ИССЛЕДОВАНИЯ

ПО ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯМ

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯМ

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

КИЕВ „НАУКОВА ДУМКА" 1979

УДК 517.4 + 517.53 + 517.9

В сборнике рассматриваются актуальные вопросы теории операторов и дифференциальных уравнений, теории функций, функционального анализа и их приложений. Исследовано асимптотическое проведение решений первой краевой задачи для уравнения теплопроводности с подвижной мелкозернистой границей. Изучена задача электростатики в областях с мелкозернистой границей, асимптотическое поведение температурного поля при больших значениях времени в случае разогрева неоднородных тел. Установлена осцилляционная теорема для систем дифференциальных уравнений Дирака и Штурма - Лиувилля на оси, найдено условие разрешимости неоднородных уравнений типа свертки.

Рассчитан на специалистов по дифференциальным уравнениям и математическому анализу.

Редакция информационной литературы

М $\dfrac{20204-279}{М\ 221(04)-79}$ БЗ-47-6-78 1702050000

С О Д Е Р Ж А Н И Е

УДК 513.88 + 519.46

С.И.Безуглый, В.Я.Голодец

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПОЛНЫХ ГРУПП АВТОМОРФИЗМОВ ПРОСТРАНСТВ ЛЕБЕГА

Полные группы автоморфизмов пространства с мерой впервые были введены Даем [1-2], а затем изучались многими исследователями [3-7 и др.]. Это привело к значительному прогрессу в изучении и классификации динамических систем с точностью до слабой эквивалентности [5,8].

Исследуются топологические свойства полных групп автоморфизмов, оставляющих меру квазиинвариантной. В первом пункте рассматривается группа $\mathfrak{A}$ всех автоморфизмов пространства Лебега. Доказывается, что топологии,порожденные на группе $\mathfrak{A}$ метриками d и δ (см. [9] или ниже п.1) эквивалентны, а любая полная группа будет топологической. Во втором пункте устанавливается линейная связность полных групп автоморфизмов, а затем доказывается их односвязность. В третьем пункте доказана теорема об общем виде замкнутых нормальных делителей полной группы. В последнем пункте доказывается, что множество автоморфизмов из полной группы, сопряженных с данным апериодическим автоморфизмом, всюду плотно во множестве всех апериодических автоморфизмов этой группы (ср. с данными работы [9], с.74).

В основном мы пользуемся определениями и понятиями, приведенными в работе [9]. Автоморфизмы рассматриваются с точностью до изменения на множестве меры нуль. Корректность всех конструкций по отношению к переходу к таким классам автоморфизмов, как правило, особо не оговаривается.

1. Автоморфизм g пространства Лебега (M, Γ, μ) оставляет меру μ квазиинвариантной, если меры μ и μg ($\mu g(A) = \mu(gA)$, $A \in \Gamma$ эквивалентны.

Группу всех классов, тождественных mod 0 автоморфизмов пространства Лебега (M, Γ, μ), оставляющих меру квазиинвариантной будем обозначать через $\mathfrak{A}$.

Для $g \in \mathfrak{A}$ и $\varepsilon > 0$ будем обозначать через $\eta(g, \varepsilon)$ такое положительное число, что как только $\mu A < \eta(g, \varepsilon)$, то $\mu(gA) < \varepsilon$ $(A \in \Gamma)$.

Положим для любых $g, h \in \mathfrak{A}$

$$D(g,h) = \left\{ x \in M \mid gx \neq hx \right\},$$

$$d_\mu(g,h) = \mu D(g,h), \tag{1}$$

$$\delta_\mu(g,h) = \sup_{A \in \Gamma} \mu(gA \Delta hA), \tag{2}$$

где Δ – знак симметрической разности множеств. Очевидно, для любого $g_0 \in \mathfrak{A}$

$$d_\mu(d,h) = d_\mu(g_0 g, g_0 h), \ \delta_\mu(g,h) = \delta_\mu(g g_0, h g_0). \tag{3}$$

Легко проверить, что (1), (2) задают метрики d_μ и δ_μ на группе $\mathfrak{A}$.

Заметим, что мера μ эквивалентна ν, тогда и только тогда, когда топологии $\tilde{d}_\mu$ и $\tilde{d}_\nu$ (δ_μ и $\tilde{\delta}_\nu$), порожденные на группе $\mathfrak{A}$ метриками d_μ и d_ν (δ_μ и δ_ν), эквивалентны. Поэтому всюду ниже будем рассматривать только топологии $\tilde{d} = \tilde{d}_\mu$ и $\tilde{\delta} = \tilde{\delta}_\mu$.

Введем обозначение

$$U_\varepsilon^d(g) = \left\{ h \in \mathfrak{A} \mid d(g,h) < \varepsilon \right\}, \quad \varepsilon > 0, \quad g \in \mathfrak{A}.$$

Аналогично определим $U_\varepsilon^\delta(g)$.

<u>Лемма I.I</u>. Пусть e – тождественный автоморфизм, $\varepsilon > 0$. Тогда

$$U_{2\varepsilon}^d(e) \supset U_\varepsilon^\delta(e) \supset U_\varepsilon^d(e). \tag{4}$$

<u>Доказательство</u>. Правое включение следует из соотношения

$$gA \Delta hA \subset gD(g,h) = D(g^{-1}, h^{-1}), \quad g, h \in \mathfrak{A}, \ A \in \Gamma. \tag{5}$$

Докажем левое включение. Пусть $h \in U_\varepsilon^\delta(e)$, а $A \in \Gamma$ – максимальное по мере множество со свойствами $A \subset D(h,e)$, $A \cap hA = \phi$. Тогда [9]

$$h^{-1}A \cup A \cup hA = D(h,e).$$

Так как $\mu(A \cup hA) \leq \delta(h,e) < \varepsilon$ и $\mu(h^{-1}A) < \varepsilon$, то $d(h,e) \leq$ $\leq \mu(h^{-1}A) + \mu(A \cup hA) < 2\varepsilon$. Лемма доказана.

<u>Теорема 1.2</u>. Топологии $\tilde{d}$ и $\tilde{\delta}$ на $\mathfrak{A}$, порожденные метриками d и δ, эквивалентны. $\mathfrak{A}$ – топологическая группа и полное метрическое пространство относительно топологии $\tilde{d}$.

<u>Доказательство</u>. Покажем, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\xi > 0$, что

$$U_\varepsilon^d(h) \supset U_\xi^\delta(h), \qquad h \in \mathfrak{A}.$$

Определим $\xi = \frac{1}{2}\rho(h^{-1}, \varepsilon)$. Тогда, если $\delta(f,h) < \xi$ $(f \in \mathfrak{A})$, то применяя (3), (4) и (5), получим, что $d(f,h) < \varepsilon$.

Аналогично устанавливается, что для всякого $\xi > 0$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\xi^\delta(h) \supset U_\varepsilon^d(h)$.

Далее, покажем, что функции $\varphi_1(h) = h^{-1}$ и $\varphi_2(g,h) = gh$ непрерывны. Непрерывность $\varphi_1(h)$ следует из (5). Для доказательства непрерывности $\varphi_2(g,h)$ покажем, что для любых $\varepsilon > 0$, $g_0, h_0 \in \mathfrak{A}$ существуют $\tau_1 > 0$ и $\tau_2 > 0$ такие, что при $h \in U_{\tau_1}^d(h_0)$, $g \in U_{\tau_2}^d(g_0)$, имеем $gh \in U_\varepsilon^d(g_0h_0)$.

Положим $\tau_1 = \frac{1}{2}\varepsilon$. Из эквивалентности топологий $\tilde{d}$ и $\tilde{\delta}$ следует, что по $\varepsilon > 0$ можно выбрать $\xi > 0$ таким, чтобы из $\delta(gh, g_0h) < \xi$ вытекало бы неравенство $d(gh, g_0h) < \frac{1}{2}\varepsilon$. По той же причине для любого $\xi > 0$ существует $\tau_2 > 0$ такое. что из $d(g, g_0) < \tau_2$ следует $\delta(gh, g_0h) = \delta(g, g_0) < \xi$. Так как

$$d(gh, g_0h_0) \leq d(h_0, h) + d(gh, g_0h),$$

то получаем, что $gh \in U_\varepsilon^d(g_0h_0)$.

То, что $\mathfrak{A}$ – полное метрическое пространство с метрикой d, доказывается так же, как и в работе [9]. Теорема доказана.

<u>Следствие 1.3</u>. Любая полная подгруппа $[G] \subset \mathfrak{A}$ является топологической группой.

2. Автоморфизм $h \in \mathfrak{A}$ назовем периодическим, если

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n(h), \tag{6}$$

где $M_n(h) \in \Gamma$ – множество, на котором h имеет период n (т.е. $M_n(h) \cap M_m(h) = \emptyset$ при $n \neq m$).

Если $M = \bigcup_{1 \le n \le N} M_n(h)$, то найдется число $L \in N$ такое, что $h^L x = x$ почти для всех $x \in M$. Наименьшее из таких чисел будем обозначать через $L(h)$.

<u>Теорема 2.1</u>. Для любого автоморфизма $g \in \mathfrak{A}$ и произвольного $n \in N$ существует периодический автоморфизм $h \in [g]$ такой, что $g(g,h) < \frac{1}{n}$ и $L(h) =$ н.о.к. $(n, n+1, \ldots, 2n-1)$, т.е. для автоморфизма h, существование которого утверждается в теореме 2.1., $\mu M_i(h) > 0$ только при $i = n, n+1, \ldots, 2n-1$

Всюду ниже буквой G будем обозначать произвольную полную подгруппу $(G = [G])$ группы $\mathfrak{A}$. Для множества $A \in \Gamma (\mu A > 0)$ через h_A обозначим производный автоморфизм. Если h периодический автоморфизм, то возможно, что $\mu \{x \in A \mid h_A x = x\} > 0$.

<u>Определение</u>. Под линией $f(t;\, g_0,\, g_1;\, G)$, соединяющей автоморфизм g_0 с автоморфизмом g_1 $(g_0, g_1 \in G)$ и лежащий в G, будем понимать непрерывное отображение $f(t)$ отрезка $[0,1]$ в G такое, что $f(0) = g_0$, $f(1) = g_1$. Такую линию будем обозначать также через $f(t)$ там, где это не вызовет сомнений.

<u>Лемма 2.2</u>. Пусть есть два произвольных периодических автоморфизма h_0 и h_1 из G, у которых $L(h_0) < \infty$, $L(h_1) < \infty$. Тогда существует линия $g(t) = g(t;\, h_0,\, h_1;\, G)$ со следующими свойствами: а) $d(g(t), h_i) \le d(h_0, h_1)$ при $t \in [0,1]$, $i = 0,1$; б) линия $g(t)$ состоит из периодических автоморфизмов, причем $L(g(t)) \le L(h_0) L(h_1)$.

<u>Доказательство</u>. Возьмем семейство множеств $X(t) \in \Gamma$ такое, что $h_0 X(t) = X(t)$, $\mu(X(t)) = t$, $X(t') \supset X(t)$ при $t' > t$ $(t, t' \in [0,1])$. Положим $A(t) = D(h_0, h_1) \cap X(t)$ и $S(t) = \bigcup_{0 \le i < L(h_0)} h_0^i A(t)$. Тогда $h_0 S(t) = S(t)$ и при $t \to t_0$

$$\mu(S(t) \Delta S(t_0)) \to 0.$$

Определим преобразование $g(t)$ пространства M следующим образом:

$$g(t)x = \begin{cases} h_0 x, & x \in M - S(t), \\ h_1 x \, (= h_0 x), & x \in (M - D(h_0, h_1)) \cap S(t), \\ h_{1B(t)} x, & x \in D(h_0, h_1) \cap S(t) = B(t). \end{cases}$$

Можно заметить, что $g(t)$ автоморфизм из G для всех $t \in [0,1]$, причем $g(0) = h_0$, а $g_1(1) = h_1$ и $g(t)$ удовлетворяет условиям (a) и $(б)$.

Теорема 2.3. Группа G линейно связана.

Доказательство легко следует из леммы 2.2. и теоремы 2.1.

Перейдем к доказательству односвязности полных групп автоморфизмов.

Лемма 2.4. Пусть $f(t)$ произвольная непрерывная линия, состоящая из периодических автоморфизмов таких, что $f(t) \in G$, $L(f(t)) \leq N$, $N \in \mathbb{N}$ для всех $t \in [0,1]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\eta_0 > 0$ такое, что как только $\mu A < \eta_0$ $(A \in \Gamma)$, то $\mu\left(\bigcup_{1 \leq k < L(f(t))} (f(t))^k A\right) < \varepsilon$ при всех $t \in [0,1]$.

Доказательство. Из равномерной непрерывности линий $(f(t))^i$ $i = 1, 2, \ldots, N-1$ следует, что для всякого $\gamma > 0$ существует $\tau > 0$ такое, что при $|t - t_0| < \tau$

$$d((f(t))^i, \quad (f(t_0))^i) < \gamma, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{7}$$

Согласно теореме I.3, для любого $\xi > 0$ и $A \in \Gamma$ существует такое $\gamma > 0$, что из (7) получаем

$$\mu((f(t))^i A \,\Delta\, (f(t_0))^i A) < \xi, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1$$

и при $|t - t_0| < \tau$

$$\mu((f(t))^i A) < \xi + \mu((f(t_0))^i A). \tag{8}$$

Разобьем отрезок $[0,1]$ на конечное число интервалов $[t_k, t_{k+1}]$ так, чтобы $|t_{k+1} - t_k| < \tau$ при всех k. Положим (см. п.I)

$$\eta_0^{(i)} = \min_k \eta((f(t_k))^i, \xi). \tag{9}$$

Тогда из (8) и (9) при $\mu A < \eta_0^{(i)}$

$$\mu((f(t))^i A) < 2\xi$$

для любого $t \in [0,1]$. Положим $\xi = \frac{1}{2N}\varepsilon$ и $\eta_0 = \min_{0 \leq i \leq N} \eta_0^{(i)}$. Если теперь $\mu A < \eta_0$, то

$$\mu\left(\bigcup_{1 \leq i \leq L(f(t))} (f(t))^i A\right) \leq \sum_{i=1}^{N-1} \mu((f(t))^i A) < \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Лемма 2.5. Для произвольных замкнутых линий $f(t) = f(t; e, e; G)$, $\varphi(t) = \varphi(t; e, e; G)$, состоящих из периодических автоморфизмов таких, что $L(f(t)) \leq N$, $L(\varphi(t)) \leq N$ $(N \in \mathbb{N},\ t \in [0,1])$, существует непрерывное по совокупности переменных семейство линий $g_s(t) = g_s(t; e, e; G)$ $(0 \leq s \leq 1)$, удовлетворяющее условиям

$$g_0(t) = f(t), \qquad g_1(t) = \varphi(t).$$

Доказательство. Для каждого $s \in [0,1]$ разобьем M на два непересекающихся множества A_s и A_{1-s} из Γ такие, что $\mu A_s = s$, $A_s \supset A_{s_0}$ при $s > s_0$. Определим автоморфизм $g_s(t)$ $(s, t \in [0,1])$ следующим образом:

$$g_s(t)x = \begin{cases} f(t)_{A_{1-s}} x, & x \in A_{1-s}, \\ \varphi(t)_{A_s} x, & x \in A_s. \end{cases}$$

Очевидно, что $g_s(t) = g_s(t; e, e; G) \in G$.

Покажем, что при фиксированном s линия $g_s(t)$ непрерывна по t. Действительно, так как

$$A_{1-s} \cap D(g_s(t), g_s(t_0)) \subset X(t, t_0) = \bigcup_{0 \leq k < L(f(t_0))} (f(t_0))^{k} D(f(t_0), f(t))$$

и $g_s(t)A_{1-s} = A_{1-s}$, то при $t \to t_0$ $d(g_s(t), g_s(t_0)) \to 0$.

Докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $r(\varepsilon) > 0$, что как только $|s - s_0| < r(\varepsilon)$, то $d(g_s(t), g_{s_0}(t)) < \varepsilon$ при всех $t \in [0,1]$.

Рассмотрим следующие множества:

$$B_{s,s_0} = A_{1-s} \Delta A_{1-s_0} = A_s \Delta A_{s_0},$$

$$Z_{s,s_0}(t) = \bigcup_{0 \leq k < L(f(t))} (f(t))^{-k} B_{s,s_0},$$

$$Y_{s,s_0}(t) = \bigcup_{0 \leq k < L(\varphi(t))} (\varphi(t))^{-k} B_{s,s_0}.$$

Так как $\mu B_{s,s_0} = |s - s_0|$, то согласно лемме 2.4 $\mu Z_{s,s_0}(t) \to 0$ и $\mu Y_{s,s_0}(t) \to 0$ равномерно по $t \in [0,1]$ при $|s - s_0| \to 0$. Пусть, например, $A_{1-s} \supset A_{1-s_0}$. Тогда

$$M-D(g_{s_0}(t), g_s(t)) \supset (A_{1-s_0} \cap (M-Z_{s-s_0}(t))) \cup (A_s \cap (M-Y_{s,s_0}(t))),$$

откуда и следует нужное нам утверждение.

Лемма доказана.

Лемма 2.5 остается справедливой, если одна из линий, например $\varphi(t)$, равна единичной (т.е. $\varphi(t)=e$ при всех $t\in[0,1]$).

Теорема 2.6. Всякая замкнутая линия $f(t)=f(t;e,e;G)$ гомотопна единичной линии, т.е. группа G односвязна.

Доказательство. Возьмем убывающую последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, сходящуюся к нулю. Для ε_n выберем точки $\{t_k^{(n)}\}_{k=0}^{N_n}$ $(N_n\in\mathbb{N})$ так, чтобы $t_0^{(n)}=0$, $t_{N_n}^{(n)}=1$ и при

$$t\in[t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}] \quad d(f(t), f(t_k^{(n)}))<\varepsilon_n \qquad (k=0,1,\dots,N_n-1,\ n\in\mathbb{N}).$$

Согласно теореме 2.1, существуют периодические автоморфизмы $h_k^{(n)}$, удовлетворяющие условиям

$$h_0^{(n)}=h_{N_n}^{(n)}=e, \quad d(h_k^{(n)}, f(t_k^{(n)}))<\varepsilon_n, \quad k=0,1,\dots,N_n-1,\ n\in\mathbb{N}.$$

Тогда

$$d(h_k^{(n)}, h_{k+1}^{(n)})<3\varepsilon_n.$$

Применяя лемму 2.2, построим линию $g^{(n)}(t)=g^{(n)}(t;e,e;G)$, проходящую через точки $\{h_k^{(n)}\}_{k=0}^{N_n}$ $(n\in\mathbb{N})$. Линия $g^{(n)}(t)$ равномерно приближает линию $f(t)$

$$d(g^{(n)}(t), f(t))<5\varepsilon_n. \tag{10}$$

Согласно лемме 2.5, существуют непрерывные семейства линий $h_s^{(n)}(t)=h_s^{(n)}(t;e,e;G)$ $0\le s<1$ такие, что $h_0^{(0)}(t)=$
$=e$, $h_1^{(0)}(t)=g^{(1)}(t)$, $h_0^{(n)}(t)=g^{(n)}(t)$,
$h_1^{(n)}(t)=g^{(n+1)}(t)$ $(n=0,1,2,\dots)$.

Положим

$$f_s(t)=f_s(t;e,e;G)=\begin{cases} h^{(n)}_{\theta_n(s)}(t) & \text{при } s\in[1-\frac{1}{n+1}, 1-\frac{1}{n+2}] \\ & n=0,1,2,\dots \\ f(t) & \text{при } s=1, \end{cases}$$

где $\theta_n(s)$ – линейное, сохраняющее ориентацию отображение отрезка $[1-\frac{1}{n+1}, 1-\frac{1}{n+2}]$ на $[0,1]$.

Из (10) видно, что семейство линий $f_s(t)$ непрерывно при $s \to 1$. Доказательство закончено.

3. Введем обозначения

$$Z_G = \left\{ A \in \Gamma \mid gA = A \text{ для всех } g \in G \right\},$$

$$G_\rho = \left\{ g \in G \mid gx = x, \qquad x \in M - \rho \right\}, \ \rho \in \Gamma.$$

Известно [3], что если K – полная нормальная подгруппа G, то $K = G_\rho$ для некоторого $\rho \in Z_G$. В этом пункте докажем более сильное утверждение.

<u>Теорема 3.1</u>. Пусть K – замкнутый нормальный делитель группы G. Тогда существует такое множество $\rho \in Z_G$, что $K = G_\rho$.

Для групп, сохраняющих меру автоморфизмов, эту теорему доказал Дай [2].

<u>Лемма 3.2</u>. Если K – нормальный делитель группы G, то и $[K]$ будет нормальным делителем G.

Доказательство легко следует из определения полной группы.

Следовательно, утверждение теоремы 3.1 вытекает из следующей теоремы.

<u>Теорема 3.3</u>. Если K – замкнутый нормальный делитель группы G и $[K] = G$, то $K = G$.

<u>Доказательство</u>. Так как из теоремы 2.1 следует, что множество периодических автоморфизмов $\alpha \in G$ с $L(\alpha) < \infty$ образует всюду плотное множество в группе G, то достаточно показать, что для любого периодического $\alpha \in G$ и $\xi > 0$ существует $w \in K$ такой, что $d(\alpha, w) < \xi$.

Пусть J – конечное множество периодов автоморфизма α, для которого $\mu M_i(\alpha) > 0$ при $i \in J$, а Q_i – фундаментальное множество для α на $M_i(\alpha)$ (см. п.2).

Для произвольного $n \in N$ в группе G_{Q_i} выделим периодический автоморфизм g_i с периодом $n+3$ и множества $P'_{-2}(i)$ такие, что

$$\bigcup_{0 \le j \le n+2} g_i^j P'_{-2}(i) = Q_i, \qquad g_i^{j_1} P'_{-2}(i) \cap g_i^{j_2} P'_{-2}(i) = \emptyset$$

при $j_1 \ne j_2, \quad j_1, j_2 = 0, 1, \ldots, n+2, \ i \in J.$

Определим автоморфизмы $g(i) \in G$:

$$g(i)x = \begin{cases} \alpha^j g_i \alpha^{-j} x, & x \in \alpha^j Q_i, \quad j=0,1,\dots,i-1, \\ x, & x \in M - M_i(\alpha), \quad i \in J. \end{cases}$$

Введем обозначения

$$P_j'(i) = g_i^{j+2} P_{-2}'(i), \qquad i \in J, \; j = -1, 0, \dots, n,$$

$$P_j(i) = \bigcup_{0 \le k < i} \alpha^k P_j'(i), \qquad i \in J, \; j = -2, -1, \dots n.$$

Несколько модифицируя рассуждения Дая [2] получим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует подмножество $C_j(i) \subset P_j(i)$ и $\rho_j(i) \in K$ такие, что $\mu(P_j(i) - C_j(i)) < \varepsilon$, $\rho_j(i) C_j(i) \subset P_0(i)$, $\rho_j(i)^2 x = x$ при $x \in C_j(i) \cup \rho_j(i) C_j(i)$ и $\rho_j(i) x = x$ при $x \in M - (C_j(i) \cup P_0(i) \cup P_{-1}(i) \cup P_{-2}(i))$ $(j = 1, 2, \dots, n; \; i \in J)$.

По $\xi > 0$ выберем $n \in N$ таким, чтобы $\frac{3}{n+1} < \frac{1}{2} \rho(\alpha^{-1}, \xi)$, и положим $\varepsilon = \frac{1}{2|J|n} \rho(\alpha^{-1}, \xi)$. Считаем, что $P_j(i)$ занумерованы так, что $\mu P_{-2}(i) < \frac{1}{n+3} \mu M_i(\alpha)$, $\mu P_{-1}(i) \le \frac{1}{n+2} \mu M_i(\alpha)$, $\mu P_0(i) \le \le \frac{1}{n+1} \mu M_i(\alpha)$.

Положим

$$\alpha_j(i) x = \begin{cases} \alpha x, & x \in P_j(i), \\ x, & x \in M - P_i(i), \end{cases}$$

$$w_j(i) = \rho_j(i)^{-1} \alpha_j(i)^{-1} \rho_j(i) \alpha_j(i),$$

$$w(i) = \prod_{j=1}^{n} w_j(i), \qquad w = \prod_{i \in J} w(i), \quad j = 1, 2, \dots, n; \; i \in J.$$

Очевидно, $w \in K$ и при $x \in \bigcup_{i \in J} \bigcup_{j=1}^{n} \alpha_j(i)^{-1} C_j(i)$ имеем $wx = \alpha x$. Оценим теперь $d(\alpha, w)$

$$\mu\Big(\bigcup_{i \in J} \bigcup_{j=1}^{n} C_j(i)\Big) > 1 - \rho(\alpha^{-1}, \xi).$$

Поэтому

$$1 - d(\alpha, w) > \mu\Big(\bigcup_{i \in J} \bigcup_{j=1}^{n} \alpha_j(i)^{-1} C_j(i)\Big) > 1 - \xi.$$

Теорема доказана.

