilon(\zeta, n_\zeta^-, \delta) \cap S_1 .$$

Получаем противоречие. Выполнение импликации C3) доказано.

1.4. Докажем выполнение импликации C4). Предположим противное и найдем так же, как и в пп. 1.1–1.2, субгармонические функции v_0, v_1, удовлетворяющие (1.1)–(1.5).

Рассмотрим два возможных случая: $v_1(\zeta) = 0$ и $v_1(\zeta) < 0$. Если $v_1(\zeta) = 0$, достаточно дословно повторить рассуждения, приведенные в п. 1.2, так как условие (C) выполняется в силу того, что функция H непрерывнодифференцируема в некоторой окрестности точки ζ. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $v_1(\zeta) < 0$.

Положим $R = 3/2$, зафиксируем какое-нибудь $0 < \delta < 1$ и найдем по лемме 1 $M, \varepsilon > 0$ так, чтобы для любых точек $q \in l_{3/2}$ и $x \in K^\varepsilon(q, n_q^-, \delta)$ выполнялось неравенство

$$v_1(x) \leqslant -M \|x - q\| . \tag{1.9}$$

Пусть $y_{\mathcal{P}}(x)$ – собственная функция, отвечающая первому собственному значению краевой задачи (0.3). Обозначим

$$Y_{\mathcal{P}}(x) = \|x\|^{\rho_{\mathcal{P}}} y_{\mathcal{P}}\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \qquad M_1 = \max_{x \in \bar{\mathcal{P}}} \|\operatorname{grad} Y_{\mathcal{P}}(x)\| ,$$

где $\bar{\mathcal{P}}$ – замыкание области $\mathcal{P}$. Пусть $0 < \alpha < M/M_1$. Учитывая (1.9), получаем при $q \in l_{3/2}$, $x \in K^\varepsilon(q, n_q^-, \delta)$

$$\alpha Y_{\mathcal{P}}(x) \leqslant \alpha M_1 \|x - q\| \leqslant M \|x - q\| \leqslant -v_1(x) . \tag{1.10}$$

Уменьшая при необходимости $\alpha > 0$, добиваемся, чтобы неравенство (1.10) выполнялось при всех $x \in S_{3/2} \cap K_{\mathcal{P}}$, откуда в силу принципа максимума получаем

$$v_0(x) < -\alpha Y_{\mathcal{P}}(x) + H(x), \quad x \in K_{\mathcal{P}}^{3/2} . \tag{1.11}$$

Пусть области $Q_i \subset S_1$ ограничены гладкими контурами Γ_i, $i = 1, 2$, и таковы, что

$$\Gamma_i \supset l \cap B(\zeta, \gamma_1), \quad Q_i \supset \{B(\zeta, \gamma_1) \setminus \mathcal{P}\}, \quad 0 < \gamma_1 < \gamma , \tag{1.12}$$

$$Q_2 \subset Q_1 , \quad Q_2 \subset B(\zeta, \gamma) \setminus \mathcal{P} , \tag{1.13}$$

$$\rho_{Q_1} = \rho , \tag{1.14}$$

$$\rho_{Q_2} > \rho\,. \tag{1.15}$$

Существование таких областей Q_1, Q_2 следует из того, что собственные значения краевой задачи (0.3) изменяются монотонно и непрерывно при достаточно гладком расширении области.

Пусть w – решение краевой задачи

$$Lw + \rho w = 0, \quad x \in Q_2,$$
$$w|_{\Gamma_2} = h,$$

а $y_{Q_1}(x)$ – собственная функция, отвечающая первому собственному значению краевой задачи

$$Ly + \lambda y = 0, \quad x \in Q_1,$$
$$y|_{\Gamma_1} = 0.$$

Обозначим

$$Y_{Q_1}(x) = \|x\|^{\rho}\, y_{Q_1}\left(\frac{x}{\|x\|}\right),$$
$$W(x) = \|x\|^{\rho}\, w\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$$

и отметим, что $y_{Q_1}(x) > 0, \quad x \in Q_1, \quad \dfrac{\partial Y_{Q_1}}{\partial n_{\zeta}^{+}}(\zeta) > 0.$

Пусть β выбрано так, что выполняется равенство

$$\frac{\partial W}{\partial n_{\zeta}^{+}}(\zeta) + \beta\,\frac{\partial Y_{Q_1}}{\partial n_{\zeta}^{+}}(\zeta) = \frac{\partial H}{\partial n_{\zeta}^{+}}(\zeta) + \varepsilon\,, \tag{1.16}$$

где $0 < \varepsilon < \alpha\,\dfrac{\partial Y_{\mathcal{P}}}{\partial n_{\zeta}^{-}}(\zeta)$. Обозначим $H_1(x) = W(x) + \beta Y_{Q_1}(x), \; x \in K_{Q_2}$. Пусть $A(K_{Q_2})$ – класс гармонических функций в конусе K_{Q_2}. Отметим следующие свойства функции H_1:

$$H_1(x) = h(x), \quad x \in l^1 = l \cap B(\zeta, \gamma_1), \tag{1.17}$$

$$H_1 \in A(K_{Q_2}), \tag{1.18}$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial n_{\zeta}^{+}}(\zeta) = \frac{\partial H}{\partial n_{\zeta}^{+}}(\zeta) + \varepsilon\,. \tag{1.19}$$

Заметим, что $grad\, H_1$, $grad\, H$ непрерывно продолжаются из области K_{Q_2} на $K_l \cap B(\zeta, \gamma_1)$ в силу условия (E) и гладкости контура l. Покажем, учитывая (1.17)-(1.19), что существует γ_2, $0 < \gamma_2 \leq \gamma_1$, такое, что в области $\omega_2 = S(\zeta, \gamma_2) \setminus \mathcal{P}$ выполняется неравенство $H_1(x) \geq H(x), \; x \in \omega_2$, откуда получаем

$$H_1(x) \geq H(x), \quad x \in K_{\omega_2}, \tag{1.20}$$

так как H_1, H – однородные функции степени ρ.

Обозначим $F(x)=H_1(x)-H(x)$. Имеем $F(x)=0$, $x\in l^1$, $\frac{\partial F}{\partial n^+_\zeta}(\zeta)=$ $=\varepsilon>0$. Пусть $z\in K(y,n^+_y,\delta)$ при некотором $0<\delta<1$. Тогда $z=y+\lambda t_{z,y}$, где $t_{z,y}\overset{def}{=}\frac{z-y}{\|z-y\|}$, $\cos\left(t_{z,y},n^+_y\right)>1-\delta$.

Учитывая непрерывность $grad\,F$ и уменьшая при необходимости γ_1, можно считать, что

$$\left|\frac{\partial F}{\partial n^+_y}-\frac{\partial F}{\partial n^+_\zeta}\right|\leqslant\varepsilon/4,\qquad y\in l^1,$$

откуда

$$\frac{\partial F}{\partial n^+_y}(y)\geqslant 3\varepsilon/4,\quad y\in l^1.$$

Выбирая $\delta_2>0$ так, что

$$\left|\frac{\partial F}{\partial t_{z,y}}-\frac{\partial F}{\partial n^+_y}\right|<\varepsilon/4\ ,\ z\in K(y,n^-_y,\delta_2),$$

получим

$$\lim_{\lambda\to+0}\frac{F(y+\lambda t_{z,y})}{\lambda}\geqslant\varepsilon/2>0,\ z\in\bigcup_{y\in l^1}K(y,n^+_y,\delta_2).$$

Отсюда следует возможность выбрать $\delta_3>0$ так, что $F(y+\lambda t_{z,y})\geqslant$ $\geqslant\varepsilon/2\,\lambda>0$, $\lambda\in(0,\delta_3)$. Выбирая $\gamma_2>0$ так, что $\omega_2=S(\zeta,\gamma_2)\setminus\mathcal{R}\subset$ $\subset\bigcup_{y\in l^1}K^{\delta_3}(y,n^+_y,\delta_2)$, получаем $F(x)>0$, $x\in\omega_2$.

Обозначим $H_2(x)=H(x)-\alpha Y_{\mathcal{R}}(x)$, $x\in K_{\mathcal{R}}$. По условию теоремы $h(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция при $x\in S(\zeta,\gamma)$, поэтому

$$\frac{\partial H}{\partial n^+_x}(x)+\frac{\partial H}{\partial n^-_x}(x)=0,\quad x\in l\cap S(\zeta,\gamma). \tag{1.21}$$

Учитывая (1.19), (1.21) и выбор ε, получаем

$$\frac{\partial H_1}{\partial n^+_\zeta}(\zeta)+\frac{\partial H_2}{\partial n^-_\zeta}(\zeta)=\frac{\partial H}{\partial n^+_\zeta}(\zeta)+\varepsilon-\alpha\frac{\partial Y_{\mathcal{R}}}{\partial n^-_\zeta}(\zeta)<0. \tag{1.22}$$

Обозначим

$$H_3(x)=\begin{cases}H_1(x), & x\in K_{\omega_2},\\ H_2(x), & x\in K_{\mathcal{R}}.\end{cases}$$

Поскольку по построению $H_1(x)$ – гармоническая функция в K_{ω_2}, а $H_2(x)$ – гармоническая в $K_{\mathcal{R}}$ и $H_1(x)=H_2(x)$ при $x\in l^2=l\cap$ $\cap S(\zeta,\gamma_2)$, то в силу (1.22) получаем, что функция H_3 супергармоническая в конусе $K_{\mathcal{R}_2}$, где $\mathcal{R}_2=S(\zeta,\gamma_2)\cup\mathcal{R}$. Отметим, что $\rho_2 = \rho_{\mathfrak{R}_2} < \rho$. Учитывая (1.11), (1.20), получаем $H_3(x) > v_0(x)$, $x \in K^1_{\mathfrak{R}_2}$.

Рассмотрим

$$v_3(x) = v_0(x) - H_3(x), \quad x \in K^1_{\mathfrak{R}_2}. \qquad (1.23)$$

Функция v_3 субгармоническая в $K^1_{\mathfrak{R}_2}$ и $v_3(x) < 0$, $x \in K^1_{\mathfrak{R}_2}$. Рассуждая так же, как и при получении неравенства (1.10), заключаем, что можно выбрать $\alpha_1 > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $v_3(x) \leq -\alpha_1 Y_2(x)$, $x \in \mathfrak{R}_2$, где $Y_2(x) = y_{\mathfrak{R}_2}(x)$, откуда в силу принципа максимума $v_3(x) \leq -\alpha_1 r^{\rho_2} y_2(x)$, $x \in \mathfrak{R}_2$, $0 < r < 1$. Из (1.23) получаем

$$v_0(x) \leq -\alpha_1 r^{\rho_2} y_2(x) + H_3(x), \quad x \in K^1_{\mathfrak{R}_2}. \qquad (1.24)$$

Пусть $0 < R < 1$. Оценим сверху $\mathcal{T}(R, v_0)$ – среднее значение функции v_0 по шару радиуса R с центром в нуле. Имеем равенство

$$\mathcal{T}(r, v_0) = \frac{1}{d_m R^m} \int\limits_{B_0(0,R) \setminus K^R_{\mathfrak{R}_2}} v_0(x)dx + \frac{1}{d_m R^m} \int\limits_{K^R_{\mathfrak{R}_2}} v_0(x)dx = J_1 + J_2.$$

Учитывая (1.24), получаем

$$J_2 \leq \frac{1}{d_m R^m} \int\limits_{K^R_{\mathfrak{R}_2}} -\alpha_1 \|x\|^{\rho_2} y_2(x)dx + \frac{1}{d_m R^m} \int\limits_{K^R_{\mathfrak{R}_2}} H_3(x)dx.$$

Поскольку при некотором $\sigma > 0$ выполняются неравенства $v_0(x) \leq \sigma \|x\|^{\rho}$, $x \in R^m$, $H_3(x) \leq \sigma \|x\|^{\rho}$, $x \in K^R_{\mathfrak{R}_2}$, получаем $\mathcal{T}(R, v_0) \leq -A_1 R^{\rho_2} + A_2 R^{\rho}$, где A_1, A_2 – положительные постоянные, $\rho_2 < \rho$. Устремляя R к нулю, получаем, что при достаточно малых $R > 0$, $\mathcal{T}(R, v_0) < 0$ с учетом $v_0(0) = 0$ это противоречит субгармоничности функции v_0.

Полученное противоречие завершает доказательство импликации С4).

2. Доказательство леммы 1. Будем опираться на следующий факт из [5, с. 89].

Лемма А. Пусть D – конечная область в R^m с границей Γ и L – замкнутая кривая, на которой $w(p)$, решение уравнения Лапласа, достигает максимума. Пусть кривой L главные кривизны Γ существуют и ограничены. Тогда для любого $\eta > 0$ найдутся такие $M > 0$ и $\varepsilon > 0$, что для области

$$\bigcup_{q\in L}\left\{ p : \|p-q\|<\varepsilon,\ \cos(p-q,n)<-\eta \right\},$$

где n – направление внешней нормали к Γ в точке q, выполняется неравенство

$$w(p)-w(q)\leqslant -M\|p-q\|.$$

Выберем $R_1>R$ и обозначим через $v_2(x)$ решение задачи Дирихле в $K_{\mathfrak{R}}^{R_1}$ с краевым условием, задаваемым функцией

$$f(\xi)=\begin{cases} 0, & \xi\in K_{\partial\mathfrak{R}}^{R_1},\\ \max\{v_1(\xi),-N\}, & \xi\in K_{\mathfrak{R}}\cap S_{R_1},\end{cases}$$

где N – некоторая положительная постоянная.
Получим

$$v_1(x)\leqslant v_2(x)<0,\quad x\in K_{\mathfrak{R}}^{R_1}. \tag{2.1}$$

Положив в лемме А $L=l_R$, $D=K_{\mathfrak{R}}^{R_1}$, $w(x)=v_2(x)$ и зафиксировав какое-нибудь $\delta>0$, найдем по лемме А $M>0$, $\varepsilon>0$ так чтобы для любой точки $q\in l_R$, $x\in K^{\varepsilon}(q,n,\delta)$ выполнялось неравенство $v_2(x)\leqslant -M\|x-q\|$. Учитывая (2.1), получаем $v_1(x)\leqslant -M\|x-q\|$, $x\in K^{\varepsilon}(q,n,\delta)$, $q\in l_R$.

Лемма 1 доказана.

Автор благодарен В.С.Азарину, Л.И.Ронкину и участникам семинара по теории функций при Харьковском госуниверситете за полезное обсуждение и замечание по содержанию работы.

1. Азарин В.С. Об асимптотическом поведении субгармонических функций конечного порядка // Мат. сб. – 1979. – 108, № 2. – С. 147-167.
2. Азарин В.С. Теория роста субгармонических функций. – Харьков : Изд-во Харьк. ун-та, 1982. – 74 с.
3. Азарин В.С., Подошев Л.Р. Предельные множества и индикаторы целой функции // Сиб. мат. журн. – 1984. – 25, № 6. – С. 4-16.
4. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. – М. : Гостехиздат, 1956. – 632 с.
5. Азарин В.С. Об индикаторе функции субгармонической в многомерном пространстве // Мат. сб. – 1962. – 58, № 1. – С. 87-94.
6. Подошев Л.Р. Необходимые и достаточные условия для существования целой функции с заданными индикатором и нижним индикатором. – Ростов н/Д, 1986. – 102 с. – Деп. в ВИНИТИ 19.06.86, № 4519 В-86.
7. Подошев Л.Р. Полное описание пары индикаторов – нижний индикатор целой функции конечного порядка // Докл. АН СССР. – 1988. – 300, № 1. – С. 38-40.
8. Черных Н.М. Признак полной регулярности роста аналитических в угле функций с тригонометрическим индикатором. – Краснодар, 1980. – 10 с. – Деп. в ВИНИТИ 08.04.80, № 1346 В-80.

9. Cartright M. On functions which are regular and finite order in an angle // Proc. Lond. Math. Soc. – 1934. – 38, N 2. – P. 158–179.
10. Lelong P., Gruman L. Entire functions of several complex variables. – Berlin : Springer, 1986. – 272 p.

УДК 517.584

А.Ю. Рашковский

О РАДИАЛЬНОЙ ПРОЕКЦИИ ГАРМОНИЧЕСКОЙ МЕРЫ

Дается полное описание семейства непрерывных мер на окружности, являющихся радиальными проекциями ограниченных звездных областей. Полученные результаты применяются к вопросам роста субгармонических функций.

Пусть $\mathcal{D}$ – область в $\mathbb{C}$, содержащая точку 0. Каждому множеству $E \subset \partial\mathcal{D}$ поставим в соответствие его радиальную проекцию $\hat{E}$ на единичную окружность T, т.е. $\hat{E} = \{\theta \in [0, 2\pi] : \theta = \arg \zeta,\ \zeta \in E\}$. Через $\omega(z, E, \mathcal{D})$ обозначим грамоническую меру множества $E \subset \partial\mathcal{D}$ относительно области $\mathcal{D}$ в точке $z \in \mathcal{D}$, т.е. решение задачи Дирихле в области $\mathcal{D}$ с граничными данными, равными единице на множестве E и нулю на $\partial\mathcal{D} \setminus E$. Ясно, что гармоническая мера $\omega(0, E, \mathcal{D})$ порождает некоторую меру $\hat{\omega}_{\mathcal{D}}$ на окружности: $\hat{\omega}_{\mathcal{D}}(\hat{E}) = \omega(0, E, \mathcal{D})$ $\forall \hat{E} \subset T$. Пусть теперь, наоборот, на окружности задана некоторая вероятностная мера ν. Естествен вопрос: существует ли область $\mathcal{D}$, такая, что $\nu(\hat{E}) = \omega(0, E, \mathcal{D})$? В данной статье мы рассмотрим важный для приложений случай, когда область $\mathcal{D}$ имеет вид

$$\mathcal{D} = \left\{ re^{i\theta} : r < r_{\mathcal{D}}(\theta), \quad 0 < \theta \leq 2\pi \right\}, \tag{1}$$

где $r_{\mathcal{D}}$ – какая-либо непрерывная положительная функция. Будут указаны необходимые и достаточные условия разрешимости сформулированной задачи в классе областей вида (1), при этом использование методов работы [1] позволит восстанавливать область $\mathcal{D}$ по мере ν эффективным образом. Отметим, что в [2] с помощью этих методов изучались меры, которые мажорируют гармонические меры областей вида (1) на части границы. В заключение мы применим полученные результаты к вопросам роста субгармонических функций. Часть результатов настоящей статьи анонсирована в [3].

Пусть ν – непрерывная строго возрастающая функция на отрезке $[a, b]$, μ – обратная к ней функция, доопределенная на всю

ISBN 5-12-002405-X. Теория операторов, субгармонические функции. Киев, 1991.

ось так, что $\mu(\nu(a)-h)=a$, $\mu(\nu(b)+h)=b$ $\forall h>0$. Будем говорить, что функция ν принадлежит классу $N[a,b]$, если

$$\sup_x \int_0^{\delta} \frac{\mu(x+t)-\mu(x-t)}{t}\,dt \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0 . \qquad (2)$$

Как показано в [2], классу $N[a,b]$ принадлежат, в частности, все функции вида $\nu(t)=\int_a^t f(s)\,ds$, где $f(s)$ – неотрицательная функция на $[a,b]$ удовлетворяющая условию $\int_a^b \log^- f(s)\,ds<\infty$.

Теорема 1. Для любой функции $\nu:[0;2\pi]\to[0,1]$ класса $N[0,2\pi]$ существует такая область $\mathcal{D}$ вида (1), что $\nu(\hat{E})=$ $=\omega(0,E,\mathcal{D})$, $\forall \hat{E}\subset[0,2\pi]$, где $\nu(\hat{E})=\int_{\hat{E}} d\nu(t)$. При этом для каждого компакта $K\subset\mathcal{D}$ существует такая константа $C(K)$, что $\omega(z,E,\mathcal{D})\le C(K)\nu(\hat{E})$, $\forall z\in K$, $\forall E\subset\partial\mathcal{D}$, $\forall E\subset\partial\mathcal{D}$.

Доказательство. Положим

$$u(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\log|e^{i\theta}-z|\,d\mu(\theta/2\pi),\quad z\in\mathbb{C},$$

где μ – непрерывная строго возрастающая функция на [0, 1], обратная к функции $\nu\in N[0,2\pi]$. Функция $u(z)$, очевидно, субгармонична во всей плоскости и гармонична вне единичной окружности. Кроме того, она непрерывна всюду в $\mathbb{C}$ в силу следующего результата М.Л.Содина [4]: логарифмический потенциал конечной положительной меры μ является непрерывной функцией тогда и только тогда, когда

$$\sup_z \int_0^{\delta}\frac{\mu(C(z,t|z|))}{t}\,dt \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0$$

($C(z,r)$ – круг радиуса r с центром в точке z).

Рассмотрим функцию $w(z)=z\exp\{-u(z)-iv(z)\}$, $z\in U$, где $v(z)$ – определенная с точностью до постоянной функция, гармонически сопряженная с $u(z)$ в единичном круге U. Пусть φ_0 – какая-то точка на отрезке $[0,2\pi]$, в которой существует конечный предел $v(re^{i\varphi_0})$, $r\to 1$; постоянную в определении функции $v(z)$ выберем так, чтобы этот предел равнялся φ_0. В силу условий Коши – Римана при $r\in(0,1)$, $\varphi\in[0,2\pi]$

$$\arg w(re^{i\varphi})=\varphi-v(re^{i\varphi})=\varphi-v(re^{i\varphi_0})-$$

$$-\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{\partial v(re^{i\psi})}{\partial\psi}\,d\psi=\varphi_0-v(re^{i\varphi_0})+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}\int\limits_{0}^{2\pi}\left[1-\frac{2r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}{|r-e^{i(\theta-\varphi)}|^2}\right]d\mu(\theta/2\pi)\,d\varphi=$$

$$=\varphi_0-v(re^{i\varphi_0})+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{1-r^2}{|r-e^{i(\theta-\varphi)}|^2}d\mu(\theta/2\pi)\,d\varphi .$$

Меняя порядок интегрирования и переходя к пределу при $r\to 1$, получаем, что для любого $\varphi\in[0,2\pi]$. Существует

$$\lim_{r\to 1}\arg w(re^{i\varphi})=\mu(\varphi/2\pi)-\mu(\varphi_0/2\pi).$$

Значит, функция $\arg w(z)$ непрерывна вплоть до границы круга, и можно считать $\varphi_0=0$. Поскольку $|w(z)|=|z|\exp\{-u(z)\}\in C(\bar U)$, то функция $w(z)$ непрерывна на $\bar U$. В силу принципа соответствия границ она осуществляет конформное отображение круга U на область

$$\mathscr{D}=\left\{re^{i\theta}: r<\exp\left\{-u\left(\exp\left\{2\pi i\nu(\theta)\right\}\right)\right\},\quad 0\le\theta\le 2\pi\right\}.$$

Покажем теперь, что область $\mathscr{D}$ обладает требуемыми свойствами. Пусть множество $E\subset\partial\mathscr{D}$, точка $z\in\mathscr{D}$. Тогда

$$\omega(z,E,\mathscr{D})=\omega\left(w^{[-1]}(z),w^{[-1]}(E),U\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{E^*}\frac{1-|w^{[-1]}(z)|^2}{|w^{[-1]}(z)-e^{it}|^2}dt\ ,\qquad(3)$$

где $$E^*=\left\{t\in[0,2\pi]:e^{it}\in w^{[-1]}(E)\right\}$$

Произведя в последнем интеграле замену переменных $t=2\pi\nu(s)$, получаем

$$w(z,E,\mathscr{D})=\left(1-|w^{[-1]}(z)|^2\right)\int\limits_{\hat E}\frac{d\nu(s)}{|w^{[-1]}(z)-e^{2\pi i\nu(s)}|^2}\,,\qquad(4)$$

поскольку $\left\{s:2\pi\nu(s)\in E^*\right\}=\left\{s:w\left(e^{2\pi i\nu(s)}\right)\in E\right\}=\hat E$. Поэтому оба утверждения теоремы непосредственно вытекают из соотношения (4). Теорема доказана.

Покажем, что принадлежность функции ν классу $N[0,2\pi]$ является и необходимым условием разрешимости рассматриваемой задачи.

Теорема 2. Пусть $\mathscr{D}$ – область вида (1), Функция $\nu(\theta)=\omega(0,E_\theta,\mathscr{D})$, где $E_\theta=\left\{\zeta\in\partial\mathscr{D}:0<\arg\zeta<\theta\right\}$. Тогда $\nu\in N[0,2\pi]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о близко к доказательству теоремы 2.4. из [1]. Пусть функция W осуществляет конформное отображение

круга U на область $\mathscr{P}$, $w(0)=0$. Поскольку граница области $\mathscr{P}$ жорданова, то w продолжается до непрерывного отображения $\bar{U}$ на $\bar{\mathscr{P}}$, причем его можно выбрать так, чтобы $\arg w(1)=0$. Определим аналитическую в U функцию $f(z)=u(z)+iv(z)=\ln\frac{w(z)}{z}$.
Положим $f(z)=f(|z|^{-2}z)$ при $|z|>1$. Ясно, что определенная так функция f непрерывна во всей плоскости.

Пусть точка $z=re^{i\varphi}\in U$, $R>1$; положим $G(z,\zeta)=$ $=\ln\left|\frac{R^2-\zeta\bar{z}}{R(\zeta-z)}\right|$. Применим к функциям $u(\zeta)$ и $G(z,\zeta)$ формулу Грина в области $\{\zeta:|\zeta|<1-\varepsilon\}$, где $\varepsilon>0$ выбрано так, чтобы $|z|<$ $<1-\varepsilon<1+\varepsilon<R$:

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1-\varepsilon}u(\zeta)\frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial n_\zeta}\,ds(\zeta)-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1-\varepsilon}G(z,\zeta)\frac{\partial u(\zeta)}{\partial n_\zeta}\,ds(\zeta)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}u\left((1-\varepsilon)e^{i\psi}\right)\frac{\partial G(z,\rho e^{i\psi})}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=1-\varepsilon}d\psi+$$

$$+\frac{1-\varepsilon}{2\pi}\cdot\int\limits_0^{2\pi}G\left(z,(1-\varepsilon)e^{i\psi}\right)\frac{\partial u(\rho e^{i\psi})}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=1-\varepsilon}d\psi.$$

С учетом условия Коши – Римана отсюда выводим

$$u(z)=-\frac{1-\varepsilon}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}u\left((1-\varepsilon)e^{i\psi}\right)\frac{\partial G(z,\rho e^{i\psi})}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=1-\varepsilon}d\psi+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}G\left(z,(1-\varepsilon)e^{i\psi}\right)dv\left((1-\varepsilon)e^{i\psi}\right)=$$

$$=-\frac{1-\varepsilon}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}u\left((1-\varepsilon)e^{i\psi}\right)\frac{\partial G(z,\rho e^{i\psi})}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=1-\varepsilon}d\psi+$$

$$+\frac{1}{2\pi}G\left(z,(1-\varepsilon)e^{i\psi}\right)v\left((1-\varepsilon)e^{i\psi}\right)\bigg|_{\psi=0}^{\psi=2\pi}-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}v\left((1-\varepsilon)e^{i\psi}\right)dG\left(z,(1-\varepsilon)e^{i\psi}\right).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon\to0$, получаем

$$u(z)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}u(e^{i\psi})\frac{\partial G(z,\rho e^{i\psi})}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=1}d\psi+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}G(z,e^{i\psi})\,dv(e^{i\psi}).\tag{5}$$

Аналогично поступим и для области $\{\zeta : 1+\varepsilon < |\zeta| < R\}$:

$$0 = \left[\frac{\rho}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\psi})\,\frac{\partial G(z,\rho e^{i\psi})}{\partial\rho}\,d\psi\right]\Bigg|_{\rho=R}^{\rho=1+\varepsilon} -$$

$$-\frac{1+\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi} G\left(z,(1+\varepsilon)e^{i\psi}\right)\frac{\partial u(\rho e^{i\psi})}{\partial\rho}\Bigg|_{\rho=1+\varepsilon} d\psi =$$

$$= \left[\frac{\rho}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\psi})\,\frac{\partial G(z,\rho e^{i\psi})}{\partial\rho}\,d\psi\right]\Bigg|_{\rho=R}^{\rho=1+\varepsilon} +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G\left(z,(1+\varepsilon)e^{i\psi}\right)d\nu\left((1+\varepsilon)e^{i\psi}\right).$$

Отсюда

$$0 = \left[\frac{\rho}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\psi})\,\frac{\partial G(z,\rho e^{i\psi})}{\partial\rho}\,d\psi\right]\Bigg|_{\rho=R}^{\rho=1} +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G\left(z,e^{i\psi}\right)d\nu\left(e^{i\psi}\right). \qquad (6)$$

Складывая соотношения (5) и (6), получаем, что для любого $z\in U$ справедливо

$$u(z) = -\frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{i\psi})\,\frac{\partial G(z,Re^{i\psi})}{\partial R}\,d\psi +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} G(z,e^{i\psi})\,d\nu(e^{i\psi}) = \qquad (7)$$

$$= h_R(z) - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \ln|e^{i\psi}-z|\,d\nu(e^{i\psi}),$$

где функция $h_R(z)$ гармонична при $|z|<R$.

Далее, $\nu(e^{i\psi}) = \arg w(e^{i\psi}) - \psi$. Поскольку гармоническая мера $\omega(0, w(E_\psi), \mathcal{D})$ образа дуги $E_\psi = \{e^{i\theta} : 0<\theta<\psi\}$ равна $\psi/2\pi$, т.е. $\vartheta(\arg w(e^{i\psi})) = \psi/2\pi$, то $\arg w(e^{i\psi}) = \mu(\psi/2\pi)$, где μ – функция, обратная к функции ϑ. Следовательно,

$$\nu(e^{i\psi}) = \mu(\psi/2\pi) - \psi. \qquad (8)$$

Обозначим через $\gamma(z)$ функцию $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\ln|e^{i\psi}-z|\,d\mu(\psi/2\pi)$, $z\in\mathbb{C}$.

Подставив равенство (8) в (7), получим

$$\gamma(z)=h_R(z)-u(z)+\int_0^{2\pi} \ln|e^{i\psi}-z|\,d\psi, \quad z\in U. \tag{9}$$

Поскольку правая часть (9) непрерывна при $|z|<R$, то $\gamma\in C(\bar U)$. Из определения функции γ следует, что для любых $z\in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ справедливо соотношение $\gamma(|z|^{-2}z)=-\ln|z|+\gamma(z)$. Значит, функция γ непрерывна во всей плоскости. В силу упоминавшегося при доказательстве теоремы 1 результата Сопина это эквивалентно тому, что выполнено условие (2), т.е. $\nu\in N[0,2\pi]$. Теорема доказана.

В [2] был доказан более слабый вариант теоремы 1, который позволил установить ряд результатов о компактности семейств субгармонических функций. Развивая этот метод, сейчас мы покажем, как с помощью теоремы 1 из интегральных оценок субгармонической функции можно извлекать поточечные оценки. В качестве следствия этого мы получим усиление одной теоремы Карлемана.