4. Пусть $\mathfrak{N}_G$ – множество всех апериодических автоморфизмов группы G.

Теорема 4.1. Для всякой полной группы G множество автоморфизмов $\alpha g \alpha^{-1}$ $(\alpha \in G)$, сопряженных с произвольным автоморфизмом $g \in \mathfrak{N}_G$, всюду плотно в $\mathfrak{N}_G$.

Доказательство. 1. Предположим, что G имеет тип II_1 и пусть мера ν эквивалента μ и G-инварианта. Из эквивалентности топологий $\tilde{d}_\nu$ и $\tilde{d}$ и из справедливости утверждения теоремы для меры ν [9] вытекает ее справедливость и для меры μ.

2. Пусть G имеет тип III. Тогда для любых множеств A и B из Γ существует $\beta \in G$ такой, что $\beta A = B$. Применяя теорему 2.1 для автоморфизмов g и любого $f \in \mathfrak{N}_G$, построим последовательности периодических автоморфизмов $\{h_n\}$ и $\{p_n\}$ из G такие, что $d(g, h_n) \to 0$ и $d(f, p_n) \to 0$ при $n \to \infty$ и $\mu M_i(h_n) > 0$ тогда и только тогда, когда $\mu M_i(p_n) > 0$, $i = 1, 2, \ldots, L(h_n)$ $(L(h_n) = L(p_n))$, $n \in N$. Следовательно, существуют $\alpha_n \in G$, для которых $p_n = \alpha_n h_n \alpha_n^{-1}$. Имеем

$$d(\alpha_n g \alpha_n^{-1}, f) \leq d(g\alpha_n^{-1}, h_n \alpha_n^{-1}) + d(p_n, f). \tag{11}$$

Из теоремы 1.3 следует, что $d(g\alpha_n^{-1}, h_n\alpha_n^{-1}) \to 0$ $(n \to \infty)$ и с учетом (11) доказывает теорему.

3. Пусть G имеет тип II_∞. Будем поступать так же, как и в предыдущем случае, заметив, что множества $M_i(h_n)$, $M_i(p_n)$ $i = 1, 2, \ldots, L(h_n)$, $n \in N$ можно всегда выбрать такими, чтобы p_n и h_n были сопряжены автоморфизмом из G.

Теорема доказана.

Литература

1. Dye H.A. On groups of measure preserving transformation I.- Amer. J.Math., 1959, 81, p. 111-159.
2. Dye H.A. On groups of measure preserving transformation II.- Amer. J. Math., 1963, 85, p. 551-576.
3. Голодец В.Я. О группах автоморфизмов пространства с мерой, оставляющих меру квазивариантной. Препринт ФТИНТ АН УССР, Харьков, 1969, 73 с.
4. Голодец В.Я. О классах аппроксимативно конечных факторов.- Функц. анализ, 1970, т.4, вып.4, с.14-20.
5. Вершик А.М. Неизмеримые разбиения, траекторная теория, алгебры операторов. - Докл.АН СССР, 1971, 199, № 5, с.1004-1007.
6. Ганиходжаев Н.Н. О неизмеримых разбиениях пространств Лебега: Автореф.дис. ...канд.физ.-мат.наук. - Ташкент, 1975. - 18 с.

7. Krieger W. On non-singular transformations of a measure space, I, II. - Z.Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1969, N 11, p. 83-119.
8. Krieger W. On ergodic flows and the esomorphism of factors. - Math.Ann., 1976, 223, N 1, p. 19-70.
9. Рохлин В.А. Избранные вопросы метрической теории динамических систем. - Успехи мат.наук, 1949, т.4, вып.2, с.57-128.

УДК 517.8

Г.Р.Белицкий, Л.П.Кучко

ОБ ω-ОПРЕДЕЛЕННОСТИ РОСТКОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Статья посвящена нахождению достаточных условий, при которых орбита ростка аналитического отображения относительно той или иной группы преобразований координат определяется его рядом Тейлора. Более точно, пусть $\mathcal{Y}$ - какая-нибудь группа преобразований координат, действующая в пространстве $K[n,p]$ ростков аналитических отображений $F:(K^n,0)\to(K^p,0)$, где K - поле комплексных или вещественных чисел. Обозначим через $\hat{\mathcal{Y}}$ соответствующую группу формальных преобразований координат. Росток H называется формально эквивалентным ростку F, если существует такое формальное преобразование $\hat{g}\in\hat{\mathcal{Y}}$, что

$$\hat{g}F=H.$$

Росток F называется ω-определенным относительно группы $\mathcal{Y}$, если каждый росток H, формально эквивалентный F, эквивалентен F (под действием группы $\mathcal{Y}$).

Мы будем рассматривать здесь группы преобразований координат в образе, прообразе, одновременных в образе и прообразе, сопряженность и эквивалентность систем дифференциальных уравнений. Следуя [1], будем обозначать эти группы буквами $\mathcal{Y}_l$, $\mathcal{Y}_r$, $\mathcal{Y}_{lr}$, $\mathcal{Y}_c$ и $\mathcal{Y}_t$ соответственно.

Теорема 1. Каждый росток $F\in K[n,p]$ ω-определен относительно групп $\mathcal{Y}_l$ и $\mathcal{Y}_r$.

Доказательство. Рассмотрим группу $\mathcal{Y}_r$. Пусть $F, H\in K[n,p]$ - формально эквивалентные сходящиеся ряды и $\hat{\varphi}$ - такой формальный степенной ряд, что

$$F(\hat{\varphi})=H.$$

Пусть $\Lambda = \hat{\Phi}'(0)$ – линейное приближение ряда $\hat{\Phi}(x)$, так что

$$\hat{\Phi}(x) = \Lambda(x) + \hat{\varphi}(x), \quad \hat{\varphi}(0) = \hat{\varphi}'(0) = 0.$$

Тогда $\hat{\varphi}(x)$ удовлетворяет соотношению

$$F(\Lambda x + \hat{\varphi}(x)) = H(x). \tag{1}$$

Рассмотрим отображение $G : (K^n \times K^n, 0) \to (K^p, 0)$, определенное формулой

$$G(x, y) = F(\Lambda x + y).$$

Тогда уравнение (1) можно переписать в виде

$$G(x, \hat{\varphi}(x)) = H(x). \tag{2}$$

Это уравнение для неявной функции разрешимо в формальных рядах. В силу теоремы Артина [2], уравнение (2) имеет аналитическое решение $\varphi(x)$, причем $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$.

Рассмотрим теперь группу $\mathcal{G}_l$. Пусть ростки $F, H \in K[n,p]$ и формальный ряд $\hat{\varphi}$ таковы, что

$$\hat{\varphi}(F) = H.$$

Пусть $x_0 \in K^n$ – такой вектор, что $u_0 = Fx_0 \neq 0$. Тогда ряд $\hat{\varphi}(u)$ сходится при $u = u_0$. Следовательно, он сходится в шаре $\|u\| < \|u_0\|$ и является в нем аналитическим отображением. Теорема I доказана.

Вопрос об ω-определенности для остальных групп преобразований координат более сложен. В случае групп $\mathcal{G}_c$ и $\mathcal{G}_t$ существуют ω-определенные ростки $F \in K[n,p]$, а также ростки, не являющиеся ω-определенными. Что же касается группы $\mathcal{G}_{lr}$, то известны только отдельные примеры ω-определенных ростков, но неизвестно, существуют ли ростки, не являющиеся ω-определенными.

Приведем здесь лишь некоторые достаточные условия ω-определенности относительно групп $\mathcal{G}_{lr}$, $\mathcal{G}_c$ и $\mathcal{G}_t$. Для этого нам понадобятся некоторые вспомогательные определения и обозначения. Обозначим через $L(\mathcal{G})$ касательное пространство в единице к группе $\mathcal{G}$, а через

$$S'(F) : L(\mathcal{G}) \to K[n,p]$$

производную в единице отображения

$$S_F(g) = g_* F - F \quad (g \in \mathcal{G}).$$

Пусть, кроме того,

$$P_i : K[n,p] \to K[n,p], \qquad Q_i : L(\mathcal{Y}) \to L(\mathcal{Y}) -$$

проекторы на подпространства i-х струй $(i=1,2,\dots)$ элементов соответствующих пространств. Обозначим эти подпространства i струй через $K_i[n,p]$ и $L_i(\mathcal{Y})$ соответственно.

Введем в пространстве $K_i[n,p]$ скалярное произведение. Пусть

$$f=\left\{\sum_I f_I^j x_I\right\}_{j=1}^p, \qquad h=\left\{\sum_I h_I^j x^I\right\}_{j=1}^p -$$

два элемента из пространства $K_i[n,p]$. Положим

$$(f,h)=\sum_{I,j} f_I^j \overline{h_I^j}.$$

Аналогичное скалярное произведение введем в пространстве $L_i(\mathcal{Y})$. Тогда операторы P_i, Q_i и $Q^{(i)}=Q_i-Q_{i-1}$ являются самосопряженными.

Рассмотрим оператор

$$A_i(F)=P_i S'(F) Q^{(i)}: \quad Q^{(i)} L(\mathcal{Y}) \to K_i[n,p], \quad i=1,2,\dots .$$

Сужение

$$A_i(F): Im(A_i(F))^* \to Im A_i(F)$$

является изоморфизмом. Пусть

$$T_i(F): Im A_i(F) \to Im(A_i(F))^* -$$

обратный оператор. Положим

$$c(F)=\sup_i \| T_i(F)\|.$$

Если $\Lambda x = F'(0)x$ – линейное приближение ряда F, то

$$A_i(F)=A_i(\Lambda).$$

Поэтому и число $c(F)$ зависит только от Λ

$$c(F)=c(\Lambda).$$

Обозначим через $\hat{\mathcal{G}}(F)$ стационарную подгруппу ряда $F\in K[n,p]$, т.е.

$$\hat{\mathcal{G}}(F)=\left\{\hat{g}\in\hat{\mathcal{G}}\ \middle|\ \hat{g}.F=F\right\},$$

а через $\hat{\mathcal{G}}_m(F)$ – подгруппу таких элементов $\hat{g}\in\hat{\mathcal{G}}(F)$, для которых $Q_m\hat{g}=e$ (e – единичный элемент группы $\mathcal{G}$).

Теорема 2. Пусть $F\in K[n,p]$ – сходящийся степенной ряд с линейным приближением Λ. Если

$$c(\Lambda)<\infty \tag{3}$$

и при некотором m выполнено включение

$$\hat{\mathcal{G}}_m(\Lambda)\subset\hat{\mathcal{G}}(F),$$

то росток F ω-определен относительно группы $\mathcal{G}$.

Теорема 2, очевидно, содержательна лишь для групп $\mathcal{G}_{lr}$, $\mathcal{G}_c$ и $\mathcal{G}_t$. Из теоремы 2 вытекают такие следствия.

Следствие I. Пусть росток линейного отображения $F(x)=\Lambda x$ удовлетворяет условию

$$c(\Lambda)<\infty.$$

Тогда F ω-определен относительно группы $\mathcal{G}$.

Если $\mathcal{G}=\mathcal{G}_{lr}$, то условие (3) выполнено для любого линейного отображения. В самом деле, пусть $u_1,\dots,u_n$ – базис пространства K^n, $v_1,\dots,v_p$ – базис пространства K^p. Можно считать, что

$$\Lambda u_j=v_j,\quad j=1,2,\dots,r,\quad r=rg\,\Lambda,$$

$$\Lambda u_j=0,\quad j=r+1,\dots,n.$$

При таком выборе базисов операторы $T_i(\Lambda)$ удовлетворяют неравенству

$$\|T_i\|\le 2,\qquad i=1,2,\dots.$$

Таким образом, справедливо

Следствие 2. Росток каждого линейного отображения ω-определен относительно группы $\mathcal{G}_{lr}$.

Пространство $Ker\,S'(\Lambda)\subset L(\mathcal{G})$ является касательным пространством в единице к группе $\mathcal{G}(\Lambda)$. Поэтому, если $dim\,Ker\,S'(\Lambda)<\infty$, то $\mathcal{G}_m(\Lambda)=\{e\}$ при некотором m. Таким образом, справедливо.

Следствие 3. Пусть росток $F \in K[n,p]$ с линейным приближением Λ удовлетворяет условию

$$c(\Lambda) < \infty,$$

а пространство $Ker\, S'(\Lambda)$ конечномерно. Тогда росток F ω-определен относительно группы $\mathcal{G}$.

С помощью следствия 3 приведем несколько примеров ростков, ω-определенных относительно групп $\mathcal{G}_c$ и $\mathcal{G}_t$. Нетрудно доказать, что если $\mathcal{G} = \mathcal{G}_c$, а спектр невырожденного линейного оператора Λ не разделяется единичной окружностью, то $c(\Lambda) < \infty$ и $Ker\, S'(\Lambda)$ конечномерно. Таким образом, имеет место

Следствие 4. Если линейное приближение ростка $F \in K[n,n]$ невырождено и его спектр не разделен единичной окружностью, то F ω-определен относительно группы $\mathcal{G}_c$.

Сформулируем аналог этого утверждения для группы $\mathcal{G}_t$.

Следствие 5. Пусть выпуклая оболочка спектра линейного приближения ростка $F \in K[n,n]$ не содержит нуля. Тогда F ω-определен относительно группы $\mathcal{G}_t$.

Результаты, сформулированные в следствиях (4), (5), хорошо известны и содержатся, по существу, еще в работах Пуанкаре [3] и Дюлака [4].

Если $\Lambda = diag\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_c$ то

$$c(\Lambda) = \sup \frac{1}{|\lambda_j - \lambda_1^{I_1} \dots \lambda_n^{I_n}|},$$

где $\sup$ берется по всем парам (I, j), для которых

$$\lambda_j \neq \lambda_1^{I_1} \dots \lambda_n^{I_n}, \qquad I = (I_1, \dots, I_n).$$

Поэтому имеет место

Следствие 6. Пусть линейное отображение $F(x) = \Lambda x$ диагонализуемо, а его собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ удовлетворяют условию

$$\inf |\lambda_j - \lambda_1^{I_1} \dots \lambda_n^{I_n}| > 0, \tag{4}$$

где $\inf$ берется по всем парам (I, j), для которых

$$\lambda_j \neq \lambda_1^{I_1} \dots \lambda_n^{I_n}.$$

Тогда росток F ω-определен относительно группы $\mathcal{G}_0$.

Точно так же имеет место

Следствие 7. Пусть линейное отображение $F(x) = \Lambda x$ диагонализуемо, а его собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ удовлетворяют условию

$$\inf |\lambda_j - (\lambda_1 I_1 + \ldots + \lambda_n I_n)| > 0, \tag{5}$$

где $\inf$ берется по всем парам (I, j), для которых

$$\lambda_j \neq \lambda_1 I_1 + \ldots + \lambda_n I_n .$$

Тогда росток F ω-определен относительно группы $\mathcal{Y}_t$.

Условия (4), (5) на собственные числа оператора Λ известны как условия "немалости" знаменателей и являются очень жесткими. При доказательстве теоремы 2, из которой извлечены эти условия, используем самый грубый из методов мажорантных оценок. Применяя более тонкие и современные методы доказательства сходимости, условия (4), (5) можно значительно ослабить [5,6].

Доказательство теоремы 2 очевидным образом вытекает из следующих двух лемм.

Лемма I. Пусть $F \in K[n, \rho]$ – сходящийся ряд и

$$c(F) < \infty .$$

Пусть, далее, росток $H \in K[n, \rho]$ формально эквивалентен ряду F:

$$\hat{g} . F = H,$$

причем формальное преобразование $\hat{g} \in \mathcal{Y}$ удовлетворяет условию

$$Q^{(i)} \hat{g} \in Im\, Q^{(i)} (S'(F))^* P_i \qquad (i = m+1,\ m+2, \ldots)$$

при некотором $m < \infty$. Тогда $\hat{g}$ – сходящееся преобразование.

Лемма 2. Если при некотором $m < \infty$ выполнено включение

$$e\hat{\mathcal{Y}}_m(\Lambda) \subset \hat{\mathcal{Y}}_m(F), \qquad \Lambda = F'(0),$$

то для каждого формального преобразования $\hat{g} \in \hat{\mathcal{Y}}$ найдется такой элемент $\hat{\tilde{g}} \in e\hat{\mathcal{Y}}(F)$, что

$$Q^{(i)} \tilde{g} \tilde{g} \in Im\, Q^{(i)} (S'(F))^* P_i \qquad (i = m+1,\ m+2, \ldots).$$

Доказательство леммы I. Положим

$$\hat{g} = e + \hat{\varphi}, \qquad \hat{\varphi} \in L \hat{\mathcal{Y}}$$

и докажем сходимость ряда $\hat{\varphi}$. Из уравнения

$$(e + \hat{\varphi}) F = H$$

имеем

$$S'(F)\hat{\varphi} = H-(e+\hat{\varphi}).F+S'(F)\hat{\varphi},$$

откуда

$$P_i S'(F)Q^{(i)}\hat{\varphi} = P_i[H-(e+\hat{\varphi}).F+S'(F)Q^{(i)}\hat{\varphi}], \quad i=1,2,\ldots$$

Так как по условию

$$Q^{(i)}\hat{\varphi} \in Im\, Q^{(i)}(S'(F))^* P_i, \quad i=m+1,\ m+2,\ldots,$$

то можно написать

$$Q^{(i)}\hat{\varphi} = \Gamma_i(F)P_i[H-(e+\hat{\varphi}).F+S'(F)Q^{(i)}\hat{\varphi}], \quad i=m+1,\ m+2,\ldots$$

Положим

$$q_i = \| Q^{(i)}\hat{\varphi} \|, \quad i=1,2,\ldots.$$

Используя формулу подстановки ряда в ряд и ограниченность норм $\|\Gamma_i(F)\|$, получим оценку

$$q_i \leq M \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_s=i \\ s\geq 2}} \delta^s q_{i_1}\ldots q_{i_s}$$

при некоторых $M>0$, $\delta>0$. Следуя работе [7], рассмотрим росток аналитической функции, заданной неявно уравнением

$$\psi(x) = x + M\delta^2 \frac{\psi^2(x)}{1-\delta\psi(x)}.$$

Если

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i x^i,$$

то γ_i неотрицательны и удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\gamma_i = M \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_s=i \\ s\geq 2}} \delta^s \gamma_{i_1}\ldots\gamma_{i_s}.$$

Следовательно,

$$q_i \leq \gamma_i \leq \tau^i, \quad i=1,2,\ldots$$

при некотором $\tau>0$. Таким образом, ряд

$$\hat{\varphi} = \sum_{i=1}^{\infty} Q^{(i)}\hat{\varphi}$$

сходится в некоторой окрестности начала координат.

Лемма I доказана.

Доказательство леммы 2. Пусть преобразование $\hat{g} \in \hat{\mathcal{Y}}$ задано. Будем искать преобразование $\tilde{g} \in \hat{\mathcal{Y}}(F)$ в виде

$$\tilde{g} = \prod_{i=m+1}^{\infty} (e + \tilde{\varphi}^{(i)}), \qquad \tilde{\varphi}^{(i)} \in Q^{(i)} L(\hat{\mathcal{Y}}).$$

Пусть элементы $\tilde{\varphi}(i)$ при $i \leq k$ уже найдены таким образом, что

$$\tilde{g}_i = e + \tilde{\varphi}^{(i)} \in \hat{\mathcal{Y}}(F) \qquad (i = m+1, \ldots, k)$$

и

$$Q^{(i)}(\hat{g}\,\tilde{g}_{m+1} \cdots \tilde{g}_k) \in Im\, Q^{(i)}(S'(F))^* \rho_i \quad (i = m+1, \ldots, k).$$

Далее имеем

$$Q^{(k+1)}(\hat{g}\,\tilde{g}_{m+1} \cdots \tilde{g}_{k+1}) = Q^{(k+1)}(\hat{g}\,\tilde{g}_{m+1} \cdots \tilde{g}_k) + \tilde{\varphi}^{(k+1)} + H_{k+1}(\hat{g}, \tilde{g}_{m+1}, \ldots, \tilde{g}_k)$$

или

$$Q^{(k+1)}(\hat{g}\,\tilde{g}_{m+1} \cdots \tilde{g}_{k+1}) = \tilde{\varphi}^{(k+1)} + b'_{k+1} + b''_{k+1},$$

где

$$b'_{k+1} \in Ker\, \rho_{k+1} S'(F) Q^{(k+1)}, \qquad b''_{k+1} \in Im\, Q^{(k+1)}(S'(F))^* \rho_{k+1}.$$

Положим, по индукции,

$$\tilde{\varphi}^{(k+1)} = -b'_{k+1}.$$

Так как

$$Ker\, \rho_{k+1} S'(F) Q^{(k+1)} \subset Ker\, S'(\Lambda),$$

то

$$\tilde{g}_{k+1} = e + \tilde{\varphi}^{(k+1)} \in \hat{\mathcal{Y}}(\Lambda) \subset \hat{\mathcal{Y}}(F).$$

Кроме того,

$$Q^{(k+1)}(\hat{g}\,\tilde{g}_{m+1} \cdots \tilde{g}_{k+1}) \in Im\, Q^{(k+1)}(S'(F))^* \rho_{k+1}.$$

Построив таким образом элементы $\tilde{g}_{m+1}, \ldots,$ мы получим сходящееся в топологии $\hat{K}[n, \rho]$ произведение

$$\tilde{g} = \prod_{i=m+1}^{\infty} \hat{g}_i \in \hat{\mathcal{G}}(F),$$

которое удовлетворяет всем нужным требованиям.

Лемма 2 доказана.

Литература

1. Белицкий Г.Р. Нормальные формы формальных рядов и ростков C^{∞}-отображений относительно действия группы. - Изв.АН СССР, 1976, 40, № 4, с.855-868.
2. Артин М. Алгебраическая аппроксимация структур над полными локальными кольцами. - Математика, 1970, 14, № 3, с.3-39.
3. Poincare H. These. Oeuvres 1. Paris, 1928.
4. Dulac U. Solutions d'un systeme d'equations differentielle dans le voisinuye des valeurs singulieres. - Bull.Soc.Math. France, 1912, 40, p. 324-383.
5. Зигель К.Л. О нормальной форме аналитических дифференциальных уравнений в окрестности положения равновесия. - Математика, 1961, 5, № 2, с.119-128.
6. Брюно А.Д. Аналитическая форма дифференциальных уравнений. - Тр. Моск.мат.об-ва, 1971, 25, с.117-262.
7. Зигель К.Л. Лекции по небесной механике. - М.: Мир, 1959,- 374 с.

УДК 539.3

В.И.Бабенко

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗВЕРТЫВАЮЩИХСЯ ОБОЛОЧЕК

Потеря устойчивости оболочки сопровождается развитием на ее поверхности вмятин. В начальный период, непосредственно следующий после потери устойчивости, развиваются значительные (начальные послекритические) деформации, локализованные при достаточно малой толщине оболочки в окрестности линий (точек) γ на срединной поверхности F рассматриваемой оболочки. Судя по результатам скоростной киносъемки процесса потери устойчивости оболочки, в начальной послекритической стадии развиваются деформации, заметно локализованные в окрестности только одной линии γ, и лишь со временем появляются значительные деформации в окрестности других линий. Исходя из этого, предполагаем, что в начальной послекритической стадии в основном приближении можно пренебречь взаимным влиянием деформаций, локализованных в окрестности различных линий. В связи с этим будем говорить об определении критической нагрузки при потере устойчивости оболочки (ее выпучивании) в окрестности той или другой линии γ [1-6].

В работах [1-3] рассматривалась потеря устойчивости равновесия строго выпуклой оболочки в окрестности края и линий, лежащих в области, где напряженное состояние оболочки близко к безмоментному. В этих работах получен в замкнутом виде критерий устойчивости из условия существования нетривиального решения линеаризованных уравнений простого краевого эффекта, описывающих начальные послекритические деформации оболочки.

Результатами работ [1-3] можно воспользоваться и для исследования потери устойчивости развертывающихся оболочек в окрестности линий γ, не касающихся образующих срединной поверхности оболочки. Если же γ совпадает с образующей или касается ее, то начальные послекритические деформации в основном приближении описываются уравнениями обобщенного краевого эффекта. В этом случае исследование существования нетривиальных решений линеаризованных уравнений существенно зависит от условий закрепления оболочки вдоль края и, как правило, в замкнутом виде результат получить не удается. Возможность выпучивания развертывающейся оболочки в окрестности ее образующей и аналитическое описание развивающихся при этом начальных послекритических деформаций обсуждалось в работах [4,5]. В работе [6] рассмотрены шарнирно опертые оболочки при внешнем давлении.