Теорема 3. Пусть $u(z)$ – субгармоническая функция в $\mathbb{C}$, удовлетворяющая условию

$$\int_0^{2\pi} u^+(te^{i\theta})\,d\nu(\theta)\leq \varphi(t) \quad \forall t>t_0,$$

где функция ν принадлежит классу $N[0,2\pi]$; $\varphi(t)$ – некоторая неубывающая функция. Тогда существуют такие постоянные $c>0$ и $A>1$, что

$$M(u,t)\overset{def}{=} \max\{u^+(z):|z|\leq t\}\leq c\varphi(At) \quad \forall t>t_1. \tag{10}$$

Для доказательства нам понадобится следующая простая

Лемма. Пусть функция $u(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 3, функция $r(\theta)\in C([0,2\pi])$, $1<r_1\leq r(\theta)\leq r_2$. Тогда при $t_0<R_1<R_2$ справедливо неравенство

$$\int_{R_1}^{R_2}\int_0^{2\pi} u^+(tr(\theta)e^{i\theta})\,d\nu(\theta)\,dt\leq \int_{r_1R_1}^{r_2R_2}\varphi(t)\,dt \quad \forall t>t_0.$$

Действительно,

$$\int_{R_1}^{R_2}\int_0^{2\pi} u^+(tr(\theta)e^{i\theta})\,d\nu(\theta)\,dt =$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_{R_1r(\theta)}^{R_2r(\theta)} u^+(te^{i\theta})\,dt\,[r(\theta)]^{-1}\,d\nu(\theta)\leq$$

$$\leq \int_0^{2\pi}\int_{r_1R_1}^{r_2R_2} u^+\left(te^{i\theta}\right)dt\,d\vartheta(\theta) \leq \int_{r_1R_1}^{r_2R_2} \Phi(t)dt .$$

Перейдем к доказательству теоремы. Поскольку $\vartheta \in N[0, 2\pi]$, то существуют такая область $\mathcal{D}$ вида (1), содержащая $\bar{U}$, и такая константа $c_1 > 0$, что

$$\omega\left(z, E, \mathcal{D}\right) \leq c_1\vartheta(\hat{E}), \qquad \forall z \in \bar{U}, \qquad \forall E \subset \partial\mathcal{D} . \tag{11}$$

Пусть R_1 и R_2 таковы, что $r_1^{-1} < R_1 < R_2$, где $r_1 = \min\limits_{\theta} r_{\mathcal{D}}(\theta)$. Для любого $R \in [R_1, R_2]$ через $\mathcal{D}_R$ обозначим множество $\{z \in \mathbb{C} : R^{-1}z \in \mathcal{D}\}$. Из формулы Пуассона – Иенсена, примененной к функции $v_t(\zeta) \overset{def}{=} u^+(t\zeta)$ в области $\mathcal{D}_R$, и неравенства (11) следует

$$v_t(z) \leq \int_{\partial\mathcal{D}_R} v_t(\zeta)\,\omega\left(z, d\zeta, \mathcal{D}_R\right) = \int_{\partial\mathcal{D}} v_t(R\zeta)\,\omega(z, d\zeta, \mathcal{D}) \leq$$

$$\leq c_1\int_0^{2\pi} v_t\left(Rr(\theta)e^{i\theta}\right)d\vartheta(\theta), \quad z \in \bar{U}, \ t > R_1^{-1}t_0 .$$

Интегрируя это неравенство по R по промежутку $[R_1, R_2]$ и применяя лемму, получаем

$$(R_2 - R_1)v_t(z) \leq \int_{R_1}^{R_2}\int_0^{2\pi} v_t\left(Rr(\theta)e^{i\theta}\right)d\vartheta(\theta)dR =$$

$$= c_1t^{-1}\int_{tR_1}^{tR_2}\int_0^{2\pi} u^+\left(sr(\theta)e^{i\theta}\right)d\vartheta(\theta)ds \leq$$

$$\leq c_1t^{-1}\int_{tr_1R_1}^{tr_2R_2} \Phi(s)ds, \qquad t > R_1^{-1}t_0 .$$

Значит,

$$M(u, t) \leq c_1(R_2 - R_1)^{-1}t^{-1}\int_{tr_1R_1}^{tr_2R_2} \Phi(s)ds \leq$$

$$\leq c_1(R_2 - R_1)^{-1}(r_2R_2 - r_1R_1)\Phi(tr_2R_2) . \tag{12}$$

Теорема доказана.

Замечание. Если функция u обладает регулярностью

$$M(u, \alpha t) \leq \beta M(u, t) \qquad \forall t > t_1 , \tag{13}$$

где $\alpha > 1$ и $\beta > 1$, то из неравенства (10) вытекает, что $M(u, t) \leq c_2 \varphi(t)$ $\forall t > t_2$. То же самое, очевидно, выполняется, если условию (13) удовлетворяет функция $\varphi(t)$.

В общем случае, как показывает простой анализ соотношения (12), величину A можно выбрать равной $r_2 r_1^{-1}(1+\varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$ (величина c при этом, конечно, будет зависеть от ε).

Проиллюстрируем возможности применения теоремы 3 примером. Как было показано Карлеманом [5], справедливо следующее обобщение теоремы Лиувилля: если субгармоническая функция u такова, что

$$u(re^{i\theta}) \leq F(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad \forall r > r_0, \tag{14}$$

где функция F удовлетворяет условию $\int_0^{2\pi} \log^+ F(\theta)d\theta < \infty$, то $u(z) \equiv const$. Следствием теоремы 3 является

Теорема 4. Пусть субгармоническая функция u удовлетворяет условию

$$\int_0^{2\pi} u^+(re^{i\theta})d\nu(\theta) \leq 1, \quad \forall r > r_0, \tag{15}$$

где функция $\nu \in N[0, 2\pi]$. Тогда $u(z) \equiv const$.

Этот результат содержит в себе теорему Карлемана. Действительно, функция $f(s) = \min\{[2\pi F(s)]^{-1}; 1\}$ такова, что $\int_0^{2\pi} \log^- \times$ $\times f(s)ds < \infty$, и значит, как было отмечено в начале статьи, функция $\nu(\theta) \stackrel{def}{=} \int_0^\theta f(s)ds \in N[0, 2\pi]$. Остается заметить, что из выполнения условия (14) следует выполнение и условия (15).

1. Левин Б.Я. Мажоранты в классах субгармонических функций и их приложения. 1. – Харьков, 1984. – 52 с. – (Препр. / АН УССР. ФТИНТ; № 18 – 84).
2. Рашковский А.Ю. Мажоранты гармонических мер и равномерная ограниченность семейств субгармонических функций // Аналитические методы в теории вероятностей и в теории операторов. – Киев : Наук. думка, 1989.
3. Рашковский А.Ю. Теоремы о равномерной ограниченности семейств субгармонических функций и мажоранты гармонических мер // Докл. АН СССР. – 1990.
4. Содин М.Л. Асимптотический модуль непрерывности субгармонических функций конечного порядка // Укр. мат. журн. – 1985. – 37, № 3. – С. 380-384.
5. Carleman T. Extension d'un théoréme de Liouville // Acta Math. - 1926. - 48. - P. 363-366.

УДК 517.55

Л.И.Ронкин

ОЦЕНКИ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И АССОЦИИРОВАННЫХ С НИМИ МЕР В КОНУСЕ

Изучается интегральное представление функций конечного порядка в конусе. Получены оценки составных частей этого представления, оценки граничных мер и мер, ассоциированных по Риссу, установлен критерий нормальности минимальности или максимальности типа функций из рассматриваемого класса.

В [1] было получено интегральное представление функции $u(x)$, субгармонической в конусе пространства $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяющей в нем неравенству $u(x) \le A|x|^{\rho}+B$. При этом относительно ρ предполагалось, что $\rho > æ^+$, где $æ^+$ – некоторое число, зависящее от выбора K.

Введем ряд обозначений и определений, необходимых для изложения полученных результатов.

Пусть Γ – область на сфере $S_1 = \{ x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1 \}$, имеющая дважды гладкую границу. Через Δ^* обозначим сферическую часть оператора Лапласа. Таким образом, в сферических координатах

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta^*, \quad r = |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}\ .$$

Рассмотрим на Γ краевую задачу: $\Delta^*\varphi + \lambda\varphi = 0,\ \varphi|_{\partial\Gamma} = 0$. Через $\lambda_j,\ 0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \dots$ обозначим собственные числа этой задачи, а через φ_j – соответствующие им функции из полной ортонормированной*) системы собственных функций. В дальнейшем область Γ предполагается такой, что $\varphi_j \in C^2(\bar\Gamma),\ \forall j$. Кроме того, для определенности будем считать, что на $\partial\Gamma$ производная по внутренней нормали $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ положительна.

Положим $K = K^\Gamma = \{ x \in \mathbb{R}^n : x = ty,\ y \in \Gamma,\ t > 0 \}$ и продолжим каждую функцию φ_j с множества $\bar\Gamma$ на замкнутый конус $\bar K$ как позитивно однородную функцию степени 0. За полученным продолжением сохраним обозначение $\varphi_j(x)$. Положим также

$$æ_j^{\pm} = \frac{1}{2}\left(-n+2 \pm \sqrt{(n-2)^2 + 4\lambda_j}\right).$$

---

*) Т.е.

$$\int_{\Gamma_1} \varphi_j \varphi_i \, dS_1 = \begin{cases} 0 & \text{при } j \ne i, \\ 1 & \text{при } j = i. \end{cases}$$

ISBN 5-12-002405-X. Теория операторов, субгармонические функции. Киев, 1991.

Тогда каждая функция $|x|^{\varkappa_j^{\pm}} \varphi_j(x)$ гармонична в K, принадлежит $C^2(K\setminus\{0\})$ и обращается в 0 на $\partial K\setminus\{0\}$. Для краткости всюду далее мы будем писать вместо φ_1 и $\varkappa_1^{\pm}$ соответственно φ и $\varkappa^{\pm}$. Кроме того, положим $\varkappa_0^{+}=0$, $\varkappa_0^{-}=-n+2$, $\alpha=\alpha_1=\varkappa^{+}-\varkappa^{-}$, $\alpha_n = \varkappa_n^{+}-\varkappa_n^{-}$, $\theta_n=(n-2)\int\limits_{S_1} dS_1$ при $n>2$, $\theta_2=2\pi$ и $\gamma_R(t)=t^{\varkappa^-}-t^{\varkappa^+}R^{\varkappa^- - \varkappa^+}$.

Обозначим через $d\omega$ и dS_R индуцированные эвклидовой метрикой элементы $(n-1)$-мерного объема соответственно на ∂K и S_R. Обозначим также: $B_R=\{x\in\mathbb{R}^n : |x|<R\}$, $S_R=\partial B_R$, $B_{\lambda,R}=B_R\setminus\bar{B}_\lambda$, $K_{\lambda,R}=K\cap B_{\lambda,R}$, $(\partial K)_{\lambda,R}=\partial K\cap B_{\lambda,R}$, $\Gamma_R = K\cap S_R = R\Gamma_1$.
Через $SH(G)$ будем обозначать множество всех субгармонических функций в G, а через $SH^*(K)$ – множество всех функций из $SH(K)$, ограниченных на ограниченных подмножествах конуса K. Как было показано в [2, 3], каждой функции $u\in SH^*(K)$ наряду с мерой μ_u, ассоциированной по Риссу функции*) $u(x)$ естественно сопоставить меру $\mu_{u,\partial}$ (граничную меру), определяемую локально как предел в $D'(\partial K\setminus\{0\})$ функций $u(hx^0+x)$, $h\to 0$. Отметим, что $d\mu_{u,\partial}\leqslant u^* d\omega$, где $u^*(x)=\varlimsup\limits_{\substack{x'\to x\\ x'\in K}} u(x')$, $x\in\partial K\setminus\{0\}$.

По мерам μ_u и $\mu_{u,\partial}$ определим в $\bar{K}\setminus\{0\}$ меру τ_u, задав ее на борелевских множествах $E\subset\subset\bar{K}\setminus\{0\}$ равенствами

$$\tau_u(E)=\int\limits_{E\cap K}\varphi(x)\,d\mu_u(x)-\frac{1}{\theta_n}\int\limits_{E\cap\partial K}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial n}\,d\mu_{u,\partial}(x).$$

При изучении функций из $SH(K)$ важную роль играет следующее утверждение, полученное в [2, 3] и являющееся аналогом известной леммы Карлемана для функций, голоморфных в полуплоскости (см., например, [4]).

Лемма (формула Карлемана). Пусть функция $u\in SH^*(K)$. Тогда для любого $\lambda>0$, не принадлежащего некоторому множеству $\Lambda\subset\mathbb{R}_+$ лебеговой меры нуль и любого $R>0$, справедливо равенство

$$\theta_n\int\limits_{K_{\lambda,R}}\gamma_R(|x|)\,d\tau_u=\gamma_R'(\lambda)\int\limits_{\Gamma_\lambda}u\varphi\,dS_\lambda -$$

$$-\gamma_R'(R)\int\limits_{\Gamma_R}u\varphi\,dS_R-\gamma_R(\lambda)Q_u(\lambda),$$

где $Q_u(\lambda)$ – некоторая конечная величина для гладких в $\bar{K}\setminus\{0\}$

*) Как элемент D' мера $\mu_u=\frac{1}{\theta_n}\Delta u$.

функций $u(x)$, совпадающая с интегралом

$$\int_{\Gamma_\lambda} \varphi \frac{\partial u}{\partial r} dS_\lambda .$$

В дальнейшем, специально того не оговаривая, мы всюду считаем, что $\lambda \notin \Lambda$.

Функцию Грина конуса K обозначим через $G(x,y)$. Справедливо представление (см. [5])

$$G(x,y) = \theta_n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_j} |x|^{\varkappa_j^+} |y|^{\varkappa_j^-} \varphi_j(x) \varphi_j(y), \quad |x| < |y| . \tag{1}$$

При $p \in \mathbb{N}$ положим

$$G_p(x,y) = -G(x,y) + \theta_n \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{j} |x|^{\varkappa_j^+} |y|^{\varkappa_j^-} \varphi_j(x) \varphi_j(y) .$$

Для единства записи положим также $G_0(x,y) = -G(x,y)$. В [1] получены следующие оценки функции $G_p(x,y)$ и ее производной $\frac{\partial G_p(x,y)}{\partial n_y}$ по внутренней нормали к ∂K:

$$|G_p(x,y)| \leq c_1 |x|^{\varkappa_{p+1}^+} |y|^{\varkappa_{p+1}^-} \varphi(x) \varphi(y), \quad |x| < t|y|, \quad c_1 = c_1(p,t), \quad p \geq 0, \ t < 1,$$

$$G_p(x,y) \leq c_2 \frac{|x|^{\varkappa_{p+1}^+} |y|^{\varkappa_p^-} \varphi(x) \varphi(y)}{|x|^{\varkappa_{p+1}^+ - \varkappa_p^+} + |y|^{\varkappa_{p+1}^- - \varkappa_p^-}}, \quad p \geq 1, \ c_2 = c_2(p),$$

$$\left| \frac{\partial G_p}{\partial n_y} \right| \leq c_1 |x|^{\varkappa_{p+1}^+} |y|^{\varkappa_{p+1}^-} \varphi(x) \frac{\partial \varphi(y)}{\partial n}, \quad x \in K, \ y \in \partial K \setminus \{0\}, \quad |x| \leq t|y|, \ p \geq 0, \ t < 1.$$

$$\frac{\partial G_p}{\partial n_y} \leq c_2 \frac{|x|^{\varkappa_{p+1}^+} |y|^{\varkappa_p^-} \varphi(x) \frac{\partial \varphi(y)}{\partial n}}{|x|^{\varkappa_{p+1}^+ - \varkappa_p^+} + |y|^{\varkappa_{p+1}^- - \varkappa_p^-}}, \quad x \in K, \ y \in \partial K \setminus \{0\}, \ p \geq 1.$$

Отметим также, что в силу ортонормированности системы функций из разложения (1) следует, что при $R < |y|$

$$\int_{\Gamma_R} G_p(x,y) \varphi_q(x) dS_R(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, \text{ если } & q \leq p, \\ -\frac{\theta_n}{\alpha_q} R^{\varkappa_q^+ + n - 1} |y|^{\varkappa_q^-} \varphi_q(y), & \text{если } \quad q > p, \end{array} \right. \tag{2}$$

$$\int_{\Gamma_R} \frac{\partial G_p(x,y)}{\partial n_y} \varphi_q(x)\, dS_R(x) = \tag{3}$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ если } q \le p, \\ -\frac{\theta_n}{\alpha_q} R^{\varkappa_q^+ + n-1} |y|^{\varkappa_q^-} \frac{\partial \varphi_q(y)}{\partial n}, \text{ если } q > p. \end{cases}$$

Аналогично, используя симметричность функции Грина, при $|y| < R$ получаем

$$\int_{\Gamma_R} G_p(x,y)\varphi_q(y)\, dS_R(x) =$$

$$= \begin{cases} \frac{\theta_n}{\alpha_q} \varphi_q(y) \left\{ R^{\varkappa_q^+ + n-1} |y|^{\varkappa_q^-} - R^{\varkappa_q^- + n-1} |y|^{\varkappa_q^+} \right\}, \text{ если } q \le p, \\ -\frac{\theta_n}{\alpha_q} \varphi_q(y) R^{\varkappa_q^- + n-1} |y|^{\varkappa_q^+}, \qquad \text{ если } q > p, \end{cases} \tag{4}$$

и

$$\int_{\Gamma_R} \frac{\partial G_p(x,y)}{\partial n_y} \varphi_q(x)\, dS_R(x) =$$

$$= \begin{cases} \frac{\theta_n}{\alpha_q} \frac{\partial \varphi_q(y)}{\partial n} \left\{ R^{\varkappa_q^+ + n-1} |y|^{\varkappa_q^-} - R^{\varkappa_q^- + n-1} |y|^{\varkappa_q^+} \right\}, \text{если } q \le p, \\ -\frac{\theta_n}{\alpha_q} R^{\varkappa_q^- + n-1} |y|^{\varkappa_q^+} \frac{\partial \varphi_q(y)}{\partial n}, \qquad \text{ если } q > p. \end{cases} \tag{5}$$

Согласно (1) каждой положительной мере μ в K, удовлетворяющей условию

$$\int_{\lambda}^{\infty} t^{\varkappa_p^- + 1} d\tilde{\mu}(t) < \infty,$$

где

$$\tilde{\mu}(t) = \int_{K_{\lambda,t}} \varphi(x)\, d\mu(x),$$

отвечает потенциал

$$J'_{\mu,p}(x) = \int_{K_{\lambda,\infty}} G_p(x,y)\, d\mu(y).$$

Этот потенциал является субгармонической функцией в K, такой, что отвечающие ей меры – ассоциированная по Риссу и граничная –

равны соответственно μ и 0, и верна оценка

$$J'_{\mu,\rho}(x) \le const\, \varphi(x) \Big\{ |x|^{\varkappa^+_\rho} \int_\lambda^{|x|} t^{\varkappa^-_\rho - 1} \tilde{\mu}(t)\,dt +$$

$$+ |x|^{\varkappa^+_{\rho+1}} \int_{|x|}^{\infty} t^{\varkappa^-_{\rho+1} - 1} \tilde{\mu}(t)\,dt \Big\}, \quad \rho \ge 0 . \tag{6}$$

Аналогично каждой вещественной мере ν, заданной на $\partial K \setminus \{0\}$ и удовлетворяющей условиям $d\nu \le a|x|^\rho d\omega$ при $|x| > R_0$ и $\int_\lambda^\infty t^{\varkappa^-_{\rho+1}} d\tilde{\nu}(t)$, где $\tilde{\nu}(t) = \int_{(\partial K)_{\lambda,t}} d|\nu|(t)$, $|\nu|$ – вариация меры ν, отвечает потенциал

$$J''_{\nu,\rho}(x) = -\frac{1}{\theta_n} \int_{(\partial K)_{\lambda,\infty}} \frac{\partial G_\rho(x,y)}{\partial n_y}\, d\nu(y) .$$

Этот потенциал, как показано в [1], гармоничен в K, его граничная мера на $(\partial K)_{\lambda,\infty}$ совпадает с мерой ν, а на $(\partial K)_{0,\lambda}$ равна нулю. Покажем, что при $|x| \ge 2R_0$ справедлива оценка

$$J''_{\mu,\rho}(x) \le const \Big\{ |x|^{-n+2} \tilde{\nu}(|x|) + a|x|^\rho +$$
$$+ |x|^{\varkappa^+_\rho} \int_\lambda^{|x|} t^{\varkappa^-_\rho - 1} \tilde{\tau}(t)\,dt + |x|^{\varkappa^+_{\rho+1}} \int_{|x|}^{\infty} t^{\varkappa^-_{\rho+1} - 1} \tilde{\nu}(t)\,dt \Big\}. \tag{7}$$

Для этого, прежде всего, заметим, что наряду с указанной ранее оценкой функции $\left|\frac{\partial G}{\partial n_y}\right|$ при $|x| < t|y|$ из (1) с учетом симметрии функции $G(x, y)$ следует также оценка

$$\left| \frac{\partial G_\rho(x,y)}{\partial n_y} \right| \le c_3 \varphi(x) \frac{\partial \varphi(y)}{\partial n} \Big\{ |x|^{\varkappa^-} |y|^{\varkappa^+} +$$
$$+ |x|^{\varkappa^+_\rho} |y|^{\varkappa^-_\rho} \Big\}, \quad |y| < t|x|, \quad c_3 = c_3(\rho, t),\ t < 1,\ \rho \ge 0 .$$

Применяя эти оценки, получаем

$$J''_{\nu,\rho}(x) = -\frac{1}{\theta_n} \int_{(\partial K)_{\lambda,\infty}} \frac{\partial G_\rho(x,y)}{\partial n_y}\, d\nu(x) =$$

$$= -\frac{1}{\theta_n} \Big\{ \int_{(\partial K)_{\lambda,\frac{1}{2}|x|}} + \int_{(\partial K)_{\frac{1}{2}|x|,2|x|}} + \int_{(\partial K)_{2|x|,\infty}} \Big\} \le$$

$$\ge const \Big\{ \big(\tfrac{1}{2}|x|\big)^{\varkappa^-} \int_\lambda^{\frac{1}{2}|x|} t^{\varkappa^+} d\tilde{\nu}(t) + \big(\tfrac{1}{2}|x|\big)^{\varkappa^+_\rho} \int_\lambda^{\frac{1}{2}|x|} t^{\varkappa^-_\rho} d\tilde{\nu}(t) +$$

$$
+ a \int\limits_{(\partial K)_{\frac{1}{2}|x|,\,2|x|}} \frac{\partial G}{\partial n_y} |x|^{\rho} d\omega + (2|x|)^{\varkappa^{+}_{p+1}} \int\limits_{2|x|}^{\infty} t^{\varkappa^{-}_{p+1}} d\tilde{\nu}(t) \le
$$

$$
\le const \left\{ |x|^{-n+2} \tilde{\delta}(|x|) + |x|^{\varkappa^{+}_{p}} \int\limits_{\lambda}^{|x|} t^{\varkappa^{-}_{p}-1} \tilde{\delta}(t)dt \right. +
$$

$$
\left. + a|x|^{\rho} + |x|^{\varkappa^{+}_{p+1}} \int\limits_{|x|}^{\infty} t^{\varkappa^{-}_{p+1}} \tilde{\delta}(t)dt \right\} .
$$

Тем самым оценка (7) показана.

Если функция $u(x) \in SH(K)$ удовлетворяет условию $u(x) \le \le A|x|^{\rho} + B$, где $\rho > \varkappa^{+}$, то, как показано в [1], справедливо представление[x)]

$$
u(x) = J'_{\mu_u, p} + J''_{\mu_{u,\partial}, p}
$$

$$
- \int\limits_{K_\lambda} G(x,y)\, d\mu_u(y) + H_\lambda(x) + \sum_{j=1}^{p} a_j |x|^{\varkappa^{+}_{j}} \varphi_j(x) , \qquad (8)
$$

где $a_1, \ldots, a_p$ – постоянные; число p определено условием $\varkappa^{+}_{p} \le \le \rho < \varkappa^{+}_{p+1}$; $H_\lambda(x)$ – функция, гармоническая в K, такая, что

$$
\overline{\lim_{x \to \infty}} |H_\lambda(x)| |x|^{-\varkappa^{-}} < \infty ,
$$

$$
\mu''_{u,\partial} = \begin{cases} 0 & \text{на } (\partial K)_{\lambda,\infty} , \\ \mu_{u,\partial} & \text{на } (\partial K)_{0,\lambda} . \end{cases}
$$

Заметим, что число p в этом представлении не наименьшее из возможных. Это следует из того, что сходимость интегралов

$$
\int^{\infty} t^{\varkappa^{-}_{p+1}} d\tilde{\mu}_u(t), \quad \int^{\infty} t^{\varkappa^{-}_{p+1}} d\tilde{\mu}_{u,\partial}(t) , \qquad (9)
$$

обеспечивающая существование потенциалов $J'_{\mu_u, p}$ и $J''_{\mu_{u,\partial}, p}$ – возможна, в частности, и при p, удовлетворяющих условию $\varkappa^{-}_{p+j} = = \rho$, $j \ge 1$. Поэтому естественно ставить вопрос о наличии представления (8), в котором бы число p определялось условием сходимости интегралов (9), а не условием $\varkappa^{+}_{p} \le \rho < \varkappa^{+}_{p+1}$.

С учетом сказанного выше, это, по существу, сводится к уточнению сведений о гармонических "мономах" в (8). Кроме того, есте-

---

x) Это представление является обобщением на случай субгармонических функций в конусе факторизационного представления функции, голоморфной в полуплоскости, полученного в [4].

[illegible] избавиться от ограничения $\rho \geq n^{?}$ и вытекающего из него условия $\rho \geq 1$. Для этого нам понадобятся некоторые новые оценки потенциалов $J'_{\mu,\rho}$ и $J''_{\tau,\rho}$. Эти оценки (теорема 1) представляют, на наш взгляд, самостоятельный интерес и вместе с обратными оценками (теоремы 2 и 3) составляют главное содержание настоящей статьи.

Подобно тому, как это делалось в [6], где рассматривались функции вполне регулярного роста в полуплоскости $\mathbb{C}^+=\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z>0\}$, построим по функции $u \in SH(K)$ функции

$$M_u(R) = \sup\left\{u^+(x) : x \in \Gamma_R\right\}, \quad u^+ = \max\{0, u\},$$

$$\Phi_u(R) = \frac{1}{R^{n-1}} \int_{\Gamma_R} |u(x)|\varphi(x)\,dS_R,$$

$$\hat{M}_u(R) = \max\left\{M_u(R),\ \Phi_u(R)\right\}.$$

Назовем функцию $u \in SH^*(K)$ функцией минимального, нормального или максимального типа при порядке $\rho > 0$, если соответственно $\hat{\sigma} = 0$, где $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_u = \varlimsup_{R\to\infty} R^{-\rho}\hat{M}_u(R)$, или $0 < \hat{\sigma} < \infty$, или $\hat{\sigma} = \infty$.

Класс всех функций $u \in SH^*(K)$ не более чем нормального типа при порядке ρ, т.е. таких, что $\hat{\sigma} < \infty$, обозначим через $SH(K,\rho]$.

Порядок функции $u \in SH^*(K)$ определим равенством[*)]

$$\hat{\rho}_u = \inf\left\{\rho : u \in SH(K,\rho]\right\}.$$

При этом $\inf \varnothing \overset{def}{=} \infty$.

Для сокращения записи, как и в [7], введем в рассмотрение ядро

$$W_\rho(x,y) = \begin{cases} \dfrac{G_\rho(x,y)}{\varphi(y)} & \text{при } x, y \in K, \\[2ex] \dfrac{\partial G_\rho(x,y)}{\partial n_y} \Big/ \dfrac{\partial \varphi(y)}{\partial n} & \text{при } x \in K,\ y \in \partial K\setminus\{0\}. \end{cases}$$

Отметим, что функция $W_\rho(x,y)$ непрерывна при $x \in \overline{K}\setminus\{0\}$, $y \in \overline{K}\setminus\{0\}$, $x \neq y$. Отметим также, что если $v(x)=\int_{\overline{K}_{1,\infty}} W_\rho(x,y)\,d\tau(y)$, то $\tau_v = \tau$. Поэтому с помощью функции $W_\rho(x,y)$ и меры τ_u представление (8) записывается следующим образом:

---

*) В [7] дано другое определение порядка $\hat{\rho}_u$ и отмечено, что оно эквивалентно определению, приведенному здесь.

$$u(x) = \int\limits_{\bar{K}_{\lambda,\infty}} W_p(x,y)\,d\tau_u(y) + \sum_{j=1}^{p} a_j |x|^{\varkappa_j^+} \varphi_j(x) +$$

$$+ H_\lambda(x) - \int\limits_{K_\lambda} G(x,y)\,d\mu_u(y). \tag{10}$$

Оценим функцию $\hat{M}(R)$ для первого слагаемого справа.

Теорема 1. Пусть τ – вещественная мера в $\bar{K}\setminus\{0\}$, удовлетворяющая условиям:

1) $\tau \geqslant 0$ в K;

2) $\overline{\lim\limits_{R\to\infty}}\, R^{-\rho-n+2}\,\tilde{\tau}(R) \overset{def}{=} \delta_\tau < \infty$,

где $0 < \rho < \infty$; $\tilde{\tau}(R) = \int\limits_{\bar{K}_{\lambda,R}} d|\tau|(R)$;

3) при некоторых $a > 0$ и $R_0 > 0$ на $(\partial K)_{R_0,\infty}$

$$d\tau(x) \geqslant -a\frac{\partial\varphi}{\partial n}|x|^\rho d\omega.$$

Пусть, далее $A_\tau = A_\tau(\rho)$ – инфемум чисел a, фигурирующих в условии 3), p – наименьшее целое число, удовлетворяющее условию

$$\int\limits_\lambda^\infty t^{\varkappa_p^- +1}\,d\tilde{\tau}(t) < \infty,$$

$$v(x) = \int\limits_{\bar{K}_{\lambda,\infty}} W_p(x,y)\,d\tau(y).$$

Тогда:

а) если $\varkappa_p^+ < \rho < \varkappa_{p+1}^+$, то $\hat{G}_v \leqslant c(\rho,n)\max\{\delta_\tau, A_\tau\}$, где $c(\rho,n)$ – постоянная, зависящая лишь от указанных параметров;

б) если $\rho = \varkappa_{p+1}^+)$, то $\hat{G}_v = c(\rho,n)A_\tau$;

в) если $\rho = \varkappa_p^+ = \varkappa_{p-1}^+ = \dots = \varkappa_q^+ > \varkappa_{q-1}^+$, $q \geqslant 1$,

то $\hat{G}_v \leqslant C(\rho,n)\max\{\delta_\tau, A_\tau, B_\tau\}$, где

$$B_\tau = B_\tau(0) = \max_{q\leqslant l\leqslant p}\left\{\overline{\lim_{R\to\infty}}\left|\int\limits_{K_{\lambda,R}} \frac{\varphi_l(y)}{\varphi(y)}|y|^{\varkappa_p^-}d\tau(y) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int\limits_{(\partial K)_{\lambda,R}} |y|^{\varkappa_p^-}\frac{\partial\varphi_l(y)}{\partial n}\Big/\frac{\partial\varphi(y)}{\partial n}\,d\tau(y)\right|\right\}.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что из оценок (6) и (7) вытекает неравенство

$$M_v(R) \le const \left\{ R^{\varkappa_p^+} \int_{\lambda}^{R} t^{\varkappa_p^- - 1} \tilde{\tau}(t)\,dt \; + \right.$$

$$\left. + R^{\varkappa_{p+1}^+} \int_{R}^{\infty} t^{\varkappa_{p+1}^- - 1} \tilde{\tau}(t)\,dt + R^{-n+2} \tilde{\tau}(R) + aR^{\rho} \right\}.$$

При $\varkappa_p^+ < \rho < \varkappa_{p+1}^+$ отсюда с помощью элементарных стандартных вычислений получаем

$$\overline{\lim_{R\to\infty}}\, R^{-\rho} M_v(R) \le c(\rho,n)(\delta_\tau + A_\tau). \qquad (11)$$

Аналогично в случае, когда $\rho = \varkappa_{p+1}^+$ и, следовательно, $\delta_\tau = 0$, получаем

$$\overline{\lim_{R\to\infty}}\, R^{-\rho} M_v(R) \le c(\rho,n) A_\tau. \qquad (12)$$

Оценим теперь $M_v(R)$ при $\rho = \varkappa_p^+ = \varkappa_{p-1}^+ = \dots = \varkappa_q^+ > \varkappa_{q-1}^+$. Записываем

$$v(x) = \int_{\bar{K}_{\lambda,\infty}} W_p(x,y)\,d\tau(y) = \int_{\bar{K}_{\lambda,|x|}} W_{q-1}(x,y)\,d\tau(y) \; +$$

$$+ \theta_n \sum_{l=q}^{p} \frac{1}{d_l} |x|^{\varkappa_l^-} \varphi_l(x) \left\{ \int_{K_{\lambda,|x|}} \frac{\varphi_l(y)}{\varphi(y)} |y|^{\varkappa_p^-} d\tau(y) \; + \right.$$

$$\left. + \int_{(\partial K)_{\lambda,|x|}} |y|^{\varkappa_l^-} \frac{\partial \varphi_l(y)}{\partial n} \Big/ \frac{\partial \varphi(y)}{\partial n}\, d\tau(y) \right\} + \int_{\bar{K}_{\lambda,|x|}} W_p(x,y)\,d\tau(y).$$

Отсюда, учитывая приведенные ранее оценки функций G_p и $\frac{\partial G_p(x,y)}{\partial n_y}$, конструкцию ядра $W_p(x,y)$ и свойства меры τ, получаем

$$M_v(R) \le const \left\{ R^{\varkappa_{p-1}^-} \int_{\lambda}^{R} t^{\varkappa_{p-1}^- - 1} \tilde{\tau}(t)\,dt + R^{\varkappa_{p+1}^+} \int_{R}^{\infty} t^{\varkappa_{p+1}^- - 1} \tilde{\tau}(t)\,dt \; + \right.$$

$$+ aR^{\rho} + R^{-n+2} \tilde{\tau}(R) + R^{\varkappa_p^+} \sum_{l=q}^{p} \left| \int_{K_{\lambda,R}} \frac{\varphi_l(y)}{\varphi(y)} |y|^{\varkappa_l^-} d\tau(y) \; + \right.$$

$$\left. \left. + \int_{(\partial K)_{\lambda,R}} |y|^{\varkappa_l^-} \frac{\partial \varphi_l(y)}{\partial n} \Big/ \frac{\partial \varphi(y)}{\partial n}\, d\tau(y) \right| \right\}.$$

Следовательно,

$$\overline{\lim_{R\to\infty}} R^{-\rho} M_v(R) = \overline{\lim_{R\to\infty}} R^{-\varkappa^+_\rho} M_v(R) \le$$

$$\le c_1(\rho, n)\left\{ \delta_\tau + A_\tau + B_\tau \right\}. \qquad (13)$$

Перейдем теперь к оценке функции $\varPhi_v(R)$. Как было показано в [2, 3] для любой функции $u \in SH(K)$, удовлетворяющей условию $u(x) \le A|x|^\rho + B \quad \forall x \in K$, при $\rho > \varkappa^+$ выполняется неравенство

$$\varPhi_u(R) \le const\ AR^\rho.$$

Отсюда следует, что при $\rho > \varkappa^+$

$$\overline{\lim_{R\to\infty}} R^{-\rho} \varPhi_v(R) \le c_2(\rho, n) \overline{\lim_{R\to\infty}} R^{-\rho} M_v(R).$$

Используя это неравенство в совокупности с неравенствами (11)-(13), делаем вывод о справедливости утверждений доказываемой теоремы в случае $\rho > \varkappa^+$.

Для оценки функции $\varPhi_v(R)$ при $0 < \rho < \varkappa^+$ представим $v(x)$ в виде $v(x) = v_1(x) + v_2(x)$, где

$$v_1(x) = \int_{K_{1,\infty}} \frac{G_\rho(x,y)}{\varphi(y)} d\tau(y),$$

$$v_2(x) = \int_{(\partial K)_{1,\infty}} \frac{\partial G_\rho(x,y)}{\partial n_y} \Big/ \frac{\partial \varphi(y)}{\partial n} d\tau(y).$$

Здесь $p = 0$ или $p = 1$.

Вначале рассмотрим случай $p = 0$. Ввиду равенств (2) и (3) имеем

$$\varPhi_{v_1}(R) = \frac{1}{R^{n-1}} \int_{\Gamma_R} \left\{ \varphi(x) \int_{\bar{K}_{1,\infty}} \frac{G(x,y)}{\varphi(y)} d\tau(y) \right\} dS_R(x) =$$

$$= \frac{1}{R^{n-1}} \int_{K_{1,\infty}} \frac{1}{\varphi(y)} d\tau(y) \int_{\Gamma_R} G(x,y)\varphi(x) dS_R(x) =$$

$$= \frac{1}{R^{n-1}} \int_{K_{1,R}} + \frac{1}{R^{n-1}} \int_{K_{R,\infty}} \le$$

$$\le \frac{\theta_n}{\alpha} R^{\varkappa^-} \int_1^R t^{\varkappa^+} d\tilde{\tau}(t) + \frac{\theta_n}{\alpha} R^{\varkappa^-} \int_R^\infty t^{\varkappa^-} d\tilde{\tau}(t) = Q(R).$$

Аналогичные вычисления показывают, что $\varphi_{V_2}(R) \le Q(R)$ и, значит,

$$\varphi_V(R) \le \varphi_{V_1}(R) + \varphi_{V_2}(R) \le 2Q(R) . \tag{14}$$

Предположим, что $\tilde{\tau}(t) \le \sigma t^{\rho+n-2}$ $\forall t \ge t_0$, $0<\rho<\varkappa^+$.
Тогда

$$Q(R) \le \frac{\theta_n}{\alpha} R^{\varkappa^-} \left\{ t^{\varkappa^+} \tilde{\tau}(t) \Big|_{\lambda}^{R} - \varkappa^+ \int_{\lambda}^{R} t^{\varkappa^\pm 1} \tilde{\tau}(t)\,dt \right\} +$$

$$+ \frac{\theta_n}{\alpha} R^{\varkappa^+} \left\{ t^{\varkappa^-} \tilde{\tau}(t) \Big|_{R}^{\infty} - \varkappa^- \int_{R}^{\infty} t^{\varkappa^- -1} \tilde{\tau}(t)\,dt \right\} +$$

$$+ 0(1) \le \frac{\theta_n}{\alpha} \sigma \left(1 + \frac{\varkappa^-}{-\varkappa^+ + \rho} \right) R^{\rho} + 0(1) . \tag{15}$$

Отсюда следует, что в рассматриваемой ситуации, т.е. при $\rho \ne 0$, $0<\rho<\varkappa^+$,

$$\overline{\lim_{R\to\infty}}\, R^{-\rho} \varphi_V(R) \le 2 \frac{\theta_n}{\alpha} \sigma \left(1 + \frac{\varkappa^-}{-\varkappa^+ + \rho} \right) . \tag{16}$$

Если $\rho = 0$, $\rho = \varkappa^+$, то $\lim R^{-\rho-n+2} \tau(R) = 0$ и из предшествующего следует, что в этом случае

$$\overline{\lim_{R\to\infty}}\, R^{-\rho} \varphi_V(R) = 0 . \tag{17}$$

Для получения соответствующей оценки при $\rho = \varkappa^+$, $\rho = 1$ заметим, что в этой ситуации

$$\left| \int_{\Gamma_R} v(x) \varphi(x)\, dS_R(x) \right| =$$

$$= \left| \int_{K_{\lambda,R}} d\tau(y) \int_{\Gamma_R} W_0(x,y) \varphi(x)\, dS_R(x) \right| +$$

$$+ \frac{2\theta_n}{\alpha} R^{\varkappa^+} \int_{K_{\lambda,R}} |y|^{\varkappa^-} d\tau(y) \Bigg| \le$$

$$\le \frac{2\theta_n}{\alpha} R^{\varkappa^-} \int^{R} t^{\varkappa^+} d\tau(t) + \frac{2\theta_n}{\alpha} R^{\varkappa^+} \int_{K_{\lambda,R}} |y|^{\varkappa^-} d\tau(y) .$$

Отсюда следует, что

$$\overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{1}{R^{\varkappa^+ + n - 1}} \left| \int_{\Gamma_R} v(x) \varphi(x)\, dS_R(x) \right| \le$$

$$\le \frac{2\theta_n}{\alpha}\left(\overline{\lim_{R\to\infty}}\ \frac{\tilde{\tau}(R)}{R^{\varkappa^{+}+n-2}}+\overline{\lim_{R\to\infty}}\int\limits_{K_{\lambda,R}}|y|^{\varkappa^{-}}d\tau(y)\right)=$$

$$=\frac{2\theta_n}{\alpha}\left(\delta_\tau+B_\tau\right). \tag{18}$$

Чтобы извлечь отсюда искомую оценку функции $\Phi_v(R)$, представим v в виде $v=v^{+}-v^{-}$ и соответственно $|v|$ в виде $|v|=v^{+}+v^{-}$. Очевидно, что

$$\overline{\lim_{R\to\infty}}\ \frac{1}{R^{\rho+n-1}}\int\limits_{\Gamma_R}v^{+}(x)\varphi(x)dx\le A\,\overline{\lim_{R\to\infty}}\ \frac{M_{v^{+}}(R)}{R^{\rho}}\,,\quad A=\sup\varphi(x)\int\limits_{\Gamma_1}dS_1\,,$$

и, значит (см. (13)),

$$\overline{\lim_{R\to\infty}}\ \frac{1}{R^{\rho+n-1}}\int\limits_{\Gamma_R}v^{+}(x)\varphi(x)dS_R(x)\le A_1\left(\delta_\tau+A_\tau+B_\tau\right).$$

Сопоставляя это неравенство с неравенством (18), получаем

$$\overline{\lim_{R\to\infty}}\ R^{-\rho}\Phi_v(R)=$$

$$=\overline{\lim_{R\to\infty}}\ \frac{1}{R^{\varkappa^{+}+n-1}}\int\limits_{\Gamma_R}\left(2v^{+}-v\right)\varphi(x)\,dS_R(x)\le$$

$$\le\overline{\lim_{R\to\infty}}\ \frac{2}{R^{\varkappa^{+}+n-1}}\int\limits_{\Gamma_R}v^{+}(x)\varphi(x)dS_R(x)\ +$$

$$+\ \overline{\lim_{R\to\infty}}\ \frac{1}{R^{\varkappa^{+}+n-1}}\left|\int\limits_{\Gamma_R}v(x)\varphi(x)dS_R(x)\right|\le$$

$$\le A_2\left(\delta_\tau+B_\tau+A_\tau\right). \tag{19}$$

Подытоживая сказанное относительно функций $M_v(R)$ и $\Phi_v(R)$ в случае $0<\rho\le\varkappa^{+}$, т.е. оценки (13), (16), (17) и (19), замечаем, что и в этом случае справедливы утверждения а) – в) теоремы 1. Таким образом, теорема 1 доказана.

Замечание. Анализ доказательства соотношения (13) показывает, что при замене в его левой части функции v функцией

$$u=v+\sum_{j=q}^{p}a_j\varphi_j(x)|x|^{\varkappa_j^{+}},$$

где ν, q, p – те же, что и прежде, а $a_j = const$, это соотношение остается в силе, если соответственно в его правой части величину B_τ заменить величиной

$$B_u^* = \max_{q \le l \le p} \left\{ \overline{\lim_{R\to\infty}} \left| a_l + \frac{\theta_n}{\alpha_l} \left\{ \int_{K_{\lambda,R}} |y|^{\varkappa_l^-} \frac{\varphi_l(y)}{\varphi(y)} d\tau(y) + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \int_{(\partial K)_{\lambda,R}} |y|^{\varkappa_l^-} \frac{\partial \varphi_l(y)}{\partial n} \Big/ \frac{\partial \varphi(y)}{\partial n} d\tau(y) \right\}\right|\right\}.$$

Рассмотрим теперь утверждения, обратные тем, которые содержатся в только что доказанной теореме. Прежде всего заметим, что для величины A_τ очевидно справедлива оценка $A_{\tau_u} \le \hat{\sigma}_u$, $\forall u \in SH(K, p]$. Оценка величины δ_{τ_u} содержится в следующей теореме.

Теорема 2. Пусть функция $u \in SH(K, p]$. Тогда для ассоциированной к ней меры τ_u справедлива оценка

$$\tilde{\tau}_u(R) \le c_1 \hat{\sigma}_u R^{p+n-2}$$

с $c_1 = c_1(p, n) < \infty$, $c_2 = c_2(u) < \infty$,
и, как следствие, оценка

$$\delta_{\tau_u} \le c_1 \hat{\sigma}_u .$$

Доказательство этой теоремы мы опускаем. Оно подобно доказательству пп. а) и д) теоремы 1 из [6]. Отметим также, что при ограничении $p > \varkappa^+$ теорема 2 получена в [2, 3]; близкое утверждение (при произвольном p) содержится в [7], где класс $SH(K,p]$ ($SH(K;p)$ в обозначениях [7]) определяется как класс функций $u \in SH^*(K)$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$i)\ \lim_{R\to\infty} R^{-p} M_u(R) < \infty;$$

$ii)$ существуют такой конус $\tilde{K} = K^{\tilde{\Gamma}}$, $\tilde{\Gamma} \subset\subset \Gamma$, и такое число $l \in (0,1)$, что

$$\underline{\lim_{R\to\infty}} \frac{1}{R^p} \sup\left\{ u(x) : x \in \tilde{K}_{lR,R} \right\} > -\infty .$$

Оценим теперь величину B_u^*.

Теорема 3. Пусть τ, p, p – те же, что и в теореме 1, причем $p = \varkappa_p^+ = \varkappa_{p-1}^+ = \ldots = \varkappa_q^+ > \varkappa_{q-1}^+$, $q \ge 1$. Пусть, далее,

$$u(x) = \int_{\tilde{K}_{\lambda,\infty}} W_0(x,y)\, d\tau(y) + \sum_{j=1}^{p} a_j \varphi_j(x) |x|^{\varkappa_j^+} .$$

Тогда для величины[ж)]

$$B_u^* = B_u^*(p,q) =$$

$$= \max_{q\le l\le p} \overline{\lim_{R\to\infty}} \left| a_l + \frac{\theta_n}{\alpha_l} \left(\int_{K_{\lambda,R}} |y|^{\varkappa_l^-} \varphi_l(y)\, d\mu_u(y) \; - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{\theta_n} \int_{(\partial K)_{\lambda,R}} |y|^{\varkappa_l^-} \frac{\partial \varphi_l(y)}{\partial n}\, d\mu_{u,\partial}(y) \right) \right|$$

справедлива оценка

$$B_u^* \le c\hat{\sigma}_u, \qquad c = c(p,n).$$

Доказательство. Представим функцию $u(x)$ в виде

$$u(x) = \sum_{l=1}^{q-1} a_l |x|^{\varkappa_l^+} \varphi_l(x) \; +$$

$$+ \sum_{l=q}^{p} |x|^{p} \varphi_l(x) \left\{ a_l + \frac{\theta_n}{\alpha_l} \left(\int_{K_{\lambda,|x|}} \varphi_l(y) |y|^{\varkappa_l^-} d\mu_u(y) \; - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{\theta_n} \int_{(\partial K)_{\lambda,|x|}} \frac{\partial \varphi_l(y)}{\partial n} |y|^{\varkappa_l^-} d\mu_{u,\partial}(y) \right) \right\} \; +$$

$$+ \int_{K_{\lambda,|x|}} W_{q-1}(x,y)\, d\tau_u(y) + \int_{K_{|x|,\infty}} W_p(x,y)\, d\tau_u(y).$$

Из этого представления ввиду соотношений (2)-(5) следует, что при $q \le l \le p$

$$a_l + \frac{\theta_n}{\alpha_l} \left(\int_{K_{\lambda,R}} \varphi_l(y) |y|^{\varkappa_l^-} d\mu_u(y) \; - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\theta_n} \int_{(\partial K)_{\lambda,R}} \frac{\partial \varphi_l(y)}{\partial n} |y|^{\varkappa_l^-} d\mu_{u,\partial}(y) \right) =$$

$$= \frac{1}{R^{p+n-1}} \left\{ \int_{\Gamma_R} u(x) \varphi_l(x)\, dS_R(x) \; - \right.$$

$$- \int_{K_{\lambda,R}} d\tau_u(y) \int_{\Gamma_R} W_{q-1}(x,y) \varphi_l(x)\, dS_R(x) \; -$$

ж) Поскольку $\tau = \tau_u$ и соответственно $\tau|_K = \varphi\mu_u$, $\tau|_{\partial K} = -\frac{1}{\theta_n}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\mu_{u,\partial}$, то приведенное здесь определение величины B_u^* не противоречит определению, данному ранее в замечании к теореме 1.

$$- \int\limits_{K_{R,\infty}} d\tau_u(y) \int\limits_{\Gamma_R} W_\rho(x,y)\varphi_l(x)dS_R(x) \Big| =$$

$$= \frac{1}{R^{\rho+n-1}} \Big\{ \int\limits_{\Gamma_R} u(x)\varphi_l(x)dS_R(x) - \frac{\theta_n}{\alpha} R^{\varkappa_l^- + n-1} \int\limits_{K_{\lambda,R}} |y|^{\varkappa_l^+}\varphi_l(y)d\mu_u(y) +$$

$$+ \frac{1}{\alpha_l} R^{\varkappa_l^- + n-1} \int\limits_{(\partial K)_{\lambda,R}} |y|^{\varkappa_l^+} \frac{\partial\varphi_l(y)}{\partial n} d\mu_{u,\partial}(y) \Big\} =$$

$$= R^{-\rho-n+1}(I_1 + I_2 + I_3). \tag{20}$$

Оценим $|I_2|$. Записываем

$$|I_2| \le \frac{\theta_n}{\alpha_l} R^{\varkappa_l^- + n-1} \sup_{y\in\Gamma} \frac{\varphi_l(y)}{\varphi(y)} \int\limits_{K_{\lambda,R}} |y|^{\varkappa_l^+}\varphi(y)d\mu_u(y) \le$$

$$\le c(n,l)R^{\varkappa_l^- + n-1} \int\limits_{\lambda}^{R} t^{\varkappa_l^+} d\tilde\tau_u(t) \le$$

$$\le c(n,l)R^{\varkappa_l^+ + \varkappa_l^- + n-1}\tilde\tau_u(R).$$

Следовательно,

$$\overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{1}{R^{\rho+n-1}} |I_2| \le c(n,l) \overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{\tilde\tau_u(R)}{R^{\rho+n-2}} = c(n,l)\delta_{\tau_u}. \tag{21}$$

Аналогично получаем

$$\overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{1}{R^{\rho+n-1}} |I_1| \le c(n,l)\delta_{\tau_u}. \tag{22}$$

Оценка $|I_3|$ очевидна. Именно $|I_3| \le \Phi_u(R)$ и, следовательно,

$$\overline{\lim_{R\to\infty}} R^{-\rho-n+1}|I_3| \le \hat\sigma_u. \tag{23}$$

Из соотношений (20)–(23) следует, что $\delta_u^* \le c(n,l)(\delta_{\tau_u} + \hat\sigma_u)$. Отсюда, воспользовавшись теоремой 2, заключаем, что $\delta_u^* \le c\hat\sigma_u$, где $c = c(\rho,n)$.

Теорема доказана.

Как следствие из теорем 1–3 вытекает

Теорема 4. Пусть τ – вещественная мера в $\bar K\setminus\{0\}$ удовлетворяющая условиям:

1) $\tau \ge 0$ в K;

2) $\overline{\lim\limits_{R\to\infty}} \dfrac{\ln \tilde{\tau}(R)}{\ln R} - (n-2) = \rho_1 < \infty$;

3) при некоторых $\tilde{\beta} > 0$, $a > 0$ и $R_0 > 0$ на $(\partial K)_{R_0,\infty}$ выполняется неравенство

$$d\tau(x) \geq -a \frac{\partial \varphi}{\partial n} |x|^{\tilde{\beta}} d\omega .$$

Пусть, далее, p – наименьшее целое число, удовлетворяющее условию $\int\limits^{\infty} t^{-\varkappa_{p+1}^{-}} d\tilde{\tau}(t) < \infty$, ρ_2 – точная нижняя грань чисел $\tilde{\beta}$, фигурирующих в условии 3),

$$A_\tau = \inf\left\{ a > 0 : \exists R_0,\ d\tau(x) \geq -a|x|^{\rho_2} d\omega \ \text{ на } \ (\partial K)_{R_0,\infty} \right\}^{*)} .$$

Тогда:

а) порядок $\rho = \hat{\rho}_u$ функции

$$u(x) = \int\limits_{\bar{K}_{\lambda,\infty}} W_p(x,y)\, d\tau(y) + \sum_{j=1}^{m} a_j \varphi_j(x) |x|^{\varkappa_j^+}, \quad a_m \neq 0 ,$$

равен $\max(\rho_1, \rho_2, |a_m|)$;

б) если $\varkappa_p^+ < \rho < \varkappa_{p+1}^+$, то для того, чтобы функция $u(x)$ имела минимальный, нормальный или максимальный тип при порядке ρ, необходимо и достаточно, чтобы соответственно $\max(\delta_\tau, A_\tau) \overset{def}{=} \Delta_1 = 0$ (δ_τ – то же, что и в теореме 1), $0 < \Delta_1 < \infty$, $\Delta_1 = \infty$;

в) если $\rho = \varkappa_{p+1}^+$, то функция $u(x)$ имеет минимальный, нормальный или максимальный тип тогда и только тогда, когда соответственно $m < p+1$ и $A_\tau = 0$, $0 < A_\tau < \infty$, $A_\tau = \infty$;

г) если $\rho = \varkappa_p^+ = \varkappa_{p-1}^+ = \ldots \varkappa_q^+ > \varkappa_{q-1}^+$, то для того, чтобы функция $u(x)$ имела минимальный, нормальный или максимальный тип необходимо и достаточно, чтобы соответственно $\max(\delta_\tau, B_u^*, A_\tau) \overset{def}{=} \Delta_2 = 0$ (B_u^* – то же, что и в теореме 3 и замечании к теореме 1), $0 < \Delta_2 < \infty$, $\Delta_2 = \infty$.

Изложенное выше позволяет придать представлению (10) следующую форму.

Теорема 5. Пусть $u(x)$ – функция из $SH^*(K)$ конечного порядка $\hat{\rho}_u = \rho$. Тогда она представима в виде

$$u(x) = \int\limits_{\bar{K}_{\lambda,\infty}} W_p(x,y)\, d\tau_u(y) + \sum_{j=1} a_j \varphi_j(x) |x|^{\varkappa_j^+} +$$

---

*) Напомним, что $\inf \emptyset = \infty$.

$$+ H_R(x) - \int_{K_R} G(x,y)\, d\mu_u(y), \qquad a_m \neq 0,$$

где функция $H_R(x)$ – та же, что и в (10); p – наименьшее целое число, удовлетворяющее условию $\int^{\infty} t^{-\varkappa_{p+1}^{+}} d\tilde{\tau}_u(y) < \infty$, а m удовлетворяет условию $m \leq p$, причем если $p > \varkappa_{p+1}^{+}$, то $m = p$, и если $p = \varkappa_{p+1}^{+}$, $\hat{\sigma}_u = 0$, то $m < p$.

Эта теорема очевидным образом следует из представления (10), которое, как мы отмечали, получено в [1], и теоремы 4.

В заключение приведем вытекающие из полученных выше результатов утверждения для функций, голоморфных в полуплоскости. Эти утверждения уточняют и дополняют соответствующие результаты из [4, 6]. Для их формулировки требуются некоторые дополнительные обозначения и определения.

Пусть $f(z)$ – голоморфная функция в полуплоскости $\mathbb{C}^+ = \{ z \in \mathbb{C}^+ : Im z > 0 \}$, а $z_k = r_k e^{i\theta_k}$, $k = 1, 2, \ldots$, – ее корни, занумерованные с учетом кратности. Предполагая, что $\sup\{|f(z)| : |z| < R,\ Im z > 0\} < \infty \quad \forall R$, обозначаем

$$\hat{n}_f(t) = \sum_{1 < r_k < t} \sin\theta_k,$$

а через $\mu_{f,\partial}$ – граничную меру на $\mathbb{R}$ субгармонической в $\mathbb{C}^+$ функции $\ln|f(z)|$. Обозначим также

$$\hat{M}_f(R) = \max\left\{ \sup_{0<\theta<\pi} \ln|f(Re^{i\theta})|,\ \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |\ln|f(Re^{i\theta})||\sin\theta\, d\theta \right\}$$

и назовем порядком функции $f(z)$ величину

$$\hat{\rho}_f = \overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{\ln^+\ln^+\hat{M}_f(R)}{\ln R}.$$

Типом функции f при порядке ρ назовем величину

$$\sigma_f = \overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{\ln \hat{M}_f(R)}{R^{\rho}}.$$

Соответственно определяются понятия минимального, нормального или максимального типа.

Теорема 6. Пусть голоморфная в $\mathbb{C}^+$ функция $f(z)$ имеет конечный порядок $\hat{\rho}_f = \rho$ и пусть p – наименьшее целое число, удовлетворяющее условиям

$$\int^{\infty} t^{-p-1} d\hat{n}_f(t) < \infty,$$

$$\int^{\infty} t^{-\rho-2} d\,|\mu_{f,\partial}|(t) < \infty .$$

Тогда функция $f(z)$ представима в виде

$$f(z) = e^{P_q(z)} I_1 I_2 I_3 I_4 ,$$

где

$$P_q(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_q z^q ;$$

$$I_1(z) = \prod_{0<r_k\leq 1} \frac{z - z_k}{z - \bar{z}_k} ;$$

$$I_2(z) = \exp\left\{ \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{1} \frac{d\mu_{f,\partial}(t)}{t - z} \right\} ;$$

$$I_3(z) = \exp\left\{ \frac{z^{p+1}}{\pi i} \int_{|t|>1} \frac{d\mu_{f,\partial}(t)}{t^{p+1}(t - z)} \right\} ;$$

$$I_4(z) = \prod_{r_k\geq 1} \left\{ \frac{1 - \frac{z}{z_k}}{1 - \frac{z}{\bar{z}_k}} \exp\left\{ \sum_{l=1}^{p} \frac{z^l}{l} \left(\frac{1}{z_k^l} - \frac{1}{\bar{z}_k^l} \right) \right\} \right\} .$$

При этом $\ln|I_1(z)| \rightrightarrows 0$, $|z|\to\infty$; $\ln|I_2(z)| \rightrightarrows 0$, $|z|\to\infty$; $\hat{\rho}_{I_3} \leq \rho$, $\hat{\rho}_{I_4} \leq \rho$ и $q \leq \rho$, а если $\rho = p+1$ и $\hat{\sigma}_f = 0$, то $q \leq \rho - 1$.

<u>Теорема 7</u>. Пусть функция $f(z)$ и число ρ те же*), что и в теореме 6, и пусть

$$\delta_1 = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\hat{n}_f(t)}{t^{\rho}} ,$$

$$\delta_2 = \overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{1}{R^{\rho+1}} \int_{|t|<R} d\,|\mu_{f,\partial}|(t) ,$$

$$A = \inf\left\{ a > 0 : \exists R_0 ,\quad d\mu_{f,\partial}(x) \leq a\,|x|^{\rho} dx \text{ при } |x| > R_0 \right\} .$$

Тогда:

1) если $p < \rho < p+1$, то для того, чтобы функция $f(z)$ имела минимальный, нормальный или максимальны* тип, необходимо и достаточно, чтобы соответственно

$$\max(\delta_1, \delta_2, A) \overset{def}{=} \Delta_1 = 0, \quad 0 < \Delta_1 < \infty, \quad \Delta_1 = \infty ;$$

---

*) Справедливо неравенство $p \leq \hat{\rho}_f \leq p+1$.

2) если $\rho = p+1$, то функция $f(z)$ имеет минимальный, нормальный или максимальный тип тогда и только тогда, когда соответственно $q < p+1$ и $A = 0$, $0 < A < \infty$, $A = \infty$;

3) если $\rho = p$, то $f(z)$ имеет минимальный тип тогда и только тогда, когда

$$max\left\{ \delta_1, \delta_2, A, B \right\} \overset{def}{=} \Delta_2 = 0,$$

где

$$B = \overline{\lim_{R \to \infty}} \left| c_p + \sum_{1 < r_k < R} \frac{\sin p\theta_k}{r_k^p} - \frac{1}{2\pi} \int_{1 < |x| < R} x^{-p-1} d\mu_{f,\theta}(x) \right| .$$

Нормальный или максимальный тип функция $f(z)$ имеет тогда и только тогда, когда соответственно $0 < \Delta_2 < \infty$ или $\Delta_2 = 0$.

1. Рашковский А.Ю. Интегральное представление субгармонических функций конечного порядка в конусе // Сиб. мат. журн. - 1989. - 30, № 3. - С. 109-123.
2. Рашковский А.Ю., Ронкин Л.И. Субгармонические функции конечного порядка в конусе // Докл. АН СССР. - 1987. - 287, № 2. - С. 298-302.
3. Рашковский А.Ю., Ронкин Л.И. Субгармонические функции вполне регулярного роста в конусе. 1. - Харьков, 1985. - 43 с. - (Препр. / АН УССР. Физ.-техн. ин-т низ. температур; 27-85).
4. Говоров Н.В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом. - М. : Наука, 1986. - 206 с.
5. Lelong-Ferrang J. Etude des fonctions subharmoniques positives dans un cylindre ou dans un cone // C.R.Acad. Sci. Ser. A. - 1949. - 229, N 5. - P. 340-341.
6. Ронкин Л.И. Регулярность роста и D'-асимптотика голоморфных функций в $\mathbb{C}^+$ // Изв. вузов. Математика. - 1989. - № 6. - С. 21-38.
7. Рашковский А.Ю. Рост и убывание субгармонических функций в конусе // Укр. мат. журн. - 1989. - 41, № 9. - С. 1252-1258.

УДК 517.547.2

А.М.Руссаковский

ОБ ОПИСАНИИ НУЛЕВЫХ МНОЖЕСТВ ОДНОГО КЛАССА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Найдены необходимые и достаточные условия, при которых аналитическое множество в $\mathbb{C}^n$ может служить множеством нулей целой функции, для которой величина $sup\{|f(z)| : \|Im\, z\| \leq h\}$ удовлетворяет определенным оценкам.

В комплексном анализе часто встречаются целые функции, для которых

ISBN 5-12-002405-X. Теория операторов, субгармонические функции. Киев, 1991.

$$M_f(h) = \sup\left\{|f(z)| : \|Im\, z\| \leq h\right\} < \infty, \quad \forall h \to \infty \qquad (1)$$

(знаком $\|\cdot\|$ обозначается одна из норм $\|y\|_1 = \left(\sum y_i^2\right)^{1/2}$, $\|y\|_2 = \sum |y_i|$, $\|y\|_3 = \max\limits_i |y_i|$).