В статье проводится асимптотический анализ различных краевых задач, описывающих потерю устойчивости и начальные послекритические деформации развертывающихся оболочек в окрестности образующих γ при нагрузках, исключающих выпучивание у криволинейного края. Образующие γ лежат в области F', где напряженное состояние оболочки вне края ∂F срединной поверхности близко к безмоментному. Предполагается, что исследуемое на устойчивость исходное (докритическое) напряженное состояние равновесия оболочки в F' допускает расчленение на основное (безмоментное, чисто моментное) напряженное состояние и местное (краевой эффект), а также возможность построения итерационных процессов для удовлетворения краевых условий в F' [2,3,7]. В частности, предполагается, что развертывающаяся оболочка, а точнее ее часть F', выпуклая, средней длины, достаточно тонкая, анизотропная (линейно упругая), нагружение статическое. Форма оболочки, ее упругие свойства и внешние нагрузки описываются достаточно регулярными функциями с малой изменяемостью [7], не имеющими каких-либо вырождений при исчезающе малых значениях параметра относительной тонкостенности оболочки ε [2,3].

Определение на основе статического критерия устойчивости [8,11] головной асимптотики по ε критической нагрузки здесь сведено к решению упрощенной краевой задачи. Показано, что результаты ее численного интегрирования для случая внешнего давления практически совпадают с результатами численного интегрирования исходной неупрощенной краевой задачи.

1. К постановке задачи

Как обычно это делается при исследовании устойчивости безмоментного напряженного состояния тонких цилиндрических и конических оболочек средней длины, за исходные берем уравнения теории пологих оболочек [8]. Запишем их в следующей безразмерной форме [2,3]:

$$n^{\alpha\beta}_{,\beta} + \varepsilon p^{*\alpha} = 0,$$

$$\varepsilon^4 m^{\alpha\beta}_{,\alpha\beta} + (b_{\mu\nu} + \varepsilon w_{,\mu\nu}) n^{\mu\nu} + \varepsilon p^{*3} = 0,$$

$$m^{\alpha\beta} = D^{\alpha\beta\mu\nu} \varkappa_{\mu\nu}, \qquad \varepsilon_{\alpha\beta} = K_{\alpha\beta\mu\nu} n^{\mu\nu},$$

$$2\varepsilon_{\alpha\beta} = u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} - 2b_{\alpha\beta} w + \varepsilon w_{,\alpha} w_{,\beta},$$

$$\varkappa_{\alpha\beta} = -w_{,\alpha\beta}. \tag{1.1}$$

Здесь характерный размер оболочки принят за единицу; малый параметр относительной тонкостенности ε определяется по существу относительной малостью изгибной жесткости оболочки по сравнению с жесткостью на растяжение; $\varepsilon\,\varepsilon_{\alpha\beta}$ и $\varepsilon\varkappa_{\alpha\beta}$ – тензоры деформаций и изменений кривизны; e – характерная упругая постоянная; $e^{-1} K_{\alpha\beta\mu\nu}$, $e\varepsilon^4 D^{\alpha\beta\mu\nu}$ – тензоры упругих постоянных; $e\varepsilon n^{\alpha\beta}$ и $e\varepsilon^6 m^{\alpha\beta}$ – тензоры усилий и моментов; εu_α, εw – касательные и нормальная составляющие вектора смещений εu; $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$ – коэффициенты I и II квадратичных форм срединной поверхности оболочки F, отнесенной к гауссовой системе координат x^α; $e\varepsilon^2 p^\alpha$, $e\varepsilon^2 p^{*3}$ – касательные и нормальная составляющие внешней поверхностной нагрузки $e\varepsilon^2 p$, отнесенной к срединной поверхности F^* деформированной оболочки; в p^{*3} включено слагаемое $M^{*\alpha}_{,\alpha}$ – вклад в p^{*3} от внешних поверхностных моментов $e\varepsilon^2 M$ [8]. Греческие индексы пробегают значения [1,2]; принято правило суммирования по повторяющимся индексам; индексы после запятой и черты означают соответственно ковариантное дифференцирование в метрике $a_{\alpha\beta}$ и дифференцированное по соответствующей координате.

Из вариационного принципа теории пологих оболочек следует, что на каждом торце оболочки возможны 16 различных комбинаций граничных условий [8,9].

$$\Gamma_1 \; u_1 = u_2 = w = w_{/1} = 0, \qquad \Gamma_9 \; u_1 = u_2 = [N^1] = w_{/1} = 0,$$

$$\Gamma_2 \; [n^{11}] = u_2 = w = w_{/1} = 0, \qquad \Gamma_{10} \; [n^{11}] = u_2 = [N^1] = w_{/1} = 0,$$

$$\Gamma_3 \; u_1 = [n^{12}] = w = w_{/1} = 0, \qquad \Gamma_{11} \; u_1 = [n^{12}] = [N^1] = w_{/1} = 0,$$

$$\Gamma_4 \; [n^{11}] = [n^{12}] = w = w_{/1} = 0, \qquad \Gamma_{12} \; [n^{11}] = [n^{12}] = [N^1] = w_{/1} = 0,$$

$$\Gamma_5 \; u_1 = u_2 = w = [m^{11}] = 0, \qquad \Gamma_{13} \; u_1 = u_2 = [N^1] = [m^{11}] = 0,$$

$$\Gamma_6 \; [n^{11}] = u_2 = w = [m^{11}] = 0, \qquad \Gamma_{14} \; [n^{11}] = u_2 = [N^1] = [m^{11}] = 0,$$

$$\Gamma_7 \; u_1 = [n^{12}] = w = [m^{11}] = 0, \qquad \Gamma_{15} \; u_1 = [n^{12}] = [N^1] = [m^{11}] = 0,$$

$$\Gamma_8 \; [n^{11}] = [n^{12}] = w = [m^{11}] = 0, \qquad \Gamma_{16} \; [n^{11}] = [n^{12}] = [N^1] = [m^{11}] = 0,$$

$$[n^{\alpha 1}] = n^{\alpha 1} - \varepsilon Q^{\alpha}, \qquad [m^{11}] = m^{11}\varepsilon^2 - M_{\nu *}, \tag{1.2}$$

$$[N^1] = N^1 - Q^3, \qquad N^1 = \varepsilon^3 (m^{1\beta}_{,\beta} + m^{12}_{/2}) + n^{1\alpha} w_{/\alpha}.$$

Соотношения (1.2) записаны в локальной полугеодезической системе координат (s^1, s^2), введенной на F в окрестности ∂F - края F на базе ∂F. При этом за координаты s^2, s^1 приняты длины дуг соответственно ∂F геодезической ортогональной ∂F [2,3]. В (1.2) $e\varepsilon^2 Q^{\alpha}$, $e\varepsilon^2 Q^3$ - тангенциальные и нормальная составляющие вектора внешней контурной нагрузки $e\varepsilon^2 Q$, отнесенной к F, причем в Q^3 включены слагаемые $(-M^1_* + M_{\tau * /2})$; $e\varepsilon^3 M_{\nu *}, -e\varepsilon^2 M_{\tau *}$ - изгибающий и крутящий внешние контурные моменты [8]. Геометрические краевые условия однородны.

Все варианты краевых условий Γ_i (1.2) разделим на четыре семейства: $S_1, S_2, S_{122}, S_{222}$, которые в свою очередь разделим на подгруппы, как это показано в табл.1. Во втором столбце этой таблицы выписаны краевые условия, общие для семейства краевых условий, выписанных в первом столбце.

Пусть $\partial' F$ - торцы оболочки (часть ее края ∂F), примыкающие к F', в которые упирается образующая γ. $\partial' F$ состоит из

Таблица 1

I	II
S_1 $(i=1,3,5,7,9,13)$, S_{122} $(i=11,15)$	$u_1=0$
S_2 $(i=2,4,6,8,10,14)$, S_{222} $(i=12,16)$	$[n^{11}]=0$
S_{11} $(i=1,5,9,13)$, S_{21} $(i=2,6,10,14)$	$u_2=0$
S_{12} $(i=3,7)$, S_{22} $(i=4,8)$, S_{122}, S_{222}	$[n^{12}]=0$
S_{12}, S_{22}, S_{221} $(i=2,6)$	$w=0$
S_{122}, S_{222}, S_{212} $(i=10,14)$	$[N^1]=0$

двух торцов. Пусть $\partial_1' F$ – тот из них, где отличный от нуля главный радиус кривизны F' достигает наибольшего значения; $\partial_2' F$ – второй торец из $\partial' F$; O_γ – точка пересечения γ с $\partial_\gamma' F$. Не ограничивая общности, будем считать, что F', кроме $\partial_\gamma' F$, ограничена также двумя образующими $\partial'' F$.

Обозначим через $S_m - S_n$ семейство краевых условий на $\partial' F$ таких, что на $\partial_1' F$ задано одно из условий Γ_i из S_m, а на $\partial_2' F - \Gamma_j$ из S_n. Аналогичный смысл имеют обозначения $\Gamma_i - \Gamma_j$, $S_m - S_{nl}$, $S_{mnk} - S_r$, $\Gamma_i - \Gamma_j$ и т.д.

Будет показано, что каждому семейству краевых условий на $\partial' F$ отвечает при малых значениях ε одна общая для всего семейства упрощенная краевая задача, условие существования нетривиального решения которой и определяет асимптотику критической нагрузки для данного семейства краевых задач. Краевые условия на остальной части ∂F мы не детализируем, т.к. они непосредственно не влияют на получение упрощенной задачи, а следовательно и на получение асимптотики критической нагрузки.

2. Докритическое состояние равновесия оболочки

Для описания докритических деформаций оболочки в целом необходимо уточнить постановку задачи о форме оболочки и ее нагружении вне F'. Один из возможных вариантов рассмотрен в работах [4–6]. Для наших целей достаточно рассмотреть схему построения итерационных процессов, чтобы удовлетворить исходные уравнения в

F' и краевым условиям на $\partial' F$. Это можно сделать в большинстве случаев, не обращаясь к остальной части оболочки, методом работ [2,3]. При этом приходится предполагать, что построенные в F' асимптотические представления для докритических деформаций можно срастить с соответствующими асимптотическими представлениями деформаций оболочки вне F'. Не приводя описания схем построения итерационных процессов (они подобны соответствующим схемам линейной теории [7]), отметим лишь некоторые, необходимые в дальнейшем окончательные выводы.

Пусть γ_y – отличная от γ линия кривизны F', проходящая через точку O_y. Отнесем F' к линиям кривизны, приняв за координату x^1 расстояние вдоль γ, а за x^2 – длину дуги γ_1. Начало координат совместим с O_1. Тогда

$$a_{11}=1, \quad a_{22}=G, \qquad b_{22}=-R_2^{-1}G^{1/2}, \qquad a_{12}=b_{11}=b_{12}=0,$$

где $G=(1+\varkappa_1 x^1)^2$, $\varkappa_1(x^2)<0$ – геодезическая кривизна γ_1 на F'; $R_2(x^2)>0$ – отличный от нуля главный радиус кривизны F' на γ_1.

Асимптотическое представление для вектора смещений u в ε-окрестности края $\partial_y' F$ будем искать в виде ряда по $\varepsilon^{1/2}$ [4-6]

$$u \sim u^- = \sum_{k=0} \varepsilon^{k/2}\left[\varepsilon^{i_0}\tilde{u}_{(i_0+k/2)} + \varepsilon^{i_y}\tilde{\tilde{u}}_{(i_y+k/2)}\right]. \tag{2.1}$$

Здесь, как и в работе [2], коэффициенты при ε^r в асимптотических рядах для искомых величин снабжены индексами в скобках "r", "$\sim$" или "$\approx$". Последнее означает, что уравнения для определения этих коэффициентов получаются соответственно при помощи I или II итерационных процессов. Первые коэффициенты в (2.1) описывают основное напряженное состояние в F' с показателем интенсивности i_0, а вторые – краевой эффект в ε окрестности $\partial_y' F$ с показателем интенсивности i_y [7]. "$-$" снабжаются величины, относящиеся к докритическим деформациям.

Предварительный анализ (см. п.3) показывает, что асимптотические представления для внутренних усилий $n_-^{\alpha\beta}$, при которых развертывающиеся оболочки теряют устойчивость в окрестности образующей, имеют иную интенсивность, чем соответствующие усилия в случае строго выпуклых оболочек [2,3], и определяются первыми формулами в (2.2):

$$n_{-}^{\alpha\beta} = \varepsilon \tilde{n}_{(1)}^{\alpha\beta} + \varepsilon^{3/2} \tilde{n}_{(3/2)}^{\alpha\beta} + \varepsilon^{2} \tilde{n}_{(2)}^{\alpha\beta} + (*), \quad \tilde{n}_{(1)}^{12} = \tilde{n}_{(1)}^{22} = \tilde{n}_{(3/2)}^{22} \equiv 0,$$

$$p^{*1} = p_{(0)}^{*1} + (*), \qquad p^{*2} = \varepsilon^{1/2} p_{(1/2)}^{*2} + (*), \qquad p^{*3} = \varepsilon p_{(1)}^{*3} + (*),$$

$$\tilde{n}_{(1)}^{11} = G^{-1/2}\left[c_{(1)}^{11} - \int\limits_{\partial_1' F}^{x^1} G^{1/2} p_{(0)}^{*1}\, dx^1\right], \qquad \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta}^{(1)} = K_{\alpha\beta 11} \tilde{n}_{(1)}^{11},$$

$$\tilde{n}_{(3/2)}^{12} = G^{-3/2}\left[c_{(3/2)}^{12} - \int\limits_{\partial_1' F}^{x^1} G^{3/2} p_{(1/2)}^{*2}\, dx^1\right], \quad \tilde{n}_{(3/2)}^{11} = G^{-1/2}\left[c_{(3/2)}^{11} - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{\partial_1' F}^{x^1} \left\{ G^{1/2} p_{(1/2)}^{*1} + (G^{1/2} n_{(3/2)}^{12})_{,2} \right\} dx^1 \right], \quad \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta}^{(3/2)} = \mu K_{\alpha\beta 1\mu} \tilde{n}_{(3/2)}^{1\mu},$$

$$\tilde{n}_{(2)}^{22} = -\left[b_{22} + \tilde{w}_{,22}^{(-1)} \right]^{-1} p_{(1)}^{*3},$$

$$\tilde{u}_1^{(m)} = c_1^{(m)} + \int\limits_{\partial_1' F}^{x^1} \tilde{\varepsilon}_{11}^{(m)}\, dx^1, \qquad m = 1,\ 3/2,$$

$$\tilde{u}_2^{(m)} = c_2^{(m)} + G \int\limits_{\partial_1' F}^{x^1} G^{-1} \left[2\tilde{\varepsilon}_{12}^{(m)} - \tilde{u}_{1/2}^{(m)} \right] dx^1. \tag{2.2}$$

Здесь $*$ обозначены слагаемые, малые вместе с ε по сравнению с выписанными. Последняя группа формул для $\tilde{n}_{(m)}^{\alpha\beta}$, $\tilde{u}_{\alpha}^{(m)}$ – решение уравнений I итерационного процесса – уравнений безмоментной теории оболочек [7], полученные из (I.1) с учетом условий (2.2.2). Последние накладывают также ограничения на искомую асимптотику для внешних поверхностных сил $p^{*\alpha}$, p^{*3} (2.2). $c_{(m)}^{\alpha\beta}(x^2)$, $c_{\alpha}^{(m)}(x^2)$ – произвол интегрирования, устраняемый при рассмотрении краевых условий на $\partial_y' F$.

В первых шести строчках табл.2 приведены все (с точностью до перестановок с торца на торец) анализируемые ниже семейства краевых условий на $\partial' F$ и соответствующие им значения показателей интенсивности i_0, i_y при $M_{y*} \equiv Q^3 \equiv 0$; $\mu > 0$ и имеет тот же смысл, что и в работе [7] (усилия $n_{-}^{\alpha\beta}$ (2.2) удовлетворяют статическим тангенциальным краевым условиям на $\partial_y' F$ с погрешностью порядка $\varepsilon^{1+\mu}$). Для описания напряженного состояния оболочки с точностью до членов $\varepsilon^2 \tilde{n}_{(2)}^{\alpha\beta}$ включительно, при краевых ус-

Таблица 2

№	$\Gamma_i - \Gamma_j$	i_0	i_1	i_2
1	$S_1 - S_{11},\ S_{12} - S_{12}^{*)},\ S_{21} - S_{21},\ S_1 - S_{21},\ S_{11} - S_{22}$	1	1	1
2	$S_1 - S_{122},\ S_{11} - S_{222},\ S_{21} - S_{122}$	1	1	2
3	$S_{122} - S_{122}^{*)}$	1	2	2
4[1)]	$S_{12} - S_{12}^{**)}$	μ	μ	μ
5[2)]	$S_2 - S_{22},\ S_{12} - S_{22}$	μ	μ	μ
6[2)]	$S_{12} - S_{222},\ S_{22} - S_{122},\ S_{211} - S_{222}$	μ	μ	$\mu+1$
7	$(S_{212}, S_{22}, S_{122}, S_{222}) - S_{222},\ S_{122} - S_{122}^{*)}$	-1		

$$\left({}^{*)}\ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0,\quad {}^{**)}\ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 0,\quad {}^{1)}\ 1/2 \le \mu \le 1,\quad {}^{2)}\ 0 \le \mu \le 1\right).$$

ловиях помещенных в 1–3 строках табл.2, безусловно, применима безмоментная теория. В 4–6 строчках помещены краевые условия с нежесткой тангенциальной заделкой, когда безмоментная теория применима условно [7]. В первом случае произвольные функции в (2.2) и дополнительное условие, которому должны подчиняться внешние усилия, чтобы имело место (2.2.2), находим из тангенциальных краевых условий. Во втором – для этих целей необходимо знание краевых эффектов, т.к. краевые условия не расцепляются при $\mu = 0$. В табл.2 α_ν – угол между γ_ν и $\partial_\nu^1 F$.

Оставшиеся краевые условия сведены в последней строке табл.2. Они допускают конечные геометрические изгибания $(i_0 = -1)$ с произволом в одну функцию от x^2 и поэтому основное состояние будет существенно моментным. Для его описания необходимо рассмотреть оболочку в целом. Эти краевые условия здесь рассматриваться не будут.

3. Начальные послекритические деформации

Рассмотрим нагрузки, близкие к критическим. Тогда наряду с исследуемым (докритическим) состоянием равновесия оболочки должно существовать смежное с ним искомое (послекритическое) состояние равновесия (ищется нагрузка, в окрестности которой существуют два близких решения исходной краевой задачи). Приращения искомых величин при переходе от докритического состояния равновесия к послекритическому будем снабжать "$*$". Тогда при послекритических деформациях

$$u = u^- + u^*, \qquad n^{\alpha\beta} = n_-^{\alpha\beta} + n_*^{\alpha\beta} \quad \text{и т.д.}$$

Подставим эти суммы в исходные уравнения (1.1), (1.2). Для приращения вектора смещения u^* получим однородную краевую задачу. Так как изучается потеря устойчивости оболочки с выпучиванием в окрестности образующей γ, то u^* должно быть исчезающе малым вне некоторой малой окрестности F_γ линии γ.

Первые два уравнения, получаемые из (1.1), удовлетворяем тождественно, вводя функцию усилий ψ^* и подчиняя ее уравнению неразрывности (3.1) $(a = \det |a_{\alpha\beta}|)$

$$n_*^{\alpha\beta} = c^{\alpha\mu} c^{\beta\nu} \psi^*_{,\mu\nu}, \qquad c^{11} = c^{22} = 0, \qquad c^{12} = -c^{21} = a^{-1/2},$$

$$\left[(\kappa_{\alpha\beta\lambda\rho} \psi^*_{,\xi\eta})_{,\mu\nu} c^{\lambda\xi} c^{\rho\eta} + (b_{\alpha\beta} + w^-_{,\alpha\beta}) w^*_{,\mu\nu} + \right. \tag{3.1}$$

$$\left. + 1/2\, w^*_{,\alpha\beta} w^*_{,\mu\nu} \right] c^{\alpha\mu} c^{\beta\nu} = 0.$$

Теперь все искомые величины можно выразить через w^*, ψ^*, отыскание асимптотических представлений для которых и составляет нашу цель.

Из требования, чтобы в F_γ первые два слагаемых в уравнении неразрывности (3.1) были одного порядка малости при $\varepsilon \to 0$ и чтобы в третьем уравнении (1.1) первое слагаемое и $b_{\mu\nu} n_*^{\mu\nu}$ также были одного порядка малости, заключаем, что ширина окрестности F_γ линии γ, где локализуются послекритические деформации, имеет порядок $\varepsilon^{1/2}$.

Вместо координат x^1, x^2, введенных в F', введем в F_γ новые координаты $\xi^1 = x^1$, $\xi^2 = \varepsilon^{-1/2} x^2$. Исходные уравнения запишем в новых переменных ξ^α. При построении асимптотических представлений в F_γ для $w^*(\xi^1, \xi^2)$, $\varphi^*(\xi^1, \xi^2)$ применим метод [10]. Подставим в (I.I), (3.I) вместо $\varkappa^-$, $n_-^{\alpha\beta}$ асимптотические ряды I итерационного процесса в F' и представим w^*, φ^* рядами

$$w^* = \sum_{k=0} \varepsilon^{k/2} \tilde{w}^{(*k/2)}(\xi^1, \xi^2), \quad \varphi^* = \sum_{k=4}^{1} \varepsilon^{k/2} \tilde{\varphi}^{(*k/2)}(\xi^1, \xi^2).$$

Уравнения для коэффициентов этих рядов получим при помощи I итерационного процесса в F_γ.

Потребуем, чтобы слагаемые в третьем уравнении (I.I) и в (3.I), содержащие $w_{,\mu\nu}^-$, были соизмеримы с первыми слагаемыми этих уравнений, тогда

$$\tilde{\varkappa}_{11}^{(-1)} = -\tilde{w}_{,11}^{(-1)} \equiv 0, \quad \tilde{\varkappa}_{12}^{(-1)} = -\tilde{w}_{,12}^{(-1)} \equiv 0, \quad \tilde{\varkappa}_{11}^{(-1/2)} = -\tilde{w}_{,11}^{(-1/2)} \equiv 0,$$

$$\left(G^{-1/2} \tilde{\varkappa}_{22}^{(-1)}\right)_{/1} = \left(G^{1/2} \tilde{\varkappa}_{12}^{(-1/2)}\right)_{/1} \equiv 0, \tag{3.2}$$

т.е., если послекритические деформации локализуются в окрестности образующих F', то условия закрепления оболочки вдоль $\partial' F$ и ее нагружение должны быть такими, чтобы конечные изгибания поверхности F' не сопровождались изменениями кривизны F' в направлении ее образующих $(\tilde{\varkappa}_{11}^{(-1)} \equiv 0)$ и уплощением $(b_{22} + \tilde{w}_{22}^{(-1)} \neq 0)$. Если происходит уплощение, то необходимо изменить метод исследования, если же $\tilde{\varkappa}_{11}^{(-1)} \neq 0$, то происходит конечное изгибание F' с кручением, и тогда послекритические деформации будут локализовываться вдоль образующих изометрического преобразования исходной формы оболочки.

Наконец, из требования, чтобы в третьем уравнении (I.I) слагаемое с $n_-^{\mu\nu}$ было соизмеримо с первым слагаемым в (I.I), получаем, что должны иметь место условия (2.2.2) для докритических усилий.