К числу функций, обладающих свойством (1), относятся целые характеристические функции вероятностных распределений, целые функции, представимые кратными рядами Дирихле с мнимыми показателями и др.

Полное описание нулевых множеств таких функций в $\mathbb{C}$ было получено в [1]; на случай многих переменных этот результат распространен в [2].

В данной статье рассматриваются обладающие свойством (1) классы целых функций, определяемые оценками на рост $M_f(h)$ при $h \to \infty$, причем изучается случай бесконечного порядка роста. Задача состоит в описании нулевых множеств (дивизоров) функций того или иного класса. Такое описание получено ниже (теорема 2) в терминах оценок роста объема нулевого множества в полицилиндрах вида $\{\|Re\, z\| \leq r,\ \|Im\, z\| \leq h\}$.

Подобные результаты в случае конечного порядка и исчерпания $\mathbb{C}^n$ шарами или поликругами, полученные в [3-5], хорошо известны.

Соответствующие одномерные аналоги приводимой ниже теоремы 2 были получены автором [6].

Введем необходимые обозначения. Пусть Λ - дивизор в $\mathbb{C}^n$. Через $\sigma_\Lambda(\mathcal{P})$ обозначим объем дивизора Λ в области $\mathcal{P}$, т.е. положим

$$\sigma_\Lambda(\mathcal{P}) = \int\limits_{\Lambda \cap \bar{\mathcal{P}}} \beta_{n-1},$$

где $\quad \beta_p = \frac{1}{p!}\left(\frac{i}{2}\sum\limits_k dz_k \wedge d\bar{z}_k\right)^p$.

Обозначим также $\quad \tau_\Lambda(r,h) = \sigma_\Lambda(\{\|Re\, z\| \leq r,\ \|Im\, z\| \leq h\})$.

Для получения необходимых условий существования целой функции с заданным дивизором воспользуемся оценками из [2] (см. лемму и доказательство теоремы 1 в [2]), которые приведем в виде леммы.

<u>Лемма 1</u>. Пусть $f(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, - целая функция, обладающая свойством (1), $f(0) = 1$, $\Lambda_f = f^{-1}(0)$. Тогда

$$\forall r, h > 0,\ \exists C > 0:$$

$$\tau_{\Lambda_f}(r,h) \leq C r^n h^{3n} e^{\pi n \frac{r}{h}} \ln M_f(2h).$$

Пусть $\varphi(t)$ - неотрицательная возрастающая выпуклая C^2-

функция на $[0,\infty)$, причем $\varphi(2t)=O(\varphi(t))$. Пусть $h(t)$ – решение уравнения

$$h\varphi(h)=t, \quad t\geq 0. \tag{2}$$

Введем классы функций, с которыми будем далее работать. Через B_φ обозначим множество функций $f(z)$, обладающих свойством (1) и таких, что $\exists C=C(f)$:

$$\ln M_f(h)\leq Ce^{C\varphi(h)}.$$

Следствие 1. Пусть выполнены условия леммы 1, причем $f\in B_\varphi$. Тогда $\forall r,\ h>0,\ \exists C>0$:

$$\ln \sigma_{\Lambda_f}(r,h)\leq C\big(1+\varphi(h(r))+\varphi(h)\big). \tag{3}$$

Доказательство. В силу леммы 1 справедлива оценка

$$\ln \sigma_{\Lambda_f}(r,h)\leq C_1+n\ln r+3n\ln h+\pi n\frac{r}{h}+C_1\varphi(2h).$$

Кроме того, поскольку $\varphi(2t)=O(\varphi(t))$ и $\ln t=o(\varphi(t))$, имеем

$$\ln \sigma_{\Lambda_f}(r,h)\leq C_2+n\ln r+\pi n\frac{r}{h}+C_2\varphi(h).$$

Пусть $h\geq h(r)$. Тогда в силу (2)

$$\ln \sigma_{\Lambda_f}(r,h)\leq C_2+n\ln r+\pi n\frac{r}{h(r)}+C_2\varphi(h)=$$

$$=C_2+n\ln r+\pi n\,\varphi(h(r))+C_2\varphi(h)\leq C_3\big(1+\varphi(h(r))+\varphi(h)\big).$$

Если $h<h(r)$, то

$$\ln \sigma_{\Lambda_f}(r,h)\leq \ln \sigma_{\Lambda_f}(r,h(r))\leq C_2+n\ln r+$$
$$+\pi n\frac{r}{h(r)}+C_2\varphi(h(r))\leq C_4\big(1+\varphi(h(r))\big),$$

откуда и следует (3).

Для дальнейшего нам понадобится одно утверждение, полученное в [6] и представляющее собой усиленный вариант леммы 3 из [1].

Лемма 2 ([6], лемма 4). Для любого числа $B\geq 1$ существует такая целая функция $g(z)$ в $\mathbb{C}$, что

$$|g(z)|\leq Ce^{B'\varphi(h(|z|))}$$

и $\exists h_0>0;\ \exists C_0>1:\ \forall h>h_0$ при $z\in\{\zeta:|\operatorname{Im}\zeta|\leq h,\ h(|\zeta|)\geq C_0 h\}$, выполняется неравенство

$$\operatorname{Re} g(z)\geq e^{B\varphi(h(|z|))}.$$

Положим $G(z)=\sum_{i=1}^{n} g(\theta_n z_i)$, где

$$\theta_n = \begin{cases} \sqrt{n}, & \text{если } \|.\| = \|.\|_1, \\ n, & \text{если } \|.\| = \|.\|_2, \\ 1, & \text{если } \|.\| = \|.\|_3. \end{cases}$$

Теорема 1. Пусть Λ – дивизор в $\mathbb{C}^n$, а $\sigma_\Lambda(r,h)$ удовлетворяет (3). Тогда существует такая целая функция $F \in B_\varphi$, что $\Lambda_F = \Lambda$.

Доказательство. Воспользуемся одним результатом А.Скода, который также сформулируем в виде леммы.

Лемма 3 ([7], теорема 3.49). Пусть Λ – дивизор в $\mathbb{C}^n$, $\sigma_\varepsilon(z)$ – объем дивизора в шаре $B(z,\varepsilon)$ и пусть

$$\sigma_\varepsilon(z) \leq Ce^{\Phi(z)},$$

где $C>0$, а $\Phi(z)$ – плюрисубгармоническая функция. Тогда $\exists f \in A(\mathbb{C}^n): \Lambda_f = \Lambda$ и

$$\ln\ln^+|f(z)| \leq \hat{C}_\varepsilon + (n+4)\ln(1+\|z\|) + \sup_{\substack{0\leq t\leq 1 \\ \|z'-z\|\leq\varepsilon}} \Phi(tz').$$

Положим $\Phi(z) = \tilde{C}(1+\varphi(h(\|z\|))+\varphi(\|Im\, z\|))$, что $\tilde{C}$ достаточно велико, так что выполняется условие $\sigma_1(z) \leq \tilde{C}e^{\Phi(z)}$. Заметим, что, как показано в [6], функция $\varphi(h(t))$ является выпуклой относительно $\ln t$. Отсюда и из выпуклости φ следует, что функция $\Phi(z)$ является плюрисубгармонической. Поэтому применима лемма 3. Согласно этой лемме существует такая целая функция $f(z)$, что $\Lambda_f = \Lambda$ и

$$\ln\ln^+|f(z)| \leq \hat{C}_1 + (n+4)\ln(1+\|z\|) +$$

$$+ \sup_{\substack{0\leq t\leq 1 \\ \|z'-z\|\leq 1}} \Phi(tz') \leq \hat{C}_2\left(1+\varphi(h(\|z\|)) + \varphi(\|Im\, z\|)\right).$$

Пусть $G(z)$ – функция, построенная в лемме 2 при $B = 2\hat{C}_2$. Положим $F(z) = f(z)e^{-e^{\hat{C}_2}G(z)}$ и покажем, что это и есть искомая функция.

Пусть $h > h_0$, $\|y\| < h$, $h(\|z\|) \geq C_0 h$. Тогда $\exists i: h(\theta_h|z_i|) \geq h(\|z\|) > C_0 h$. Записываем

$$\ln|F(z)| \leq e^{\hat{C}_2 + \hat{C}_2\varphi(h(\|z\|))} + \hat{C}_2\varphi(h) -$$

$$-e^{\hat{C}_2 + 2\hat{C}_2\varphi(h(\|z\|))} \leq e^{\hat{C}_2+\hat{C}_2\varphi(h(\|z\|))}\left(e^{\hat{C}_2\varphi(C_0h)} - e^{\hat{C}_2\varphi(h(\|z\|))}\right) \leq 0.$$

Если $h(\|z\|) \leq C_0 h$, то

$$\ln|F(z)| \leq e^{\hat{C}_2} + \hat{C}_2\varphi(h(\|z\|)) + \hat{C}_2\varphi(h) +$$

$$+e^{\hat{C}_2+B'\varphi(h(\|z\|))} \le e^{\hat{C}_2+\hat{C}_3\varphi(C_0 h)} \le Ce^{C\varphi(h)},$$

т.е. $F \in B_\varphi$.

Теорема 1 доказана.

Следующая теорема дает полное описание дивизоров функций класса B_φ.

<u>Теорема 2</u>. Для того чтобы дивизор Λ в $\mathbb{C}^n$ был дивизором целой функции класса B_φ, необходимо и достаточно, чтобы $\exists C>0$:

$$\ln \sigma_\Lambda(r,h) \le C(1+\varphi(h(r)) + \varphi(h)).$$

Отметим, что типичным примером функции $\varphi(t)$, фигурирующей в определении класса B_φ, является функция $\varphi(t)=t^\rho$, $\rho \ge 1$. В этом случае $\varphi(h(t)) = t^{\frac{\rho}{\rho+1}}$, и результат можно сформулировать так.

<u>Следствие 2.</u> Для того чтобы дивизор Λ в $\mathbb{C}^n$ был дивизором такой целой функции $F(z)$, что

$$\overline{\lim_{h\to\infty}} \frac{\ln \ln^+ M_F(h)}{h^\rho} < \infty \ (\rho>1),$$

необходимо и достаточно, чтобы $\exists C>0$:

$$\ln \sigma_\Lambda(r,h) \le C\left(1 + r^{\frac{\rho}{\rho+1}} + h^\rho\right).$$

1. Камынин И.П., Островский И.В. О нулевых множествах целых эрмитово-положительных функций // Сиб. мат. журн. - 1982. - 23, № 3. - С. 66-82.
2. Ронкин Л.И., Руссаковский А.М. Нули целых эрмитово-положительных функций многих переменных // Аналитические методы в теории вероятностей и теории операторов. - Киев : Наук. думка, 1990.
3. Lelong P. Fonction entieres (n varieblеs) et fonctions plurisoushramoniqies d'ordre fini daus $\mathbb{C}^n$ // J. d'Anal. Math. - 1964. - 12. - P. 365-406.
4. Stoll W. Ganze Funktionen endlicher Ordnung mit gegenbenen Nullstellen // Math. Z. - 1953. - 57. - P. 211-237.
5. Ронкин Л.И. Введение в теорию целых функций многих переменных. - М. : Наука, 1971. - 432 с.
6. Руссаковский А.М. Нули целых функций бесконечного порядка // Теория функций, функцион. анализ и их прил. - 1990. - Вып.54.
7. Lelong P., Gruman L. Entire functions of several complex variables. - Berlin etc.: Springer, 1986. - 386 p.

УДК 517.946

Е.В.Свищева

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ОБЛАСТЯХ УМЕНЬШАЮЩЕГОСЯ ОБЪЕМА

Рассмотрена вторая краевая задача для уравнения Гельмгольца в области $\Omega^{(s)} \subset \Omega$ при условии, что $mes\,\Omega^{(s)} \to 0$ при $s \to \infty$. Доказана теорема, согласно которой исходную краевую задачу в области $\Omega^{(s)}$ можно заменить осредненной краевой задачей в области Ω. При этом решение $u^{(s)}(x)$ исходной задачи близко в некотором смысле к решению $u(x)$ осредненной задачи.

1. Рассмотрим в ограниченной области $\Omega^{(s)}$ краевую задачу

$$
\begin{gathered}
\Delta u^{(s)}(x) - \lambda^2 u^{(s)}(x) = f^{(s)}(x), \qquad x \in \Omega^{(s)}, \\
\frac{\partial u^{(s)}}{\partial n} = 0, \qquad x \in \partial\Omega^{(s)},
\end{gathered} \tag{1}
$$

где $\Omega^{(s)}$ – сильно разветвленная подобласть в R^n ($n \geq 2$), принадлежащая некоторой фиксированной области Ω и зависящая от параметра s; $\frac{\partial}{\partial n}$ – производная по нормали к $\partial\Omega^{(s)}$, понимаемая в обобщенном смысле [1]; $x = \{x_1, \dots, x_n\}$, $f^{(s)}(x)$ – заданные ограниченные на $\Omega^{(s)}$ функции. Будем предполагать, что при $s \to \infty$ разветвленность области $\Omega^{(s)}$ возрастает. Типичным примером таких областей является $\Omega^{(s)} = \Omega \cap N^{(s)}$, где $N^{(s)}$ – область, составленная из пересекающихся тонких нитей, причем при $s \to \infty$ густота нитей увеличивается, а их диаметры уменьшаются. Граничное значение на $\partial\Omega$ не существенно, и его можно было выбрать произвольно.

Как известно [1], при любом s существует единственное решение задачи (1) $u^{(s)}(x) \in W_2^1(\Omega^{(s)})$, которое может быть найдено вариационным методом. Необходимо изучить асимптотическое поведение при $s \to \infty$ последовательности $\{u^{(s)}(x)\}_{s=1}^{\infty}$ решений задачи (1). Такой вопрос рассматривался в ряде работ (см., например, [2]). При этом, однако, предполагалось, что мера области $\Omega^{(s)}$ остается ограниченной снизу при $s \to \infty$. В данной работе рассматривается случай, когда $mes\,\Omega^{(s)} \to 0$ при $s \to \infty$.

Введем необходимые определения.

ISBN 5-12-002405-X. Теория операторов, субгармонические функции. Киев, 1991.

Будем предполагать, что для любого шара $B_\varepsilon \subset \mathcal{P}$ радиуса $\varepsilon > 0$ при достаточно больших $s (s \geq \bar{s}(\varepsilon))$ выполняется неравенство

$$mes(\mathcal{P}^{(s)} \cap B_\varepsilon) \geq C\varepsilon^n mes\, \mathcal{P}^{(s)}, \quad C>0. \qquad (2)$$

Определение 1. Будем говорить, что последовательность функций $\{u^{(s)}(x) \in L_2(\mathcal{P}^{(s)}), \ s = 1,2,\dots\}$ сходится в $\hat{L}_2(\mathcal{P}^{(s)})$ к функции $u(x) \in L_2(\mathcal{P})$, если существует аппроксимирующая последовательность функций $\{u_M(x) \in Lip(C_M, \mathcal{P}), \ M=1,2,\dots\}$, сходящаяся к $u(x)$ в $L_2(\mathcal{P})$ и такая, что

$$\lim_{M\to\infty} \overline{\lim_{s\to\infty}} \frac{1}{mes\, \mathcal{P}^{(s)}} \|u^{(s)} - u_M\|^2_{L_2(\mathcal{P}^{(s)})} = 0 .$$

Единственность предельной функции $u(x)$ обеспечивается условием (2).

Определение 2. Будем говорить, что области $\mathcal{P}^{(s)}$ удовлетворяют условию сильной связанности, если для любой последовательности функций $\{u^{(s)}(x) \in C^2(\mathcal{P}^{(s)}), \ s=1,2,\dots\}$, удовлетворяющей условию $\|u^{(s)}\|^2_{W_2^1(\mathcal{P}^{(s)})} \leq C\, mes\, \mathcal{P}^{(s)}$, где C от s не зависит, и любого ($M = 1,2,\dots$) существуют подмножества $\mathcal{P}_M^{(s)} \subset \mathcal{P}^{(s)}$ и $G_M^{(s)} = \mathcal{P}^{(s)} \setminus \mathcal{P}_M^{(s)}$, такие, что для любых $x, y \in \mathcal{P}_M^{(s)}$

$$|u^{(s)}(x)| \leq M, \quad |u^{(s)}(x) - u^{(s)}(y)| \leq M|x-y| ,$$

и при $M \to \infty$, $s \geq S(M)$

$$mes\, G_M^{(s)} = O\left(\frac{1}{M^2}\right) mes\, \mathcal{P}^{(s)},$$

$$\|u^{(s)}\|^2_{L_2(G_M^{(s)})} = O(1)\, mes\, \mathcal{P}^{(s)} .$$

Определение сильной связанности является обобщением введенного в [2] определения на случай областей $\mathcal{P}^{(s)}$ малой меры. Поскольку к функциям, удовлетворяющим условию Липшица, применима теорема Уитни о продолжении, то условие сильной связанности также можно сформулировать в виде условия продолжения функций с $\mathcal{P}^{(s)}$ на $\mathcal{P}$ с некоторым их искажением на множестве $G_M^{(s)}$ малой меры (по сравнению с $mes\, \mathcal{P}^{(s)}$).

Введем основную характеристику множества $\mathcal{P}^{(s)}$, описывающую его влияние на решение задачи (1). Пусть K_h^y – куб с центром в точке $y \in R^n$ и ребрами длины $h>0$, ориентированными по координатным осям, а $l = \{l_1, \dots, l_n\}$ – вектор в R^n.

Рассмотрим функционал

$$\varphi_l(s,y,h)=\inf_{w^{(s)}}\int_{K_h^y\cap\mathcal{P}^{(s)}}\left\{\frac{1}{mes\,\mathcal{P}^{(s)}}|\nabla w^{(s)}|^2+\right.$$

$$\left.+\frac{h^{n-2-\gamma}}{mes(K_h^*\cap\mathcal{P}^{(s)})}|w^{(s)}-(x-y,l)|^2\right\}dx, \qquad (3)$$

где $\gamma>0$; $\inf$ берется в классе функций $W_2^1(K_h^y\cap\mathcal{P}^{(s)})$. Можно показать [1], что функция $w_l^{(s)}(x)$, минимизирующая функционал (3), единственна и является решением краевой задачи

$$\frac{1}{mes\,\mathcal{P}^{(s)}}\Delta w_l^{(s)}(x)+\frac{h^{n-2-\gamma}}{mes(K_h^y\cap\mathcal{P}^{(s)})}w_l^{(s)}=$$

$$=\frac{h^{n-2-\gamma}}{mes(K_h^y\cap\mathcal{P}^{(s)})}(x-y,l), \qquad x\in K_h^y\cap\mathcal{P}^{(s)},$$

$$\frac{\partial w_l^{(s)}}{\partial n}=0, \qquad x\in\partial(K_h^y\cap\mathcal{P}^{(s)}).$$

Отсюда следует, что функционал (3) квадратичен относительно вектора $l\in R^n$ и справедливо равенство $\varphi_l(s,y,h)=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}(s,y,h)l_il_k$, где

$$a_{ik}(s,y,h)=\int_{K_h^y\cap\mathcal{P}^{(s)}}\left\{\frac{1}{mes\,\mathcal{P}^{(s)}}(\nabla w_i^{(s)},\nabla w_k^{(s)})+\right.$$

$$\left.+\frac{h^{n-2-\gamma}}{mes(K_h^y\cap\mathcal{P}^{(s)})}\left[w_i^{(s)}-(x_i-y_i)\right]\left[w_k^{(s)}-(x_k-y_k)\right]\right\}dx. \qquad (4)$$

Здесь $w_i^{(s)}$ – функция, минимизирующая (3), когда $l=e_i$ – орт i-й оси в R^n.

Тензор $\{a_{ik}(s,y,h)\}$ и меру области $K_h^y\cap\mathcal{P}^{(s)}$ примем за основные количественные характеристики множества $\mathcal{P}^{(s)}$ в кубе K_h^y.

Основной результат работы состоит в следующем.

Теорема 1. Пусть последовательность областей $\mathcal{P}^{(s)}$ удовлетворяет условию сильной связанности в смысле определения 2 и в каждой точке выполняются следующие условия:

1) $\lim\limits_{h\to0}\lim\limits_{s\to\infty}\dfrac{mes(K_h^y\cap\mathcal{P}^{(s)})}{h^n\,mes\,\mathcal{P}^{(s)}}=b(x)$;

2) для некоторого $\gamma>0$

$$\lim_{h\to0}\lim_{s\to0}\frac{a_{ik}(s,x,h)}{h^n}=\lim_{h\to0}\overline{\lim_{s\to\infty}}\frac{a_{ik}(s,x,h)}{h^n}=a_{ik}(x),$$

где $b(x)$, $a_{ik}(x)$ – непрерывные в $\mathcal{P}$ функции, матрица $\{a_{ik}(x)\}$ положительно определена, $b(x) > b_0 > 0$;

3) последовательность функций $f^{(s)}(x)$ сходится в $\hat{L}_2(\mathcal{P}^{(s)})$ в смысле определения 1 к функции $f(x) \in L_2(\mathcal{P})$.

Тогда последовательность $\{u^{(s)}(x)\}_{s=1}^{\infty}$ решений задачи (4) сходится в $\hat{L}_2(\mathcal{P}^{(s)})$ к функции $u(x)$, являющейся решением следующей краевой задачи:

$$\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\right) - \lambda^2 b(x)u(x) = f(x)b(x), \quad x \in \mathcal{P},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \qquad x \in \partial\mathcal{P}, \tag{5}$$

где ν – конормаль к $\partial\mathcal{P}$, т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{i,k=1}^{n}\left[a_{ik}(x)\cos(\nu, x_i)\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\right] = 0, \qquad x \in \partial\mathcal{P}.$$

Доказательство теоремы проводится вариационным методом, аналогичным методу работы [2].

2. Доказанной теоремой можно воспользоваться для исследования задачи на собственные значения.

Рассмотрим задачу

$$-\Delta u^{(s)}(x) = \lambda u^{(s)}(x), \qquad x \in \mathcal{P}^{(s)},$$
$$\frac{\partial u^{(s)}}{\partial n} = 0, \qquad x \in \partial\mathcal{P}^{(s)}. \tag{6}$$

Занумеруем собственные значения задачи (6) с учетом их кратности в порядке неубывания: $0 < \lambda_1^{(s)} \le \lambda_2^{(s)} \le \ldots \le \lambda_n^{(s)} \le \ldots$ Справедлива следующая

Теорема 2. Пусть выполняются условия 1), 2) теоремы 1.

Тогда при любом фиксированном i $(\lambda_i^{(s)} \le M)$

$$\lim_{s \to \infty} \lambda_i^{(s)} = \lambda_i,$$

где λ_i – собственное значение краевой задачи

$$-\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\right) = \lambda b(x)u(x), \qquad x \in \mathcal{P},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \qquad x \in \partial\mathcal{P}, \tag{7}$$

занумерованные в порядке неубывания $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n \le \ldots$.

При этом если собственное значение λ_i простое, то нормированные собственные функции $u_i^{(s)}(x)$, отвечающие собственным значениям $\lambda_i^{(s)}$, сходятся к собственной функции $u_i(x)$, отвечающей собственному значению λ_i, в $\hat{L}_2(\mathscr{P}^{(s)})$ в смысле определения 1 при $s \to \infty$.

Согласно теореме 1 нахождение асимптотики решения задачи (1) при $s \to \infty$ сводится к отысканию функции $b(x)$ и тензора напряженности $\{a_{ik}(x)\}_{i,k=1}^{n}$. Рассмотрим случаи, когда удается найти явное выражение для этих величин.

3. Рассмотрим область $\mathscr{P}^{(s)} \subset R^2$, состоящую из тонких полосок ширины d, образующих периодическую квадратную решетку с периодом $d+\delta$ (т.е. $\mathscr{P}^{(s)}$ представляет собой множество $\mathscr{P}$, из которого выбросили квадраты со стороной δ), причем $d = o(\delta)$ при $s \to \infty$.

Пусть K_h^y – квадрат со стороной h и центром в точке y, причем стороны квадрата ориентированы по координатным осям. Очевидно, что

$$mes\,\mathscr{P}^{(s)} \sim 2\, mes\,\mathscr{P}\,\frac{d}{\delta}, \qquad s \to \infty,$$

$$mes\,(K_h^y \cap \mathscr{P}^{(s)}) \sim 2h^2\frac{d}{\delta}, \qquad s \to \infty. \tag{8}$$

Отметим, что из этих асимптотик сразу же следует $b(x) = \dfrac{1}{mes\,\mathscr{P}}$. Необходимо построить в K_h^y функции $w_k^{(s)}(x)$, $k = 1, 2$, минимизирующие функционал

$$\Phi_k = \int\limits_{K_h^y \cap \mathscr{P}^{(s)}} \left\{ \frac{1}{mes\,\mathscr{P}^{(s)}} \,|\nabla w_k^{(s)}|^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{h^{-\gamma}}{mes\,(K_h^y \cap \mathscr{P}^{(s)})}\,|w_k^{(s)} - (x_k - y_k)|^2 \right\} dx. \tag{9}$$

Основная идея состоит в том, что $w_k^{(s)}(x)$ ищется в виде

$$w_k^{(s)}(x) = \hat{w}_k(x) - y_k + u_k^{(s)}(x), \tag{10}$$

где $\hat{w}_k(x)$ – разрывная функция, равная x_k в нитях, расположенных вдоль оси Ox_k, и x_k^i – в остальных участках i-й нити, расположенной вдоль оси Ox_j, $j \neq k$, где x^i – точка этой нити.

Покажем, что добавки $u_k^{(s)}(x)$ малы, а именно:

$$\int\limits_{\bigcup_i (K_h^y \cap \mathscr{P}_i^{(s)})} \left\{ \frac{1}{mes\,\mathscr{P}^{(s)}}\,|\nabla u_k^{(s)}|^2 + \frac{h^{-\gamma}}{mes\,(K_h^y \cap \mathscr{P}^{(s)})}\,|u_k^{(s)}|^2 \right\} dx \le O(h^2), \tag{11}$$

где $\mathcal{P}_i^{(s)}$ – области непрерывности $u_k^{(s)}$, $\mathcal{P}_i^{(s)} \cap \mathcal{P}_j^{(s)} = \varphi$, $i \neq j$, $\bigcup_i \mathcal{P}_i^{(s)} = \mathcal{P}^{(s)}$.

Подставляя (10) в (9), получаем, что $u_k^{(s)}(x)$ должна минимизировать функционал

$$F_k(u_k) = \int\limits_{\bigcup_i (K_h^y \cap \mathcal{P}_i^{(s)})} \left\{ \frac{1}{mes\,\mathcal{P}^{(s)}} \left(|\nabla u_k|^2 + 2\nabla \hat{w}_k \nabla u_k + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{h^{-\gamma}}{mes\,(K_h^y \cap \mathcal{P}^{(s)})} \left(|u_k|^2 + 2(\hat{w}_k - x_k) u_k \right\} dx \right., \tag{12}$$

где min ищется в классе функций, разрывных в точках разрыва $w_k(x)$ и компенсирующих эти разрывы.

Возьмем пробную функцию $f_k(x)$, $k = 1, 2$, равную $x_k^i - x_k$, в квадратах со стороной d, образованных пересечением нитей, где x_k^i – центры этих квадратов; $\varphi(x_k)$ при $\frac{d}{2} \leq |x_k^i - x_k| \leq d$, где $\varphi(x_k)$ – гладкая монотонная функция, $\varphi(x_k^i \pm d) = 0$, $\varphi(x_k^i \pm \frac{d}{2}) = \mp \frac{d}{2}$; 0 – в остальных точках K_h^y, причем в точках $x_k^i \pm \frac{d}{2}$, $x_k^i \pm d$ производная функции $f_k(x)$ также непрерывна.

Тогда $f_k(x)$ принадлежит классу функций, в котором определяется min функционала (12), а значит, $F_k(u_k) \leq F_k(f_k)$. Отсюда, воспользовавшись (8), видом функций $\hat{w}_k(x)$ и $f_k(x)$, получаем

$$\int\limits_{\bigcup_i (K_h^y \cap \mathcal{P}_i^{(s)})} \left\{ \frac{1}{mes\,\mathcal{P}^{(s)}} |\nabla u_k|^2 + \frac{h^{-\gamma}}{mes(K_h^y \cap \mathcal{P}^{(s)})} |u_k|^2 \right\} dx \leq$$

$$\leq h^2 O\left(\frac{d}{\delta}\right) + 2 \int\limits_{\bigcup_i (K_h^y \cap \mathcal{P}_i^{(s)})} \left\{ \frac{1}{mes\,\mathcal{P}^{(s)}} |\nabla \hat{w}_k \nabla u_k| + \right.$$

$$\left. + \frac{h^{-\gamma}}{mes(K_h^y \cap \mathcal{P}^{(s)})} |u_k| |\hat{w}_k - x_k| \right\} dx .$$

Производя оценки, аналогичные [2], приходим в результате к справедливости оценки (11).

Воспользовавшись теперь для вычисления $a_{ik}(s, y, h)$ формулой (4), представлением (10), оценкой (11), а также оценками, полученными непосредственно при доказательстве (11), приходим к следующему выражению для $a_{ik}(s, y, h)$:

$$a_{ik}(s, y, h) = \int\limits_{\bigcup_i (K_h^y \cap \mathcal{P}_i^{(s)})} \frac{1}{mes\,\mathcal{P}^{(s)}} (\nabla \hat{w}_k, \nabla \hat{w}_i) dx + O(h^2), \quad s \to \infty,$$

которое, используя (8) и вид функций $\hat{w}_k(x)$, можно преобразовать к виду

$$a_{ik}(s,y,h) = \frac{h^2}{2\, mes\, \mathcal{P}}\, \delta_{ik} + O(h^2), \quad s \to \infty .$$

Воспользовавшись условием 2) теоремы 1, получаем

$$a_{ik}(y) = \frac{\delta_{ik}}{2\, mes\, \mathcal{P}} .$$

<u>4.</u> Пусть $\tilde{\mathcal{P}} = (\tilde{\mathcal{P}}, \beta, P)$ – вероятностное пространство, а $Q(t,\omega)$ и $R(t,\omega)$ – одномерные случайные процессы, причем $Q(t,\omega)$ – однородный м.трически-транзитивный процесс, порожденный группой преобразований $T_t\,(-\infty < t < \infty)$ в $\tilde{\mathcal{P}}$ и случайной величиной $Q(\omega)$: $: Q(t,\omega) = Q(T_t\,\omega)$. Справедлива эргодическая теорема, согласно которой с вероятностью 1 существует $\lim\limits_{M\to\infty} \frac{1}{M}\int_0^M Q(t,\omega)\,dt = \langle Q \rangle$, где $\langle Q \rangle$ – математическое ожидание случайной величины $Q(\omega)$.

Предположим:

1) $0 < a \le Q(t,\omega) \le A < 1, \quad |R(t,\omega)| \le 1;$

2) с вероятностью 1 существуют

$$\frac{d^kQ}{dt^k}, \quad \frac{d^kR}{dt^k}, \quad k = 1,2,3 \qquad \text{и} \quad \left|\frac{d^kQ}{dt^k}\right|, \left|\frac{d^kR}{dt^k}\right| \le B ,$$

где a, A, B не зависят от $\omega \in \mathcal{P}$ и $t \in R^1$;

3) $\{\alpha_j(\omega),\ j = 0, 1, 2, \dots\}$ и $\{\beta_j(\omega),\ j = 0, 1, 2, \dots\}$ – последовательности случ йных величин на $\mathcal{P}$, причем $|\alpha_j(\omega)| \le C$, где C не зависит от $\omega \in \tilde{\mathcal{P}}$, $j = 0, 1, 2 \dots$.