Пусть все перечисленные выше требования выполнены. Тогда головная системы уравнений I итерационного процесса в F_γ имеет вид

$$d_\gamma G_\gamma^{-3/2} W_{/2222} + M[\varphi] + N[W] - L^*[W,\varphi] = 0,$$

$$k_\gamma G_\gamma^{-3/2} \varphi_{/2222} - M[W] + 1/2\, L^*[W,W] = 0,$$

$$W\Big|_{|\eta^2|=\infty} = \varphi\Big|_{|\eta^2|=\infty} = 0. \qquad (3.3)$$

$$L^*[W,\varphi] = G_\gamma^{-1/2}\Big[W_{/11}\varphi_{/22} - 2G_\gamma \left(\frac{W_{/2}}{G_\gamma^{1/2}}\right)_{/1} \left(\frac{\varphi_{/2}}{G_\gamma^{1/2}}\right)_{/1} + W_{/22}\varphi_{/11} \Big],$$

$$M[\varphi] = \varphi_{/11} - 2\,\frac{\varkappa_{12}^{\gamma}}{G_\gamma^{1/2}} \left(\frac{\varphi_{/2}}{G_\gamma^{1/2}}\right)_{/1} + \frac{(\varkappa_{12}^{\gamma})^2}{G_\gamma^2}\,\varphi_{/22},$$

$$N[W] = q\,W_{/11} + 2s\,G_\gamma^{-1/2}\left(G_\gamma^{-1/2} W_{/2}\right)_{/1} + p\,W_{/22},$$

$$R = \left(R_2^{-1} + G^{-1/2}\,\tilde{\varkappa}_{22}^{(-1)}\right)\Big|_{q}^{-1}, \quad \varkappa = -L\,\varkappa_1\Big|_{q}, \quad \varepsilon_\gamma = (L^{-2} R\sqrt{KD})^{\frac{1}{2}},$$

$$\eta^1 = \xi^1 L^{-1}, \quad \eta^2 = \xi^2\,(L\,\varepsilon_\gamma^{1/2})^{-1}, \quad G_\gamma = (1-\varkappa\eta^1)^2,$$

$$W(\eta^1,\eta^2) = \tilde{w}_{(*0)}\,(L^2 R^{-1}\varepsilon_\gamma)^{-1}, \qquad \varphi(\eta^1,\eta^2) = \tilde{\Phi}^{(*2)}\,(D\varepsilon_\gamma^{-1})^{-1},$$

$$p(\eta^1) = -\tilde{p}_{(1)}^{*3}\Big|_\gamma \Big/ \left[\frac{\varepsilon_\gamma^3}{KR}\left(\frac{L}{R}\right)^2\right]^{-1}, \quad \varkappa_{12}^{\gamma} = \varepsilon_\gamma^{-1/2} R\, G_\gamma^{1/2}\,\tilde{\varkappa}_{12}^{(-1/2)}\Big|_\gamma,$$

$$s(\eta^1) = -\left(G^{3/2}\,\tilde{n}_{(3/2)}^{12}\right)\Big|_\gamma \Big/ \left[\frac{\varepsilon_\gamma^{5/2}}{K}\left(\frac{L}{R}\right)^2\right]^{-1}, \quad k_\gamma(\eta^1) = \frac{K_{1111}\big|_\gamma}{K},$$

$$q(\eta^1) = -\left(G^{1/2}\,\tilde{n}_{(1)}^{11}\right)\Big|_\gamma \Big/ \left[\frac{\varepsilon_\gamma^2}{K}\left(\frac{L}{R}\right)^2\right]^{-1}, \quad d_\gamma(\eta^1) = \frac{G_\gamma^2 D^{2222}\big|_\gamma}{D}. \qquad (3.4)$$

$$\tilde{n}_{(*1)}^{11} = G_\gamma^{-1}\,\tilde{\varphi}_{/22}^{(*2)}, \qquad \tilde{n}_{(*3/2)}^{12} = -G_\gamma^{-1/2}\left(G_\gamma^{-1/2}\,\tilde{\Phi}_{/2}^{(*2)}\right)_{/1},$$

$$\tilde{n}^{22}_{(*2)} = G_\gamma^{-1}\tilde{\varphi}^{(*2)}_{/11}, \qquad \tilde{\varepsilon}^{(*1)}_{\alpha\beta} = K_{\alpha\beta 11}\Big|_\gamma G_\gamma^{-1}\tilde{\varphi}^{(*2)}_{/22}, \tag{3.5}$$

$$v^*_\alpha = u^*_\alpha + \varepsilon w_{/\alpha} w^*, \qquad v^*_1 = \varepsilon\tilde{v}^{(*1)}_1 + (*), \quad v^*_2 = \varepsilon^{1/2}\tilde{v}^{(*1/2)}_2 + (*),$$

$$\tilde{v}^{(*1)}_{1/1} + \tilde{æ}^{(0)}_{11}\Big|_\gamma \tilde{w}^{(0)} + 1/2\,(\tilde{w}^{(*0)}_{/1})^2 = K_{1111}\Big|_\gamma G_\gamma^{-1}\tilde{\varphi}^{(*2)}_{/22},$$

$$G_\gamma(G_\gamma^{-1}\tilde{v}^{(*1/2)}_2)_{/1} + \tilde{v}^{(*1)}_{1/2} + 2\,\tilde{æ}^{(-1/2)}_{12}\Big|_\gamma \tilde{w}^{(*0)} + \tilde{w}^{(*0)}_{/1}\tilde{w}^{(*0)}_{/2} = 0,$$

$$\tilde{v}^{(*1/2)}_{2/2} + G_\gamma^{1/2} R^{-1}\tilde{w}^{(*0)} + 1/2\,(\tilde{w}^{(*0)}_{/2})^2 = 0. \tag{3.6}$$

$$\tilde{æ}^{(*0)}_{11} = -\tilde{w}^{(*0)}_{/11}, \qquad \tilde{æ}^{(-1/2*)}_{12} = -G_\gamma^{1/2}(G_\gamma^{-1/2}\tilde{w}^{(*0)}_{/2})_{/1},$$

$$\tilde{æ}^{(-1*)}_{22} = -\tilde{w}^{(*0)}_{/22}, \qquad \tilde{m}^{\alpha\beta}_{(-1*)} = -D^{\alpha\beta 22}\Big|_\gamma \tilde{w}^{(*0)}_{/22}. \tag{3.7}$$

Для определения $\tilde{w}^{(*0)}$, $\tilde{\varphi}^{(*2)}$ служит система (3.3) (нелинейные уравнения обобщенного краевого эффекта). В (3.3) введены переменные p^α вместо ξ^α. В (3.4) R – отличный от нуля главный радиус кривизны докритического изометрического конечного преобразования F' в точке, соответствующей O_1; L – длина образующей γ; D и K – характерные значения на γ модулей упругости $G^2 D^{2222}$, K_{1111} (например, их значения в O_1). Если эти модули упругости постоянны вдоль образующих, то $d_\gamma \equiv k_\gamma \equiv 1$. Параметры нагружения q, s, p содержатся в слагаемом $N[W]$ в (3.3). Они подобраны так, что при равномерной поверхностной нагрузке $p \equiv const$, а при отсутствии внешней тангенциальной нагрузки $s, q \equiv const$.

В нормированных величинах, в терминологии которых выписана система (3.3), можно положить $e = \varepsilon = 1$, т.к. они фактически не зависят от выбора постоянных e и ε, введенных в п.1 по существу формально для организации итерационных процессов. Параметр ε определяет малость различных слагаемых в исходных уравнениях по сравнению с отношением жесткостей на изгиб и растяжение рассматриваемой оболочки. Например, можно было бы принять, что $\varepsilon = max\,\varepsilon_\gamma$, если ε_γ сконструировать из размерных величин.

В (3.5)-(3.7) выписаны первые отличные от нуля коэффициенты асимптотических разложений I итерационного процесса в F_γ для $n_*^{\alpha\beta}$, $\varepsilon^*_{\alpha\beta}$, $\varkappa^*_{\alpha\beta}$, $m_*^{\alpha\beta}$ и v^*_α – тангенциальных составляющих приращений вектора смещений u^*, отнесенного к координатным ортам формы оболочки, воспроизводимой при докритических деформациях (только I) I итерационным процессом в F'; $\tilde{v}_1^{(*1)}$ и $\tilde{v}_2^{(*1/2)}$ определяются из последних трех уравнений в (3.6) – выражения для $\tilde{\varepsilon}_{11}^{(*1)}$ и равенств $\tilde{\varepsilon}_{12}^{(*1/2)}=0$, $\tilde{\tilde{\varepsilon}}_{22}^{(*0)}=0$.

Для более полного описания структуры искомого решения w^*, φ^* у края $\partial'F$ поступаем следующим образом [2,3,10]. Пусть $F_{\gamma 1}$ и $F_{\gamma 2}$ – ε окрестности F_γ у торцов $\partial_1'F$ и $\partial_2'F$. Отнесем каждую из окрестностей $F_{\gamma\nu}$ к полугеодезической системе координат (s^1, s^2), построенной на базе $\partial_\nu' F$ в п.I. Начало координат в $F_{\gamma\nu}$ совместим с O_ν. Изменим масштаб координат, положив $\sigma^1=\varepsilon^{-1}s^1$, $\sigma^2=\varepsilon^{-1/2}s^2$. Перейдем к переменным σ^β в исходных уравнениях для u^* (I.I), (3.I), подставив вместо u^- асимптотические представления I и II итерационных процессов в зоне краевого эффекта F', а вместо w^*, φ^* – ряды

$$w^*=\sum_{k=0}\varepsilon^{k/2}\left(\tilde{w}^{(*k/2)}+\tilde{\tilde{w}}^{(*k/2)}\right),\quad \varphi^*=\sum_{k=4}\varepsilon^{k/2}\left(\tilde{\varphi}^{(*k/2)}+\tilde{\tilde{\varphi}}^{(*k/2)}\right).$$

Уравнения для коэффициентов $\tilde{\tilde{w}}^{(*k/2)}(\sigma^1,\sigma^2)$, $\tilde{\tilde{\varphi}}^{(*k/2)}(\sigma^1,\sigma^2)$ получаем, применяя процедуру II итерационного процесса в $F_{\gamma\nu}$ (для коэффициентов выписанных выше рядов в каждой из областей $F_{\gamma\nu}$ приняты одни и те же обозначения).

$$-D^{1111}\Big|_{\sigma^\alpha=0}\tilde{\tilde{w}}^{(*0)}_{/1111}+\cos^2\alpha_\nu\left[-\left(\frac{1}{RG_\gamma^{1/2}}+\frac{\tilde{\varkappa}_{22}^{(-1*)}}{G_\gamma}\right)\Big|_{\gamma_\nu}\tilde{\tilde{\varphi}}^{(*2)}_{/11}+\right.$$

$$+\frac{\tilde{\varphi}^{(*2)}_{/22}}{G_\gamma}\Big|_{\gamma_\nu}\tilde{\tilde{w}}^{(0)}_{/11}\Big|_\gamma+\frac{\tilde{w}^{(*0)}_{/22}}{G_\gamma}\Big|_{\gamma_\nu}\tilde{\tilde{\varphi}}^{(0)}_{/11}\Big|_\gamma+\left(\tilde{n}^{11}_{(1)}\Big|_{O_\nu}+\tilde{n}^{11}_{(*1)}\Big|_{\gamma_\nu}\right)\tilde{\tilde{w}}^{(*0)}_{/11}\Big]+$$

$$+L^{0*}\left[\tilde{\tilde{w}}^{(0)},\tilde{\tilde{\varphi}}^{(*2)}\right]+L^{0*}\left[\tilde{\tilde{\varphi}}^{(2)},\tilde{\tilde{w}}^{(*0)}\right]+L^{**}\left[\tilde{\tilde{w}}^{(*0)},\tilde{\tilde{\varphi}}^{(*2)}\right]=0.$$

$$K_{2222}\Big|_{\sigma^\alpha=0}\tilde{\tilde{\varphi}}^{(*2)}_{/1111}+\cos^2\alpha_\nu\left[-\left(\frac{1}{RG_\gamma^{1/2}}+\frac{\tilde{\varkappa}_{22}^{(-1*)}}{G_\gamma}\right)\right|_{\gamma_\nu}\tilde{\tilde{w}}^{(*0)}_{/11}+$$

$$+\frac{\tilde{w}^{(*0)}_{/22}}{G_\gamma}\Bigg|_{\gamma_\nu} \tilde{\tilde{w}}^{(0)}_{/11}\Bigg|_{\gamma}\Bigg]+L^{(0*}\left[\tilde{\tilde{w}}^{(0)}, \tilde{\tilde{w}}^{(*0)}\right]+1/2L^{**}\left[\tilde{\tilde{w}}^{(*0)}, \tilde{\tilde{w}}^{(*0)}\right]=0,$$

$$\left(\left|\tilde{\tilde{w}}^{(*0)}\right|+\left|\tilde{\tilde{\varphi}}^{(*2)}\right|\right)\Big|_{|6^\beta|=\infty}=0. \qquad (3.8)$$

$$L^{0*}\left[\tilde{\tilde{w}}^{(0)}, \tilde{\tilde{\varphi}}^{(*2)}\right]=\tilde{\tilde{w}}^{(0)}_{/11}\Big|_{\gamma}\tilde{\tilde{\varphi}}^{(*2)}_{/22}-\varkappa'_\nu\left(\tilde{\tilde{w}}^{(0)}_{/1}\Big|_{\gamma}\tilde{\tilde{\varphi}}^{(*2)}_{/1}\right)_{/1},$$

$$L^{**}\left[\tilde{\tilde{w}}^{(*0)}, \tilde{\tilde{\varphi}}^{(*2)}\right]=\tilde{\tilde{w}}^{(*0)}_{/11}\tilde{\tilde{\varphi}}^{(*2)}_{/22}-2\tilde{\tilde{w}}^{(*0)}_{/12}\tilde{\tilde{\varphi}}^{(*2)}_{/12}+$$

$$+\tilde{\tilde{w}}^{(*0)}_{/22}\tilde{\tilde{\varphi}}^{(*22)}_{/11}-\varkappa'_\nu\left(\tilde{\tilde{w}}^{(*0)}_{/1}\tilde{\tilde{\varphi}}^{(*2)}_{/1}\right)_{/1}. \qquad (3.9)$$

$$n^{11}=\left[\left(\tilde{\tilde{n}}^{11}_{(1)}\Big|_{0_\nu}+\tilde{\tilde{n}}^{11}_{(*1)}\Big|_{\gamma_\nu}\cos^2\alpha_\nu+\tilde{\tilde{n}}^{11}_{(1)}\Big|_{\gamma}+\tilde{\tilde{n}}^{11}_{(*1)}\right]\varepsilon+(*),$$

$$n^{12}=\tilde{\tilde{n}}^{12}_{(*1/2)}\varepsilon^{1/2}+(*), \qquad n^{22}=\left(\tilde{\tilde{n}}^{22}_{(0)}\Big|_{\gamma}+\tilde{\tilde{n}}^{22}_{(*0)}\right)+(*),$$

$$\tilde{\tilde{n}}^{11}_{(*1)}=\tilde{\tilde{\varphi}}^{(*2)}_{/22}-\varkappa'_\nu\tilde{\tilde{\varphi}}^{(*2)}_{/1}, \qquad \tilde{\tilde{n}}^{12}_{(*1/2)}=-\tilde{\tilde{\varphi}}^{(*2)}_{/12}, \quad \tilde{\tilde{n}}^{22}_{(*0)}=\tilde{\tilde{\varphi}}^{(*2)}_{/11},$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}=\left(\tilde{\tilde{\varepsilon}}^{(0)}_{\alpha\beta}+\tilde{\tilde{\varepsilon}}^{(*0)}_{\alpha\beta}\right)+(*), \qquad \tilde{\tilde{\varepsilon}}^{(*0)}_{\alpha\beta}=K_{\alpha\beta22}\Big|_{6^\alpha=0}\tilde{\tilde{\varphi}}^{(*2)}_{/11}. \quad (3.10)$$

$$v^*_1=\tilde{\tilde{v}}^{(*0)}_1+(*), \quad v^*_2=\varepsilon^{1/2}\left[\tilde{\tilde{v}}^{(*1/2)}_2+\left(G^{-1/2}_\gamma\cos\alpha_\nu\tilde{\tilde{v}}^{(*1/2)}_2\right)\Big|_{\gamma_\nu}\right]+(*),$$

$$\tilde{\tilde{v}}^{(*0)}_{1/1}+\tilde{\tilde{w}}^{(0)}_{/1}\Big|_{\gamma}\tilde{\tilde{w}}^{(*0)}_{/1}+1/2\left(\tilde{\tilde{w}}^{(*0)}_{/1}\right)^2=0,$$

$$\tilde{\tilde{v}}^{(*1/2)}_{2/1}+\tilde{\tilde{v}}^{(*0)}_{1/2}+\left[\tilde{\tilde{w}}^{(0)}_{/1}\Big|_{\gamma}+\tilde{\tilde{w}}^{(0)}_{/1}\right]\left[\tilde{\tilde{w}}^{(*2)}_{/2}+\left(G^{-1/2}_\gamma\cos\alpha_\nu\tilde{\tilde{w}}^{(*0)}_{/2}\right)\Big|_{\gamma_\nu}\right]=0,$$

$$\tilde{\tilde{v}}^{(*1/2)}_{2/2}-\varkappa'_\nu\tilde{\tilde{v}}^{(*0)}_1-\left(RG^{1/2}_\gamma\right)\Big|^{-1}_{0_\nu}\cos^2\alpha_\nu\tilde{\tilde{w}}^{(*0)}+1/2\left(\tilde{\tilde{w}}^{(*0)}_{/2}\right)^2+ \qquad (3.11)$$

$$+\left(G_\gamma^{-1/2}\cos\alpha_y \tilde{w}^{(*0)}_{/2}\right)\Big|_{\gamma_y} \tilde{\tilde{w}}^{(*0)}_{/2} = K_{2222}\Big|_{\sigma^\alpha=0} \tilde{\tilde{\varphi}}^{(*2)}_{/11}.$$

$$\varkappa_{11} = \varepsilon^{-2}\left(\tilde{\tilde{\varkappa}}^{(-2)}_{11}\Big|_\gamma + \tilde{\tilde{\varkappa}}^{(-2*)}_{11}\right) + (*), \quad \varkappa_{12} = \varepsilon^{-3/2}\tilde{\tilde{\varkappa}}^{(-3/2*)}_{12} + (*),$$

$$\varkappa_{22} = \varepsilon^{-1}\left[\tilde{\tilde{\varkappa}}^{(-1)}_{22}\Big|_\gamma + \left[G_\gamma^{-1}\cos^2\alpha_y\left(\tilde{\varkappa}^{(-1)}_{22}\Big|_{0_y} + \tilde{\tilde{\varkappa}}^{(-1*)}_{22}\right)\right]\Big|_{\gamma_y}\right] + \tilde{\tilde{\varkappa}}^{(-1*)}_{22} + (*),$$

$$\tilde{\tilde{\varkappa}}^{(-2*)}_{11} = -\tilde{\tilde{w}}^{(*0)}_{/11}, \qquad \tilde{\tilde{\varkappa}}^{(-3/2*)}_{12} = -\tilde{\tilde{w}}^{(*0)}_{/12},$$

$$\tilde{\tilde{\varkappa}}^{(-1*)}_{22} = -\tilde{\tilde{w}}^{(*0)}_{/22} + \varkappa'_y \tilde{\tilde{w}}^{(*0)}_{/1},$$

$$m^{\alpha\beta} = \varepsilon^{-2}\left(\tilde{m}^{\alpha\beta}_{(-2)}\Big|_\gamma + \tilde{\tilde{m}}^{\alpha\beta}_{(-2*)}\right) + (*), \quad \tilde{\tilde{m}}^{\alpha\beta}_{(-2*)} = D^{\alpha\beta 11}\Big|_{\sigma^\mu=0} \tilde{\tilde{\varkappa}}^{(-2*)}_{11},$$

$$N^1_* = \varepsilon^0\left\{\left(\cos^2\alpha_y \tilde{n}^{11}_{(1)}\Big|_{0_y} + \tilde{\tilde{n}}^{11}_{(1)}\Big|_\gamma\right)\tilde{\tilde{w}}^{(*0)}_{/1} + \left(\cos^2\alpha_y \tilde{n}^{11}_{(*1)}\Big|_{\gamma_y} + \right.\right.$$

$$\left.+\tilde{\tilde{n}}^{11}_{(*1)}\right)\left(\tilde{\tilde{w}}^{(0)}_{/1}\Big|_\gamma + \tilde{\tilde{w}}^{(*0)}_{/1}\right) + \tilde{\tilde{n}}^{12}_{(*1/2)}\left(\tilde{\tilde{w}}^{(*0)}_{/2} + \tilde{w}^{(*0)}_{/2}\Big|_{\gamma_y}\cos\alpha_y G_\gamma^{-1/2}\Big|_{0_y}\right) + \tilde{\tilde{m}}^{11}_{(-2*)/1}\Big\} + (*). \quad (3.12)$$

Для определения $\tilde{\tilde{w}}^{(*0)}$, $\tilde{\tilde{\varphi}}^{(*2)}$ получаем (3.8) – систему уравнений краевого эффекта при большой изменяемости основного напряженного состояния. В (3.8) – (3.12) $D^{1111}\big|_{\sigma^\alpha=0}$, $K_{2222}\big|_{\sigma^\alpha=0}$ – значения в точке 0_y модулей упругости в системе координат σ^1, σ^2; $\varkappa'_y$ – геодезическая кривизна $\partial'_y F$ на F' в 0_y; $|\alpha_y| < \pi/2$ – угол между γ_y и $\partial'_y F$. В (3.10)–(3.12) выписаны первые отличные от нуля коэффициенты разложений П итерационного процесса в $F_{\gamma y}$ для $n^{\alpha\beta}_*$, $\varepsilon^*_{\alpha\beta}$, v^*_β, $\varkappa_{\alpha\beta}$, $m^{\alpha\beta}_*$ и N^{*1}, причем $\tilde{\tilde{v}}^{(*0)}_1$, $\tilde{\tilde{v}}^{(*1/2)}_2$ определяем из трех последних уравнений в (3.11) – равенств $\tilde{\tilde{\varepsilon}}^{(-1*)}_{11} = \tilde{\tilde{\varepsilon}}^{(-1/2*)}_{12} = 0$ и выражения для $\tilde{\tilde{\varepsilon}}^{(*0)}_{22}$. Формулы (3.10)–(3.12) содержат достаточно информации, чтобы составить в основном приближении асимптотические выражения для левых частей условий (1.2).

В (3.3)-(3.12) смысл обозначений $\tilde{f}^{(*k)}$ и $\tilde{\tilde{f}}^{(*k)}$ для f аналогичен $\tilde{f}^{(k)}$ и $\tilde{\tilde{f}}^{(k)}$ из [2] – это коэффициенты при ε^k разложений в ряды выражения f соответственно при I и II итерационных процессах в F_γ.

Критические значения параметров нагружения q, s, p будем находить из условия существования нетривиальных решений системы (3.3). В основном приближении влияние моментности докритических деформаций на величину критической нагрузки состоит в следующем. Во-первых, непосредственное в (3.3) это влияние сказывается через R и $\varkappa_{12}^{\gamma}$, зависящих от $\tilde{\varkappa}_{22}^{(-1)}$ и $\tilde{\varkappa}_{12}^{(-1/2)}$ изменений кривизны F' при ее докритических геометрических изгибаниях. Последние входят также и в уравнения (3.8), поэтому они оказывают еще и косвенное влияние через краевые условия для W, φ на γ_y, которые содержат функции $\tilde{\tilde{W}}^{(*l)}$, $\tilde{\tilde{\varphi}}^{(*k)}$. Во-вторых, таким же косвенным образом, через краевые условия на γ_y оказывают влияние докритические деформации в зоне краевого эффекта (см. 3.8).

При рассматриваемых краевых условиях на $\partial_y' F$ (табл.2) $i_c \geqslant 0$, поэтому на критическую нагрузку не сказывается моментность докритических деформаций вне зоны краевых эффектов ($\varkappa_{12}^{\gamma} = 0$, $\tilde{\varkappa}_{22}^{(-1)} \equiv 0$ в (3.4).

Получим теперь краевые условия на γ_y для системы (3.3).

4. Краевые условия $S_2 - S_2$

Пусть на $\partial_y' F$ задано по одному краевому условию Γ_i из S_2 (табл.1). Покажем, что в этом случае на γ_y для (3.3) следует назначить условия

$$\Gamma_2 : \tilde{w}^{(*0)}\Big|_{\gamma_y} = 0, \qquad \tilde{\varphi}^{(*2)}\Big|_{\gamma_y} = 0. \tag{4.1}$$

Действительно, пусть имеет место (4.1). Покажем, что в основном приближении условия из $S_2 - S_2$ будут выполнены. Из (4.1) следует, что на γ_y

$$\tilde{w}^{(*0)}_{/22} = \tilde{\varphi}^{(*2)}_{/22} = 0.$$

Тогда первые и последние условия в Γ_i из S_2 сводятся в основном приближении к следующим:

$$\tilde{\tilde{w}}^{(*0)}_{/1}\Big|_{\partial_y' F} = 0 \; (i=2,4,10), \qquad \tilde{\tilde{w}}^{(*0)}_{/11}\Big|_{\partial_y' F} = 0 \; (i=6,8,14),$$

$$\left(\overset{\approx}{\varphi}{}^{(*2)}_{/22} - \varkappa_y \overset{\approx}{\varphi}{}^{(*2)}_{/1}\right)\Big|_{\partial'_y F} = 0 \quad (S_2).$$

Эти условия вместе с (3.8) представляют собой однородную краевую задачу для $\overset{\approx}{w}{}^{(*0)}$ и $\overset{\approx}{\varphi}{}^{(*2)}$, которая имеет только тривиальное решение в $F_{\gamma\nu}$

$$\overset{\approx}{w}{}^{(*0)} \equiv \overset{\approx}{\varphi}{}^{(*2)} \equiv 0, \tag{4.2}$$

т.к. по предположению выпучивание оболочки у края исключено.