Рассмотрим обл: сть $\mathcal{P}^{(s)}$, состоящую из тонких случайных полосок, расположенных вдоль осей Ox_1 и Ox_2, границы которых заданы уравнениями:

вертикальные

$$x_1^{j\pm} = A_1 + \delta j + dR(d^{-\theta}x_2 + \beta_j(\omega), \omega) \pm$$
$$\pm \frac{d}{2} Q(d^{-\theta}x_2 + \alpha_j(\omega), \omega) \quad j = 0,1,\dots,N$$

("+" соответствует правой границе полоски, "–" – левой);

горизонтальные

$$x_2^{i\pm} = A_2 + \delta i + dR(d^{-\theta}x_1 + \beta_j(\omega), \omega) \pm$$
$$\pm \frac{d}{2} Q\left(d^{-\theta}x_1 + \alpha_j(\omega), \omega\right) \qquad j = 0,1,\dots,N$$

("+" соответствует верхней границе полоски, "–" – левой), где $d = O(\delta)$ при $s \to \infty$, $0 < \theta < \frac{2}{3}$.

В каждой полоске введем криволинейную ортогональную систему координат u, t так, чтобы боковые границы полоски совпадали с координатными линиями $u = \pm \frac{d}{2}$.

Для определенности рассмотрим горизонтальные полоски. Тогда u, t вводятся с помощью равенств

$$\xi - \varphi_+ \left(d^{-\theta}\eta\right)\left(\frac{d}{2} + u\right) - \varphi_-\left(d^{-\theta}\eta\right)\left(\frac{d}{2} - u\right) = 0,$$
$$\eta - d^{\theta} y\left(d^{-1}\xi,\ d^{-\theta}t,\ d\right) = 0, \tag{13}$$

где $\eta = x_1$; $\xi = x_2 - A_2 - di$ для i-й полоски;

$$\varphi_\pm(\eta) = R\left(\eta + \beta_j(\omega), \omega\right) \pm \frac{1}{2} Q\left(\eta + \alpha_j(\omega), \omega\right).$$

Полагая $\zeta = d^{-1}\xi$, $\tau = d^{-\theta}t$ и выбирая $g(\zeta, \tau, d)$ из условия ортогональности координатной системы u, t, получаем для $g(\zeta, \tau, d)$ дифференциальное уравнение

$$\frac{dg}{d\zeta} = d^{2(1-\theta)}\left\{\varphi_-'(g)\frac{\zeta - \varphi_+(g)}{\varphi_+(g) - \varphi_-(g)} - \varphi_+'(g)\,\frac{\zeta - \varphi_-(g)}{\varphi_+(g) - \varphi_-(g)}\right\},$$

которое дополним начальным условием

$$g\big|_{\zeta = 0} = \tau. \tag{14}$$

Можно показать, пользуясь (13) и (14), что в каждой полоске

$$-\frac{d}{2} \le u \le \frac{d}{2}, \qquad C_1 + O(d) \le t \le C_1 + h + O(d). \tag{15}$$

Рассмотрим в j-й горизонтальной полоске функцию $v_j^{(s)}(t)$, построенную следующим образом:

$$v_j^{(s)}(\tau) = \frac{1}{\langle Q^{-1}\rangle}\int_0^t Q^{-1}\left(d^{-\theta}x + \alpha_j(\omega), \omega\right)dx.$$

С помощью эргодической теоремы и оценок (15) можно получить

$$|v_j^{(s)}(t) - x_1| \le d. \tag{16}$$

В квадрате K_h^y рассмотрим функцию $\hat{w}_1(x)$, равную $v_j^{(s)}(t)$ в j-й горизонтальной полоске, x_1^i – на оставшихся участках i-й вертикальной полоски, где x^i – точка этой полоски.

Аналогично вводится $\hat{w}_2(x)$.
Повторяя приведенные в п. 3 рассуждения, учитывая (16) и оценки леммы 2 [3], получаем

$$a_{ik}(y) = \frac{\delta_{ik}}{2\,\mathrm{mes}\,\mathcal{P}\langle Q\rangle\langle Q^{-1}\rangle}.$$

1. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М. : Наука, 1988. – 333 с.
2. Хруслов Е.Я. Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи при измельчении границы области // Мат. сб. – 1978. – 106, № 4. – С. 604–621.
3. Егорова И.Е., Хруслов Е.Я. Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи в областях со случайными тонкими щелями // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1989. – Вып. 51. – С. 21–29.

УДК 519.21

А.М.Улановский

ОДНОСТОРОННИЕ БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫЕ МЕРЫ, ОДНОЗНАЧНО ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ СУЖЕНИЯМИ

Описаны классы односторонних безгранично делимых вероятностных мер, в которых имеет место эффект однозначной определенности сужением на "достаточно большую" полуось.

1. Введение. Известная теорема И.А.Ибрагимова [1] гласит, что если μ_1, μ_2 – безгранично делимые вероятностные меры (б.д.в.м.) и выполнены условия: 1) $\inf \operatorname{supp} \mu_j = -\infty$, $j=1,2$; 2) $\lim\limits_{r\to\infty} r^{-1}\ln(1/\mu_j(-\infty,-r)) = \infty$, $j=1,2$, то из совпадения сужений $\mu_1|_{(-\infty,a)} = \mu_2|_{(-\infty,a)}$, $\exists a$, следует, что $\mu_1=\mu_2$. Различные обобщения этой теоремы см. в [2, 3].

Будем называть меру μ, не удовлетворяющую 1) (т.е. $\inf \operatorname{supp} \mu > -\infty$), односторонней. Общий вид характеристической функции (х.ф.) $\hat\mu$ б.д.в.м. μ, удовлетворяющей условию $\inf \operatorname{supp} \mu = \beta$, дается формулой [4, с. 19, 69]:

$$\hat\mu(t) = \exp\left\{ i\beta t + \int\limits_{(0,\infty)} (e^{itx}-1)\,\sigma_\mu(dx) \right\}, \tag{1.1}$$

где σ_μ – неотрицательная мера на $(0,\infty)$, такая, что

$$\int\limits_{(0,\infty)} x(1+x)^{-1}\sigma_\mu(dx) < \infty. \tag{1.2}$$

Очевидно, любые две различные односторонние б.д.в.м. μ_1 и μ_2 совпадают на некоторой полуоси: $\mu_1|_{(-\infty,a)} = \mu_2|_{(-\infty,a)}$, $\exists a$, но заключение теоремы И.А.Ибрагимова неверно. Оказывается, что и для односторонних б.д.в.м. можно получить результаты об однозначной определенности сужениями на полуось вида $(-\infty, a)$ или $(-\infty, a]$, если наложить ограничение на убывание μ на $+\infty$. Первый ре-

ISBN 5-12-002405-X. Теория операторов, субгармонические функции. Киев, 1991.

льтат такого сорта, который можно рассматривать как характеризацию пуассоновской меры $\pi(a,\lambda) = e^{-\lambda}\sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda^k (k!)^{-1} \delta_{ka}$ (δ_x в.м., $\delta_x(\{x\})=1$), сформулирован В.М.Кругловым на конференции по непрерывности и устойчивости стохастических моделей (1984). Пусть б.д.в.м. μ такова, что

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{\mu((r,\infty))}}{r \ln r} \geqslant \frac{1}{a}, \quad a>0. \tag{1.3}$$

Тогда

$$\mu\big|_{(-\infty,a)} = \pi(a,\lambda)\big|_{(-\infty,a)} \Rightarrow \mu = \pi(a,\lambda). \tag{1.4}$$

<u>Замечание 1.1</u> [5, гл. 3, § 6]. Для любой б.д.в.м. μ предел (1.3) существует. Если $\inf \operatorname{supp} \mu > -\infty$, то $\lim\limits_{r\to\infty} (r \ln r)^{-1} \ln(1/\mu((r,\infty))) = (\sup \operatorname{supp} \sigma_\mu)^{-1}$, где σ_μ – мера из представления (1.1).

В настоящей работе будут указаны классы односторонних б.д.в.м., в которых имеет место эффект однозначной определенности сужением на полуось вида $(-\infty,a)$ или $(-\infty,a]$, а также установлены соответствующие теоремы об устойчивости.

<u>2. Односторонние б.д.в.м., совпадающие на отрезке.</u> Введем класс M всех б.д.в.м. μ с $\inf \operatorname{supp} \mu = 0$, т.е. б.д.в.м. μ, удовлетворяющих условиям

$$\mu((-\infty,0)) = 0; \quad \mu([0,\varepsilon)) > 0, \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{2.1}$$

Х.ф. $\hat{\mu}$ таких мер удовлетворяют (1.1) с $\beta = 0$. Оказывается, сужение $\mu|_{[0,a)}$, $\mu \in M$, однозначно определяет сужение $\sigma_\mu|_{[0,a)}$ и величину $\sigma_\mu([a,\infty))$; то же верно для $\mu|_{[0,a]}$ при дополнительном ограничении $\mu(\{0\}) (= \exp\{-\sigma_\mu((0,\infty))\}) > 0$. Справедливы и обратные утверждения.

<u>Теорема 2.1.</u> Пусть $\mu, \nu \in M$; $a > 0$. Тогда

$$\mu\big|_{[0,a)} = \nu\big|_{[0,a)} \Longleftrightarrow \sigma_\mu\big|_{[0,a)} = \sigma_\nu\big|_{[0,a)}; \ \sigma_\mu([a,\infty)) = \sigma_\nu([a,\infty)).$$

Если к тому же $\sigma_\mu((0,\infty)) < \infty$, то

$$\mu\big|_{[0,a]} = \nu\big|_{[0,a]} \Longleftrightarrow \sigma_\mu\big|_{[0,a]} = \sigma_\nu\big|_{[0,a]}; \ \sigma_\mu((0,\infty)) = \sigma_\nu((0,\infty)).$$

Эта теорема позволяет установить результаты типа (1.4) для тех мер $\mu \in M$, у которых $\sup \operatorname{supp} \sigma_\mu < \infty$.

<u>Теорема 2.2.</u> Пусть $\mu, \nu \in M$; $a > 0$.

(i). Если $\sigma_\mu([a,\infty)) = 0$, то

$$\mu\big|_{[0,a)} = \nu\big|_{[0,a)} \Rightarrow \mu = \nu.$$

(ii). Если $\sigma_\mu((a,\infty))=0$ и $\sigma_\mu((0,\infty))<\infty$, то

$$\mu|_{[0,a]}=\nu|_{[0,a]} \Rightarrow \mu=\nu.$$

В связи с теоремами 2.1 и 2.2 отметим, что: 1) пуассоновская мера $\pi(a,\lambda)$ в силу $\sigma_{\pi(a,\lambda)}=\lambda\delta_a$ подпадает под п. (ii) теоремы 2.2. Поэтому в результате В.М.Круглова ограничение (1.3) излишне; 2) из теоремы 2.2 вытекает, что если б.д.в.м. μ удовлетворяет условиям $\inf\operatorname{supp}\mu=\beta>-\infty$, $\sup\operatorname{supp}\sigma_\mu<\infty$, то μ однозначно определяется сужением на полуось $(-\infty,a)$ при $a>\sup\operatorname{supp}\sigma_\mu+\beta$.

$$\nu - \text{б.д.в.м.},\quad a>\sup\operatorname{supp}\sigma_\mu+\beta,\ \mu|_{(-\infty,a)}=\nu|_{(-\infty,a)} \Rightarrow \mu=\nu.$$

Вместе с тем, согласно теореме 2.1 (импликации " $\Leftarrow$ "), если μ - б.д.в.м., $\inf\operatorname{supp}\mu>-\infty$, но $\sup\operatorname{supp}\sigma_\mu=\infty$, то для любого a найдется б.д.в.м. ν_a, такая, что $\mu|_{(-\infty,a)}=\nu_a|_{(-\infty,a)}$, $\mu\neq\nu_a$.

Замечание 2.3. Ввиду замечания 1.1 условие $\sigma_\mu((a,\infty))=0$ равносильно условию (1.3); условие $\sup\operatorname{supp}\sigma_\mu<\infty$ равносильно условию $\lim\limits_{r\to\infty}(r\ln r)^{-1}\ln(1/\mu((r,\infty)))>0$.

В связи с теоремами 2.1 и 2.2 возникает вопрос, можно ли ослабить в их условиях требование безграничной делимости мер μ,ν.

Пусть в.м. μ удовлетворяет условию

$$\exists\varepsilon>0:\mu((r,\infty))<\exp\left\{-\left(\frac{1}{a}+\varepsilon\right)r\ln r\right\},\quad r\to\infty,\quad a>0 \qquad (2.2)$$

и $\inf\operatorname{supp}\mu>-\infty$. Тогда [4, с. 38] х.ф. $\hat\mu$ аналитически продолжается во всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$. Обозначим через M_a класс в.м. μ, удовлетворяющих (2.1), (2.2) и условию $\hat\mu(t)\neq 0$, $t\in\mathbb{C}$. Заметим, что целая х.ф. $\hat\mu$, отвечающая б.д.в.м. μ, не имеет нулей [4, с. 67]. Поэтому все б.д.в.м. μ, удовлетворяющие (2.1), (2.2), лежат в M_a.

Теорема 2.4. Пусть $\mu,\nu\in M_a$; $a>0$. Тогда $\mu|_{[0,a)}=\nu|_{[0,a)}\Rightarrow\mu=\nu$.

Другое ослабление условия б.д. связано с тем, что рассматриваются смеси б.д.в.м. вида $\int\mu^{u*}\chi(du)$, где $\widehat{\mu^{u*}}=\hat\mu^u$.

Теорема 2.5. Пусть $\mu,\nu\in M$; $a>0$; $\chi\neq\delta_0$ - в.м., удовлетворяющая (2.1). Тогда

$$\int\limits_{[0,\infty)}(\mu^{u*}-\nu^{u*})\,\chi(du)\Big|_{[0,a)}=0 \Leftrightarrow \mu|_{[0,a)}=\nu|_{[0,a)}.$$

Теорема 2.6. Пусть $\mu\in M$; χ_1,χ_2 - в.м., сосредоточенные на $[0,\infty)$; $a>0$.

(i). Если $\mu(\{0\})=0$, то

$$\int_{[0,\infty)} \mu^{u*}(x_1-x_2)(du)\Big|_{[0,a)}=0 \Rightarrow x_1=x_2.$$

(ii). Если $\mu(\{0\})>0$ и $x_1\neq x_2$, то

$$\int_{[0,\infty)} \mu^{u*}(x_1-x_2)(du)\Big|_{[0,a)}=0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \exists N:\ \sigma_\mu\Big|_{[0,\frac{a}{N}]}=0;\ \left(\hat{x}_1^{(j)}-\hat{x}_2^{(j)}\right)\left(i\sigma_\mu((0,\infty))\right)=0,\ j=0,1,\dots,N-1.$$

3. Односторонние б.д.в.м., близкие между собой на отрезке. Рассмотрим вопрос: пусть меры $\mu,\nu\in M$ (меры σ_μ, σ_ν) "близки" между собой на отрезке $[0,a]$. Насколько "близки" должны быть меры σ_μ, σ_ν (μ,ν)? Для простоты формулировок ограничимся случаем $M(\{0\})>0$.

Теорема 3.1. Пусть $\mu,\nu\in M$; $\mu(\{0\})>0$; $a>0$.

(i). Пусть справедливо неравенство

$$|(\mu-\nu)([0,ax))|<\varepsilon,\quad 0<x<1, \tag{3.1}$$

где $0<\varepsilon<\mu(\{0\})/16$. Тогда выполняются оценки

$$|(\sigma_\mu-\sigma_\nu)((0,ax))|\le\frac{3}{(\mu(\{0\}))^2}\left(\frac{9}{\mu(\{0\})}\right)^{\frac{x}{\delta}}\varepsilon,\quad 0<x<1; \tag{3.2}$$

$$|(\sigma_\mu-\sigma_\nu)((0,\infty))|<2\varepsilon/\mu(\{0\}), \tag{3.3}$$

где δ – произвольная постоянная, такая, что

$$\mu((0,a\delta))<\frac{\mu(\{0\})}{16}. \tag{3.4}$$

(ii). Пусть справедливы неравенства

$$|(\sigma_\mu-\sigma_\nu)((0,ax))|<\varepsilon,\quad 0<x<1; \tag{3.5}$$

$$|(\sigma_\mu-\sigma_\nu)((0,\infty))|<\varepsilon, \tag{3.6}$$

где $0<\varepsilon<1/2$. Тогда выполняется оценка

$$|(\mu-\nu)([0,ax))|<2\varepsilon+\frac{3\varepsilon}{\mu(\{0\})},\quad 0<x<1. \tag{3.7}$$

Если дополнительно предположить, что $\sigma_\mu([a,\infty))=0$, то оценка (3.7) выполняется при всех $x>0$.

Из этой теоремы непосредственно вытекает

Теорема 3.2. Пусть $\mu,\nu\in M$; $\mu(\{0\})>0$; $\sigma_\mu([a,\infty))=0$; $a>0$. Если справедливо неравенство (3.1), то при всех $x>0$

выполняется оценка

$$|(\mu-\nu)([0,ax))| \le \frac{3\varepsilon}{(\mu(\{0\}))^2}\left(2+\frac{3}{\mu(\{0\})}\right)\left(\frac{9}{\mu(\{0\})}\right)^{1/\delta}.$$

где δ удовлетворяет (3.4).

Заметим, что для пуассоновской меры $\pi(a,\lambda)$ $\pi(a,\lambda)(\{0\}) = e^{-\lambda} > 0$, $\sigma_{\pi(a,\lambda)}((a,\infty)) = 0$. Поэтому справедливо

Следствие 3.3. Пусть $\nu \in M$; $a, \varepsilon > 0$. Тогда $|(\nu-\pi(a,\lambda)) \times ([0,ax))| < \varepsilon$, $0 < x < 1 \Rightarrow$.

Близость мер μ, ν можно измерять с помощью оценок

$$\mu([0,a(x-\varepsilon)))-\varepsilon < \nu([0,ax)) < \mu([0,a(x+\varepsilon)))+\varepsilon, \quad \varepsilon < x < 1. \tag{3.8}$$

В этом случае также можно получить результат, аналогичный теореме 3.1, который не будет приведен ввиду его громоздкости. Сформулируем без доказательства аналог теоремы 3.2.

Теорема 3.4. Пусть $\mu, \nu \in M$; $\mu(\{0\})>0$; $\sigma_\mu((b,\infty)) = 0$; $0<b<a$; $0<\varepsilon<1/2$. Если справедливо неравенство (3.8), то найдется постоянная $C>0$, зависящая только от μ, такая, что при всех $x > C\varepsilon^{(a-b)/4a}\ln(1/\varepsilon)$ выполняются оценки

$$\mu\left([0,x-C\varepsilon^{\frac{a-b}{4a}}\ln\frac{1}{\varepsilon})\right) - C\sqrt{\varepsilon^{\frac{a-b}{a}}\ln\frac{1}{\varepsilon}} < \nu([0,x)) <$$
$$< \mu\left([0,x+C\varepsilon^{\frac{a-b}{4a}}\ln\frac{1}{\varepsilon})\right) + C\sqrt{\varepsilon^{\frac{a-b}{a}}\ln\frac{1}{\varepsilon}}.$$

4. Доказательства теорем из п. 2.

Импликации "$\Longleftarrow$" в теореме 2.1 вытекают из следующего очевидного утверждения.

Лемма 4.1. Пусть $\sigma_\mu|_{[0,a)} = \sigma_\nu|_{[0,a)}$; $\sigma_\mu([a,\infty)) = \sigma_\nu([a,\infty))$. Тогда $\mu|_{[0,a)} = \nu|_{[0,a)}$

Нам понадобится ряд лемм.

Лемма 4.2. Пусть $\mu \in M$. Справедливо равенство

$$x\mu = \mu * (x\sigma_\mu), \tag{4.1}$$

где $x\mu$, $x\sigma_\mu$ – меры: $(x\mu)(E) = \int_E x\mu(dx)$; $(x\sigma_\mu)(E) = \int_E x\sigma_\mu(dx)$.

Доказательство. В силу (1.2) $(x\sigma_\mu)((0,a)) < \infty$ при любом $a>0$, поэтому свертка $\mu*(x\sigma_\mu)$ определена. Если $(x\sigma_\mu)((0,\infty)) < \infty$, то (4.1) доказывается дифференцированием формулы (1.1). Пусть $(x\sigma_\mu)((0,\infty)) = \infty$. Рассмотрим меру $\sigma_{\tilde\mu} = \sigma_{\tilde\mu}(E) = \sigma_\mu(E\cap(0,a)) + \sigma_\mu([a,\infty))\delta_a(E)$. В силу леммы 4.1 $\tilde\mu|_{[0,a)} = \mu|_{[0,a)}$, где $\tilde\mu$ отвечает $\sigma_{\tilde\mu}$ в (1.1). Поскольку $(x\sigma_{\tilde\mu})((0,\infty)) < \infty$, то $x\tilde\mu = \tilde\mu * (x\sigma_{\tilde\mu})$ откуда в силу произвола в выборе a вытекает (4.1).

Лемма 4.3. Пусть в.м. μ, ν таковы, что $\mu((-\infty,0))=\nu((-\infty,0))=0$; $|(\hat{\mu}-\hat{\nu})(iy)| \le e^{-ay(1+o(1))}$, $y\to\infty$. Тогда $\mu|_{[0,a)}=\nu|_{[0,a)}$

Доказательство вытекает из следующей известной формулы: пусть χ – конечная борелевская мера, $\inf \operatorname{supp}\chi > -\infty$. Тогда $\inf \operatorname{supp} \chi = \overline{\lim\limits_{y\to\infty}}\, y^{-1} \ln|\hat{\chi}(iy)|$ (ср. [6, с. 164]).

Лемма 4.4. Пусть целая функция $f(z)$ удовлетворяет оценкам

$$|f(z)| \le \exp\{(a-\delta)|z|\},\quad z\in\mathbb{C};$$
$$|f(iy)| \le \exp\{-(a-\varepsilon)y\},\quad y\to\infty, \tag{4.2}$$

где $a>\delta>\varepsilon>0$. Тогда $f\equiv 0$.

Доказательство. Обозначим $h_f(\varphi)=\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\, r^{-1}\ln|f(re^{i\varphi})|$. Заметим, что $h_f\left(\frac{\pi}{2}\right)+h_f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\le\varepsilon-\delta<0$, а это [7, с. 84] влечет $f\equiv 0$.

Лемма 4.5. Пусть $\mu\in M_a$. Найдутся постоянные $\eta, C>0$, зависящие только от μ, такие, что

$$|\ln\hat{\mu}(z)| \le C\exp\{(a-\eta)|z|\},\quad z\in\mathbb{C}.$$

Доказательство. В силу (2.2) найдутся $\eta, r_\eta>0$, такие, что

$$\mu((r,\infty))<\exp\left\{-\frac{1}{a-4\eta}\, r\ln r\right\},\quad r>r_\eta,\quad 4\eta<a.$$

Интегрируя по частям, при $r_\eta<\exp\{(a-3\eta)|y|\}$, получаем

$$|\hat{\mu}(x+iy)| \le \int_{(0,\infty)} e^{-ys}\mu(ds) \le \exp\{|y|\exp(a-3\eta)|y|\} +$$
$$+\ |y|\int_{\exp(a-3\eta)|y|} \exp\{|y|s - s\ln s/(a-4\eta)\}\,ds.$$

Привлекая оценки

$$\int_{\exp(a-3\eta)|y|} \exp\{s|y|-s\ln s/(a-4\eta)\}\,ds \le \int_{\exp(a-3\eta)|y|} \exp\left\{s|y|\left(1-\frac{a-3\eta}{a-4\eta}\right)\right\}ds = O(1),\quad y\to\infty;$$

$$\exp\{|y|\exp(a-3\eta)|y|\} \le \exp\left\{\exp\left(a-\frac{5}{2}\eta\right)|y|\right\},\quad y\to\infty,$$

получаем

$$|\hat{\mu}(x+iy)| \le O(1)+\exp\left\{\exp\left(a-\frac{5}{2}\eta\right)|y|\right\} \le \exp\{\exp(a-2\eta)|y|\},\quad y\to\infty.$$

Отсюда $\operatorname{Re}\ln\hat{\mu}(x+iy)\le\exp(a-2\eta)|y|$, $y\to\infty$.

В силу неравенства Каратеодори [7, с. 28] для любой целой функции $g(z)$, $g(0)=0$ выполняется

$$\max_{|z|\le r} |g(z)| \le \max_{|z|\le R} \frac{2r}{R-r} \operatorname{Re} g(z), \qquad r < R .$$

Полагая $g = \ln \hat{\mu}$, $R = \frac{a-\eta}{a-2\eta}|z|$, получаем

$$|\ln \hat{\mu}(z)| \le \frac{2}{\eta}(a-2\eta)\exp(a-\eta)|z|, \quad |z| \to \infty ,$$

что доказывает лемму.

Доказательство теоремы 2.1. Достаточно доказать импликации " $\Longrightarrow$ ".

Из условия $\mu|_{[0,a)} = \nu_{[0,a)}$ и из (4.1) вытекает

$$0 = (x\mu - x\nu)|_{[0,a)} = [\mu * (x\sigma_\mu) - \nu * (x\sigma_\nu)]|_{[0,a)} = \\ = [\mu * (x\sigma_\mu - x\sigma_\nu)]|_{[0,a)} .$$

Применяя теорему Титчмарша "о свертке" [6, с. 167], получаем

$$a \le \inf \operatorname{supp}\{\mu * (x\sigma_\mu - x\sigma_\nu)\} = \inf \operatorname{supp} \mu + \inf \operatorname{supp}(x\sigma_\mu - x\sigma_\nu) .$$

В силу (2.1) $\inf \operatorname{supp} \mu = 0$ и, значит, $\inf \operatorname{supp}(x\sigma_\mu - x\sigma_\nu) \ge a$, $x\sigma_\mu|_{[0,a)} = x\sigma_\nu|_{[0,a)}$, $\sigma_\mu|_{[0,a)} = \sigma_\nu|_{[0,a)}$. Представим μ в виде $\mu = \mu_1 * \mu_2$, где $\sigma_{\mu_1}(E) = \sigma_\mu(E \cap (0,a))$, $\sigma_{\mu_2}(E) = (\sigma_\mu - \sigma_{\mu_1})(E)$; аналогично $\nu = \nu_1 * \nu_2$. Ясно, что $\mu|_{[0,a)} = \exp\{-\sigma_\mu([a,\infty))\}\mu_1|_{[0,a)} = \nu|_{[0,a)} = \exp\{-\sigma_\nu([a,\infty))\}\nu_1|_{[0,a)}$; $\sigma_{\mu_1} = \sigma_\mu|_{[0,a)} = \sigma_\nu|_{[0,a)} = \sigma_{\nu_1}$; $\mu_1 = \nu_1$. Следовательно, $\sigma_\mu([a,\infty)) = \sigma_\nu([a,\infty))$.

Пусть теперь $\mu|_{[0,a)} = \nu|_{[0,a)}$ и $\sigma_\mu((0,\infty)) < \infty$. Отсюда $\sigma_\mu|_{[0,a)} = \sigma_\nu|_{[0,a)}$; $\sigma_\mu([a,\infty)) = \sigma_\nu([a,\infty))$ и осталось доказать, что $\sigma_\mu(\{a\}) = \sigma_\nu(\{a\})$. Учитывая, что $\mu(\{0\}) = \nu(\{0\}) = \exp\{-\sigma_\mu((0,\infty))\} > 0$; $0 = (x\mu - x\nu)(\{a\}) = [\mu * (x\sigma_\mu - x\sigma_\nu)] \times (\{a\}) = \mu(\{0\})(x\sigma_\mu - x\sigma_\nu)(\{a\})$, заключаем, что $\sigma_\mu(\{a\}) = \sigma_\nu(\{a\})$.

Доказательство теоремы 2.4. Пусть $\mu, \nu \in M_a$, $\mu|_{[0,a)} = \nu|_{[0,a)}$. Покажем, что $\mu = \nu$. Согласно лемме 4.4 достаточно доказать, что функция $f = \ln(\hat{\mu}/\hat{\nu})$ удовлетворяет ее условиям. Для этого в силу леммы 4.5 достаточно получить оценку (4.2) при любом $\varepsilon > 0$. Имеем

$$\hat{\mu}(iy) = \int_{(0,\infty)} e^{-ys}\mu(ds) \ge \mu([0,\varepsilon])e^{-y\varepsilon} ,$$

$$|\hat{\mu}(iy) - \hat{\nu}(iy)| = \left|\int_{[a,\infty)} e^{-ys}(\mu-\nu)(ds)\right| \le 2e^{-ay}, \quad y > 0 ;$$

$$2e^{-ay} \ge \hat{\mu}(iy)\left|\frac{\hat{\nu}}{\hat{\mu}}(iy) - 1\right| \ge \mu([0,\varepsilon])e^{-y\varepsilon}\left|e^{f(iy)} - 1\right|, \quad y > 0 .$$

Откуда ввиду (2.1) вытекает $|f(iy)| \leq e^{-(a-2\varepsilon)y}$, $y \to \infty$, при любом $\varepsilon > 0$.

Доказательство теоремы 2.5. Из теоремы 2.1 следует, что $\mu|_{[0,a)} = \nu|_{[0,a)}$ влечет $\mu^{u*}|_{[0,a)} = \nu^{u*}|_{[0,a)}$ при любом $u > 0$. Это доказывает импликацию "$\Longleftarrow$".

Докажем импликацию "$\Longrightarrow$". Мера $\int_{(0,\infty)} (\mu^{u*} - \nu^{u*})\chi(du)$ сосредоточена на $[a,\infty)$ и имеет вариацию ≤ 2. Поэтому

$$\left|\int_{(0,\infty)} (\hat{\mu}^u - \hat{\nu}^u)(x+iy)\chi(du)\right| \leq 2e^{-ay}, \quad y > 0.$$

Учитывая неравенство

$$e^{-u\beta} - e^{-u\alpha} \geq e^{-u\alpha}u(\alpha-\beta) \geq e^{-u\alpha}u(e^{-\beta}-e^{-\alpha}), \; u \geq 0, \; \alpha \geq \beta \geq 0,$$

с

$$\alpha = \max\{\ln(1/\hat{\mu}(iy)); \ln(1/\hat{\nu}(iy))\}; \quad \beta = \min\{\ln(1/\hat{\mu}(iy)); \ln(1/\hat{\nu}(iy))\},$$

получаем

$$2e^{-ay} \geq |\hat{\mu}(iy) - \hat{\nu}(iy)| \int_{(0,\infty)} u[\min\{\hat{\mu}(iy), \hat{\nu}(iy)\}]^u \chi(du).$$

Поскольку для любого $\delta > 0$ выполняется

$$\min\{\hat{\mu}(iy), \hat{\nu}(iy)\} \geq e^{-\delta y} \min\{\mu([0,\delta]), \nu([0,\delta])\},$$

то

$$|\hat{\mu}(iy) - \hat{\nu}(iy)| \leq \frac{2}{\min\{\mu([0,\delta]); \nu([0,\delta])\}} \frac{e^{-ay}}{\int_{(0,\infty)} ue^{-\delta uy}\chi(du)} \leq$$

$$\leq \frac{2e^{-(a+\delta R)y}}{\delta\chi((0,R)) \min\{\mu([0,\delta]), \nu([0,\delta])\}}.$$

В силу произвола выбора δ заключаем, что μ и ν удовлетворяют условиям леммы 4.3, поэтому $\mu|_{[0,a)} = \nu|_{[0,a)}$.