Вторые и третьи условия в Γ_i из S_2 на $\partial'_y F$ в основном приближении удовлетворяются тождественно в силу (4.1) и (4.2).

5. Краевые условия $S_1 - S_1$

Первое условие в Γ_i из S_1 с учетом (3.6.1) (3.11.1) сводится к следующему

$$\overset{\approx}{v}{}^{(*0)}_1\Big|_{\partial'_y F} = 0.$$

Принимая во внимание это условие и значения i_k (табл.2) из уравнений (3.11) и равенства нулю $\overset{\approx}{\varepsilon}{}^{(-1/2)}_{11}$ последовательно находим, что в $F_{\gamma\nu}$

$$\overset{\approx}{w}{}^{(*0)} = \overset{\approx}{v}{}^{(*0)}_1 = \overset{\approx}{v}{}^{(*1/2)}_2 = \overset{\approx}{\varphi}{}^{(*2)} = \overset{\approx}{v}{}^{(*1/2)}_1 = 0. \tag{5.1}$$

Тогда из третьего условия в Γ_i $(i=1,3,5,7)$ получим первое краевое условие для (3.3) на γ_y

$$\tilde{w}^{(*0)} = 0. \tag{5.2}$$

Второе условие в Γ_9, Γ_{13} в силу (3.6.1), (3.11.2), (5.1) в основном приближении сводится к следующему

$$\tilde{v}{}^{(*1/2)}_{2'}\Big|_{\gamma_y} = 0. \tag{5.3}$$

Воспользовавшись последним уравнением из (3.6), устанавливаем, что условия (5.2) и (5.3) эквивалентны, а значит, они имеют место для всех Γ_i из S_1. Не рассмотренные нами условия в Γ_i из S_1 в основном приближении удовлетворяются в силу (5.1)-(5.3).

Для получения второго условия на γ_y рассмотрим следующие члены разложения по $\varepsilon^{1/2}$ левых частей краевых условий в Γ_i из S_1. Приравнивая их к нулю, получим такие условия на $\partial'_y F$:

$$\tilde{\tilde{v}}_1^{(*1)} + \tilde{v}_1^{(*1)}\Big|_{\gamma_y} \cos\alpha_y - G\Big|_{0_y}^{-1/2} \tilde{v}_2^{(*1)}\Big|_{\gamma_y} \sin\alpha_y = 0 \qquad (S_1),$$

$$\tilde{\tilde{v}}_2^{(*1)} + \tilde{v}_1^{(*1)}\Big|_{\gamma_y} \sin\alpha_y + G\Big|_{0_y}^{-1/2} \cdot \tilde{v}_2^{(*1)}\Big|_{\gamma_y} \cos\alpha_y = 0 \qquad (i=1,5,9,13),$$

$$\tilde{\tilde{\varphi}}_{/1}^{(*5/2)} - G\Big|_{0_y}^{-1/2} \tilde{\varphi}_{/2}^{(*2)} \sin\alpha_y = 0 \quad (i=3,7), \quad \tilde{\tilde{w}}^{(*1/2)} + \tilde{w}^{(*1/2)} = 0 \quad (i=1,3,5,7),$$

$$\left(\tilde{n}_{(1)}^{11}\Big|_{0_y} + \tilde{n}_{(*1)}^{11}\Big|_{\gamma_y}\right) \cos^2\alpha_y \tilde{\tilde{w}}_{/1}^{(*1/2)} - D^{1111}\Big|_{\sigma^\alpha = 0} \tilde{\tilde{w}}_{/111}^{(*1/2)} = 0 \qquad (i=9,13),$$

$$\tilde{\tilde{w}}_{/1}^{(*1/2)} = 0 \quad (i=1,3,9), \qquad \tilde{\tilde{w}}_{/11}^{(*1/2)} = 0 \qquad (i=5,7,13). \quad (5.4)$$

Система уравнений для $\tilde{\tilde{w}}^{(*1/2)}$, $\tilde{\tilde{\varphi}}^{(*5/2)}$ является линейной и однородной. Ее можно получить из (3.8), отбросив в последней слагаемые с $\tilde{\tilde{w}}^{(0)}$, $\tilde{\tilde{\varphi}}^{(2)}$, L^{0*}, L^{**}. В окрестностях $F_{\gamma y}$, где на $\partial_y' F$ задано одно из условий $(\Gamma_3, \Gamma_7)\big|_{\alpha_y=0}$, Γ_9, Γ_{13}, краевая задача для $\tilde{\tilde{w}}^{(*1/2)}$, $\tilde{\tilde{\varphi}}^{(*5/2)}$ однородная, ее решение будет тривиальным:

$$\tilde{\tilde{w}}^{(*1/2)} = \tilde{\tilde{\varphi}}^{(*5/2)} = 0. \qquad (5.5)$$

Вследствие (3.10), (5.1) в $F_{\gamma y}$ обращаются в нуль $\tilde{\tilde{\varepsilon}}_{1\alpha}^{(*0)}$. Выписывая выражения для последних с учетом (5.1), (5.2), (5.5) и значений i_k из табл.2, получим, что в $F_{\gamma y}$ для всех Γ_i из S_1

$$\tilde{\tilde{v}}_1^{(*1)} = 1/2 \int_{\sigma^1}^{\infty} (\tilde{\tilde{w}}^{(*1/2)})^2 \, d\sigma^1, \qquad \tilde{\tilde{v}}_2^{(*1)} \equiv 0. \qquad (5.6)$$

Исключая $\tilde{\tilde{v}}_{2/1}^{(*1/2)}$ из предпоследнего уравнения в (3.6) с помощью последнего, используя при этом условия (5.2), (5.3), находим, что на $\partial_y' F$

$$\tilde{v}_{1/22}^{(*1)} = -b_{22}\Big|_{0_y} \tilde{w}_{/1}^{(*0)}. \qquad (5.7)$$

Далее из (3.5) следует равенство нулю $\tilde{\tilde{\varepsilon}}_{22}^{(*1/2)}$. Откуда с учетом предпоследнего уравнения в (I.1), (5.3), (3.6), (5.2) и четвертого условия в (5.4) находим, что для Γ_i на $\partial'_\gamma F$ имеет место соотношение

$$\tilde{v}^{(*1)}_{2/2} = -b_{22}\Big|_{0_\gamma} \tilde{\tilde{w}}^{(*1/2)} \qquad (i=1,3,5,7). \tag{5.8}$$

Рассмотрим условия Γ_1, Γ_5. Для $\tilde{\tilde{w}}^{(*1/2)}$, $\tilde{\tilde{\psi}}^{(*5/2)}$ и в этом случае получается однородная краевая задача. В качестве первого краевого условия на $\partial'_\gamma F$ берем одно из двух последних условий в (5.4). Второе условие получаем, исключая из первых двух условий в (5.4) $\tilde{v}^{(*1)}_1$ и беря во внимание равенства (5.6), (5.8). Тем самым убеждаемся, что (5.5) имеет место и для $i=1,5$.

Исключая $\tilde{v}^{(*1)}_2$, если $\alpha_\gamma \neq 0$, из первого условия в (5.4) при помощи второго условия для i = 1, 5, 9, 13 или (5.8) для i = 3, 7, и, подставляя в него $\tilde{\tilde{v}}^{(*1)}_\alpha$, $\tilde{v}^{(*1)}_1$ из (5.6), (5.7), получим следующие условия на $\partial'_\gamma F$:

$$\tilde{w}^{(*0)}_{/1}\Big|_{\gamma_\gamma} = 0 \qquad (i=1,5,9,13),$$

$$1/2\frac{\partial^2}{(\partial\sigma^1)^2}\int_0^\infty (\tilde{\tilde{w}}^{(*1/2)}_{/1})^2 d\sigma^1 + \Big[\tilde{w}^{(*0)}_{/1}\Big|_{\gamma_\gamma}\cos^2\alpha_\gamma -$$

$$-\tilde{\tilde{w}}^{(*1/2)}_{/2}\sin\alpha_\gamma\Big]\frac{\cos\alpha_\gamma}{RG^{1/2}_\gamma} = 0 \qquad (i=3,7). \tag{5.9}$$

Эти условия вместе с (5.2) являются искомыми на γ_γ для (3.3). Во второе условие из (5.9) вместо $\tilde{\tilde{w}}^{(*1/2)}$ следует подставить решение соответствующей краевой задачи с третьим и одним из последних краевых условий на $\partial'_\gamma F$ из (5.4). Если $\alpha_\gamma = 0$, то второе условие в (5.9) сводится к первому. Если $\alpha_\gamma \neq 0$, то это условие имеет довольно громоздкий вид. Выпишем в этом случае краевые условия Γ'_1 на γ_γ для линеаризованной задачи (3.3), отбрасывая в них нелинейные члены

$$\Gamma'_1:\ W=0, \qquad W_{/1} + a_i\, tg^2\alpha_\gamma\, \psi_{/22} = 0 \qquad (i=3,7),$$

$$a_3 = a[2(1-\sigma)]^{-1/2}, \qquad \sigma<1 \qquad (i=3),$$

$$a_7 = a[2(1-\sigma)]^{1/2}\,(1-2\sigma)^{-1}, \qquad \sigma<1/2 \qquad (i=7),$$

$$\alpha=\left[\left(\frac{K_{2222}}{KG_{\gamma}}\right)^3\frac{D}{D^{1111}}\right]^{1/4}\Bigg|_{\sigma^{\alpha}=0},\quad \sigma=1/2\,q\left(\frac{DK_{2222}}{KD^{1111}}\right)^{1/2}\Bigg|_{\sigma^{\alpha}=0}. \quad (5.10)$$

Значения σ равные I и 1/2 являются критическими при выпучивании у края, где заданы соответственно условия Γ_3 и Γ_7 – (I.IIa), (I.12 $c-d$) из работы [2]. Последнее дополняет результаты, полученные в работе [2].

6. Краевые условия S_{122}, S_{222}

Установим вид краевых условий на $'\gamma_y$ для (3.3) тогда, когда на $\partial_y' F$ задано одно из исходных условий Γ_i семейств S_{122}, S_{222}. В этом случае $i_y \geq 1$ (табл.2).

Прежде всего замечаем, что в F_{γ_y} имеет место (5.I), т.к. краевая задача для $\tilde{w}^{(*0)}$, $\tilde{\varphi}^{(*2)}$ однородная. Краевые условия для нее получаем из требования, чтобы в основном приближении были удовлетворены вторые и четвертые условия в Γ_i. Остальные условия в Γ_i в силу (5.I) будут в основном приближении удовлетворены все за исключением первого в Γ_{15}, Γ_{16}, которое дает первое условие на γ_y для (3.3) при исходных условиях из S_{222}, на $\partial_y' F$ – второе равенство из (4.I).

Аналогично убеждаемся, что в $F_{\gamma y}$ имеет место (5.5). Краевые условия на $\partial_y' F$ для однородной задачи по определению $\tilde{w}^{(*1/2)}$, $\tilde{\varphi}^{(*5/2)}$ получаем из требования, чтобы во втором приближении выполнялись второе (для S_{222}), четвертое (для S_{122}) и третье (для S_{122}, S_{222}) условия в Γ_i. При доказательстве однородности условия, получаемого из четвертого краевого, в Γ_{11} используется первое из Γ_{11} и последнее уравнение из (3.6). Требуя, чтобы остальные краевые условия в Γ_i были удовлетворены во втором приближении по $\varepsilon^{1/2}$, с учетом (5.5) находим, что на γ_y для этого должны выполняться условия Γ_2 (4.I), если на $\partial_y' F$ $\alpha_y \neq 0$ и задано Γ_i $(i=11, 12, 15)$ и условие

$$\tilde{n}^{11}_{(*1/2)}\cos^2\alpha_y - \tilde{n}^{12}_{(*3/2)}G_{\gamma}^{1/2}\sin 2\alpha_y = 0,$$

если на $\partial_y' F$ задано Γ_{15} или Γ_{16}.

Для получения окончательных результатов в тех случаях, когда на $\partial_y' F$ при $\alpha_y = 0$ задано одно из условий Γ_{11}, Γ_{12}, Γ_{15} или при любом α_y задано Γ_{16}, рассмотрим задачу по определению $\tilde{w}^{(*1)}$, $\tilde{\varphi}^{(*3)}$. При закреплениях из шестой строки табл.2 будем считать, что $\mu > 0$, т.е. для всех рассматриваемых сейчас закреплений $i_y > 1$ (если $i_y = 1$, то окончательный результат и исходная система уравнений усложняется появлением в последней свободных членов пропорциональных $\tilde{\tilde{w}}^{(1)}$). Исходная система уравнений краевого эффекта для определения $\tilde{\tilde{w}}^{(*1)}$, $\tilde{\tilde{\varphi}}^{(*3)}$ будет при $i_y > 1$ такой же, как и исходная система для $\tilde{\tilde{w}}^{(*1/2)}$, $\tilde{\tilde{\varphi}}^{(*5/2)}$ (п.5). Потребуем теперь, чтобы исходные краевые условия Γ_i на $\partial_y^1 F$ выполнялись в третьем приближении по ε. Это накладывает на искомые функции следующие условия на $\partial_y^1 F$:

$$\tilde{\tilde{v}}_1^{(*1)} + \tilde{v}_1^{(*1)}\Big|_{\gamma_y} = 0 \quad (i = 11, 15), \quad \tilde{\tilde{w}}_{/1}^{(*1)} + \tilde{w}_{/1}^{(*1)}\Big|_{\gamma_y} = 0 \quad (i = 11, 12),$$

$$\tilde{\tilde{w}}_{/11}^{(*1)} + a_{15}\tilde{w}_{/22}^{(*0)}\Big|_{\gamma_y} = 0 \quad (i = 15, 16), \quad \tilde{\tilde{\varphi}}_{/1}^{(*3)} + \left[(\cos\alpha_y)^{-1}\left(G_\gamma^{\frac{1}{2}}\,\tilde{\varphi}^{(*2)}\right)_{/1}\right]\Big|_{\gamma_y} = 0,$$

$$-D^{1111}\Big|_{\sigma^\alpha=0}\tilde{\tilde{w}}_{/111}^{(*1)} + \cos^2\alpha_y\left(\tilde{n}_{(1)}^{11}\Big|_{0_y} + \tilde{n}_{(*1)}^{11}\Big|_{\gamma_y}\right)\tilde{\tilde{w}}_{/1}^{(*1)} +$$

$$+\cos\alpha_y\left[\left(\tilde{\tilde{n}}_{(1)}^{11}\Big|_{0_y} + \tilde{\tilde{n}}_{(*1)}^{11}\right)\tilde{w}_{/1}^{(*0)} + \tilde{n}_{(3/2)}^{12}\Big|_{0_y}\tilde{w}_{/2}^{(*0)}\right]\Big|_{\gamma_y} = 0. \qquad (6.1)$$

Выражение для постоянной a_{15} не выписано, т.к. она не входит в окончательный результат. При получении условий (6.1) использовались результаты, полученные на предыдущих итерациях. В последних двух условиях в (6.1) $\alpha_y = 0$ для всех Γ_i, кроме Γ_{16}.

Учитывая (5.1) и (5.5), из последнего уравнения в (3.10) и (3.11) и первого в (6.1) последовательно находим

$$\tilde{\tilde{\varepsilon}}_{11}^{(*0)} = 0, \qquad \tilde{\tilde{v}}_1^{(*1)} = 0, \qquad \tilde{v}_1^{(*1)}\Big|_{\gamma_y} = 0. \qquad (i = 11, 15).$$

Последнее условие можно перефразировать в терминах $\tilde{v}^{(*0)}$, используя последние два уравнения в (3.6) и свести к первому условию в Γ_3 (6.2).

Найдя решение уравнений краевого эффекта для $\tilde{\tilde{w}}^{(*1)}$, $\tilde{\tilde{\varphi}}^{(*3)}$, подчинив его предпоследнему условию из (6.1), подставим его в последнее условие из (6.1). Получим искомое условие – второе в Γ_3 (в Γ_4) (6.2). Второе и третье условия из (6.1) при необходимости можно использовать для определения произвольной постоянной, имеющейся в решении для $\tilde{\tilde{w}}^{(*1)}$, $\tilde{\tilde{\varphi}}^{(*3)}$.

Таким образом, приходим к выводу, что для (3.3) на γ_y следует назначить краевые условия Γ_3 или Γ_4 (6.2), если на $\partial'_y F$ задано одно из условий Γ_i соответственно семейства $S_{122}|_{\alpha_y=0}$ или $(\Gamma_{15}|_{\alpha_y=0}, \ \Gamma_{16})$ при $\mu>0$ для закреплений вдоль $\partial' F$ из шестой строки табл.2.

Для удобства приведем сводку искомых краевых условий Γ_i на γ_y для (3.3), полученных в п.4–6:

$$\Gamma_1: \quad W = W_{/1} = 0, \qquad\qquad \Gamma_2: \quad W = \varphi = 0;$$

$$\Gamma_3: \quad G_\gamma\left(\frac{W}{G_\gamma^{1/2}}\right)_{/1} - \frac{G_{\gamma/1}}{2G_\gamma}\,(W_{/2})^2 - W_{/22}\,W_{/1} = 0;$$

$$\left(1-\frac{W_{/22}}{G_\gamma^{1/2}}\right)G_\gamma^{1/2}\left(\frac{\varphi}{G_\gamma^{1/2}}\right)_{/1} + \left(q - \frac{\varphi_{/22}}{G_\gamma^{1/2}}\right)W_{/1} + \frac{s}{G}W_{/2} = 0;$$

$$\Gamma_4: \quad \varphi = 0, \quad \left(1-\frac{W_{/22}}{G_\gamma^{1/2}}\right)\varphi_{/1} + q\,W_{/1} + \frac{s}{G}\,W_{/2} = 0. \tag{6.2}$$

Из приведенных выше рассуждений следует, что говоря о том, что $\alpha_y = 0$ или $\alpha_y \neq 0$ на $\partial'_y F$, фактически мы имеем в виду, что $|\alpha_y| \lesssim \varepsilon^{1/2}$ или $|\alpha_y| \sim 1$ при $\varepsilon \ll 1$. Рассматривая исходные краевые условия только при предельных значениях α_y (0 и 1), мы не исследуем, например, переход условий Γ_2 в Γ_3, Γ_4 при непрерывном убывании α_y к нулю.

7. Упрощенная краевая задача для описания начальных послекритических деформаций оболочки

Полученных в п.4–6 результатов достаточно для того, чтобы сформулировать краевые условия $\Gamma_i - \Gamma_j$ на γ_y для (3.3) при всех исходных закреплениях оболочки $\Gamma_m - \Gamma_n$ вдоль края $\partial' F$, приведенных в табл.2. Окончательные результаты сведены в табл.3. В ней (*) отмечены исходные краевые условия, при которых безмоментная теория оболочек применима условно (в смысле работы [7]) и считается, что $\mu>0$; (**) – в этом случае считается, что $\mu = 0$.

За исключением второй строки всюду в табл.3, где на $\partial'_y F$ рассматривается условие Γ_3 или Γ_7 из S_{12} считается, что $\alpha_y = 0$. Если в этих случаях $\alpha_y \neq 0$ и, кроме того, $\mu > 1/2$ при исходных краевых условиях $S_{12}-(\Gamma_{12}|_{\alpha_2=0},\ \Gamma_{16},\ S_{22})$, для линеаризованной системы (3.3) следует назначить соответствующие условия из третьего столбца табл.3, заменив в них Γ_1 на Γ_1' (5.10) и линеаризовав условия Γ_3 и Γ_4 (8,2). Если при $S_{12}-(\Gamma_{12}/\alpha_2=0,\ \Gamma_{16},\ S_{22})$ $\alpha_1 \neq 0$ и $\mu=1/2$, то второе искомое краевое условие на γ_1 в Γ_1 несколько усложняется из-за того, что при его выводе в первом уравнении из (5.6) появится интегральное слагаемое с $\tilde{\tilde{W}}^{(1/2)}\tilde{\tilde{W}}^{(*1/2)}$. Этот случай здесь не рассматривается.

Итак, начальные послекритические деформации развертывающейся оболочки с закреплениями $\Gamma_i - \Gamma_j$ (табл.3) вдоль торцов $\partial_\nu' F$ при ее выпучивании в окрестности, образующей γ, описываются в основном приближении решениями упрощенной краевой задачи (3.3) с краевыми условиями $\Gamma_m - \Gamma_n$ на γ_ν (табл.3).

Таблица 3

№	$\Gamma_i - \Gamma_j$	$\Gamma_i - \Gamma_j$
1	$S_1 - S_1$	$\Gamma_1 - \Gamma_1$
2	$S_2 - S_2,\quad S_{12}-(S_{22},\ \Gamma_{12}/\alpha_2\neq 0)^{**)}$ $(S_2,\ S_{122}/\alpha_1\neq 0)-S_{122}/\alpha_2\neq 0,\ S_{211}-\Gamma_{12}/\alpha_2\neq 0$	$\Gamma_2 - \Gamma_2$
3	$S_1-S_{21},\ S_{11}-S_{22},\ S_{12}-(S_{22},\ \Gamma_{12}/\alpha_2\neq 0)^{*)}$ $S_1-S_{122}/\alpha_2\neq 0,\ S_{11}-\Gamma_{12}/\alpha_2\neq 0$	$\Gamma_1 - \Gamma_2$
4	$S_1 - S_{122}/\alpha_2=0$	$\Gamma_1 - \Gamma_3$
5	$S_{11}-(\Gamma_{12}/\alpha_2=0,\ \Gamma_{16}),\ S_{12}-(\Gamma_{12}/\alpha_2=0,\ \Gamma_{16})^{*)}$	$\Gamma_1 - \Gamma_4$
6	$S_{21}-S_{122}/\alpha_2=0,\quad S_{22}-S_{122}/^{*)}_{\alpha_2=0}$	$\Gamma_2 - \Gamma_3$
7	$S_{211}-(\Gamma_{12}/\alpha_2=0,\ \Gamma_{16})^{*)}$	$\Gamma_2 - \Gamma_4$

$(^{*)}-\mu>0,\qquad ^{**)}-\mu=0)$

Напомним, что при рассматриваемых краевых условиях в R и M [ ] (3.3), (3.4) следует положить $\varkappa_{12}^{\gamma} \equiv \tilde{\varkappa}_{22}^{(-1)} \equiv 0$ (п.3). Из (3.3), (3.4) и табл.3 следует, что исходная задача для анизотропной развертывающейся оболочки произвольной формы в основном приближении сведена к упрощенной задаче для ортотропной круговой конической оболочки длины L, соприкасающейся с F вдоль γ, с докритическими усилиями q, s, p и с краевыми условиями $\Gamma_i - \Gamma_j$ из той же строчки табл.3, что и исходная краевая задача. Это позволяет распространить на более общий случай известные асимптотические результаты об устойчивости конических оболочек (например,формулы для критических нагрузок).

Упрощенная краевая задача (3.3, табл.3) может быть использована также и для описания устойчивых состояний равновесия развертывающейся оболочки со значительными деформациями (вмятинами), локализованными в окрестности одной из образующих γ срединной поверхности оболочки.

Если в исходных краевых условиях Γ_i нетангенциальные условия будут неоднородны (M_{y*}, $Q_3 \neq 0$; до сих пор мы предлагали противоположное), то краевые условия упрощенной задачи, кроме $\Gamma_2 - \Gamma_2$, вообще говоря изменятся. Так, при исходных краевых условиях $(\Gamma_7, \Gamma_9, \Gamma_{13}) - (\Gamma_7, \Gamma_9, \Gamma_{13})$ $i_y = 0$ и $\Gamma_7 - \Gamma_7$ заменится на $\Gamma_2 - \Gamma_2$. В этом случае следует провести дополнительные исследования, приняв за исходные уравнения теории непологих оболочек, например, исходные уравнения работ [2, 3]. Такое исследование было проведено для шарнирно опертых оболочек с краевыми условиями $\Gamma_8 - \Gamma_8$ (1.8 из работы [3]). В результате мы пришли к той же упрощенной задаче (3.3) $\Gamma_2 - \Gamma_2$, что и здесь. Асимптотическое решение задачи (3.3), $\Gamma_2 - \Gamma_2$ для цилиндрических оболочек ($\varkappa = 0$) рассматривалось в [4], [5].

8. Критические нагрузки

В основном приближении критические значения докритических усилий ищем из условия существования нетривиального ограниченного решения следующей линеаризованной системы (3.3):

$$a_\gamma G_\gamma^{-3/2} W_{/2222} + \Psi_{/11} + q W_{/11} + 2s G_\gamma^{-1/2} (G_\gamma^{-1/2} W_{/2})_{/1} + p W_{/22} = 0,$$

$$k_\gamma G_\gamma^{-3/2} \Psi_{/2222} - W_{/11} = 0,$$

$$|W|+|\psi|<\infty \tag{8.1}$$

с краевыми условиями на γ_1 из табл.3, где Γ_3, Γ_4 нужно заменить линеаризованными условиями Γ_3', Γ_4'

$$\Gamma_3': \ \left(G_\gamma^{-1/2}W\right)_{/1}=0, \quad G_\gamma^{1/2}\left(G_\gamma^{-1/2}\psi\right)_{/1}+qW_{/1}+sG^{-1}W_{/2}=0;$$

$$\Gamma_4': \quad \psi=0, \quad \psi_{/1}+qW_{/1}+sG^{-1}W_{/2}=0. \tag{8.2}$$

О краевых условиях Γ_3, Γ_7 при $\alpha_\nu\neq 0$ см. п.7. В (3.4) нужно положить $R=R_2/a_1$.

Рассмотрим однопараметрическое нагружение, когда q, s, p, являясь функциями переменной η^1, зависят также от параметра нагружения λ. Пусть λ_* – наименьшее значение параметра λ, при котором в $\varepsilon^{1/2}$ – окрестности линии γ разрешима краевая задача (8.1) табл.3. Тогда

$$\lambda_{**}=\min_{(F')}\lambda_*$$

определяет в основном приближении критические значения параметра λ, при котором возможно выпучивание развертывающейся оболочки в окрестности одной из ее образующих в F'.

Из табл.3 следует вывод о доминирующем влиянии на λ_{**} ограничений тангенциальных смещений на $\partial'F$ в направлении образующих [11].

В рассматриваемой постановке задачи при краевых условиях, приведенных в табл.3, на λ_{**} не оказывает влияние моментность докритических деформаций (краевой эффект и изгиб оболочки вне окрестности края) [12]. При исключенных из рассмотрения краевых условиях $S_{12}/\alpha_1\neq 0 - (\Gamma_{12}/\alpha_2=0,\ \Gamma_{16},\ S_{22})$ с $\mu=1/2$ (п.7) и $[(\Gamma_{12}/\alpha_1=0,\ \Gamma_{16})-(S_{12},\ S_{211}),\ S_{122}/\alpha_1=0 - S_{22}]$ с $\mu=0$ (п.6) на критическую нагрузку (λ_{**}) через краевые условия на γ_1 для (8.1) будут оказывать влияние докритические деформации в зоне краевого эффекта у края $\partial_1'F$ (интересно отметить, что в первом случае – $i_1=1/2$, а во втором – 1).

Решение упрощенной краевой задачи (8.1), (3.3), табл.3 ищется стандартным образом путем разложения его по тригонометрическим функциям (по y^2) и балочным функциям (по y^1) с последующим применением процедуры метода Ритца (Бубнова-Папковича) [6,11,13]. Получаемые при этом результаты для цилиндрических и конических оболочек распространяют на новые способы закрепления известные асимптотические выводы о величине критической нагрузки такие, например, как (4.1), (5.8), (6.7); формула, подобная (11.6), табл.3 § 6 и др. из работы [11]. Для конических оболочек при внешнем давлении получены кривые для $\lambda_*(\varkappa)$, совпадающие с результатами точного численного решения исходной задачи, приведенного в работе [9] на рис.2 (кривые 1-6). Для конических оболочек получены результаты, аналогичные имеющимся в работе [14]. Для условий $r_2 - r_2$ решение приведено в работе [6].

Пусть $p, q = const$, $s = 0$, $d_\gamma - k_\gamma = c_\gamma - 1$. Тогда решение задачи (8.1) $r_2 - r_2$ приводит к следующей формуле для критических значений параметров нагружения p, q:

$$p = 4\pi 3^{-3/4}\left[(1+q'^2)^{3/2} - q'(3-q'^2)\right]^{1/2}, \quad q' = q/(2\sqrt{3}). \qquad (8.3)$$

Это соответствует решению задачи об устойчивости анизотропной цилиндрической оболочки при внешнем давлении p, осевом сжатии q и при краевых условиях из второй строчки табл.3. При закреплении $r_8 - r_8/_{\alpha_\nu = 0}$ следует рассматривать $q < 1$, т.к. при $q = 1$ возможно выпучивание вне зоны краевого эффекта вдоль линий, не касающихся образующих [2].

Отметим, что к решению системы, подобной (8.1), и ранее другими авторами сводились некоторые задачи об устойчивости цилиндрических и конических оболочек [11,15].

Остановися на краевых условиях из [4-6] строк табл.2, при которых безмоментная теория применима условно (в смысле работы [7]). Наряду с неустойчивостью асимптотики напряженно-деформированного состояния оболочки, отмеченной в работе [7], в этом случае имеет место "неустойчивость" значений критической нагрузки. Именно при малом изменении внешних усилий, что имеет место при изменении μ от 1 до 0 $(\varepsilon \ll 1)$, критическая нагрузка (например, при закреплениях $S_{12} - S_{22}$) уменьшается на конечную величину, а краевые условия $r_2 - r_2$ для (8.1) заменяются на $r_1 - r_2$ при $S_{12} - S_{22}$. Так, для конических оболочек при внешнем давлении это уменьшение достигает 30%. Аналогичное явление имеет место и для строго выпуклых оболочек. Для шарнирно опертых пологих оболочек снижение критической нагрузки составляет 60% ([2], п.6,7).

9. О границах применимости асимптотических результатов

При построении итерационных процессов в п.2,3 предполагалось, что ε – окрестность края $\partial' F$ и $\varepsilon^{1/2}$ – окрестность образующей γ сколь угодно малы при $\varepsilon \ll 1$ по сравнению с F'. Это означает, что должны иметь место неравенства

$$\left(\varepsilon\varepsilon_\gamma\right)^{1/2} \ll \frac{\rho''_\gamma}{L}; \qquad \varepsilon' \equiv \varepsilon \left[\frac{R G_\gamma^{1/2}}{L^2 \cos^2 \alpha_\gamma} \left(D^{1111} K_{2222}\right) \Big|_{\sigma^1=0}^{1/2} \right]^{1/2} \Big|_{\theta_\gamma} \ll 1,$$

где ρ''_γ – расстояние между γ и $\partial'' F$. Тем самым из рассмотрений исключались конические оболочки, содержащие вершину. Однако, несколько изменив построения у вершины, можно показать, что и в данном случае применимы система (3.3), краевые условия табл.3 с требованием ограниченности решения в вершине [15].

Уточним исходное предположение о малой изменяемости функций, описывающих геометрию оболочки, ее упругие свойства и внешние усилия. В построениях п.2,3 фактически пренебрегалось изменениями этих функций на интервалах $\Delta x^1 \sim \varepsilon' L$ и $\Delta x^2 \sim L(\varepsilon\varepsilon_\gamma)^{1/2}$, т.е. считалось, что они изменяются более плавно, чем соответствующие функции краевых эффектов. Если это предположение не будет выполняться, то докритическое напряженное состояние вне зоны краевых эффектов будет существенно моментным, что может привести к заметному снижению критических нагрузок [16]. Это замечание относится и к ступенчатым нагрузкам, ширина полосы приложения которых соизмерима с шириной зоны краевого эффекта [17].

Асимптотическая точность по ε результатов, получаемых при решении упрощенной краевой задачи, имеет тот же характер, что и формула Папковича $(q=0)$ [11].

Представление о зависимости критических нагрузок для конических оболочек от ε дают, например, численные результаты работ [9, 14]. Из них, в частности, следует, что асимптотические значения критических нагрузок отличаются от их точных численных значений не более чем на 10% при $\varepsilon \leqslant 0,01$. Более точные количественные оценки погрешности асимптотических формул можно получить, по-видимому, только экспериментально.

При сложном нагружении (не достаточно тонких) развертывающихся оболочек произвольной формы можно воспользоваться асимптотическими формулами для этих задач и численными результатами (при не достаточно малом ε) при более простом (эталонном) нагружении для конструирования искомых формул для критических нагрузок, как это делается, например, в работе [14].

Если один из торцов оболочки совпадает с образующей $\partial'' F$ и в окрестности этой образующей происходит выпучивание оболочки (γ совпадает с $\partial'' F$), то и в этом случае для описания в основном приближении начальных послекритических деформаций можно пользоваться системой (3.3) в полуполосе с краевыми условиями на γ_ν из табл.3, присоединив к ним краевые условия на γ, вид которых определяется закреплением оболочки вдоль торца $\partial'' F$. Аналогичное утверждение справедливо для критических нагрузок.

Литература

1. Погорелов А.В. Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек. - М.: Наука, 1967. - 280 с.
2. Бабенко В.И. Асимптотическое представление решений теории непологих оболочек при нагрузках, близких к критическим. - Мат. физика и функц. анализ, 1974, в.5, с.76-91.
3. Бабенко В.И. Потеря устойчивости непологих отрого выпуклых анизотропных оболочек. - Изв. АН СССР, мех. тв. тела, 1977, № 2, с.95-103.
4. Бабенко В.И. К потере устойчивости цилиндрических оболочек при внешнем давлении. - Докл. АН УССР, 1977, сер.А, № 3, с.221-224.
5. Бабенко В.И. Асимптотическое представление решений уравнений теории цилиндрических оболочек в окрестности точек ветвления. - В кн.: Дифференциальные уравнения и некоторые методы функционального анализа. Киев: Наук. думка, 1978, с.13-29.
6. Бабенко В.И. К определению критического давления для развертывающихся оболочек. - Докл. АН УССР, 1977, сер.А, № 4, с.321-323.
7. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. - М.: Наука, 1976. - 512 с.
8. Галимов К.З. Основы нелинейной теории тонких оболочек. Казань: Изд-во Казанского госуниверситета, 1975. - 326 с.
9. Григолюк Э.И., Мальцев В.П., Мяченков В.И. и др. Об одном методе решения задач устойчивости и колебаний оболочек вращения. - Изв. АН СССР, мех.тв.тела, 1971, № 1, с.9-19.
10. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. - Успехи мат. наук, 1960, вып.3, с.3-80.
11. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость круговых цилиндрических оболочек. - В кн.: Механизм твердых деформируемых тел. 1967. М.: Наука, 1969, с.5-348.
12. Мальцев В.П. Устойчивость ортотропных конических оболочек. - Изв. АН СССР, мех. тв. тела, 1971, № 1, с.188.
13. Власов В.З. Избранные труды: В 3-т. - М.: Изд-во АН СССР, 1962. - Т.1. 528 с.
14. Мяченков В.И. Устойчивость цилиндрических оболочек при действии осесимметричного поперечного давления. - Прикл. механика, 1970, 6, № 1, с.27-33.
15. Алумяэ Н.А. Асимптотическое интегрирование уравнений статической устойчивости конической оболочки вращения. - Прикл. мат. и мех., 1957, 21, в.1, с.83-88.

16. Кабанов В.В., Курцевич Г.И. Устойчивость цилиндрических оболочек при несимметричном давлении. - Прикл. механика, 1977, 13, № 1, с.21-26.

17. Андреев Л.В., Ободан Н.И. Экспериментальное исследование устойчивости цилиндрических оболочек при действии неравномерного давления. - В кн.: Тр. VI Всес. конф. по теории оболочек и пластин (Баку, 1966). М.: Наука, 1967, с.77-81.

УДК 517.946

З.Ф.Назыров, Е.Я.Хруслов

О ВОЗМУЩЕНИИ ТЕПЛОВОГО ПОЛЯ ДВИЖУЩИМИСЯ МЕЛКИМИ ЧАСТИЦАМИ

1. Постановка задачи и формулировка основных результатов

Пусть в области $\Omega \subset R_3$ движется n частиц $F_i^{(n)}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ по заданным траекториям $x^i=\varphi(\xi^i,t)$, точнее по этим траекториям движутся их фиксированные точки x^i, находившиеся в начальный момент в точках $\xi^i \in \Omega$, а сами частицы могут произвольно вращаться вокруг x^i. Обозначим через $F_i^{(n)}(t)$ – положение i-й частицы в момент времени t, а через $F_{iT}^{(n)}$ – множество, заметенное i-й частицей при ее движении за время T, т.е. $F_{iT}^{(n)}=\bigcup_{0\le t\le T} F_i^{(n)}(t)$. Положим $\Omega_T=\Omega\times[0,T]$, $\Omega_T^{(n)}=\Omega_T\setminus\bigcup_{i=1}^{n} F_{iT}^{(n)}$, $\Omega^{(n)}=\Omega\setminus\bigcup_{i=1}^{n} F_i^{(n)}(0)$ и рассмотрим в области $\Omega_T^{(n)}$ начально краевую задачу

$$\frac{\partial u^{(n)}(x,t)}{\partial t}-\Delta u^{(n)}(x,t)=F(x,t) \qquad (x,t)\in\Omega_T^{(n)}, \tag{1}$$

$$u^{(n)}(x,t)=0 \quad (x,t)\in\left[\bigcup_{i=1}^{n} F_{iT}^{(n)}\right]\cup\left[\partial\Omega\times[0,T]\right], \tag{2}$$

$$u^{(n)}(x,t)=U^{(n)}(x) \qquad x\in\Omega^{(n)}, \quad t=0, \tag{3}$$

где

$$F(x,t)\in L_2(\Omega_T), \quad U^{(n)}(x)\in \overset{0}{W}{}_2^{1}(\Omega^{(n)}), \quad x=\{x_1,x_2,x_3\},$$
$$\Delta=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}.$$

Решением $u^{(n)}(x,t)$ этой задачи описывается тепловое поле в области Ω с источником $F(x,t)$, возмущенное движущимися частицами $F_i^{(n)}$ $(i=1,2,\ldots,n)$, на которых задана нулевая температура. Граничное условие на $\partial\Omega$ для определенности взято нулевым, но в данной задаче оно не существенно.

Будем предполагать, что вектор-функция $\varphi(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируема по (x,t) и при каждом t взаимно однозначно отображает Ω на себя $(0<\alpha\le \det\frac{\partial\varphi}{\partial x}\le\beta)$; частицы $F_i^{(n)}$ достаточно малы, ограничены гладкими поверхностями $\partial F_i^{(n)}$ и скорости их вращений вокруг точек x^i гладко зависят от $t\,(0\le t\le T)$; множества $F_{iT}^{(n)}$ не пересекаются между собой и с $\partial\Omega$. Кроме того, для простоты предположим также, что область Ω ограничена замкнутой гладкой поверхностью $\partial\Omega$ и функции $F(x,t)$ и $U^{(n)}_{(x)}$ удовлетворяют условию Гельдера.

При этих предположениях существует единственное решение задачи (I) - (3) (см.[I]), продолжая которое на множество $\bigcup_{i=1}^{q} F_{iT}^{(n)}$ нулем, получим функцию $u^{(n)}(x,t)\in W_2^1(\Omega_T)$. Целью работы является изучение асимптотического поведения $u^{(n)}(x,t)$ при $n\to\infty$, когда число частиц неограниченно растет, а их диаметры стремятся к нулю. Аналогичный вопрос для неподвижных частиц изучен в работе [2] с помощью метода Фурье и соответствующих результатов для стационарной задачи.

Прежде чем сформулировать основной результат введем необходимые обозначения: $C_i^{(n)}=C(F_i^{(n)})$ - ньютонова емкость частицы $F_i^{(n)}$; $d_i^{(n)}$ - диаметр $F_i^{(n)}$; $r_{ij}^{(n)}$ - расстояние между частицами $F_i^{(n)}$ и $F_j^{(n)}$ $(i\ne j)$ при $t=0$; $r_i^{(n)}=\min_{j\ne i} r_{ij}^{(n)}$; $\rho^{(n)}$ - расстояние от $\bigcup_{i=1}^{q} F_i^{(n)}$ до $\partial\Omega$ при $t=0$;

<u>Теорема</u> I. Предположим, что скорости вращения частиц и их производные ограничены равномерно по n и при $t=0$ выполняются такие условия:

I. Для любой области $G\subset\Omega$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{(G)}{}_i\; C_i^{(n)}=\int_G c(x)\,dx,$$

где $c(x)$ - непрерывная функция в Ω, сумма $\sum_{(G)}{}_i$ распространяется на $F_i^{(n)}\subset G$;

2. $$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{(G)}{}_i\sum_{r_{ij}^{(n)}<\rho,\; j\ne i}\frac{C_i^{(n)}C_j^{(n)}}{r_{ij}^{(n)}}=\delta(\rho)\,\mathrm{mes}\,G \quad \text{и} \quad \lim_{\rho\to 0}\delta(\rho)=0;$$

3. Для некоторых $\tau\,(\frac{2}{3}<\tau<1)$ и $\theta\,(\theta<1)$

$$r_i^{(n)}\ge (d_i^{(n)})^{\tau},\quad \rho^{(n)}\ge[\max_i d_i^{(n)}]^{\theta}.$$

4. $U^{(n)}(x)$ - сходится в пространстве $L_2(\Omega)$ к функции

$$U(x) \in W_2^1(\Omega) \quad \text{и} \quad \|U^{(n)}\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} < C.$$

Тогда последовательность $u^{(n)}(x,t)$ сходится в пространстве $L_2(\Omega_T)$ к решению $u(x,t)$ следующей задачи

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \Delta u(x,t) + \tilde{c}(x,t)\, u(x,t) = F(x,t) \qquad (x,t) \in \Omega_T, \tag{4}$$

$$u(x,t) = 0 \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \tag{5}$$

$$u(x,t) = U(x) \qquad x \in \Omega,\ t = 0, \tag{6}$$

где $\tilde{c}(x,t) = c(\varphi^{-1}(x,t)) \Big/ \det \dfrac{\partial \varphi^{-1}(x,t)}{\partial x} \Big/$, $\varphi^{-1}(x,t)$ – отображение Ω в Ω обратное $\varphi(x,t)$.

Обычно положение каждой частицы в пространстве точно неизвестно и задаются лишь некоторые вероятностные характеристики распределения частиц в начальный момент. С помощью теоремы I можно получить аналогичный результат и в этом случае.

Пусть частицы $F_i^{(n)}$ – шары радиуса $r^{(n)} = O(\frac{1}{n})$ и заданы функции распределения их центров x^i в начальный момент $f_1^{(n)}(x^1)$, $f_2^{(n)}(x^1, x^2), \ldots$, $f_n^{(n)}(x^1, x^2, \ldots, x^n)$. Это означает, что вероятность того, что в начальный момент центры данной группы из s частиц находятся соответственно в бесконечно малых объемах $dx^1, \ldots, dx^s$ вблизи точек $x^1, \ldots, x^s \in \Omega$ дается выражением $f_s^{(n)}(x^1, \ldots, x^s)\, dx^1 \ldots dx^s$, где $f_s^{(n)}(x^1, \ldots, x^s)$ s – частичная функция распределения. Отметим, что функции $f_s^{(n)}(x^1, \ldots, x^s)$ – симметричны и удовлетворяют известным условиям согласования и нормировки.

Будем предполагать, что $f_n^{(n)}(x^1, \ldots, x^n) = 0$, если расстояние от некоторой точки $x^i \in \Omega$ до $\partial\Omega$ становится меньше $n^{-\theta}$, или для некоторых i, j $|x^i - x^j| < n^{-\theta}$ $(\theta < 1)$. Так как начальная функция $U^{(n)}(x)$ в задаче (I) – (3) обращается в нуль на частицах $F_i^{(n)}$, то она, вообще говоря, будет случайной, т.е. $U^{(n)}(x) = U^{(n)}(x, \omega_0)$, где ω_0 – точка некоторого вероятностного пространства $M_0^{(n)}(P_{r_0})$.

Решение $u^{(n)}(x,t)$ задачи (I) – (3) (продолженное нулем на множество $\bigcup_{i=1}^{s} F_{iT}^{(n)}$) при этом также будет случайным $u^{(n)}(x,t) = u^{(n)}(x,t,\omega)$, $\omega \in M^{(n)}(P_r)$, где вероятностная мера P_r в пространстве $M^{(n)}$ порождается функциями распределения $f_s^{(n)}(x^1, \ldots,$

$x^s)$ $(s=1,\dots,n)$ и мерой Pr_0 пространства $M_0^{(n)}$. Однако оказывается, что при определенных условиях при $n\to\infty$ $u^{(n)}(x,t,\omega)$ по вероятности сходится в пространстве $L_2(\Omega_T)$ к неслучайной функции $u(x,t)$, т.е. $\forall\varepsilon>0$.

$$\lim_{n\to\infty} Pr\left\{ \int_0^T\int_\Omega |u^{(n)}(x,t,\omega)-u(x,t)|^2 dx dt<\varepsilon \right\}=1.$$

А именно, справедлива следующая

Теорема 2. Пусть при $n\to\infty$ выполняются такие условия:

1. $f_1^{(n)}(x)=f(x)+O(1)$;

2. $f_2^{(n)}=f(x^1)f(x^2)+O(1)$ при $|x^1-x^2|>(r^{(n)})^\tau$ $(F\tau,\ \frac{2}{3}<\tau<1)$

и $f_2^{(n)}(x^1,x^2)<C$ всюду;

3. $r^{(n)}n\to a$;

4. Функции $U^{(n)}(x,\omega_0)$ по вероятности ограничены в метрике $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и сходятся в $L_2(\Omega)$ к функции $U(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, т.е.

$$\exists C<\infty \quad \lim_{n\to\infty} Pr_0\left\{ \|U^{(n)}\|_{W_2^1(\Omega)}<C \right\}=1,$$

$$\forall\varepsilon>0 \qquad \lim_{n\to\infty} Pr_0\left\{ \|U^{(n)}-U\|_{L_2(\Omega)}<\varepsilon \right\}=1.$$

Тогда последовательность решений $u^{(n)}(x,t,\omega)$ задачи (1) - (3) по вероятности сходится в пространстве $L_2(\Omega_T)$ к решению задачи (4) - (6), где $c(x,t)=4\pi a\, f(\varphi^{-1}(x,t))\left|\det\frac{\partial\varphi^{-1}(x,t)}{\partial x}\right|$. Аналогичный результат для неподвижных и независимо распределенных частиц получен в работе [3] (см. также [4]).

Ниже приводятся доказательства теорем 1 и 2. Предварительно (§ 2) мы получаем оценки производных решения $u^{(n)}(x,t)$ задачи (1) - (3), которые используются при доказательстве теоремы 1.

§ 2. Оценки производных $u^n(x,t)$

Покажем, что для решения $u^{(n)}(x,t)$ задачи (1) - (3) справедливы оценки

$$\|\nabla u^{(n)}\|_{L_2(\Omega_T^{(n)})}<C_1, \qquad \left\|\frac{\partial u^{(n)}}{\partial t}\right\|_{L_2(\Omega_T^{(n)})}<C_2, \tag{7}$$

где $\nabla=\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right\}$, а постоянные C_1, C_2 не зависят от n.

Введем обозначение $\Omega^{(n)}(t)=\Omega\setminus\bigcup_{i=1}^{n}F_i^{(n)}(t)$. Умножая уравнение (1) на $u^{(n)}(x,t)$, и интегрируя по области $\Omega_T^{(n)}$, запишем

$$\int_0^T\int_{\Omega^{(n)}(t)}\left(u^{(n)}\frac{\partial u^{(n)}}{\partial t}-u^{(n)}\Delta u^{(n)}\right)dx\,dt=\int_0^T\int_{\Omega^{(n)}(t)}u^{(n)}F\,dx\,dt. \tag{8}$$

Учитывая, что $u^{(n)}(x,t)=0$ на границе области $\Omega^{(n)}(t)$, получаем

$$\int_0^T\int_{\Omega^{(n)}(t)}u^{(n)}\Delta u^{(n)}dx\,dt=-\int_0^T\int_{\Omega^{(n)}(t)}\left|\nabla u^{(n)}\right|^2dx\,dt, \tag{9}$$

$$\int_0^T\int_{\Omega^{(n)}(t)}u^{(n)}\frac{\partial u^{(n)}}{\partial t}dx\,dt=\frac{1}{2}\int_0^T\frac{d}{dt}\int_{\Omega^{(n)}(t)}(u^{(n)})^2dx\,dt= \tag{10}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\Omega^{(n)}(t)}\left|u^{(n)}(x,T)\right|^2dx-\frac{1}{2}\int_{\Omega^{(n)}(0)}\left|U^{(n)}(x)\right|^2dx.$$

Функцию $u^{(n)}(x,t)$ можно продолжить нулем на множество $F_T^{(n)}=\bigcup_{i=1}^{n}F_{iT}^{(n)}$, тогда при каждом $t\in[0,T]$ $u^{(n)}(x,t)\in\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$. Поэтому в силу неравенства Фридрихса

$$\left\|u^{(n)}\right\|_{L_2(\Omega_T^{(n)})}\le C\left\|\nabla u^{(n)}\right\|_{L_2(\Omega_T^{(n)})}$$

и, следовательно,

$$\int_0^T\int_{\Omega^{(n)}(t)}u^{(n)}F\,dx\,dt\le C^2\varepsilon\left\|\nabla u^{(n)}\right\|^2_{L_2(\Omega_T^{(n)})}+\frac{1}{4\varepsilon}\left\|F\right\|^2_{L_2(\Omega_T)}, \tag{11}$$

где C не зависит от n, ε – произвольное положительное число. Объединяя (8) – (11), получаем

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega^{(n)}(T)}\left|u^{(n)}(x,T)\right|^2dx+(1-\varepsilon C^2)\left\|\nabla u^{(n)}\right\|^2_{L_2(\Omega_T^{(n)})}\le$$

$$\le\frac{1}{4\varepsilon}\left\|F\right\|^2_{L_2(\Omega_T)}+\frac{1}{2}\left\|U^{(n)}(x)\right\|^2_{L_2(\Omega_T)}.$$

Отсюда и из условия 4 теоремы I вытекает первое из неравенств (7).