Доказательство теоремы 2.6.

(i). Предположим, что $\chi_1 \neq \chi_2$. Поскольку функция $(\hat{\chi}_1 - \hat{\chi}_2)(t)$ ограничена в полуплоскости $Im\, t > 0$, то [8] существует постоянная $C > 0$ и последовательность $y_k \to \infty$, такие, что $|(\hat{\chi}_1 - \hat{\chi}_2)(iy_k)| > \exp\{-Cy_k\}$. Из условия $\sigma_\mu((0,\infty)) = \infty$ вытекает, что $\ln\hat{\mu}(iy) \to -\infty$, $y \to \infty$, поэтому найдутся $\eta_k \to \infty$, такие, что $\ln\hat{\mu}(i\eta_k) = -y_k$. Значит,

$$\left|\int_{(0,\infty)} (\hat{\mu}(i\eta_k))^u (\chi_1 - \chi_2)(du)\right| = |(\hat{\chi}_1 - \hat{\chi}_2)(-i\ln\hat{\mu}(i\eta_k))| > (\hat{\mu}(i\eta_k))^C.$$

Кроме того, из $\int_{(0,\infty)} \mu^{u*}(x_1 - x_2)(du)\big|[0,a) = 0$ вытекает

$$\Big|\int_{(0,\infty)} (\hat\mu(i\eta_k))^u (x_1 - x_2)(du)\Big| \le 2e^{-a\eta_k} .$$

Таким образом, $\hat\mu(i\eta_k) < 2e^{-a\eta_k/C}$, $\eta_k \to \infty$, что противоречит оценке $\hat\mu(iy) > e^{-ay/2C}\mu([0,1/2C])$, где в силу (2.1) $\mu([0, 1/2C]) > 0$. Значит, $x_1 = x_2$.

(ii). Сначала докажем импликацию " $\Longrightarrow$ ". Из условия $\sigma_\mu((0,\infty)) < \infty$ вытекает

$$\hat\mu^u(t) = exp\{u(\hat\sigma_\mu(t) - \sigma_\mu((0,\infty))\} .$$

Кроме того,

$$\Big|\int_{(0,\infty)} \hat\mu^u(iy)(x_1 - x_2)(du)\Big| \le 2e^{-ay},\ y>0;\ \hat\sigma_\mu(iy) \to 0,\quad y \to \infty .$$

Поэтому

$$0 = \lim_{y\to+\infty} \Big|\int_{(0,\infty)} \hat\mu^u(iy)(x_1 - x_2)(du)\Big| = \Big|\int_{(0,\infty)} e^{-u\sigma_\mu((0,\infty))}(x_1 - x_2)(du)\Big| =$$

$$= \big|(\hat x_1 - \hat x_2)(-i\sigma_\mu((0,\infty)))\big| .$$

Обозначим

$$C_k = \frac{1}{k!}\int_{(0,\infty)} u^k e^{-u\sigma_\mu((0,\infty))}(x_1 - x_2)(du) = \frac{1}{i^k k!}\big(\hat x_1^{(k)} - \hat x_2^{(k)}\big)(i\sigma_\mu((0,\infty))) .$$

Поскольку $x_1 \ne x_2$, то не все $C_k = 0$ и, кроме того, справедливо неравенство

$$\Big|\sum_{k=1}^{\infty} C_k \hat\sigma_\mu^k(iy)\Big| = \Big|\int_{(0,\infty)} \hat\mu^u(iy)(x_1 - x_2)(du)\Big| \le 2e^{-ay} .$$

Если $C_1 \ne 0$, то при достаточно больших $y > 0$ выполняется

$$|C_1|\hat\sigma_\mu(iy) > 2\Big|\sum_{k=2}^{\infty} C_k \hat\sigma_\mu^k(iy)\Big| ,$$

откуда $\hat\sigma_\mu(iy) = O(e^{-ay})$, $y\to\infty$, $\sigma_\mu\big|[0,a) = 0$. Если $C_1 = \dots = C_{N-1} = 0$, $C_N \ne 0$, то аналогично получаем $\hat\sigma_\mu^N(iy) = O(e^{-ay})$, $\sigma_\mu\big|[0,a/N) = 0$.

Докажем импликацию " $\Longleftarrow$ ". Пусть $C_1 = \dots = C_{N-1} = 0$, $C_N \ne 0$, $\sigma_\mu\big|[0,a/N) = 0$. Тогда

$$\Big|\int_{(0,\infty)} \hat\mu^u(t)(x_1 - x_2)(du)\Big| =$$

$$= \Big| \sum_{k=N}^{\infty} c_k \hat{\sigma}_{\mu}^{k}(t) \Big| \leq \sum_{k=N}^{\infty} |c_k| e^{-ka\,\mathrm{Im}\,t/N} = O(e^{-a\,\mathrm{Im}\,t}),$$

что влечет $\int\limits_{(0,\infty)} \mu^{u*}(x_1 - x_2)(du)\big|[0,a) = 0$.

5. Доказательство теоремы 3.1. Будем считать, что в формулировке теоремы 3.1 $a = 1$ (в противном случае перейдем к мерам $\tilde{\mu}([0,x)) = \mu([0,x/a))$; $\tilde{\nu}([0,x)) = \nu([0,x/a))$). Кроме того, ввиду леммы 4.1 можно считать, что

$$\sigma_{\mu}((2,\infty)) = \sigma_{\nu}((2,\infty)) = 0 \tag{5.1}$$

(в противном случае перейдем к мерам $\tilde{\mu}, \tilde{\nu}$ с

$$\sigma_{\tilde{\mu}}(E) = \sigma_{\mu}(E \cap [0,2)) + \sigma_{\mu}([2,\infty))\delta_2(E);\ \sigma_{\tilde{\nu}}(E) = \sigma_{\nu}(E \cap [0,2)) + \sigma_{\nu}([2,\infty))\delta_2(E),$$

для которых $\mu|[0,1] = \tilde{\mu}|[0,1]$; $\nu|[0,1] = \tilde{\nu}|[0,1]$.

Лемма 5.1. Пусть χ – в.м.; $\chi((-\infty,0]) = 0$; $d > 0$. Мера $\sum_{k=1}^{\infty} d^k \chi^{k*}$ конечна на $(0,a)$ при любом $a > 0$, и, кроме того, для всех $\delta > 0$, таких, что $\chi((0,\delta]) < 1/4d$, допускает оценку $\left(\sum_{k=1}^{\infty} d^k \chi^{k*}\right)((0,x)) \leq (4d)^{x/\delta}$, $0 < x < \infty$.

Доказательство. Если $r > 0$ таково, что $\hat{\chi}(ir) < 1/d$, то выполняется $\left(\sum_{k=1}^{\infty} d^k \chi^{k*}\right)((0,x)) \leq e^{rx} \sum_{k=1}^{\infty} d^k \int\limits_{(0,x]} e^{-rs} \times$

$$\times \chi^{k*}(ds) \leq e^{rx} \sum_{k=1}^{\infty} d^k \hat{\chi}^k(ir) = e^{rx} \frac{d\hat{\chi}(ir)}{1 - d\hat{\chi}(ir)} < \infty.$$

Поскольку $\hat{\chi}(ir) \leq \chi((0,\delta]) + e^{-\delta r}$, то, полагая $r = (\ln 4d)/\delta$, при $\chi((0,\delta]) < 1/4d$ получим $\hat{\chi}(ir) < 1/2d$; $d\hat{\chi}(ir)[1 - d\chi(ir)]^{-1} < 1$; $\left(\sum_{k=1}^{\infty} d^k \chi^{k*}\right)((0,x)) \leq (4d)^{x/\delta}$.

Лемма 5.2. Пусть $\mu \in M$, $\mu(\{0\}) > 0$. Тогда

$$\sigma_{\mu} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \frac{(\mu - \mu\{0\}\delta_0)^{k*}}{(\mu(\{0\}))^k}.$$

Доказательство. В силу леммы 5.1 рассматриваемый в лемме ряд сходится. Достаточно показать, что при всех достаточно больших $r > 0$ выполняется

$$\hat{\sigma}_{\mu}(t + ir) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(\frac{\hat{\mu}(t + ir) - \mu(\{0\})}{\mu(\{0\})} \right)^k, \quad -\infty < t < \infty.$$

Поскольку $|\hat{\mu}(t+ir)-\mu(\{0\})| \le \int\limits_{(0,\infty)} e^{-rs}\mu(ds) \to 0$, $\quad r\to\infty$,
то при достаточно больших $r>0$

$$\left|\frac{\hat{\mu}(t+ir)-\mu(\{0\})}{\mu(\{0\})}\right| < \frac{1}{2}, \qquad -\infty < t < \infty;$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\frac{\hat{\mu}(t+ir)-\mu(\{0\})}{\mu(\{0\})}\right)^k = \ln\left(1+\frac{\hat{\mu}(t+ir)-\mu(\{0\})}{\mu(\{0\})}\right) =$$
$$= \ln\frac{\hat{\mu}(t+ir)}{\mu(\{0\})}.$$

Учитывая, что $\hat{\mu} = e^{\hat{\sigma}_\mu - \sigma_\mu((0,\infty))} = e^{\hat{\sigma}_\mu}/\mu(\{0\})$, приходим к утверждению леммы 5.2.

Лемма 5.3. Пусть $\mu, \nu \in M$ и справедливо неравенство (3.1) с $\varepsilon < \mu(\{0\})/2$. Тогда $|(\sigma_\mu - \sigma_\nu)((0,\infty))| < 2\varepsilon/\mu(\{0\})$.

Доказательство. Имеем

$$\varepsilon > |\mu(\{0\})-\nu(\{0\})| = |e^{-\sigma_\mu((0,\infty))} - e^{-\sigma_\nu((0,\infty))}| = \mu(\{0\})|1-e^{(\sigma_\mu-\sigma_\nu)((0,\infty))}|,$$

откуда

$$|(\sigma_\mu-\sigma_\nu)((0,\infty))| \le \max\left\{\ln\left(1+\frac{\varepsilon}{\mu(\{0\})}\right);\ -\ln\left(1-\frac{\varepsilon}{\mu(\{0\})}\right)\right\},$$

что ввиду $x=\varepsilon/\mu(\{0\})$, $\max\{\ln(1+x);\ -\ln(1-x)\} = -\ln(1-x) \le 2x$, $0<x<1/2$, дает нужную оценку.

Доказательство п. (i) теоремы 3.1. Ввиду леммы 5.3 достаточно доказать оценку (3.2). Привлекая лемму 5.2, получаем

$$\sigma_\mu - \sigma_\nu = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\left[\left(\frac{\mu-\mu(\{0\})\delta_0}{\mu(\{0\})}\right)^{k*} - \left(\frac{\nu-\nu(\{0\})\delta_0}{\nu(\{0\})}\right)^{k*}\right] =$$
$$= \left(\frac{\mu-\mu(\{0\})\delta_0}{\mu(\{0\})} - \frac{\nu-\nu(\{0\})\delta_0}{\nu(\{0\})}\right) * \left(\delta_0 + \sum_{k=2}^{\infty}\left[\left(\frac{\mu-\mu(\{0\})\delta_0}{\mu(\{0\})}\right)^{(k-1)*} + \ldots\right.\right.$$
$$\left.\left.\ldots + \left(\frac{\nu-\nu(\{0\})\delta_0}{\nu(\{0\})}\right)^{(k-1)*}\right]\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right).$$

Заметим, что для неотрицательных борелевских σ-конечных мер $\varkappa_1, \varkappa_2$ на $[0,\infty)$ выполняется $(\varkappa_1 * \varkappa_2)((0,x)) \le \varkappa_1((0,x))\ \varkappa_2((0,x))$. Значит,

$$|(\sigma_\mu-\sigma_\nu)((0,x))|\le\left|\frac{\mu((0,x))}{\mu(\{0\})}-\frac{\nu((0,x))}{\nu(\{0\})}\right|\Big(1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}\times$$

$$\times\Big[\Big(\frac{\mu-\mu(\{0\})}{\mu(\{0\})}\Big)^{(k-1)*}+\dots+\Big(\frac{\nu-\nu(\{0\})}{\nu(\{0\})}\Big)^{(k-1)*}\Big]((0,x))\Big)\le$$

$$\le\left[\frac{|(\mu-\nu)((0,x))|}{\nu(\{0\})}+\mu((0,x))\left|\frac{1}{\mu(\{0\})}-\frac{1}{\nu(\{0\})}\right|\right]\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{\mu^{k*}}{(\mu(\{0\}))^k}+\frac{\nu^{k*}}{(\nu(\{0\}))^k}\Big)((0,x)),\quad 0<x<1.$$

Привлекая лемму 5.1, получаем

$$|(\sigma_\mu-\sigma_\nu)((0,x))|\le\Big(\frac{\varepsilon}{\nu(\{0\})}+\frac{\varepsilon}{\mu(\{0\})\nu(\{0\})}\Big)\Big[4\Big(\frac{1}{\mu(\{0\})}+\frac{1}{\nu(\{0\})}\Big)\Big]^{x/\delta},$$

где δ выбрано из условия $\mu((0,\delta])/\mu(\{0\})+\nu((0,\delta])/\nu(\{0\})<1/4$. В частности, если $\mu((0,\delta])<\mu(\{0\})/16$, то из условий (3.1) и $\varepsilon<\mu(\{0\})/16$ вытекает

$$\mu((0,\delta])/\mu(\{0\})+\nu((0,\delta])/\nu(\{0\})<1/16+(\mu((0,\delta])+\varepsilon)(\mu(\{0\})-\varepsilon)^{-1}<1/4.$$

Отсюда, учитывая, что $(\nu(\{0\}))^{-1}<16(15\mu(\{0\}))^{-1}$, получаем оценку

$$|(\sigma_\mu-\sigma_\nu)((0,x])|\le\frac{16}{15}\Big(\frac{1}{\mu(\{0\})}+\frac{1}{(\mu(\{0\}))^2}\Big)\Big(\frac{124}{15}\times$$

$$\times\frac{1}{\mu(\{0\})}\Big)^{x/\delta}\varepsilon\le\frac{3}{(\mu(\{0\}))^2}\Big(\frac{5}{\mu(\{0\})}\Big)^{x/\delta}\varepsilon,\quad 0<x<1,$$

что доказывает п. (i) теоремы 3.1.

Доказательство п. (ii) теоремы 3.1. Поскольку

$$\mu=e^{-\sigma_\mu((0,\infty))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma_\mu^{k*}}{k!};\quad \nu=e^{-\sigma_\nu((0,\infty))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma_\nu^{k*}}{k!},$$

то

$$|(\mu-\nu)([0,x])|\le|(e^{-\sigma_\mu((0,\infty))}-e^{-\sigma_\nu((0,\infty))}|\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma_\mu^{k*}}{k!}\Big)\times$$

$$\times\left([0,x]\right)+\left|\left(e^{-\sigma_\nu((0,\infty))}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma_\mu^{k*}-\sigma_\nu^{k*}}{k!}\right)([0,x])\right|,\quad 0<x<1.$$

Поскольку $\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma_\mu^{k*}}{k!}\right)\left([0,x]\right)\leq e^{\sigma_\mu((0,\infty))}$, то в силу (3.6)

$$\left|\left(e^{-\sigma_\mu((0,\infty))}-e^{-\sigma_\nu((0,\infty))}\right|\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma_\mu^{k*}}{k!}\right)\left([0,x]\right)\leq$$

$$\leq\left|1-e^{(\sigma_\mu-\sigma_\nu)((0,\infty))}\right|\leq e^{\varepsilon}-1\leq 2\varepsilon,\quad 0<\varepsilon<1/2.$$

Далее,

$$\left|\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sigma_\mu^{k*}-\sigma_\nu^{k*}}{k!}\right)([0,x])\right|=\left|\left[(\sigma_\mu-\sigma_\nu)*\left(\delta_0+\sum_{k=2}^{\infty}\right.\right.\right.\times$$

$$\times\left.\left.\frac{\sigma_\mu^{(k-1)*}+\ldots+\sigma_\nu^{(k-1)*}}{k!}\right)\right]\left([0,x]\right)\Bigg|\leq\varepsilon\quad\times$$

$$\times\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\sigma_\mu^{(k-1)*}+\ldots+\sigma_\nu^{(k-1)*}}{k!}\right)\left([0,x]\right)\leq\varepsilon\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\sigma_\mu+\sigma_\nu)^{k*}}{k!}\right)([0,x])\leq$$

$$\leq\varepsilon\, e^{(\sigma_\mu+\sigma_\nu)((0,\infty))}.$$

Поэтому $\left|\left(e^{-\sigma_\nu((0,\infty))}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sigma_\mu^{k*}-\sigma_\nu^{k*}}{k!}\right)([0,x])\right|\leq\varepsilon e^{\sigma_\mu((0,\infty))}=\frac{\varepsilon}{\mu(\{0\})}$.

Таким образом, $|(\mu-\nu)([0,x])|\leq 2\varepsilon+\varepsilon/\mu(\{0\})$, что доказывает (3.7). Если $\sigma_\mu((1-\infty))=0$, то $\sigma_\nu((1,\infty))\leq|(\sigma_\nu-\sigma_\mu)((0,\infty))|+|(\sigma_\nu-\sigma_\mu)((0,1))|\leq 2\varepsilon$. Поэтому $|(\sigma_\mu-\sigma_\nu)([0,x])|\leq|(\sigma_\mu-\sigma_\nu)\times((0,1])|+\sigma_\nu((1,\infty))\leq 3\varepsilon,\ x>1$, что позволяет провести все предыдущие рассуждения, заменив в (3.5) при $x>1$, ε на 3ε. Это приводит к оценке (3.7) при всех $x>0$.

1. Ибрагимов И.А. Об определении безгранично делимой функции распределения по ее значениям на полупрямой // Теория вероятностей и ее применения. - 1977. - 22, № 2. - С. 393-399.
2. Островский И.В. Об одном классе функций ограниченной вариации на прямой, определяемых своими значениями на полупрямой // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. - 1979. - 92. - С. 220-229.
3. Ostrovskii I.V. Generalization of the Titchmarch convolution theorem and the complex-valued measures uniquely determined by their restriction to a half-line // Lect. Notes Math.-1985. - 1155. - P. 256-283.

4. Линник Ю.В., Островский И.В. Разложения случайных величин и векторов. – М. : Наука, 1972. – 480 с.
5. Круглов В.М. Дополнительные главы теории вероятностей. – М. : Высш. шк., 1984. – 260 с.
6. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. – М. : Гостехиздат, 1956. – 630 с.
7. Кусис П. Введение в теорию пространств H^p. – М. : Мир, 1984. – 360 с.
8. Азарин В.С. Обобщение одной теоремы Хеймана на субгармонические функции в n-мерном конусе // Мат. сб. – 1965. – 66 (108), № 2. – С. 246–264.

УДК 517.958

И.Д.Чуешов

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О КОЛЕБАНИЯХ ОБОЛОЧКИ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ДОЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

Исследован вопрос о существовании и свойствах решений задачи о колебаниях упругой пологой оболочки в потенциальном дозвуковом линеаризованном потоке газа.

При изучении динамики упругой пологой оболочки, защемленной по контуру, возникает следующая система уравнений (см., например, [1-3]):

$$(1-\alpha\Delta)\ddot{u} + \Delta^2 u - [u+f,\ v+\theta] = p(x,t); \tag{1}$$

$$\Delta^2 v + [u+2f,\ u] = 0, \quad x = (x_1,\ x_2) \in \mathcal{D}, \quad t > 0; \tag{2}$$

$$u\Big|_{\partial\mathcal{D}} = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\mathcal{D}} = 0, \qquad v\Big|_{\partial\mathcal{D}} = \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{\partial\mathcal{D}} = 0; \tag{3}$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x), \quad \dot{u}\big|_{t=0} = u_1(x). \tag{4}$$

Здесь $\mathcal{D}$ – гладкая ограниченная область в R^2, $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$, $\alpha \geq 0$,

$$[u,v] = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\,\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\,\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\,\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Предполагается, что $f(x) \in H_0^2(\mathcal{D}) \cap H^3(\mathcal{D})$, $\theta(x) \in H^4(\mathcal{D})$, $u_0(x) \in H_0^2(\mathcal{D})$, $u_1(x) \in H$, где $H = H_0^1(\mathcal{D})$ при $\alpha > 0$, $H = L^2(\mathcal{D})$, если $\alpha = 0$. Здесь и ниже $H^m(\mathcal{D})$ – соболевское пространство порядка m. Отметим, что случай $\alpha > 0$ отвечает учету инерции вращения элементов оболочки (см. [2]). Функция $u(x,t)$ в (1)-(4) имеет смысл прогиба оболочки.

Если оболочка находится в потенциальном потоке газа, движу-

ISBN 5-12-002405-X. Теория операторов, субгармонические функции. Киев, 1991.

щегося вдоль оси x_1 с дозвуковой скоростью, то аэродинамическую нагрузку на нее можно учесть [3], положив

$$p(x,t) = p_0(x) + \mu\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + U\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)\Big|_{x_3=0}, \tag{5}$$

где $p_0(x) \in L^2(\mathcal{R})$, $\mu > 0$, $0 < U < 1$, а потенциал скорости возмущенного потока $\varphi(x,t) = \varphi(x_1, x_2, x_3, t)$ определяется как решение задачи

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 \varphi = \Delta\varphi, \quad x \in R_+^3 = \left\{(x_1; x_2; x_3) \in R^3 : x_3 > 0\right\}; \tag{6}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\Big|_{x_3=0} = \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x_1}\right) u(x_1, x_2, t), & (x_1; x_2) \in \mathcal{R}; \\ 0, & (x_1; x_2) \in R^2 \setminus \bar{\mathcal{R}}; \end{cases} \tag{7}$$

$$\varphi\big|_{t=0} = \varphi_0(x) \in H^1(R_+^3), \quad \dot{\varphi}\big|_{t=0} = \varphi_1(x) \in L^2(R_+^3). \tag{8}$$

В данной работе исследуется вопрос о существовании и свойствах слабых решений задачи (1)-(8). Под слабым решением этой задачи на интервале $[0,T]$ понимается пара функций $\{u(x_1, x_2, t); \varphi(x_1, x_2, x_3, t)\}$, обладающая следующими свойствами:

а) $y(t) = (u(t); \dot{u}(t))$ является на $[0,T]$ слабонепрерывной по t функцией со значениями в $H_0^2(\mathcal{R}) \times H$ ($H = L^2(\mathcal{R})$ при $\alpha = 0$, $H = H_0^1(\mathcal{R})$ при $\alpha > 0$) и удовлетворяет начальным условиям (4);

б) вектор-функция $(\varphi(t); \dot{\varphi}(t))$ является слабонепрерывной на $[0,T]$ функцией со значениями в $H^1(R_+^3) \times L^2(R_+^3)$, для которой имеет место (8);

в) в смысле обобщенных функций над $D(\mathcal{R} \times (0,T))$ выполнено (1) с учетом зависимости v от u согласно (2);

г) для любого элемента $\psi(x_1, x_2, x_3, t)$, принадлежащего классу

$$W_T = \left\{\psi : \psi(t) \in L^2(0,T; H^1(R_+^3)), \ \dot{\psi}(t) \in L^2(0,T; L^2(R_+^3)), \psi(T) = 0\right\},$$

справедливо тождество

$$-\int_0^T \left(\dot{\varphi} + 2U\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \dot{\psi}\right)_{R_+^3} + \int_0^T \left[\left(\nabla\varphi, \nabla\psi\right)_{R_+^3} - U^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)_{R_+^3}\right] dt =$$

$$= \left(\varphi_1 + 2U\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_1}, \psi(0)\right)_{R_+^3} - \int_0^T \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x_1}\right)u, \gamma[\psi]\right)_{\mathcal{R}} dt, \tag{9}$$

где $(\cdot,\cdot)_D$ – скалярное произведение в $L^2(D)$, $\gamma[\psi] = \psi\big|_{x_3=0}$.

Теорема I. При $\alpha \geqslant 0$ самосогласованная задача (1)-(8) на любом интервале $[0,T]$ имеет слабое решение. При $\alpha > 0$ это решение определяется однозначно.

Доказательство. Пусть $\alpha = 0$ (случай $\alpha > 0$ может быть разобран аналогично). Построим галеркинские аппроксимации задачи (1)-(8). Пусть $\{e_k\}$ - базис в пространстве $H_0^2(\mathscr{R})$, а $\{\chi_k\}$ - базис, состоящий из гладких функций, в пространстве $H^1(R_+^3)$. Приближенным решением порядка N задачи (1)-(8) будем называть пару функций

$$u_N(t) = \sum_{k=1}^{N} g_k(t) e_k, \quad \varphi_N(t) = \sum_{k=1}^{N} \eta_k(t) \chi_k ,$$

удовлетворяющую системе соотношений

$$(\ddot{u}_N, e_j)_{\mathscr{R}} + (\Delta u_N, \Delta e_j)_{\mathscr{R}} - ([u_N + f, v(u_N) + \theta], e_j)_{\mathscr{R}} = \\ = (p_0, e_j)_{\mathscr{R}} + \mu \left(\gamma\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\varphi_N\right], e_j\right)_{\mathscr{R}}, \tag{10}$$

$$\left(\ddot{\varphi}_N, \chi_j\right)_{R_+^3} - 2U\left(\dot{\varphi}_N, \frac{\partial}{\partial x_1}\chi_j\right)_{R_+^3} - U^2\left(\frac{\partial \varphi_N}{\partial x_1}, \frac{\partial \chi_j}{\partial x_1}\right)_{R_+^3} = \\ = -(\nabla\varphi_N, \nabla\chi_j)_{R_+^3} - \left(\dot{u}_N + U\frac{\partial u_N}{\partial x_1}, \gamma[\chi_j]\right)_{\mathscr{R}}, \tag{11}$$

где $j = 1, 2, \ldots, N$, $\gamma[\psi] = \psi|_{x_3=0}$, элемент $v_N = v(u_N) \in H_0^2(\mathscr{R})$ определяется по u_N согласно (2). Начальные условия для $u_N(t)$ и $\varphi_N(t)$ выбираются так, чтобы при $N \to \infty$

$$\|u_N(0) - u_0\|_2 + \|\dot{u}_N(0) - u_1\|_0 + \|\varphi_N(0) - \varphi_0\|_1 + \|\dot{\varphi}_N(0) - \varphi_1\|_0 \to 0,$$

где $\|\cdot\|_s$ - норма в соответствующем соболевском пространстве $H^s(\mathscr{R})$ или $H^s(R_+^3)$.

Очевидно, что получающаяся из (1)-(8) с помощью (10), (11) система обыкновенных дифференциальных уравнений разрешима, по крайней мере, локально. Что касается глобальной разрешимости, то она вытекает из установленной ниже априорной оценки.

Умножим (10) на $\dot{g}_j(t)$ и просуммируем по j. Тогда, используя свойства симметрии скобки $[u, v]$ [4], получаем

$$\frac{d}{dt} E_1\left(u_N(t), \dot{u}_N(t)\right) = \mu\left(\gamma\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\varphi_N\right], \dot{u}_N\right)_{\mathscr{R}}, \tag{12}$$

где

$$E_1(u, \dot{u}) = \frac{1}{2}\left(\|\dot{u}\|_{\mathscr{R}}^2 + \|\Delta u\|_{\mathscr{R}}^2 + \frac{1}{2}\|\Delta v(u)\|_{\mathscr{R}}^2 - ([u + 2f, u], \theta)_{\mathscr{R}}\right) - (p_0, u)_{\mathscr{R}}.$$

Точно так же из (11) находим, что

$$\frac{d}{dt} E_2(\varphi_N, \dot\varphi_N) = -\left(\dot u_N + U\frac{\partial u_N}{\partial x_1}, \; \gamma[\dot\varphi_N]\right)_{\Omega}, \tag{13}$$

где

$$E_2(\varphi, \dot\varphi) = \frac{1}{2}\left(\|\dot\varphi\|^2_{R^3_+} + \|\nabla\varphi\|^2_{R^3_+} - U^2\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right\|^2_{R^3_+}\right). \tag{14}$$

Далее, с помощью теоремы Гаусса – Остроградского, нетрудно обнаружить, что

$$\left(\gamma\left[\frac{\partial\varphi_N}{\partial x_1}\right], \dot u_N\right)_{\Omega} - \left(\gamma[\dot\varphi_N], \; \frac{\partial u_N}{\partial x_1}\right)_{\Omega} = -\frac{d}{dt}\left(\gamma[\varphi_N], \frac{\partial u_N}{\partial x_1}\right)_{\Omega}. \tag{15}$$

Сравнивая теперь (12), (13), (15), получаем

$$\frac{d}{dt}\left(E_1(u_N, \dot u_N) + \mu E_2(\varphi_N, \dot\varphi_N) + \mu U E_{12}(u_N, \varphi_N)\right) = 0, \tag{16}$$

где

$$E_{12}(u, \varphi) = \left(\gamma[\varphi], \; \frac{\partial u}{\partial x_1}\right)_{\Omega}. \tag{17}$$

Из (16) с помощью леммы 3.2 [5] не составляет особого труда для всех $t \in [0,T]$ извлечь оценку вида

$$\|\dot u_N\|^2_{\Omega} + \|\Delta u_N\|^2_{\Omega} + \|\Delta v(u_N)\|^2_{\Omega} + \|\dot\varphi_N\|^2_{R^3_+} + \|\nabla\varphi_N\|^2_{R^3_+} \le C_T.$$

Эта оценка позволяет совершить в последовательности приближенных решений предельный переход $N \to \infty$ и установить существование слабых решений системы (1)-(8) при $\alpha = 0$. Соответствующие рассуждения достаточно стандартны и используют идеи общего характера, развитые ранее как в линейном, так и нелинейном случае (см., например, [4, 6]).

Теорема единственности слабых решений при $\alpha > 0$ может быть установлена следующим образом. Пусть $\{u_i(t); \varphi_i(t)\}$, $i = 1,2$ – слабые решения задачи (1)-(8) при $\alpha > 0$. Для функции $\varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$ имеет место равенство (9) с $\varphi_1 = \varphi_0 = 0$, а элемент $u(t) = u_1(t) - u_2(t)$ обладает свойством

$$(1 - \alpha\Delta)\ddot u + \Delta^2 u = B(u_1, u_2) + \mu\gamma\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\varphi\right], \tag{18}$$

где

$$B(u_1, u_2) = [u, v(u_1) + \theta] + [u_2 + f, v(u_1) - v(u_2)].$$

Пусть

$$
w(t)=\begin{cases} -\int_t^s u(\tau)d\tau, & t\le s, \\ 0, & t>s, \end{cases} \qquad \eta(t)=\begin{cases} -\int_t^s \varphi(\tau)d\tau, & t\le s, \\ 0, & t>s. \end{cases}
$$

Тогда, умножая (18) скалярно в $L^2(\mathfrak{R})$ на $w(t)$ и полагая в (9) $\psi(t)=\eta(t)$, как и в случае линейных задач (см. [6]), в данной ситуации удается получить теорему единственности.