Пусть $l^{(n)}(x,t)=\left\{l_k^{(n)}(x,t),\quad k=0,1,2,3\right\}$ – векторное поле в области Ω_T, касательное к части границы этой области, а именно к $\partial\Omega_T\setminus(\Omega(T)\cup\Omega)=\left(\bigcup_{0<t<T}\bigcup_{i=1}^{n}\partial F_i^{(n)}(t)\right)\cup(\partial\Omega\times(0,T))$, и удов-

летворяющее условиям

$$\left| l^{(n)}(x,t) \right| = \sqrt{\sum_{k=0}^{3} (l_k^{(n)}(x,t))^2} = 1,$$

$$\left| D_x l^{(n)}(x,t) \right|, \quad \left| D_t l^{(n)}(x,t) \right| < C, \tag{12}$$

$$l_0^{(n)}(x,t) \geq \lambda > 0,$$

где постоянные C и λ не зависят от n. В конце параграфа будет показано, что такое векторное поле существует.

Обозначим через $\frac{d}{dl^{(n)}}$ производную по направлению $l^{(n)}(x,t)$,

т.е. $$\frac{d}{dl^{(n)}} = l_0^{(n)}(x,t)\frac{\partial}{\partial t} + l_1^{(n)}(x,t)\frac{\partial}{\partial x_1} + l_2^{(n)}(x,t)\frac{\partial}{\partial x_2} + l_3^{(n)}(x,t)\frac{\partial}{\partial x_3}. \tag{13}$$

Умножим уравнение (1) на $\frac{du^{(n)}(x,t)}{dl^{(n)}}$ и проинтегрируем по области $\Omega_T^{(n)}$:

$$\int_0^T \int_{\Omega^{(n)}(t)} \frac{du^{(n)}}{dl^{(n)}} \frac{\partial u^{(n)}}{\partial t} dx dt - \int_0^T \int_{\Omega^{(n)}(t)} \frac{du^{(n)}}{dl^{(n)}} \Delta u^{(n)} dx dt = \int_0^T \int_{\Omega^{(n)}(t)} \frac{du^{(n)}}{dl^{(n)}} F dx dt. \tag{14}$$

В силу (13) и (12)

$$\int_0^T \int_{\Omega^{(n)}(t)} \frac{du^{(n)}}{dl^{(n)}} \frac{\partial u^{(n)}}{\partial t} dx dt = \int_0^T \int_{\Omega^{(n)}(t)} l_0^{(n)} \left(\frac{\partial u^{(n)}}{\partial t}\right)^2 dx dt + \sum_{k=1}^{3} \int_0^T \int_{\Omega^{(n)}(t)} l_k^{(n)} \frac{\partial u^{(n)}}{\partial x_k} \frac{\partial u^{(n)}}{\partial t} dx dt \geq$$

$$\geq \lambda \left\| \frac{\partial u^{(n)}}{\partial t} \right\|^2_{L_2(\Omega_T^{(n)})} - \sqrt{3} \left\| \nabla u^{(n)} \right\|_{L_2(\Omega_T^{(n)})} \left\| \frac{\partial u^{(n)}}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega_T^{(n)})}, \tag{15}$$

$$\geq (\lambda - \varepsilon) \left\| \frac{\partial u^{(n)}}{\partial t} \right\|^2_{L_2(\Omega_T^{(n)})} - \frac{\sqrt{3}}{4\varepsilon} \left\| \nabla u^{(n)} \right\|^2_{L_2(\Omega_T^{(n)})},$$

где ε - произвольное положительное число.

Аналогично

$$\left| \int_0^T \int_{\Omega^{(n)}(t)} \frac{du^{(n)}}{dl^{(n)}} F dx dt \right| \leq \varepsilon \left\| \frac{\partial u^{(n)}}{\partial t} \right\|^2_{L_2(\Omega_T^{(n)})} + \frac{1}{4\varepsilon} \left\| F \right\|^2_{L_2(\Omega_T)} + \tag{16}$$
$$+ \sqrt{3} \left\| \nabla u^{(n)} \right\|_{L_2(\Omega_T^{(n)})} \left\| F \right\|_{L_2(\Omega_T)} \quad (\varepsilon > 0).$$

Перейдем к оценке второго слагаемого в левой части (14). Так как $u^{(n)}(x,t) = 0$ на множестве $\left\{ \bigcup_{i=1}^{n} \partial F_{iT}^{(n)} \right\} \cup \left\{ \partial\Omega \times (0,T) \right\}$, а векторное поле $l^{(n)}(x,t)$ - касательно к этому множеству, то при любом

$t\in(0,T)$. $\dfrac{du^{(n)}}{dl^{(n)}}(x,t)=0$, при $x\in\partial\Omega^{(n)}(t)$. Поэтому, интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^T\int_{\Omega^{(n)}(t)}\frac{\partial u^{(n)}}{\partial l^{(n)}}\Delta u^{(n)}dxdt=-\int_0^T\int_{\Omega^{(n)}(t)}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{du^{(n)}}{dl^{(n)}}\right)\frac{\partial u^{(n)}}{\partial x_k}dxdt.$$

Отсюда согласно (13) следует

$$\int_0^T\int_{\Omega^{(n)}(t)}\frac{\partial u^{(n)}}{\partial l^{(n)}}\Delta u^{(n)}dxdt=-\int_0^T\int_{\Omega^{(n)}(t)}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u^{(n)}}{\partial x_k}\frac{d}{dl^{(n)}}\left(\frac{\partial u^{(n)}}{\partial x_k}\right)dxdt-$$

$$-\int_0^T\int_{\Omega^{(n)}(t)}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial l_0^{(n)}}{\partial x_k}\frac{\partial u^{(n)}}{\partial t}\frac{\partial u^{(n)}}{\partial x_k}dxdt-\int_0^T\int_{\Omega^{(n)}(t)}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial l_j^{(n)}}{\partial x_k}\frac{\partial u^{(n)}}{\partial x_j}\frac{\partial u^{(n)}}{\partial x_k}dxdt, \tag{17}$$

В силу (12) последние два слагаемых в правой части имеют оценки

$$\left|\int_0^T\int_{\Omega^{(n)}(t)}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial l_0^{(n)}}{\partial x_k}\frac{\partial u^{(n)}}{\partial t}\frac{\partial u^{(n)}}{\partial x_k}dxdt\right|\le\varepsilon\left\|\frac{\partial u^{(n)}}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega_T^{(n)})}+\frac{\sqrt{3}C^2}{4\varepsilon}\left\|\nabla u^{(n)}\right\|^2_{L_2(\Omega_T^{(n)})}$$

$$\left|\int_0^T\int_{\Omega^{(n)}(t)}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial l_j^{(n)}}{\partial x_k}\frac{\partial u^{(n)}}{\partial x_j}\frac{\partial u^{(n)}}{\partial x_k}dxdt\right|\le 3C\left\|\nabla u^{(n)}\right\|^2_{L_2(\Omega_T^{(n)})}. \tag{18}$$

Первое слагаемое преобразуем к виду

$$\int_0^T\int_{\Omega^{(n)}(t)}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u^{(n)}}{\partial x_k}\frac{d}{dl^{(n)}}\left(\frac{\partial u^{(n)}}{\partial x_k}\right)dxdt=\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Omega^{(n)}(t)}\frac{d}{dl^{(n)}}\left|\nabla u^{(n)}\right|^2dxdt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Omega^{(n)}(t)}\sum_{k=0}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[l_k^{(n)}\left|\nabla u^{(n)}\right|^2\right]dxdt-\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Omega^{(n)}(t)}\left|\nabla u^{(n)}\right|^2\sum_{k=0}^{3}\frac{\partial l_k^{(n)}}{\partial x_k}dxdt, \tag{19}$$

где $x_0=t$. Применяя теорему Гаусса-Остроградского и учитывая, что векторное поле $l^{(n)}(x,t)\,|\nabla u^{(n)}|^2$ касательно к $\partial\Omega_T^{(n)}\setminus(\Omega^{(n)}(T)\cup\Omega)$, получаем

$$\int_0^T\int_{\Omega^{(n)}(t)}\sum_{k=0}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[l_k^{(n)}\left|\nabla u^{(n)}\right|^2\right]dxdt=\int_{\Omega^{(n)}(T)} l_0(x,T)\left|\nabla u^{(n)}\right|^2 dx -$$

$$-\int_{\Omega^{(n)}(0)} l_0(x,0)\left|\nabla U^{(n)}\right|^2 dx. \tag{20}$$

Наконец, в силу (12)

$$\left|\int_0^T\int_{\Omega^{(n)}(t)}\left|\nabla u^{(n)}\right|^2\sum_{k=0}^{3}\frac{\partial \mathcal{U}_k^{(n)}}{\partial x_k}\,dxdt\right|\le 4c\left\|\dot{\nabla} u^{(n)}\right\|^2_{L_2(\Omega_T^{(n)})}. \tag{21}$$

Из равенств (14), (17), (19), (20) и оценок (15), (16), (18), (21) следует

$$\left(\lambda-3\varepsilon\right)\left\|\frac{\partial u^{(n)}}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega_T^{(n)})}+\frac{1}{2}\int_{\Omega^{(n)}(T)} l_0(x,T)\left|\nabla u^{(n)}\right|^2 dx\le$$

$$\le\left(\frac{1}{4\varepsilon}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left\|F\right\|^2_{L_2(\Omega_T)}+\left(\frac{\sqrt{3}\,(C^2+1)}{4\varepsilon}+5C+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left\|\nabla u^{(n)}\right\|_{L_2(\Omega_T^{(n)})}+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\Omega^{(n)}(0)} l_0(x,0)\left|\nabla U^{(n)}\right|^2 dx.$$

Так как ε – произвольное положительное число, а $l_0(x,t)\geqslant\lambda>0$, то выбирая здесь $\varepsilon=\frac{\lambda}{6}$ и учитывая, что первое из неравенств (7) уже установлено, получаем второе неравенство (7). Остается построить векторное поле $l^{(n)}(x,t)$. Рассмотрим вектор-функцию $\varphi^{(n)}(x,t)$, отображающую при каждом $t\in[0,T]$ область Ω в себя

$$\varphi^{(n)}(\xi,t)=\varphi(\xi,t)\left[1-\sum_{i=1}^{n}\omega\left(\frac{|\xi-\xi^i|}{d_i^{(n)}}\right)\right]+\sum_{i=1}^{n}\left[\varphi(\xi^i,t)+A^i(t)(\xi-\xi^i)\right]\omega\left(\frac{|\xi-\xi^i|}{d_i^{(n)}}\right),$$

где ξ^i – положения выделенных точек в частицах $F_i^{(n)}$ в момент $t=0$, $A^{(i)}(t)$ – линейные операторы поворота в R_3, индуцируемые вращением частиц $F_i^{(n)}$ вокруг точек $x^i=\varphi(\xi^i,t)$, $\omega(r)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, равная 1 при $r\le 1$ и 0 при $r>2$.

В силу свойств отображения $x=\varphi(\xi,t)$ и условия (3) теоремы I при достаточно малых диаметрах $d_i^{(n)}$ частиц $F_i^{(n)}$ $(i=1,2,\dots,n)$

отображение $x=\varphi^{(n)}(\xi, t)$ при любом $t\in[0,T]$ взаимно однозначно и существует обратное отображение $\xi=[\varphi^{(n)}]^{-1}(x,t)$. Положим

$$L^{(n)}(x,t)=\frac{\partial\varphi^{(n)}(x,t)}{\partial t}\Bigg|_{\xi=[\varphi^{(n)}]^{-1}(x,t)}$$

и

$$l_0^{(n)}(x,t)=\frac{1}{\sqrt{1+|L^{(n)}(x,t)|^2}},\qquad l_k^{(n)}(x,t)=\frac{L_k^{(n)}(x,t)}{\sqrt{1+|L^{(n)}(x,t)|^2}},\quad k=1,2,3.$$

Так как отображение $x=\varphi(\xi^i,t)+A^i(t)(\xi-\xi^i)$ переводит $F_i^{(n)}(0)$ в $F_i^{(n)}(t)$, а функции $\omega^i(x,t)=\omega\left(\frac{[\varphi^{(n)}]^{-1}(x,t)-\xi^i}{\alpha_i^{(n)}}\right)$ равны 1 на $F_{iT}^{(n)}$ и 0 на $F_{jT}^{(n)}$ $(j\neq i)$, то векторное поле $l^{(n)}(x,t)$ касательно к $\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{0<t<T}\partial F_i^{(n)}(t)$. Далее, поскольку $\varphi(\xi,t)$ при любом $t\in[0,T]$ отображает $\partial\Omega$ в себя, а $\omega^i(\xi,t)=0$ на $\partial\Omega\times[0,T]$, $l^{(n)}(x,t)$ касается и $\partial\Omega\times(0,T)$. Наконец, учитывая свойства функций $\omega(r)$ и $\varphi(\xi,t)$ и вспоминая, что в силу условия теоремы I $\left|\frac{\partial^k A^i(t)}{\partial t^k}\right|<C$ $(k=1,2;\ i=1,2,\ldots,n)$, где C не зависит от n, нетрудно убедиться, что $l^{(n)}(x,t)$ удовлетворяет всем неравенствам (12).

§ 3. Доказательство теоремы I

Рассмотрим в области $\Omega^{(n)}(t)=\Omega\setminus\bigcup_{i=1}^{n}F_i^{(n)}(t)$ (t-фиксировано) краевую задачу

$$\Delta u^{(n)}(x,t)=F(x),\qquad x\in\Omega^{(n)}(t),$$

$$u^{(n)}(x,t)=0,\qquad x\in\left(\bigcup_{i=1}^{n}F_i^{(n)}(t)\right)\cup\partial\Omega,$$

где $F(x)\in L_2(\Omega)$. Решение этой задачи $u^{(n)}(x)=u^{(n)}(x,t)$, продолженное нулем на множество $\bigcup_{i=1}^{n}F_i^{(n)}(t)$, принадлежит пространству $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$. Обозначим через $G_t^{(n)}$ линейный ограниченный оператор в $L_2(\Omega)$, сопоставляющий каждой функции $F(x)\in L_2(\Omega)$ функцию $u^{(n)}(x)$.

Рассмотрим также в области Ω краевую задачу

$$\Delta u(x,t)-c(x,t)\,u(x,t)=F(x)\qquad x\in\Omega,$$

$$u(x,t)=0 \qquad\qquad x\in\partial\Omega,$$

где $\tilde{c}(x,t)$ – непрерывная функция от x (t– параметр) и обозначим через $G_t^{\tilde{c}}$ оператор в $L_2(\Omega)$, сопоставляющий функции $f(x)\in \in L_2(\Omega)$ решение $u(x,t)$ этой задачи.

Как известно, операторы $G_t^{(n)}$ и $G_t^{\tilde{c}}$ вполне непрерывны и самосопряжены.

Теорема I$'$.

Если выполняются условия 1-3 теоремы I, то последовательность операторов $\left\{ G_t^{(n)} \quad n=1,2,\dots \right\}$ при любом $t\in[0,T]$ сильно сходится к оператору $G_t^{\tilde{c}}$, где $\tilde{c}=\tilde{c}(x,t)=c(\varphi^{-1}(x,t))\times \times\left|\det\frac{\partial\varphi^{-1}(x,t)}{\partial x}\right|$.

Доказательство этой теоремы мы здесь не приводим, т.к. оно почти полностью повторяет доказательство теоремы I.5 работы [2]. Отметим лишь, что в силу невырожденности и гладкости отображения $x=\varphi(\xi,t)$ из условий I-3 теоремы I следует, что при любом $t\in[0,T]$ выполняются следующие условия:

$$1.\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{(G)i} C_i^{(n)}=\int_G c(\varphi^{-1}(x,t))\left|\det\frac{\partial\varphi^{-1}(x,t)}{\partial x}\right|dx,$$

$$2.\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{(G)i}\sum_{\substack{j\neq i\\ r_{ij}^{(n)}<\rho}}\frac{C_i^{(n)}C_j^{(n)}}{r_{ij}^{(n)}(t)}=\delta(\rho,t)\,mes\,G,\quad \lim_{\rho\to 0}\delta(\rho,t)=0,$$

которые соответствуют условиям упомянутой теоремы I.5 работы [2].

В силу неравенств (7), последовательность $\left\{u^{(n)}(x,t),\ n=1,2,\dots\right\}$ решений задачи (I) - (3), продолженных нулем на множество $\bigcup_{i=1}^{n} F_{i\tau}^{(n)}$, ограничена в пространстве $W_2^1(\Omega_T)$ и, значит, слабо компактна в $W_2^1(\Omega_T)$. Поэтому можно выделить подпоследовательность $\left\{u^{(n_k)},\ k=1,2,\dots\right\}$, слабо сходящуюся в $W_2^1(\Omega_T)$ к некоторой функции $u(x,t)\in W_2^1(\Omega_T)$. Из теорем вложения следует, что $\left\{u^{(n_k)}(x,t)\right\}$ сходится к $u(x,t)$ в пространстве $L_2(\Omega_T)$. Покажем, что функция $u(x,t)$ является решением задачи (4) - (6). Так как эта задача имеет единственное решение, то отсюда следует, что вся последовательность $\left\{u^{(n)}(x,t),\quad n=1,2,\dots\right\}$ сходится в $L_2(\Omega_T)$ к $u(x,t)$.

Согласно определению операторов $G_t^{(n)}$ из уравнения (I) следует, что при любом $t\in(0,T)$

$$u^{(n)}(x,t)=G_t^{(n)}f_t^{(n)}[x],$$

где
$$f_t^{(n)}=f^{(n)}(x,t)=-F(x,t)+\frac{\partial u^{(n)}(x,t)}{\partial t}.$$

Пусть $\varphi(x,t)$ – произвольная непрерывная в Ω_T функция. Тогда, обозначая $\varphi_t=\varphi(x,t)\in L_2(\Omega)$ и учитывая самосопряженность операторов $G_t^{(n)}$ в $L_2(\Omega)$ $(\forall t)$, запишем

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega u^{(n)}(x,t)\varphi(x,t)dxdt=\int\limits_0^T\left(G_t^{(n)}f_t^{(n)},\varphi_t\right)_{L_2(\Omega)}dt=\int\limits_0^T\left(f_t^{(n)},G^{(n)}\varphi_t\right)_{L_2(\Omega)}dt=$$
$$=\int\limits_0^T\int\limits_\Omega f^{(n)}(x,t)G_t^{\tilde{\sigma}}\varphi_t[x]dxdt+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega f^{(n)}(x,t)\left(G_t^{(n)}-G_t^{\tilde{\sigma}}\right)\varphi_t[x]dxdt. \tag{22}$$

Согласно сказанному выше, подпоследовательность $\{f^{(n_k)}(x,t),\ k=1,2,\ldots\}$ сходится слабо в $L_2(\Omega_T)$ к функции $f(x,t)=-F(x,t)+\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$. Поэтому, учитывая самосопряженность оператора $G_t^{\tilde{\sigma}}$ в $L_2(\Omega)$ $(\forall t)$, получаем

$$\lim_{n=n_k\to\infty}\int\limits_0^T\int\limits_\Omega f^{(n)}(x,t)G_t^{\tilde{\sigma}}\varphi_t[x]dxdt=\int\limits_0^T\int\limits_\Omega f(x,t)G_t^{\tilde{\sigma}}\varphi_t[x]dxdt=$$
$$=\int\limits_0^T\left(f_t,G_t^{\tilde{\sigma}}\varphi_t\right)_{L_2(\Omega)}dt=\int\limits_0^T\left(G_t^{\tilde{\sigma}}f_t,\varphi_t\right)_{L_2(\Omega)}dt=\int\limits_0^T\int\limits_\Omega G_t^{\tilde{\sigma}}f_t[x]\varphi(x,t)dxdt, \tag{23}$$

где
$$f_t=f(x,t)=-F(x,t)+\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}.$$

Далее, в силу теоремы 1' и ограниченности $\|f^{(n)}(x,t)\|_{L_2(\Omega_T)}$

$$\left|\int\limits_0^T\int\limits_\Omega f^{(n)}(x,t)\left(G_t^{(n)}-G_t^{\tilde{\sigma}}\right)\varphi_t[x]dxdt\right|\le$$
$$\le\|f^{(n)}\|_{L_2(\Omega_T)}\left\{\int\limits_0^T\left\|G_t^{(n)}\varphi_t-G_t^{\tilde{\sigma}}\varphi_t\right\|^2_{L_2(\Omega)}dt\right\}^{\frac{1}{2}}\to 0\quad(n\to\infty). \tag{24}$$

Таким образом, согласно (22) – (24),

$$\lim_{n=n_k\to\infty}\int\limits_0^T\int\limits_\Omega u^{(n)}(x,t)\varphi(x,t)dxdt=\int\limits_0^T\int\limits_\Omega G_t^{\tilde{\sigma}}f_t[x]\varphi(x,t)dxdt.$$

С другой стороны, в силу сходимости $\{u^{(n_k)}(x,t)\}$ к $u(x,t)$ в $L_2(\Omega_T)$

$$\lim_{n=n_k\to\infty} \int_0^T\int_\Omega u^{(n)}(x,t)\varphi(x,t)\,dx\,dt=\int_0^T\int_\Omega u(x,t)\varphi(x,t)\,dx\,dt.$$

Сравнивая эти равенства, получаем

$$u(x,t)=-G_t^{\tilde{\varepsilon}}F(x,t)+G_t^{\tilde{\varepsilon}}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t},$$

откуда согласно определению оператора $G_t^{\tilde{\varepsilon}}$ следует, что $u(x,t)$ удовлетворяет в Ω_t уравнению (4) и граничному условию (5) на $\partial\Omega\times(0,T)$. Так как функции $u^{(n_k)}(x,t)$ слабо сходятся к $u(x,t)$ в $W_2^1(\Omega_T)$ и при $t=0$ удовлетворяют равенству (3), то из условия 4 теоремы I и теоремы вложения вытекает, что $u(x,t)$ при $t=0$ удовлетворяет равенству (6).

Таким образом, $u(x,t)$ является решением начально-краевой задачи (4) - (6). Теорема I доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 2

Предположим, теперь, что частицы $F_i^{(n)}$ - шары одинакового радиуса $r_n=O(\frac{1}{n})$, случайно распределенные в области Ω, а их положения в начальный момент определяются функциями распределения $f_s^{(n)}(x^1,\dots,x^s)$ $(s=1,2,\dots,n)$. Тогда ньютоновы емкости частиц равны $C_i^{(n)}=4\pi r^{(n)}$, а расстояния $r_{ij}^{(n)}$ и $r_i^{(n)}=\min_{i\neq j} r_{ij}^{(n)}$ - случайны (§ 1). Справедлива следующая

Лемма 1. Если выполняются условия I-3 теоремы 2, то для любой области $G\subset\Omega$ и любого $\forall\varepsilon>0$

1. $$\lim_{n\to\infty} Pr\left\{\left|\sum_{(G)i} C_i^{(n)}-4\pi a\int_G f(x)dx\right|<\varepsilon\right\}=1,$$

2. $$\lim_{n\to\infty} Pr\left\{\sum_{(G)i}\sum_{r_{ij}^{(n)}<\rho,\ j\neq i}\frac{C_i^{(n)}C_j^{(n)}}{r_{ij}^{(n)}}\leq\varepsilon\,\mathrm{mes}\,G\right\}\geq 1-\frac{A\rho^2}{\varepsilon}\ (FA=const),$$

3. $$\lim_{n\to\infty} Pr\left\{\min_i r_i^{(n)}\geq (r^{(n)})^\tau\right\}=1 \quad (\forall\tau,\ \tau>\frac{2}{3}).$$

Доказательство. Рассмотрим в вероятностном пространстве событие

$$B_\tau^{(n)}=\left\{\min r_i^{(n)}\geq (r^{(n)})^\tau\right\}.$$

Противоположное ему событие состоит в том, что хотя бы 2 какие-нибудь частицы находятся друг от друга на расстоянии, которое меньше чем $(r^{(n)})^{\tau}$ и следовательно

$$Pr(\overline{B_{\tau}^{(n)}}) - C_n^2 \int_{\Omega} \Big(\int_{|x^1-x^2|<(r^{(n)})^{\tau}+2r^{(n)}} f_2^{(n)}(x^1, x^2)\, dx^1 \Big) dx^2 .$$

Отсюда, учитывая, что функции $f_2^{(n)}(x^1, x^2)$ ограничены равномерно по n, $r^{(n)} = O(\frac{1}{n})$ и $\tau > \frac{2}{3}$, получаем

$$Pr(\overline{B_{\tau}^{(n)}}) \leq C n^2 (r^{(n)})^{3\tau} \to 0 \qquad (n \to \infty), \tag{25}$$

и, значит, равенство 3 установлено.