Отметим, что, используя метод, описанный для линейных задач в [6], можно доказать, что при $\alpha>0$ слабые решения $\{u(t);\varphi(t)\}$ обладают свойством

$$
W^\alpha\big(u(t),\dot u(t),\varphi(t),\dot\varphi(t)\big)=W^\alpha(u_0,u_1,\varphi_0,\varphi_1),\quad t>0, \tag{19}
$$

где

$$
W^\alpha(u,\dot u,\varphi,\dot\varphi)=\frac{\alpha}{2}\|\nabla\dot u\|^2_{\mathfrak{R}}+E_1(u,\dot u)+\nu E_2(\varphi,\dot\varphi)+\nu U E_{12}(u,\varphi).
$$

В случае $\alpha=0$ для построенных в теореме 1 слабых решений удается показать, что

$$
W^0\big(u(t),\dot u(t),\varphi(t),\dot\varphi(t)\big)\le W^0(u_0,u_1,\varphi_0,\varphi_1). \tag{20}
$$

При этом из (19) вытекает, что при $\alpha>0$ вектор-функции $(u(t);\dot u(t))$ и $(\varphi(t);\dot\varphi(t))$ сильно непрерывны в соответствующих функциональных пространствах.

Если $\alpha=0$, то теорему единственности слабых решений получить не удается (ситуация здесь такая же, как и в случае, когда в (5) $\mu=0$ [1]). Однако, используя идеи работы [7], можно доказать приведенное ниже утверждение о существовании и единственности сильных решений. Под сильным решением задачи (1)–(8) при $\alpha=0$ на интервале $[0,T]$ понимается слабое решение $\{u(t);\varphi(t)\}$, обладающее дополнительными свойствами

$$
u(t)\in L^\infty(0,T;H^4(\mathfrak{R})),\quad \dot u(t)\in L^\infty(0,T;H_0^2(\mathfrak{R})),
$$
$$
\varphi(t)\in L^\infty(0,T;H^2(R^3_+)),\quad \dot\varphi(t)\in L^\infty(0,T;H^1(R^3_+)).
$$

Теорема 2. Пусть $\alpha=0$, $u_0\in H_0^2(\mathfrak{R})\cap H^4(\mathfrak{R})$, $u_1\in H_0^2(\mathfrak{R})$, $\varphi_0\in H^2(R^3_+)$, $\varphi_1\in H^1(R^3_+)$. Предположим также, что выполнено условие согласования

$$
\left.\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_3}\right|_{x_3=0}=\begin{cases} u_1+U\dfrac{\partial u_0}{\partial x_1}, & (x_1;x_2)\in\mathfrak{R}, \\ 0, & (x_1;x_2)\in R^2\setminus\bar{\mathfrak{R}}. \end{cases} \tag{21}
$$

Тогда задача (1)-(8) на любом интервале $[0,T]$ обладает сильным решением. Это решение определяется однозначно, и для него в (20) имеет место равенство.

Доказательство. Пусть $\{e_k\}$ и $\{\chi_k\}$ - базисы в пространствах $H^4(\mathscr{R})\cap H_0^2(\mathscr{R})$ и $V=\left\{f\in H^2(R_+^3):\frac{\partial}{\partial x_3}f\Big|_{x_3=0}=0\right\}$ соответственно. Приближенное решение задачи (1)-(8) будем искать как пару функций вида

$$u_N(t)=\sum_{k=1}^N g_k(t)e_k,\quad \varphi_N(t)=\rho\left(\dot u_N(0)+U\frac{\partial}{\partial x_1}u_N(0)\right)+\xi_N(t),$$

удовлетворяющую соотношениям (10), (11), где ρ - непрерывный оператор продолжения (его существование вытекает из рассмотрений, приведенных в [6]) из $H_0^1(\mathscr{R})$ в $H^2(R_+^3)$, такой, что

$$\gamma\left[\frac{\partial}{\partial x_3}\rho(h)\right]=\begin{cases}h(x_1,x_2), & (x_1;x_2)\in\mathscr{R},\\ 0, & (x_1;x_2)\in R^2\setminus\bar{\mathscr{R}},\end{cases}$$

а величина ξ_N имеет вид

$$\xi_N(t)=\sum_{k=1}^N \eta_k(t)\chi_k .$$

Начальные условия для $u_N(t)$ выбираем так, чтобы при $N\to\infty$ $\|u_N(0)-u_0\|_4+\|\dot u_N(0)-u_1\|_2\to 0$. Кроме того, так как $\xi=\varphi_0-\rho\left(u_1+U\frac{\partial}{\partial x_1}u_0\right)$ принадлежит V, то $\xi_N(0)$ можно подобрать так, чтобы $\|\xi_N(0)-\xi\|_2\to 0$ при $N\to\infty$. Это позволяет выбрать $\dot\varphi_N(0)$ и $\varphi_N(0)$ так, чтобы $\|\dot\varphi_N(0)-\varphi_1\|_1\to 0$, $\|\varphi_N(0)-\varphi_0\|_2\to 0$ при $N\to\infty$.

Как и при доказательстве теоремы 1, легко получить априорную оценку, позволяющую построить слабые решения системы (1)-(8) как предельные точки последовательности $\{u_N(t);\varphi_N(t)\}$. Для того чтобы показать, что эти слабые решения являются сильными, воспользуемся схемой, описанной в [7]. Пусть $w_N(t)=\dot u_N(t)$, $\psi_N(t)=\dot\varphi_N(t)$. Тогда, дифференцируя (10), (11) по t и используя свойства симметрии скобки $[u,v]$, легко проверить, что

$$\frac{d}{dt}\left\{\tilde E_1(w_N,\dot w_N)+\mu E_2(\psi_N,\dot\psi_N)+\mu U E_{12}(w_N,\psi_N)\right\}=\Psi(w_N,u_N),\qquad(22)$$

где величины E_2 и E_{12} определяются согласно (14), (17),

$$\tilde E_1(w_N,\dot w_N)=\frac12\left[\|\dot w_N\|^2_{\mathscr{R}}+\|\Delta w_N\|^2_{\mathscr{R}}+\frac12\|\Delta\tilde v_N\|^2_{\mathscr{R}}-([w_N,u_N],v_N+\theta)_{\mathscr{R}}\right],$$

$$\varphi(w_N, u_N) = -\frac{3}{2}\left([w_N; w_N], \tilde{v}_N\right)_{\mathcal{D}}, \quad \tilde{v}_N = \tilde{v}(w_N, u_N),$$

элемент $v_N = v(u_N)$ находится из (2); величина $\tilde{v} = \tilde{v}(w, u)$ является решением задачи

$$\Delta^2 v + 2[u + f, w] = 0, \quad v\Big|_{\partial\mathcal{D}} = \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{\partial\mathcal{D}} = 0.$$

Указанный выше выбор начальных условий позволяет с помощью (10), (11) показать, что для всех $N = 1, 2, \ldots$

$$\|\Delta w_N(0)\|_{\mathcal{D}} + \|\dot{w}_N(0)\|_{\mathcal{D}} + \|\nabla\varphi_N(0)\|_{R^3_+} + \|\dot{\varphi}_N(0)\|_{R^3_+} < C. \tag{23}$$

Из (22), (23), используя идеи работы [7] и рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 1, удается извлечь необходимые дополнительные априорные оценки и показать теорему существования сильных решений задачи (1)-(8) при $\alpha = 0$. При этом, как и в [7], существенную роль играют оценки

$$|([w, w], \tilde{v}(w, u))_{\mathcal{D}}| \le C(1 + \|\Delta u\|_{\mathcal{D}})\|w\|_{\mathcal{D}}\|\Delta w\|^2_{\mathcal{D}},$$
$$|([w, w], v(u) + \theta)_{\mathcal{D}}| \le C(1 + \|\Delta u\|^2_{\mathcal{D}})\|w\|^{1/2}_{\mathcal{D}}\|\Delta w\|^{3/2}_{\mathcal{D}},$$

вытекающие из свойств симметрии скобки $[u, v]$, непрерывности вложения $H^{1-\delta}(\mathcal{D})$ в $L^{2/\delta}(\mathcal{D})$, $0 < \delta < 1$ и некоторых интерполяционных неравенств (см. [6, с. 60]).

Установить теорему единственности сильных решений не составляет особого труда. Можно, например, воспользоваться методом, описанным выше.

В заключение укажем на работу [8], в которой анонсирован ряд утверждений, относящихся к описанию динамики оболочки в сверхзвуковом потенциальном потоке газа.

Автор благодарит И.Ю.Чуцинович за внимание к работе.

1. Ворович И.И. О некоторых прямых методах в нелинейной теории пологих оболочек // Изв. АН СССР. Сер. мат. - 1957. - 21, № 6. - С. 747-784.
2. Морозов Н.Ф. Избранные двумерные задачи теории упругости. - Л. : Изд-во ЛГУ, 1978. - 184 с.
3. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. - М. : Физматгиз, 1961. - 340 с.
4. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. - М. : Мир, 1972. - 588 с.
5. Чуешов И.Д. Конечномерность аттрактора в некоторых задачах нелинейной теории оболочек // Мат. сб. - 1987. - 133, № 4. - С. 419-428.
6. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. - М. : Мир, 1971. - 372 с.

7. Чуешов И.Д. Сильные решения и аттрактор системы уравнений Кармана // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1988. – № 5. – С. 22–25.
8. Чуешов И.Д. Об одной задаче аэроупругости // Тез. докл. IV Всесоюз. симпоз. "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики" (Харьков, 22–24 мая 1989 г.). – Харьков, 1989. – Ч. 2. – С. 288–290.

УДК 517.9:550.837

Д.Г.Шепельский

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ДАННЫХ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ЗОНДИРОВАНИЯ В КЛАССЕ РАЗРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассматривается обратная задача определения коэффициента в дифференциальном уравнении, описывающем процесс электромагнитного зондирования разрывной (кусочно-непрерывной) среды, по импедансу как функции частоты зондирующей волны. Построен алгоритм восстановления и приведена характеризация исходных данных в терминах спектральной функции соответствующего оператора.

Рассмотрим в полупространстве $R_+=\{-\infty<x,\ y<\infty,\ z\geq 0\}$ систему уравнений

$$rot\ \bar{H}=\sigma(z)\bar{E},\quad rot\ \bar{E}=-i\omega\mu\bar{H},\tag{1}$$

которой в пренебрежении токами смещения описываются стационарные электромагнитные колебания частоты ω в среде с проводимостью $\sigma(z)$, зависящей только от глубины z, и постоянной магнитной проницаемостью μ (в дальнейшем будем считать $\mu=1$).

Предположим, что в R_+ возбуждается плоская вертикально падающая H-волна, так что соответствующее решение системы (1) имеет вид

$$\bar{E}=\{E_1(z,\omega),0,0\},\quad \bar{H}=\{0,H_2(z,\omega),H_3(z,\omega)\}.$$

Согласно (1) функция $E_1(z,\omega)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2E_1}{dz^2}-i\omega\sigma(z)E_1=0\qquad(z\geq 0).\tag{2}$$

Затухание поля при $z\to b$ $(b\leq+\infty)$ выразим в условии

$$\int_0^b|E_1|^2\sigma(z)dz<\infty.\tag{3}$$

Будем предполагать, что $\sigma(z)>0$, $\sigma(z)$ – кусочно-непрерывная функция со скачком в точке $z=z_0$:

ISBN 5-12-002405-Х. Теория операторов, субгармонические функции. Киев, 1991.

$$\sigma(z_0 - 0)A^2 = \sigma(z_0 + 0), \quad 0 < A < \infty, \tag{4}$$

удовлетворяющая условию

$$\int_0^b \sqrt{\sigma(z)}\, dz = \infty. \tag{5}$$

Обратная задача заключается в восстановлении проводимости по известному импедансу $Z(\omega)$:

$$Z(\omega) = \left.\frac{E_1}{H_2}\right|_{z=0} = -i\omega \frac{E_1(0,\omega)}{\partial E_1/\partial z\,(0,\omega)}, \tag{6}$$

где E_1 – решение уравнения (2), удовлетворяющее условию (3).

Введем новую независимую переменную $x = \int_0^z \sqrt{\sigma(t)}\, dt$. Тогда, вводя обозначения $\lambda = -i\omega$, $u(x,\lambda) = E_1(z,\omega)$, приходим к уравнению [1]:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + q(x)\frac{du}{dx} + \lambda u = 0, \quad x \in [0,a[\, \cup \,]a,\infty[, \tag{7}$$

где $q(x) = \frac{d}{dx} \ln \sqrt{\sigma(z(x))}$; $a = x(z_0)$.

В силу условий непрерывности поля и его затухания (3) для функции $u(x,\lambda)$, получаем условия

$$u(a+0,\lambda) = u(a-0,\lambda), \quad \frac{du}{dx}(a+0,\lambda)/A = \frac{du}{dx}(a-0,\lambda); \tag{8}$$

$$\int_0^\infty |u|^2 \sqrt{\sigma(z(x))}\, dx < \infty. \tag{9}$$

Уравнение (7) с условиями (8) – основное в данной задаче. Для него удается построить решения с помощью операторов преобразования, что играет определяющую роль при решении обратной задачи.

Операторы преобразования. Предположим, что функция $q(x)$ в уравнении (7) непрерывно дифференцируема на интервалах $[0,a]$ и $[a,\infty[$. Обозначим через $\varphi_i(x,\lambda)$ $(i=1,2)$ решения уравнения (7) $(q(x) = q_i(x))$, удовлетворяющие условиям (8) $(A = A_i)$ и граничным условиям в нуле:

$$\varphi_i(0,\lambda) = 1, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(0,\lambda) = 0. \tag{10}$$

Утверждение 1. Имеет место следующее представление:

$$\varphi_1(x,\lambda) = \varphi_2(x,\lambda) + \int_0^x K(x,t)\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(t,\lambda)\, dt. \tag{11}$$

Схема доказательства этого утверждения изложена в работе [2] (см. также [1]). Отметим здесь свойства ядра оператора преобразования в том важном случае, когда $q_2(x)\equiv 0$, $A_1=A_2=A$, $\varphi_2(x,\lambda)\equiv\varphi_0(x,\lambda)=\left\{\cos\sqrt{\lambda}x\ (0\le x\le a)\ ;\ \frac{A+1}{2A}\cos\sqrt{\lambda}x+\frac{A-1}{2A}\cos\sqrt{\lambda}(2a-x)(x>a)\right\}$:

1) функция $K(x,t)$ непрерывна в области $\Delta=\{(x,t): x\ge t\ge 0\}$ (заметим, что это свойство выполняется только в случае $A_1=A_2$);

2) функция $K(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируема в каждой области Δ_n, на которые область Δ разбивается прямыми $x=a$; $t=a$; $x-t=2na$ и лучами $x+t=2na$, $t\le a$ ($n=1,2,\dots$), и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 K}{\partial t^2}+q(x)\frac{\partial K}{\partial t}=0\ ; \tag{12}$$

3) $\frac{\partial K}{\partial x}(a+0,t)A=\frac{\partial K}{\partial x}(a-0,t)$;

4) $\frac{\partial K}{\partial x}(x,a-0)A=\frac{\partial K}{\partial t}(x,a+0)$;

5) $K(x,0)=0$;

6) $1+K(x,x)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^x q(t)dt\right\}$.

Условия 1)-6) однозначно определяют ядро $K(x,t)$ в области Δ. В частности, можно показать, что скачок производной $\left[\frac{\partial K}{\partial t}\right]^{\pm}$ вдоль отрезков характеристик $x\pm t=2na$, лежащих в Δ, имеет величину

$$\left[\frac{\partial K}{\partial t}\right]^{\pm}=c\left(\frac{1-A}{1+A}\right)^{n-1}\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^x q\,dt\right\},\quad t<a,\quad \begin{matrix}x-t=2na,\\ x+t=2na;\end{matrix}$$

$$\left[\frac{\partial K}{\partial t}\right]^{\pm}=c\left(\frac{1-A}{1+A}\right)^{n-1}\frac{2A}{1+A}\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^x q\,dt\right\},\quad t>a,\quad x-t=2na, \tag{13}$$

где $c=\left[\frac{\partial K}{\partial t}\right]^{\pm}(x,2a-x)\Big|_{x=a}$. Здесь введено обозначение $[f]^{+}(x,t)\equiv f(x+0,t)-f(x-0,t)$.

Непрерывность ядра $K(x,t)$ позволяет представить операторы преобразования $\varphi_0\to\varphi_1$ и $\varphi_1\to\varphi_0$ в виде

$$\begin{aligned}\varphi_1(x,\lambda)&=\varphi_0(x,\lambda)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^x q\,d\tau\right\}-\int_0^x\frac{\partial K}{\partial t}(x,t)\varphi_0(t,\lambda)dt,\\ \varphi_0(x,\lambda)&=\varphi_1(x,\lambda)\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^x q\,d\tau\right\}-\int_0^x\frac{\partial H}{\partial t}(x,t)\varphi_1(t,\lambda)dt.\end{aligned} \tag{14}$$

<u>Спектральные свойства оператора задачи</u>. Уравнение (7) с ус-

ловиями (8) и граничным условием $u'(0)=0$ определяет в $L^2(0,\infty;\beta(x))$, где $\frac{d\beta}{dx}=\sqrt{\sigma(z(x))}/\sqrt{\sigma(0)}=exp\left\{\int_0^x q(t)dt\right\}\beta_0(x)$,

$\beta_0(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le a,\\ A, & x>a\end{cases}$ – симметрический оператор. Для такого оператора можно построить спектральную теорию, аналогичную спектральной теории для оператора Штурма – Лиувилля [3, 4]. (Заметим, что уравнение (2) есть уравнение струны и к нему применимы известные результаты по спектральной теории струны М.Г.Крейна.)

Утверждение 2. Существует неубывающая функция $\rho(\lambda)(\lambda\in[0,\infty[$, такая, что для каждой действительной функции $f(x)\in L^2(0,\infty;\beta(x))$ существует предел по норме пространства $L^2(0,\infty;\rho(\lambda))$: $F(\lambda)=\lim_{N\to\infty}\int_0^N f(x)\varphi(x,\lambda)d\beta(x)$, где $\varphi(x,\lambda)$ – решение задачи (7), (8), (10), и имеет место равенство Парсеваля

$$\int_0^\infty f^2(x)d\beta(x)=\int_0^\infty F^2(\lambda)d\rho(\lambda). \tag{15}$$

Функцию $\rho(\lambda)$ будем считать нормированной условиями: $\rho(\lambda)$ непрерывна слева и $\rho(-0)=0$.

Обозначим через $\theta(x,\lambda)$ решение задачи (7), (8), удовлетворяющее граничным условиям $\theta(0,\lambda)=0$, $\frac{\partial\theta}{\partial x}(0,\lambda)=1$.

Утверждение 3. Для каждого недействительного λ существует решение уравнения (7) $\Psi(x,\lambda)=\theta(x,\lambda)+m(\lambda)\varphi(x,\lambda)$, принадлежащее пространству $L^2(0,\infty;\beta(x))$. Функция Вейля $m(\lambda)$ аналитична в области $\lambda\notin[0,\infty[$; имеют место формулы связи $\rho(\lambda)$ и $m(z)$:

$$m(z)=\int_{-0}^\infty\frac{d\rho(\lambda)}{z-\lambda};\ \rho(\lambda+\Delta)-\rho(\lambda)=\frac{1}{\pi}\lim_{\delta\to-0}\int_\lambda^{\lambda+\Delta}Im[m(u+i\delta)]du. \tag{16}$$

Замечание. Условие (5) обеспечивает единственность функции Вейля и спектральной функции $\rho(\lambda)$ (случай "предельной точки" для кругов Вейля).

Введем в рассмотрение спектральное ядро $\theta(x,s,\lambda)=\int_{-0}^{\lambda}\varphi(x,\lambda)\varphi(s,\lambda)d\rho(\lambda)$. Положим $\theta_1(x,s,\mu)=\theta(x,s,\mu^2)(\mu>0)$, $\theta_1(x,s,\mu)=\theta_1(x,s,-\mu)$ $(\mu<0)$. Обозначим через $\theta_{10}(x,s,\mu)$ спектральное ядро задачи с $q(x)\equiv0$ и теми же, что и для $\theta_1(x,s,\mu)$ условиями сшивки (8). Рассуждения, аналогичные изложенным в [3] и строго проведенные в [2], приводят к следующим асимптотическим формулам при $\mu\to+\infty$:

$$\theta_1(x,s,\mu) - \theta_{10}(x,s,\mu)\, r(x) r(s) = o(1) \quad (x \neq s);\ (x = s \neq 0, a),$$

где
$$r(x) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^x q\, dt\right\};$$

$$\rho(\mu) - \rho_0(\mu) = -\frac{q(0)}{2} + o(1) \quad (x = s = 0);$$

$$\theta_1(a,a,\mu) - \theta_{10}(a,a,\mu)\, r^2(a) = \frac{1}{2(1+A)^2}\left(q(a-0) - q(a+0)A\right) + o(1). \tag{17}$$

Имеет место также теорема равносходимости разложения по собственным функциям задачи (7), (8), (10) и разложения в обычный интеграл Фурье [2]: для любой функции $f(s) \in L^2(0,\infty;\ \beta(s))$

$$\int_0^\infty f(s)\theta_1(x,s,\mu)\, d\beta(s) - \int_0^\infty f(s)\frac{r(x)}{r(s)}\theta_0(x,s,\mu)\, ds = o(1), \quad (x \neq a), \quad \mu \to +\infty,$$

$$\int_0^\infty f(s)\theta_1(a,s,\mu)\, d\beta(s) - \int_0^\infty f(s)\frac{r(a)}{r(s)}\theta_0(a,s,\mu)\alpha(s)\, ds = o(1),$$

где
$$\theta_0(x,s,\mu) = \frac{2}{\pi}\int_0^\mu \cos\lambda x \cos\lambda s\, d\lambda, \quad \alpha(s) = \begin{cases} \dfrac{2A}{1+A}, & s \geq a, \\ \dfrac{2}{1+A}, & s < a. \end{cases}$$

Получим спектральную функцию $\rho_0(\lambda)$, соответствующую случаю $q(x) \equiv 0$. Запишем

$$\varphi_0(x,\lambda) = \begin{cases} \cos\sqrt{\lambda x}, & 0 \leq x \leq a \\ \alpha\cos\sqrt{\lambda x} + \beta\sin\sqrt{\lambda x}, & x > a, \end{cases} \qquad \theta_0(x,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\sin\sqrt{\lambda x}}{\sqrt{\lambda}}, & 0 \leq x \leq a, \\ \gamma\cos\sqrt{\lambda x} + \delta\sin\sqrt{\lambda x}, \\ x > a, \end{cases}$$

где.
$$\alpha = \frac{A+1}{2A} + \frac{A-1}{2A}\cos 2a\sqrt{\lambda}; \quad \beta = \frac{A-1}{2A}\sin 2a\sqrt{\lambda};$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\,\frac{A-1}{2A}\sin 2a\sqrt{\lambda}; \quad \delta = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{A+1}{2A} - \frac{A-1}{2A}\cos 2a\sqrt{\lambda}\right).$$

Решение Вейля $\psi_0(x,\lambda) = \theta_0(x,\lambda) + m_0(\lambda)\varphi_0(x,\lambda)$ при $Im\,\lambda < 0$, $x > a$, должно быть, очевидно, пропорционально $e^{-i\sqrt{\lambda}x}$ (ветвь $\sqrt{\lambda}$ выбрана так, что $Re\sqrt{\lambda} > 0$). Следовательно, $\delta + m_0\beta = -i(\gamma + m_0\alpha)$, откуда

$$m_0(\lambda) = -\frac{i}{\sqrt{\lambda}} \frac{(A-1)e^{-i2a\sqrt{\lambda}} - (A+1)}{(A-1)e^{-i2a\sqrt{\lambda}} + (A+1)},$$

$$Im\, m_0(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \frac{A}{(A^2+1)+(A^2-1)\cos 2a\sqrt{\lambda}} \quad (\lambda > 0),$$

и вследствие (16)

$$\rho_0(\lambda) = \frac{2}{\pi a}\, arctg\left(\frac{tg\, a\sqrt{\lambda}}{A}\right), \ \lambda \geq 0. \tag{18}$$

Здесь ветви функции $arctg(x)$ выбираются таким образом, чтобы $\rho_0(\lambda)$ была непрерывной возрастающей функцией, $\rho_0(0) = 0$. Из (16), (17), (18) следует асимптотика функции Вейля

$$m(\lambda) = \frac{i}{\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad \left(|\lambda| \to \infty,\ \pi + \varepsilon < \arg\lambda < 2\pi - \varepsilon,\ Re\sqrt{\lambda} > 0\right).$$

Интегральное уравнение обратной задачи. Вывод интегрального уравнения обратной задачи основан на теореме равносходимости (см. [4]), формально представимой в виде

$$\int_0^\infty \varphi(x,\lambda)\varphi(y,\lambda)\,d\rho(\lambda)\,\frac{d\beta(y)}{dy} = \delta(x-y). \tag{19}$$

Из (19) и оператора преобразования $\varphi \to \varphi_0$ (14) следует, что для $0 < y < x$

$$\int_0^\infty \varphi(x,\lambda)\varphi_0(y,\lambda)\,d\rho(\lambda) = 0.$$

Из этого равенства, используя (19) для $\varphi_0(x,\lambda)$ и оператор преобразования $\varphi_0 \to \varphi$ (14), получаем

$$0 = \int_{-0}^\infty \left[(1 + K(x,x))\varphi_0(x,\lambda)\varphi_0(y,\lambda) - \int \frac{\partial K}{\partial t}(x,t)\varphi_0(t,\lambda)\varphi_0(y,\lambda)\,dt\right] d\rho(\lambda) =$$

$$= \frac{1}{\beta_0'(y)}\left\{(1+K(x,x))F(x,y) - \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) - \int \frac{\partial K}{\partial t}(x,t)\,F(t,y)\,dt\right\},$$

III

$$\tilde F(x,y)=f(x,y)\beta_0(y),\quad F(x,y)=\lim_{N\to\infty}\int_{-0}^{N}\varphi_0(x,\lambda)\varphi_0(y,\lambda)\,d\tau(\lambda),$$

$$\tau(\lambda)=\rho(\lambda)-\rho_0(\lambda).$$

Таким образом, приходим к уравнению при $0<y<x$:

$$(1+K(x,x))\tilde F(x,y)-\frac{\partial K}{\partial y}(x,y)-\int_0^x\frac{\partial K}{\partial t}(x,t)\tilde F(t,y)\,dt=0 \qquad (20)$$

(строгий вывод приведен в [2]).

Положим

$$\Psi(x)=\lim_{N\to\infty}\Psi_N(x)=\lim_{N\to\infty}\int_{-0}^{N}\cos\sqrt{\lambda x}\,d\tau(\lambda).$$

Тогда для $x\geqslant y\geqslant 0$

$$F(x,y)=\int_{-0}^{\infty}\varphi_0(x,\lambda)\varphi_0(y,\lambda)\,d\tau(\lambda)=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[\Psi(x+y)+\Psi(x-y)\right], & 0\leqslant y\leqslant x\leqslant a\\[2mm] \frac{A+1}{4A}\left[\Psi(x+y)+\Psi(x-y)\right]+\frac{A-1}{4A}\left[\Psi(2a-x+y)+\Psi(2a-x-y)\right], & x>a,\ 0\leqslant y\leqslant a,\\[2mm] \frac{(A+1)^2}{8A^2}\left[\Psi(x+y)+\Psi(x-y)\right]+\frac{A^2-1}{8A^2}\left[2\Psi(2a-x-y)+\Psi(2a-x+y)+\Psi(2a-y+x)\right]+ & \\[2mm] +\frac{(A-1)^2}{8A^2}\left[\Psi(4a-x-y)+\Psi(x-y)\right], & a\leqslant y\leqslant x,\end{cases}$$

$$F(x,y)=F(y,x),\quad x<y.$$

Запишем уравнение (20) в виде

$$F(x,y)-f(x,y)-\int_0^x f(x,t)\beta_0(t)F(t,y)\,dt=0, \qquad (21)$$

где
$$f(x,y)=\frac{\partial K/\partial y(x,y)}{(1+K(x,x))\beta_0(y)}.$$

Рассматривая уравнение (21) как уравнение типа Вольтерра относительно функции $F(x,y)$, учитывая гладкость функции $\frac{\partial K}{\partial y}(x,y)$ в соответствующих областях и ее скачки (13), получаем, что спектральная функция $\rho(\lambda)$ должна удовлетворять следующему условию:

(A). Положим $\tau(\lambda)=\rho(\lambda)-\rho_0(\lambda)$, где $\rho_0(\lambda)=\frac{2}{\pi a}\operatorname{arctg}\left(\frac{tg\, a\sqrt{\lambda}}{A}\right)$, $\lambda\geq 0$, $\psi_N(x)=\int_{-0}^{N}\cos\sqrt{\lambda x}\,d\tau(\lambda)$. Последовательность $\psi_N(x)$ при $N\to\infty$ сходится к функции $\psi(x)$, непрерывно дифференцируемой на интервалах $[2na,\ 2(n+1)a]$, $n=0,1,2,\dots$, и удовлетворяющей условию

$$\psi(2na+0)-\psi(2na-0)=n\left(\frac{1-A}{1+A}\right)^{n-1}\left[\psi(2a+0)-\psi(2a-0)\right].$$

Обозначим $\Phi(x,y)=\int_0^y \tilde F(x,t)\,dt$. Из уравнения (20), очевидно, следует интегральное уравнение обратной задачи

$$\Phi(x,y)-K(x,y)+\int_0^x K(x,t)\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t,y)\,dt=0. \qquad (22)$$

<u>Обратная задача по спектральной функции</u>. Предположим теперь, что задана некоторая неубывающая функция $\rho(\lambda)$, удовлетворяющая условию (A). Построим по ней функцию $\Phi(x,y)$ и докажем разрешимость полученного уравнения (22). Для этого достаточно показать, что соответствующее ему однородное уравнение имеет лишь тривиальное решение.

Введем функцию $\tilde\varphi_0(x,\lambda)\equiv-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}(x,\lambda)$. Ядро $\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t,y)$ можно представить в виде

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t,y)=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^y F(t,\xi)\beta_0(\xi)\,d\xi=-\int_0^\infty\tilde\varphi_0(t,\lambda)\tilde\varphi_0(y,\lambda)\,d\tau(\lambda)\,\beta_0(y). \qquad (23)$$

Пусть существует функция $g(y)$, такая, что

$$g(y)-\int_0^x g(t)\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t,y)\,dt=0.$$

Тогда $\int_0^x\frac{g^2(y)}{\beta_0(y)}\,dy-\int_0^x\int_0^x g(t)g(y)\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t,y)\,dt\,dy=0$. С учетом (23) имеем

$$\int_0^x\frac{g^2(y)}{\beta_0(y)}\,dy+\int_0^\infty\int_0^x\int_0^x g(t)g(y)\tilde\varphi_0(t,\lambda)\tilde\varphi_0(y,\lambda)\,dt\,dy\,d\rho(\lambda)-$$

$$-\int_0^\infty\int_0^x\int_0^x g(t)g(y)\tilde\varphi_0(t,\lambda)\tilde\varphi_0(y,\lambda)\,dt\,dy\,d\rho_0(\lambda)=0. \qquad (24)$$

Первое и последнее слагаемые в равенстве (24) взаимно сокращаются, если имеет место равенство Парсеваля для разложения по функциям $\tilde\varphi_0(x,\lambda)$:

$$\int_0^\infty f^2(x)\beta_0(x)dx = \int_0^\infty \tilde{F}^2(\lambda)\,d\rho_0(\lambda)\ , \tag{25}$$

где $\tilde{F}(\lambda) = \lim_{N\to\infty}\int_0^N f(x)\tilde{\varphi}_0(x,\lambda)\beta_0(x)dx$, с той же спектральной функцией $\rho_0(\lambda)$, что и для разложения по $\varphi_0(x,\lambda)$. В свою очередь этот факт следует из спектральной теории для системы Дирака

$$\begin{cases} y_2'(x,\mu) = \mu y_1(x,\mu), \\ -y_1'(x,\mu) = \mu y_2(x,\mu) \end{cases} \tag{26}$$

с условиями сшивки

$$y_1(a-0,\mu) = y_1(a+0,\mu), \quad y_2(a-0,\mu) = A\,y_2(a+0,\mu) \tag{27}$$

и граничным условием $y_2(0) = 0$: аналогично [3] можно показать, что существует функция $\tilde{\rho}(\mu)$, такая, что для каждой действительной вектор-функции $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x)\end{pmatrix}$ имеет место равенство Парсеваля

$$\int_0^\infty \left(f_1^2(x) + f_2^2(x)\right)\beta_0(x)dx = \int_{-\infty}^\infty \tilde{\Phi}^2(\mu)\,d\tilde{\rho}(\mu)\ , \tag{28}$$

где $\tilde{\Phi}(\mu) = \int_0^\infty \left(f_1(t)\tilde{\varphi}_1(t,\mu) + f_2(t)\tilde{\varphi}_2(t,\mu)\right)\beta_0(t)dt$; вектор-функция $\tilde{\varphi}(t,\mu)$ является решением задачи (26), (27), удовлетворяющим условию $\tilde{\varphi}_1(0,\mu) = 1$, $\tilde{\varphi}_2(0,\mu) = 0$. Очевидно, что $\tilde{\varphi}_1(x,\mu) = \varphi_0(x,\mu^2)$, $\tilde{\varphi}_2(x,\mu) = \tilde{\varphi}_0(x,\mu^2)$. Поэтому, полагая в равенстве (28) $f_2(x) \equiv 0$, получаем, что $\rho_0(\mu^2) = 2\tilde{\rho}(\mu)$. С другой стороны, полагая $f_1(x) \equiv 0$, из (28) получаем требуемое равенство (25).

Итак, из (24) следует

$$\int_{-0}^\infty \left[\int_0^x g(t)\tilde{\varphi}_0(t,\lambda)\,dt\right]^2 d\rho(\lambda) = 0\ .$$

Отсюда $g(t) \equiv 0$ (см. [5, с. 159], где используется асимптотика $\rho(\lambda)$ (17), вытекающая из существования предела $\lim_{N\to\infty}\Psi_N(0) = \Psi(0)$).

Таким образом, по заданной неубывающей функции $\rho(\lambda)$, удовлетворяющей условию (А) с соответствующими константами a и A (определяемыми из асимптотики $\rho(\lambda)$ (17), (18)), находится функция $K(x,y)$ как решение уравнения (22). Можно показать, что она удовлетворяет условиям 1) – 6), где

$$q(x) = -2\,\frac{\frac{dK(x,x)}{dx}}{1 + K(x,x)}\ ;$$

и тем самым функция $\varphi(x,\lambda)$, определяемая формулой

$$\varphi(x,\lambda) = \varphi_0(x,\lambda) + \int_0^x K(x,t)\,\frac{\partial\varphi_0}{\partial t}(t,\lambda)\,dt\,,$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению (7) и условиям (8). Можно также убедиться в том, что исходная функция $\rho(\lambda)$ действительно является спектральной функцией восстановленной краевой задачи (7), (8), (10). Следовательно, условие (А) не только необходимо, но и достаточно для существования краевой задачи (7), (8), (10) с функцией $q(x)$, непрерывно дифференцируемой на интервалах $[0,a]$ и $[a,\infty[$, спектральная функция которой совпадает с заданной.

Задача восстановления $\sigma(z)$ по импедансу решается теперь следующим образом. Как следует из утверждения 3, функция $\varphi(x,\lambda)$ с точностью до постоянного множителя совпадает с решением задачи (7), (8), (9) $u(x,\lambda)$, через которое выражается импеданс

$$Z(\omega) = Z(i\lambda) = \frac{\lambda}{\sqrt{\sigma(0)}}\;\frac{u(0,\lambda)}{u'_x(0,\lambda)}\,.$$

Поскольку $\varphi(0,\lambda) = m(\lambda)$, $\varphi'_x(0,\lambda) = 1$, то

$$m(\lambda) = \frac{\varphi(0,\lambda)}{\varphi'_x(0,\lambda)} = \frac{u(0,\lambda)}{u'_x(0,\lambda)} = \frac{Z(i\lambda)}{\lambda}\sqrt{\sigma(0)}\,. \qquad (29)$$

Из формулы (29), учитывая асимптотику функции $m(\lambda)$, по заданному импедансу $Z(\omega)\,(\omega>0)$ находятся $m(\lambda)$ (λ лежит на мнимой полуоси в нижней полуплоскости) и $\sigma(0)$. Спектральная функция $\rho(\lambda)$ однозначно связана с $m(\lambda)$ формулами (16). Как было показано, по функции $\rho(\lambda)$ определяется $q(x)$. Наконец, $\sigma(z)$ определяется по формуле $\sigma(z) = [x'(z)]^2$, где $x(z)$ – решение задачи Коши:

$$\begin{cases} x(0) = 0, \\ x'(z) = \sqrt{\sigma(0)}\,\exp\left\{\int_0^x q(t)\,dt\right\}, \quad 0 \le z \le z_0, \quad a = x(z_0), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(z_0) = a, \\ x'(z) = \sqrt{\sigma(z_0+0)}\,\exp\left\{\int_a^x q(t)\,dt\right\}, \quad z > z_0, \\ \sqrt{\sigma(z_0+0)} = \sqrt{\sigma(z_0-0)}\,A\,. \end{cases}$$

Очевидно, $b = z(x)\big|_{x=+\infty} = \frac{1}{\sqrt{\sigma(0)}}\left(\int_0^a [1+K(t,t)]^2\,dt + \frac{1}{A}\int_a^\infty [1+K(t,t)]^2\,dt\right)$ и $\int_0^b \sqrt{\sigma(t)}\,dt = x(b) = \infty$.

Из полученных выше результатов вытекает

Теорема. Для того чтобы функция $Z(\omega)$ являлась импедансом задачи (2), (3), в которой $\sigma(z)$ - положительная, кусочно-непрерывная функция с одной точкой разрыва, вне которой она дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет условию (5), необходимо и достаточно, чтобы построенная по $Z(\omega)$ согласно равенствам (16), (29) неубывающая функция $\rho(\lambda)$ удовлетворяла условию (A).

Замечание. Аналогичная теорема имеет место и в случае наличия у функции $\sigma(z)$ более чем одного разрыва (с соответствующей заменой в условии (A) асимптотики $\rho_0(\lambda)$ и условий согласования разрывов функции $\psi(x)$).

1. Левченко Е.П., Хруслов Е.Я. Одномерные обратные задачи магнитотеллурического зондирования. - Харьков, 1984. - 42 с. - (Препр. / АН УССР. ФТИНТ; № 10-84).
2. Шепельский Д.Г. О восстановлении проводимости среды в классе разрывных и растущих функций. - Харьков, 1987. - 30 с. - (Препр. / АН УССР. ФТИНТ; № 25-87).
3. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Введение в спектральную теорию. - М. : Наука, 1970. - 672 с.
4. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма - Лиувилля. - М. : Наука, 1984. - 240 с.
5. Марченко В.А. Операторы Штурма - Лиувилля и их приложения. - Киев : Наук. думка, 1977. - 332 с.

УДК 531.19

М.В.Щербина

МОДЕЛЬ ХОПФИЛДА В МНОГОКОМПОНЕНТНОМ ПРЕДЕЛЕ

Показано, что n-векторная модель Хопфилда в пределе $n \to \infty$ сходится к сферической модели с одним z. Найдены критическая температура, параметр Эдвардса - Андерсона и α_{cr} для предельной модели.

В последние годы интенсивно развиваются модели ассоциативной памяти, называемые "нейронными сетями". Эти модели представляют собой спиновые системы, эволюционирующие по законам глауберовой динамики. Информация о "запоминаемых образах" содержится в конкретном виде взаимодействия. Одной из самых популярных моделей такого типа является модель Хопфилда [1, 2] с гамильтонианом вида

$$H^{V} = -\frac{1}{2}\sum_{r,r'=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{\alpha N}\frac{\xi_r^{\mu}\xi_{r'}^{\mu}}{N} S_r S_{r'} \,. \tag{1}$$

ISBN 5-12-002405-X. Теория операторов, субгармонические функции. Киев, 1991.

Здесь ξ_r^μ – независимые при разных r, μ случайные переменные ("образы"):

$$\xi_r^\mu = \pm 1, \quad E\left\{\xi_r^\mu\right\} = 0;$$

α – положительное число; S_r – спиновые переменные.

Особый интерес представляет вопрос о влиянии α на динамику системы. Предполагается, что существует $\alpha_{cr}(\beta)$ – критическое значение α, зависящее от обратной температуры β, выше которого "запоминани." отсутствует. Определению α_{cr} посвящено множество работ (см., например, [3, 4]). Из численных экспериментов известно, что $\alpha_{cr}(\infty) \sim 0{,}14$. Однако строгого обоснования существования α_{cr} и метода вычисления его величины не существует. Поскольку динамика модели тесно связана с ее термодинамикой, изучение поведения термодинамических параметров модели (1), в частности ее свободной энергии, представляет существенный интерес. К сожалению, строгих результатов, описывающих поведение свободной энергии модели (1), также практически нет. Естественно поэтому попытаться изучить поведение модели Хопфилда в сферическом пределе, когда спиновые переменные S_r имеют вид

$$S_r = (S_r^1, \ldots, S_r^n), \quad |S_r|^2 = n,$$

причем $n \to \infty$. Из общи" результатов [5] следует ожидать, что предельная модель будет и..эть вид

$$H^S = -\frac{1}{2}\sum_{r,r'=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{\alpha N} \frac{\xi_r^\mu \xi_{r'}^\mu}{N} x_r x_{r'} + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N} z_r x_r^2, \tag{2}$$

где "сферические поля" z_r принадлежат области $\mathcal{D}$, в которой матрица $\mathcal{J} = \left\{ z_r \delta_{r,r'} - N^{-1}\sum_\mu \xi_r^\mu \xi_{r'}^\mu \right\}_{r,r'=1}^{N}$ положительна, и удовлетворяют N условиям

$$\langle x_r^2 \rangle = 1, \quad r = 1, \ldots, N. \tag{3}$$

Основной результат настоящей работы заключается в доказательстве того, что модель Хопфилда в многокомпонентном пределе сведется не к модели (2), но к более простой сферической модели, в которой все z_r совпадают, а система (3) заменяется одним уравнением

$$H^S = -\frac{1}{2}\sum_{r,r'}\sum_{\mu=1}^{\alpha N} \frac{\xi_r^\mu \xi_{r'}^\mu}{N} x_r x_{r'} + z\sum_r x_r^2, \quad N^{-1}\sum_{r=1}^{N} \langle x_r^2 \rangle = 1. \tag{4}$$

Эту модель несложно проанализировать методами, разработанными в [6]. Они позволяют найти явные выражения для температуры фазового перехода, намагниченности, параметра Эдвардса – Андерсона модели, а также выяснить вопрос о существовании α_{cr}.

Для доказательства совпадения в многокомпонентном пределе свободных энергий моделей (1) и (4) используется метод, предложенный в работе [7]. Однако там рассуждения проведены в предположении, что $\sup \sum_{r'} |J_{r,r'}| < \infty$, которое в случае взаимодействия Хопфилда неверно, так как

$$\sum_{r'=1}^{N} \Big| \sum_{\mu=1}^{\alpha N} \frac{\xi_r^\mu \xi_{r'}^\mu}{N} \Big| \sim \sqrt{N}.$$

Поэтому вначале покажем, как модернизируется этот метод для гамильтониана

$$H^V = -\frac{1}{2} \sum_{r,r'} J_{r,r'} (S_r, S_{r'}), \quad S_r \in \mathbb{R}^n, \quad |S_r|^2 = n , \tag{5}$$

если матрица взаимодействия J_N удовлетворяет лишь условию $\overline{\lim\limits_{N\to\infty}} \| J_N \| = C < \infty$. Понятно, что это условие является в некотором смысле необходимым для перехода $n \to \infty$, так как в противном случае гауссовские интегралы в предельной сферической модели могут разойтись. Заметим, что для взаимодействия Хопфилда это условие, согласно результатам [8], выполнено.

Введем два вспомогательных гамильтониана $\Gamma^{1,2}(x)$:

$$\Gamma^i(x) = H^V(s) - n\sum_r a_2(\rho_r - 1) + 2nC\sum_{r=1}^{N} (\rho_r - 1)^{2i} +$$

$$+ \sum_r \varphi_n^i(a_r), \tag{6}$$

где $\rho_r^2 = n^{-1}(x_r, x_r)$, $\quad x_r \in \mathbb{R}^n$, $\quad S_r = \frac{x_r}{\rho_r}$;

$$a_r = -n^{-1} \sum J_{r,r'} (S_r, S_{r'}) + z_r ,$$

а $\varphi_n^i(a_r)$ – нормировочные члены, которые выбираются из условия

$$\int \exp\left\{-\beta\Gamma^i(\rho, S)\right\} \Pi \rho_r^{n-1} d\rho_2 = \exp\left\{-\beta H^V(s)\right\}. \tag{7}$$

Легко видеть, что

$$\varphi_n^i(a_r) = \beta^{-1} \ln \int_0^\infty \rho_r^{n-1} \exp\left\{-\beta n\left(a_r(\rho_r - 1) + 2C(\rho_r - 1)^{2i}\right)\right\} d\rho_r \tag{8}$$

удовлетворяют этому условию.

Из соотношения (7) следует, что Γ^i имеют ту же свободную энергию, что и H^Y.

Рассмотрим также n-мерную сферическую модель с гамильтонианом вида

$$H^S = -\frac{1}{2}\sum_{r,r'} J_{r,r'}(x_r, x_{r'}) + \frac{1}{2}\sum_r z_r((x_r, x_r) - n), \tag{9}$$
$$x_r \in R^n, \quad z_r \in D,$$

$$n^{-1}\langle (x_r, x_r)\rangle = 1. \tag{10}$$

Ясно, что ее свободная энергия совпадет со свободной энергией модели (2). Теперь к гамильтонианам (6) и (9) применим неравенство Н.Н.Боголюбова [9]

$$\frac{1}{\beta_n N}\langle \Gamma^1 - H^S\rangle_{\Gamma^1} \leq f(\Gamma^i) - f(H^S) \leq \frac{1}{\beta n N}\langle \Gamma^2 - H^S\rangle_{H^S}. \tag{11}$$

Однако

$$\Gamma^i - H^S = -\sum_{r,r'=1}^{N}\left(z_r\delta_{r,r'} - J_{r,r'}\right)(\rho_r - 1)(\rho_{r'} - 1)(S_r, S_{r'}) +$$
$$+ 2C\sum_r(\rho_r - 1)^{2i} + \sum_r \varphi_n^i(a_r).$$

Поэтому

$$\Gamma^1 - H^S \geq \sum_{r=1}^{N}\varphi_n^1(a_r); \quad \Gamma^2 - H^S \leq 2C\sum_{r=1}^{N}(\rho_r - 1)^4 + \sum_{r=1}^{N}\varphi_n^2(a_r). \tag{12}$$

Из неравенств (11), (12) видно, что достаточно оценить φ_n^1 снизу, а φ_n^2 – сверху. В первом случае заметим, что если $a_r \geq 0$, то

$$\beta\varphi_n^1(a_r) \geq \ln\int_0^1 \exp\left\{(n-1)\ln\rho - 2\beta n C(\rho - 1)^2\right\}d\rho \geq$$
$$\geq \ln\int_0^1 \exp\left\{(n - 1 + 2\beta n C)\ln\rho\right\}d\rho = \ln\frac{1}{n - 1 + 2\beta C n}.$$

Если $a_r < 0$, то

$$\beta\varphi_n^1(a_r) \geq \ln\int_1^\infty \exp\left\{-2\beta n C(\rho - 1)^2\right\}d\rho = \ln\sqrt{\frac{\pi}{2nC\beta}}.$$

Поэтому

$$\beta\varphi_n^1(a_r) \geq \frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{2nC\beta}. \tag{13}$$

Для того чтобы оценить $\varphi_n^2(a_r)$ сверху, воспользуемся методом Лапласа:

$$\beta\,\varphi_n^2(a_r) \le \ln \int_0^\infty \exp\Big\{-n(\beta a_r - 1)(\rho - 1) -$$

$$-2n\beta C(\rho-1)^4\Big\}\,d\rho = \left(\frac{|\beta a_r - 1|^{4/3}}{2(\beta C)^{1/3}} + \ln|\beta a_r - 1|^{1/3} + \right. \tag{14}$$

$$\left. + \,const\right)\big(1 + O(1)\big).$$

Поэтому нужно оценить только выражение

$$\Big\langle \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N}|\beta a_r - 1|^{4/3}\Big\rangle_{H^s} \le \frac{3^{1/3}}{N}\Big\langle \sum_r \Big|\sum_{r'} J^{z}_{r,r'}\frac{(x_r, x_{r'})}{n}\beta - 1\Big|^{4/3}\Big\rangle_{H^s} +$$

$$+\frac{3^{1/3}}{N}\sum_r\Big\langle\Big|\sum_{r'}\beta J^{z}_{r,r'}\rho_r(1-\rho_{r'})\frac{(S_r, S_{r'})}{n}\Big|^{4/3}\Big\rangle_{H^s} + \frac{3^{1/3}}{N}\sum_r\Big\langle\Big|\sum_{r'}J^{z}_{r,r'}(1-\rho_{r'})\,\times$$

$$\times\frac{(S_r, S_{r'})}{n}\Big|^{4/3}\Big\rangle_{H^s} = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3. \tag{15}$$

Для этого нам понадобится соотношение

$$\Big\langle\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{(x_{r_i}, x_{r_j}) - \langle(x_{r_i}, x_{r_j})\rangle}{n}\right)\Big\rangle_{H^s} \le \frac{K_m}{n^{m/2}}, \tag{16}$$

где K_m означают константы, не зависящие от N, n.

Это соотношение – следствие распадения корреляций при различных верхних индексах у x_r:

$$\Big\langle\prod_{i=1}^{m}\varphi\big(x_{r_i}^{k_i}\big)\Big\rangle = \prod_{i=1}^{m}\Big\langle\varphi\big(x_{r_i}^{k_i}\big)\Big\rangle\quad (k_i \ne k_j).$$

Пользуясь этим, а также тождеством

$$n^{-1}\sum_{r'}J^{z}_{r,r'}\langle(x_{r'}, x_{r'})\rangle_{H^s} = n^{-1}\langle(x_r, x_r)\rangle_{H^s} = \langle\rho_r^{r}\rangle_{H^s},$$

легко оценить Σ_1 из неравенства (15):

$$\Sigma_1 \le \frac{K'}{n} + \frac{1}{N}\Big\langle\sum_r(\rho_r^2 - 1)^2\Big\rangle_{H^s}. \tag{17}$$

Для оценки Σ_2 применим неравенство Гельдера и воспользуемся ограниченностью J_N. Получим

$$\Sigma_2 \le \Big\langle N^{-1}\sum_r\Big(\sum_{r'}J^{z}_{r,r'}(1-\rho_{r'})\Big)^2\Big\rangle_{H^s}^{2/3}\Big\langle\frac{1}{N}\sum_r|x_r|^3\Big\rangle_{H^s}^{1/3} \le$$

$$\le K'\left\langle \frac{1}{N}\sum_r \left(1-\rho_r^2\right)^2 \right\rangle_{H^s}^{2/3} .$$

Аналогично можно оценить и $\sum_3$. Окончательно получим

$$\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\pi}{2nC_\beta} \le f(H^v)-f(H^s) \le \frac{K'}{N}\sum_r\left(1-\langle\rho_r^2\rangle\right)^4+\frac{K^2}{\sqrt{n}} . \qquad (18)$$

Следовательно, если z_r выбраны из условий (10), то правая и левая части неравенства (15) стремятся к нулю, когда $n\to\infty$. Это доказывает асимптотическое совпадение при $n\to\infty$ свободных энергий моделей (5) и (9).

Вернемся теперь к модели Хопфилда. Выберем $z>(1+\sqrt{\alpha'})^2$. Тогда, как показано в [8], для достаточно больших .

$$J^z = zI - J_N > 0 .$$

Раскроем определитель матрицы J^z по r-му столбцу. Получим

$$\det(zI-J_N)=\left(z-\alpha-\sum_{r',r''}G^{N-1}_{r',r''}\frac{\xi_r^\mu\xi_{r'}^\mu\xi_r^\nu\xi_{r''}^\nu}{N^2}\right)\det(zI-J^r_{N-1}),$$

где J^r_{N-1} означает матрицу J_N с вычеркнутыми r-ми столбцом и строкой:

Отсюда

$$G^N_{r,r}=\left(z-\alpha-\sum_{r',r'',\mu,\nu}G^{N-1}_{r',r''}\frac{\xi_r^\mu\xi_{r'}^\mu\xi_r^\nu\xi_{r''}^\nu}{N^2}\right).$$

Заметим, что в силу независимости G^{N-1} от ξ_r^μ и ограниченности G_r^{N-1}

$$E\left\{\left(\sum_{r',r'',\mu\ne\nu}G_{r',r''}\frac{\xi_r^\mu\xi_{r'}^\mu\xi_r^\nu\xi_{r''}^\nu}{N^2}\right)^4\right\}\le\frac{const}{N^2} .$$

Поэтому

$$G^N_{r,r}=\left(z-\alpha-N^{-1}\sum_{r',r''}G^{N-1}_{r',r''}\sum_\mu\frac{\xi_{r'}^\mu\xi_{r''}^\mu}{N}\right)^{-1}+\varepsilon_N=$$

$$=\left(z-\alpha+1-\frac{z}{N}\sum_{r'}G^{N-1}_{r',r'}\right)^{-1}+\varepsilon_N=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{r'}G^N_{r',r'}+\varepsilon'_N ; \qquad E\{\varepsilon_N^4\}\to 0, \quad N\to\infty . \qquad (19)$$

Отсюда видно, что если z выбрано из условия

$$(\beta N)^{-1}\sum_{r=1}^{N} G_{r,r}^{N} = 1, \tag{20}$$

которое эквивалентно условию (4), то из неравенства (18) будет следовать, что в пределе $n, N \to \infty$ свободные энергии, отвечающие гамильтонианам (1) и (4), совпадут.

В пределе $N \to \infty$ уравнение (20) примет вид

$$\frac{1}{\beta}\int_0^{(1+\sqrt{\alpha})^2} \frac{d\nu(\lambda)}{z-\lambda} = 1, \tag{21}$$

где интегрированная плотность состояний $\nu(\lambda)$ может быть получена из следующего соотношения для $m(z)$ – предела $N^{-1}\sum G_{r,r}$ при $N \to \infty$:

$$m(z)(z-\alpha+1 - z\,m(z)) = 1\ . \tag{22}$$

Это соотношение – непосредственное следствие формулы (19), которая справедлива и при всех невещественных z (см. также работу [10], где впервые был получен этот результат). Итак,

$$\nu(\lambda,\alpha) = \nu_1(\lambda,\alpha) + \nu_2(\lambda,\alpha),$$

где

$$\frac{d\nu_1}{d\lambda} = \begin{cases}(1-\alpha)\delta(\lambda), & 0 \le \alpha < 1,\\ 0, & \alpha \ge 1,\end{cases}$$

$$\frac{d\nu_2}{d\lambda} \begin{cases}\dfrac{\sqrt{4\alpha-(\lambda-\alpha-1)^2}}{2\pi\lambda}, & (\lambda-\alpha-1)^2 \le 4\alpha,\\ 0 & (\lambda-\alpha-1)^2 > 4\alpha.\end{cases}$$

Теперь из соотношений (21), (22) видно, что при

$$\beta < \beta_{cr} = \int_0^{(1+\sqrt{\alpha})^2} \frac{d\nu(\lambda)}{(1+\sqrt{\alpha})^2-\lambda} = \frac{1}{1+\sqrt{\alpha}} \qquad z = \frac{1}{\beta} + \frac{\alpha}{1-\beta},$$

при $\beta \ge \beta_{cr}$ $z = (1+\sqrt{\alpha})^2$, т.е. β_{cr} – точка фазового перехода. Механизм его заключается в "прилипании" к верхней границе спектра J_N. Намагниченность при всех β остается 0, а параметр Эдвардса – Андерсона самоусредняется и имеет вид

$$q_{EA} = 1 - \frac{1}{\beta(1+\sqrt{\alpha})}. \tag{23}$$

Введение внешнего поля h_μ с независимыми одинаково распределенными компонентами, имеющими среднее значение 0, дисперсию h^2 и не зависящими от ξ_r^μ, снимет этот переход. В самом деле, в этом случае исходные сферические условия (3) при $h \neq 0$ могут быть сведены к одному соотношению:

$$\frac{1}{\beta} \int \frac{d\nu(\lambda)}{z - \lambda} + h^2 \int \frac{d\nu(\lambda)}{(z-\lambda)^2} = 1 . \qquad (24)$$

Однако поскольку

$$\int \frac{d\nu(\lambda)}{(z-\lambda)^2} \to \infty , \quad z \to (1+\sqrt{\alpha})^2,$$

это уравнение при всех β имеет единственное решение $z(\beta)$. Это означает, что фазовый переход отсутствует. Другим способом снятия фазового перехода является введение поля

$$h_r = \varepsilon \xi_r^{\mu} , \quad 1 \leq \mu \leq \alpha N .$$

В этом случае сферические условия (3) при $N \to \infty$ сведутся к уравнению

$$\left(\frac{1}{\beta} - \varepsilon^2 \right) \int \frac{d\nu(\lambda)}{z - \lambda} + z\varepsilon^2 \int \frac{d\nu(\lambda)}{(z-\lambda)^2} = 1,$$

которое, как и уравнение (24), при всех β имеет единственное решение.

Что же касается $\alpha_{cr}(\beta)$ как точки нарушения аналитичности по α свободной энергии, то из соотношений (23) легко видеть, что при $\beta < \beta_{cr}$ $\alpha_{cr} = \infty$, а при $\beta > \beta_{cr}$ $\alpha_{cr} = 1$.

Перечисленные результаты показывают, что, к сожалению, модель Хопфилда в многокомпонентном пределе демонстрирует иное критическое поведение, чем то, которое ожидается при конечном N.

В заключение заметим, что метод, изложенный в настоящей работе, позволяет также обосновать многокомпонентный предельный переход для модели Шеррингтона - Киркпатрика. В пределе также получится сферическая модель с одним z . Эта модель без обоснования ее предельного статуса подробно изучена в работе [11].

1. Little W.A. The existense of persistent states in teh brain// Math. Biosci. 9 1974. - 19. - P. 13101-13109.
2. Hopfield J.J. Neural Networks and physical system with emeregent computational Abilities // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. - 1982. - 79. - P. 2554-2558.
3. Amit D.J., Gutfreund H., Sompolinsky H. Storing infinite nambers of patterns in a spin glass model of neural networks // Phys. Rev. Lett. - 1985. - 55. - P. 1530-1534.
4. Загребнов В.А., Чвыров А.С. Модель Литтла - Хопфилда: рекуррентные соотношения для величины ошибки восстановления образов // Журн. экспер. и теорет. физики. - 1989. - 95. - Вып. 1. - С. 271-279.
5. Knops H. Infinite spin dimensionality limit for nontranslationally invariant interection // J. Math. Phys. - 1973. - 14, N 1. - P. 1918-1920.

6. Pastur L.A. Disodered spherical model // J. Stat. Phys. - 1982. - 27, N 2. - P. 119-151.
7. Щербина М.В. Сферический предел n-векторных корреляций // Теорет. и мат. физика. - 1988. - 77, № 3. - С. 460-471.
8. Гирко В.А. Предельные теоремы для сумм функций распределений собственных чисел случайных симметричных матриц // Укр. мат. журн. - 1989. - 41, № 1. - С. 23-29.
9. Боголюбов Н.Н. (мл.), Бранков Й.Г., Загребнов В.А. Метод аппроксимирующего гамильтониана в статистической физике. - София : Изд-во БАН, 1981. - 245 с.
10. Marchenko V.A., Pastur L.A. Distribution of eigenvalues for some sets of rendom matrices // Math. Sb. - 1967. - 1, N 4.- P. 457-483.
11. Kosterlitz J., Thouless D., Jones K. Spherical model of a spin g'ass // Phys. Rev. Lett. - 1976. - 36, N 20. - P.1217-1220.

Научное издание

ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ,
СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Сборник научных трудов

Художественный редактор Л.А.Комяхова
Технический редактор Т.К.Валицкая
Оператор В.Ф.Политова
Корректоры А.Ф.Коровниченко, Н.Б.Кудрявцева

ИБ № 11418

Сдано в набор 06.02.91. Подп. в печ. 25.07.91. Формат 60x84/16.
Бум. офс. № 1. Офс. печ. Усл. печ. л. 10,23. Усл. кр.-отт. 10,46.
Уч.-изд. л. 8,01. Тираж 510 экз. Заказ 1-626 Цена 2 р. 40 к.

Оригинал-макет подготовлен в издательстве "Наукова думка". 252601 Киев 4, ул. Репина, 3.
Киевская книжная типография научной книги. 252004 Киев 4, ул. Репина, 4.

НОВЫЕ КНИГИ ИЗДАТЕЛЬСТВА "НАУКОВА ДУМКА"

Динамические системы и комплексный анализ: Сб. науч. тр. - 10 л. - Яз. рус. - 2 р.

Теория динамических систем является в настоящее время одной из наиболее интенсивно развивающихся областей современной математики. Важной чертой этой теории является ее тесная связь с комплексным анализом. Статьи, относящиеся к этой проблеме, составляют основную часть сборника. К числу наиболее важных результатов, представленных в сборнике, относится полное описание динамических систем, возникающих при изучении предельных множеств целых функций. Уделено внимание решению вопроса об аналитических функциях, сохраняющих множества Жюлиа динамической системы, порожденной итерациями рациональных функций. Проведено исследование конформных отображений, связанных с итерациями многочленов. Представлены также статьи по теории функций комплексного переменного, в том числе статья, в которой систематически изучаются почти периодические функции многих комплексных переменных. Ряд исследований относится к функциональному анализу. В частности, доказано, что группы Ли образуют борелевское подмножество во множестве всех локально компактных групп. Рассмотрена также обратная задача электромагнитного зондирования, изучена обобщенная проблема моментов.

Для специалистов в области теории динамических систем и комплексного анализа, преподавателей вузов, студентов.

Голод П.И., Климык А.У. Математические аспекты теории симметрий. - 1992. - 18 л. - Яз. укр. - 3 р. 90 к.

В монографии изложены как традиционные, так и современные методы теории групп и алгебр Ли, конечных и дискретных групп, а также других алгебраических структур, которые составляют математический аппарат исследования симметрий в физике и широко используются в теории поля, теории элементарных частичек и ядра, теории твердого тела, в квантовой химии. Даны основы теории афинных алгебр, квантовых групп, а также их представлений.

Для специалистов в области теоретической и математической физики, аспирантов, студентов физических и математических факультетов университетов.

Приобрести эти издания, если предварительно оформлен заказ, можно в 1992 г. в местных книжных магазинах.

Просим пользоваться услугами магазина издательства "Наукова думка" (252001 Киев 1, ул. Кирова, 4). Иногородним покупателям магазин высылает книги почтой (наложенным платежом).