Рассмотрим случайную величину

$$\zeta_G^{(n)} = \sum_{(G)} \sum_{\substack{j \neq i \\ r_{ij}^{(n)} < \rho}} \frac{C_i^{(n)} C_j^{(n)}}{r_{ij}^{(n)}} .$$

Если произошло событие $B_{\tau}^{(n)}$, то $|x^i - x^j| = r_{ij}^{(n)} + 2r^{(n)} \leq \delta r_{ij}^{(n)}$ и, значит,

$$\zeta_G^{(n)} \leq X_G^{(n)} = \delta \sum_{(G)} \sum_{\substack{j \neq i \\ |x^i - x^j| < \rho}} \frac{C_i^{(n)} C_j^{(n)}}{|x^i - x^j|} . \tag{26}$$

Поэтому, при любом $\varepsilon_1 > 0$

$$Pr\Big\{\zeta_G^{(n)} \leq \varepsilon_1\Big\} \geq Pr\Big\{B_{\tau}^{(n)} \cap (\zeta_G^{(n)} \leq \varepsilon_1)\Big\} \geq$$

$$\geq Pr\Big\{B_G^{(n)} \cap (X_G^{(n)} \leq \varepsilon_1)\Big\} \geq Pr\Big\{X_G^{(n)} \leq \varepsilon_1\Big\} - Pr\Big\{\overline{B_{\tau}^{(n)}}\Big\} . \tag{27}$$

Так как $X_G^{(n)} \geq 0$, то

$$Pr\Big\{X_G^{(n)} \leq \varepsilon_1\Big\} \geq 1 - \frac{M(X_G^{(n)})}{\varepsilon_1} , \tag{28}$$

где $M(X_G^{(n)})$ – математическое ожидание $X_G^{(n)}$. Пользуясь равенством (26) и учитывая, что $C_i^{(n)} = 4\pi r^{(n)}$ $(\forall i)$, в силу условий 2,3 теоремы 2 получаем

$$M(\chi_G^{(n)})=2(4\pi r^{(n)})^2 b\sum_{i>j} {}_{i,j}\int_{\Omega}\cdots n\text{-}l\cdots\int_{G}\cdots i\text{-}j\cdots\int_{|x^i-x^j|<\rho}\cdots j\cdots\int_{\Omega}\frac{f_n^{(n)}(x^1,\dots,x^n)}{|x^i-x^j|}dx^1,\dots,dx^n=$$

$$=\left(4\pi r^{(n)}\right)^2 n(n-1)b\int_G\left\{\int_{|x^1-x^2|<\rho}\frac{f_2^{(n)}(x^1,x^2)}{|x^1-x^2|}dx^1\right\}dx^2\leq A\rho^2 \operatorname{mes} G.$$

Следовательно, согласно (27), (28),

$$Pr\left\{\zeta_G^{(n)}\leq\varepsilon_1\right\}\geq 1-\frac{A\rho^2\operatorname{mes}G}{\varepsilon_1}-Pr\left\{\overline{B_\tau^{(n)}}\right\}$$

откуда, полагая $\varepsilon_1=\varepsilon \operatorname{mes} G$ и учитывая (25), приходим к неравенству 2.

Рассмотрим случайную величину

$$\xi_G^{(n)}=\sum_{(G)}{}_i C_i^{(n)}=4\pi r^{(n)}\sum_{i=1}^{n}\chi(x^i),$$

где $\chi_G(x)$ – характеристическая функция области G. Согласно неравенству Чебышева при любом

$$Pr\left\{\left|\xi_G^{(n)}-M(\xi_G^{(n)})\right|\leq\varepsilon\right\}\geq 1-\frac{D(\xi_G^{(n)})}{\varepsilon^2}, \tag{29}$$

где M и D – соответственно математическое ожидание и дисперсия $\xi_G^{(n)}$. Учитывая условия 1 и 3 теоремы 2, получаем

$$M(\xi_G^{(n)})=4\pi r^{(n)}\int_{\Omega}\cdots n\cdots\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\chi_G(x^i)f_n^{(n)}(x^1,\dots,x^n)dx^1,\dots,dx^n=$$

$$=4\pi r^{(n)}n\int_G f_1^{(n)}(x)dx\to 4\pi a\int_G f(x)dx\qquad(n\to\infty), \tag{30}$$

Далее,

$$D(\xi_G^{(n)})=M\left[(\xi_G^{(n)}-M(\xi_G^{(n)}))^2\right]=(4\pi r^{(n)})^2\int_{\Omega}\cdots n\cdots\int_{\Omega}f_n^{(n)}(x^1,\dots,x^n)\times$$
$$\times\left(\sum_{i=1}^{n}\chi_G(x^i)-n\int_G f_1^{(n)}(x)dx\right)^2dx^1,\dots,dx^n.$$

Это выражение известным способом можно преобразовать к виду

$$D\left(\xi_G^{(n)}\right)=\left(4\pi r^{(n)}\right)^2 n(n-1)\int_G\int_G\left\{f_2^{(n)}(x^1,x^2)-f_1^{(n)}(x^1)f_1^{(n)}(x^2)\right\}dx^1dx^2+$$

$$+\left(4\pi r^{(n)}\right)^2 \int_G f_1^{(n)}(x)\,dx \left(1-\int_G f_1^{(n)}(x)\,dx\right).$$

Отсюда в силу условий I–3 теоремы 2, очевидно, следует

$$\lim_{n\to\infty} D\left(\xi_G^{(n)}\right)=0.$$

Поэтому из (29), (30) вытекает равенство I. Таким образом, лемма доказана.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 2. Выделим в Ω последовательность областей $\{G_q,\ q=1,2,\dots\}$, удовлетворяющую условию: для любой области $G\subset\Omega$ (с границей, имеющей нулевую Лебегову меру) и любого ε найдутся такие G_{q_1} и G_{q_2}, что

$$G_{q_1}\subset G\subset G_{q_2}, \qquad mes\left(G_{q_2}\setminus G_{q_1}\right)<\varepsilon.$$

В вероятностном пространстве $M^{(n)}(\rho r)$ введем в рассмотрение следующие события:

$$B^{(n)}(\varepsilon)=\left\{\omega:\left\|u^{(n)}-u\right\|_{L_2(\Omega_T)}>\varepsilon\right\},$$

$$B_1^{(n)}(q,s)=\left\{\omega:\left|\sum_{(G_q)i} C_i^{(n)}-4\pi a\int_{G_q} f(x)\,dx\right|<\frac{1}{s}\right\},$$

$$B_2^{(n)}(q,s,\rho)=\left\{\omega:\sum_{(G_q)i}\ \sum_{\substack{j\neq i\\ r_{ij}^{(n)}<\rho}}\frac{C_i^{(n)}C_j^{(n)}}{r_{ij}^{(n)}}<\frac{1}{s}\,mes\,G_q\right\},$$

$$B_3^{(n)}(\tau)=\left\{\omega:\min_{1\le i\le n} r_i^{(n)}>\left(r^{(n)}\right)^{\tau}\right\},\qquad \left(\frac{2}{3}<\tau<1\right),$$

$$B_4^{(n)}(s)=\left\{\omega:\left\|U^{(n)}-U\right\|_{L_2(\Omega)}<\frac{1}{s}\right\},$$

$$B_5^{(n)}(C)=\left\{\omega:\left\|U^{(n)}\right\|_{W_2^1(\Omega)}<C\right\},$$

где $u^{(n)}=u^{(n)}(x,t,\omega)$ – решение задачи (I) – (3); $u=u(x,t)$ – решение задачи (4) – (6) при $c(x,t)=4\pi a f(\varphi^{-1}(x,t))\left|\det\frac{\partial\varphi^{-1}}{\partial x}(x,t)\right|$; $U^{(n)}=U^{(n)}(x)$ и $U=U(x)$ – соответствующие начальные данные; $n=1,2\dots$

Предположим, что теорема 2 неверна. Тогда найдутся такие ε_0 и $\delta>0$ и такая подпоследовательность $\{n_k\to\infty\}$, что

$$Pr\left\{B^{(n_k)}(\varepsilon_0)\right\}>\delta. \tag{31}$$

С другой стороны, согласно лемме 1 и условию 4 теоремы 2, для любых s и q найдутся такие $N(q,s,\rho)$, $\rho(s)$ и $C=const$, что при $\rho\le\rho(s)$ и $n>N(q,s,\rho)$ будут выполняться неравенства*

$$
\begin{gathered}
Pr\left\{\overline{B_1^{(n)}(q,s)}\right\}<\frac{\delta}{10\cdot 2^{q+s}},\\
Pr\left\{\overline{B_2^{(n)}(q,s,\rho)}\right\}<\frac{\delta}{10\cdot 2^{q+s}},\\
Pr\left\{\overline{B_3^{(n)}(\tau)}\right\}<\frac{\delta}{10}\quad\left(\frac{2}{3}<\tau<1\right),\\
Pr\left\{\overline{B_4^{(n)}(s)}\right\}<\frac{\delta}{10\cdot 2^{s}},\\
Pr\left\{\overline{B_5^{(n)}(C)}\right\}<\frac{\delta}{10}\ (\exists C).
\end{gathered}
\tag{32}
$$

Рассмотрим теперь событие

$$
\begin{aligned}
A^{(n_k)}=B^{(n_k)}(\varepsilon_0)\cap\left[\bigcap_{s=1}^{S_k}\bigcap_{q=1}^{Q_k}B_1^{(n_k)}(q,s)\right]\cap\left[\bigcap_{s=1}^{S_k}\bigcap_{q=1}^{Q_k}B_2^{(n_k)}(q,s,\rho(s))\right]\cap\\
\cap\, B_3^{(n_k)}(\tau)\left[\bigcap_{s=1}^{S_k}B_4^{(n_k)}(s)\right]\cap B_5^{(n_k)}(C),
\end{aligned}
\tag{33}
$$

где числа S_k, Q_k выбираются так, чтобы все неравенства (32) выполнялись при $n=n_k$, $\rho=\rho(s)$, $s\le S_k$, $q\le Q_k$. Поскольку $n_k\to\infty$, S_k, Q_k также неограниченно возрастают при $n\to\infty$. Покажем, что событие $A^{(n_k)}\subset M^{(n_k)}(Pr)$ не пусто ни при каком k. В силу (32)

$$Pr\left\{\bigcup_s\bigcup_q\left(\overline{B_1^{(n_k)}(q,s)}\cup\overline{B_2^{(n_k)}(q,s,\rho(s))}\cup\left(\bigcup_s\overline{B_4^{(n_k)}(s)}\right)\cup\right.\right.$$

---

* Чертой сверху обозначены обратные события.

$$\cup B_3^{\overline{(n_k)}}(r) \cup B_5^{\overline{(n_k)}}(C)\} < \frac{2}{10}\sum_{q,s=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^{q+s}} + \frac{1}{10}\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^s} + \frac{\delta}{10} + \frac{\delta}{10} = \frac{\delta}{2}$$

и, следовательно,

$$Pr\left\{ \bigcap_{s=1}^{S_k} \bigcap_{q=1}^{Q_k} \left(B_1^{(n_k)}(q,s) \cap B_2^{(n_k)}(q,s,\rho(s))\right) \cap \left(\bigcap_{s=1}^{S_k} B_4^{(n_k)}(s)\right) \cap B_3^{(n_k)}(r) \cap \right. \qquad (34)$$

$$\left. \cap B_5^{(n_k)}(C) \right\} > 1 - \frac{\delta}{2}.$$

Учитывая (33), с помощью неравенств (31) и (34) заключаем, что $A^{(n_k)}$ не пусто. Выберем точку $\omega_k \in A^{(n_k)}$ и рассмотрим соответствующие распределения частиц $F_i^{(k)} = F_i^{(n_k)}(\omega_k)$ $(i=1,\ldots,n_k)$, начальную функцию $U^{(k)}(x) = U^{(n_k)}(x,\omega_k)$ и решение задачи (I) – (3) $u^{(k)}(x,t) = u^{(n_k)}(x,t,\omega_k)$. Согласно определению события $A^{(n_k)}$ все условия теоремы I при $n \to \infty$ выполняются, а функции $u^{(k)}(x,t)$ не сходятся к решению задачи (4) – (6) $u(x,t)$. Тем самым мы приходим к противоречию с теоремой I, что и доказывает теорему 2.

Литература

I. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 427 с.

2. Марченко В.А., Хруслов Е.Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. – Киев: Наук. думка, 1974. – 279 с.

3. Хруслов Е.Я. Задача Дирихле в областях со случайной границей. – Вестн. Харьковского ун-та, сер.мех.-мат., 1970, вып.34, с.17-34.

4. Rauch J. and Taylor M. Potential and Scattering Theory on Wildly Perturbed Domains. – J. Funct. Anal., 1975, 18, N 1, p. 27-59.

УДК-517.39+517.91+513.88

Н.И.Нессонов

ДВА ИНВАРИАНТА ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КОМПАКТНЫХ ГРУПП АВТОМОРФИЗМАМИ АЛГЕБР ФОН НЕЙМАНА

В работе [5] для представлений абелевых локально компактных групп автоморфизмами алгебр фон Неймана был введен инвариант Γ и исследованы его свойства. Оказалось, что Γ соответствует определенному гомологическому отношению эквивалентности в множестве всех таких представлений, а в том случае, когда σ_t $(t \in R)$ – группа модулярных автоморфизмов алгебры фон Неймана, $\Gamma(\sigma)$ совпадает с алгебраическим инвариантом S.

Для представлений произвольных компактных групп автоморфизмами алгебр фон Неймана вводятся два инварианта Γ и Γ', совпадающие для коммутативных групп с Γ и исследуются их свойства. Для одного класса представлений найдены необходимые и достаточные условия совпадения Γ и Γ'. Кроме того, в последней части работы доказано, что алгебра фон Неймана M тогда и только тогда является аппроксимативно конечной (а.к.), когда $M_\alpha = \{x \in M : \alpha_g(x) = x$ для всех $g \in G\}$ – а.к. Здесь G – компактная группа, а α -гомоморфизм G в группу автоморфизмов M $(Aut\, M)$.

I. Предварительные результаты. Пусть M – неймановская алгебра; M_* – множество слабо непрерывных функционалов на M; φ – точное нормальное (т. норм.) состояние из M_*; G – сепарабельная компактная группа; $\alpha : g \in G \to Aut\ M$ – гомоморфизм G в $Aut\, M$ такой, что функция $\alpha_g(a)$ непрерывна в сильной топологии по g для всех $a \in M$. Далее, обозначим через $\hat{G}$ – двойственный объект группы G (множество классов эквивалентности всех ее неприводимых представлений) [1]. Если $\hat{f}(\lambda) = \int_G T_\lambda(g) f(g)\, d\mu_g$ – преобразование Фурье функции $f \in L^1(G)$, где $\lambda \in \hat{G}$, а T_λ – представление из класса эквивалентности λ, действующее в гильбертовом пространстве H_λ, $Z(f) = \{\lambda \in \hat{G} : \hat{f}(\lambda) = 0\}$, то по аналогии с коммутативными группами назовем спектром представления α множество

$$S_p\, \alpha = \bigcap_{\substack{f \in L^1(G) \\ \alpha(f) = 0}} Z(f).$$

Здесь $\alpha(f)(x) = \int_G f(g) \alpha_g(x)\, d\mu_g$, μ_g – мера Хаара на G. Так как μ_g инварианта относительно действия G и $\mu(G) = 1$, то будем считать, что $\varphi(\alpha_g)(a) = \varphi(a)$ для всех $g \in G$, $a \in M$ и M отождествлена со своим представлением, построенным согласно конструкции Гельфанда – Наймарка – Сигала по состоянию φ [9]. Обозначим через H пространство, в котором действует M, а через U_g унитарный оператор в H, действующий согласно формуле $U_g : x\xi \to \alpha_g(x)\xi$, где $x \in M$, э ξ – циклический отделяющий вектор для M.

Так как для всех $\lambda \in \hat{G}$ представление $T_\lambda(\cdot)$ конечномерно, то обозначим через $\{ a_{kl}^\lambda \}_{k,l=1}^{n_\lambda}$ матричные элементы представления $T_\lambda(\cdot)$ относительно какого-нибудь фиксированного базиса в H_λ $(\dim H_\lambda = n_\lambda)$.

По аналогии с работой [5] будем называть представления α и β компактной группы G автоморфизмами алгебры фон Неймана M эквивалентными $(\alpha \sim \beta)$ если существует сильно непрерывное отображение $g \to U_g$ из G в группу унитарных операторов M такое, что

$$U_{g_1 g_2} = U_{g_1} \alpha_{g_1}(U_{g_2}) \qquad (g_1,\ g_2 \in G),$$

$$\beta_g(x) = U_g \alpha_g(x)\ U_g^* \qquad (x \in M,\ g \in G).$$

Пусть

$$\Gamma(\alpha) = \bigcap_{\beta \sim \alpha} S_p \beta,$$

$$\Gamma'(\alpha) = \bigcup_{f \in M_\alpha} \bigcap_{\substack{l \in M_\alpha \\ l \leq f}} S_p \alpha_l .$$

2. Свойства инвариантов $\Gamma(\alpha)$ и $\Gamma'(\alpha)$

Обозначим через $\chi_\lambda(g)$ характер представления $T_\lambda(g)$. Следующее утверждение дает необходимое и достаточное условие принадлежности $\lambda \in \hat{G}$ к $S_p\alpha$.

<u>Теорема I</u>. Для того, чтобы $\lambda \in S_p\alpha$ необходимо и достаточно существование $x \in M$, для которого $\int_G \bar{\chi}_\lambda(g) \alpha_g(x)\, d\mu_g \neq 0$.

<u>Доказательство</u>. Пусть

$$\int_G \bar{\chi}_\lambda(g) \alpha_g(x)\, d\mu_g \neq 0, \quad x_{kl}^\lambda = \int_G \alpha_g(x)\, \bar{a}_{kl}^\lambda(g)\, d\mu_g .$$

Так как система $\{ a_{kl}^\lambda(g) \}_{k,l=1,\ \lambda \in \hat{G}}^{n_\lambda}$ полна в $L^2(G)$,

$$\chi_\lambda(g) = \sum_{k=1}^{n_\lambda} a_{kk}^\lambda(g), \qquad \int_G a_{ji}^\sigma\, \bar{a}_{lm}^\lambda\, d\mu_g = \frac{1}{n_\lambda} \delta_{\sigma\lambda} \delta_{jl} \delta_{im},$$

то существует $x_{pp}^\lambda \xi \neq 0$. Рассмотрим в гильбертовом пространстве $\bar{H}_\lambda$, порожденном векторами $\{ x_{kl}^\lambda \xi \}_{k,l=1}^{n_\lambda}$, оператор α_h, который действует согласно формуле

$$\alpha_h(x_{kl}^\lambda)\xi = \int_G \alpha_{hg}\, \bar{a}_{kl}^\lambda(g)\, d\mu_g\, \xi = \sum_{i=1}^{n_\lambda} a_{ik}^\lambda(h)\, x_{il}^\lambda(\xi). \qquad (1).$$

Из соотношения

$$\left(\alpha_h(x_{kl}^\lambda)\xi,\alpha_h(x_{mn}^\lambda)\xi\right)=\left(\sum_{i=1}^{n_\lambda} a_{ik}^\lambda(h)x_{il}^\lambda\xi,\sum_{j=1}^{n_\lambda} a_{jm}^\lambda(h)x_{jn}^\lambda\xi\right)=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n_\lambda}\int_G a_{ik}^\lambda(h)\bar a_{jm}^\lambda(h)\left(x_{il}^\lambda\xi,\ x_{jn}^\lambda\xi\right)d\mu_h=$$

$$=n_\lambda^{-1}\delta_{km}\sum_{i=1}^{n_\lambda}\left(x_{il}^\lambda\xi,\ x_{in}^\lambda\xi\right)$$

и унитарности α_h получаем, что $(x_{kl}^\lambda\xi,\ x_{mn}^\lambda\xi)=0$, если $k\neq m$.

Так как $x_{pp}^\lambda\xi\neq 0$, то из равенств

$$\left(x_{pp}^\lambda\xi,x_{pp}^\lambda\xi\right)=\left(\alpha_h(x_{pp}^\lambda)\xi,\alpha_h(x_{pp}^\lambda)\xi\right)=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n_\lambda}\int_G a_{ip}^\lambda(h)\bar a_{ip}^\lambda(h)(x_{ip}^\lambda\xi,x_{ip}^\lambda\xi)\,d\mu_h=n_\lambda^{-1}\sum_{i=1}^{n_\lambda}\|x_{ip}^\lambda\xi\|^2$$

легко следует, что $x_{ip}^\lambda\xi\neq 0$ для $1\leq i\leq n_\lambda$.

Пусть $f\in L^1(G)$ и $\alpha(f)=0$. Тогда, в частности, $\int_G f(g)\alpha_g(x_{kl}^\lambda)\xi\,d\mu_g=0$ для $k,l=1,2,\ldots,n_\lambda$.

Если $\sum_{\sigma\in\hat G}\sum_{k,l=1}^{n(\sigma)} a_{kl}^\sigma(g)\,c_{kl}^{(\sigma)}=f(g)$ – разложение функции f в ряд по ортогональной системе $\left\{a_{kl}^\sigma(g)\right\}$ $(k,l=1,2,\ldots,n_\sigma;\ \sigma\in\hat G)$, то

$$\int_G f(g)\alpha_g(x_{kp}^\lambda)\xi\,d\mu_g=n_\lambda^{-1}\sum_{i=1}^{n_\lambda}c_{ik}^{\lambda^*}x_{ip}^\lambda\xi=0.$$

Отсюда $c_{ik}^{\lambda^*}=0$ для $i,k=1,2,\ldots,n_\lambda$ и, следовательно,

$$\int_G f(g)T_\lambda(g)\,d\mu_g=\tilde f(\lambda)=0.$$

Тем самым достаточность доказана.

Для доказательства необходимости предположим противное, т.е. для $\lambda\in Sp\alpha$ $\int_G\bar x_\lambda(g)\alpha_g(x)\,d\mu_g=0$ для всех $x\in M$. Используя те же соображения, что и выше, можно показать, что $\int_G\bar a_{kl}^\lambda(g)\alpha_g(x)\,d\mu_g=0$ для $k,l=1,2,\ldots,n_\lambda$. Так как $\int_G\bar a_{kl}^\lambda(g)T_\lambda(g)\,d\mu_g\neq 0$, то $\lambda\notin Z(\bar a_{kl}^\lambda(g))$, что не так.

λ^* – представление, сопряженное λ.

Теорема I доказана.

Используя идеи доказательства утверждений 2.2.2 и 2.3.17 из работы [5], легко установить следующее

<u>Предложение 2</u>. Если M – фактор, а α и β - представления G автоморфизмами M, то

а) $\Gamma'(\alpha) = \bigcup\limits_{f \in Z(M_\alpha)} \bigcap\limits_{\substack{l \in Z(M_\alpha) \\ l \leq f}} Sp\,\alpha_l^{*)}$,

б) $\Gamma(\alpha) \subset \Gamma'(\alpha)$.

В отличие от коммутативного случая, где $\Gamma(\alpha) = \Gamma'(\alpha)$ [5], для некоммутативных компактных групп существуют примеры, когда $\Gamma(\alpha) \neq \Gamma'(\alpha)$. Один из них получается следующим образом.

Рассмотрим алгебру матриц M_n размерности $n \times n$. В качестве группы G возьмем группу унитарных операторов M_n $(U(M_n))$. Действие $U(M_n)$ на M_n зададим формулой $\alpha_U(x) = UxU^*$ для всех $U \in U(M_n)$, $x \in M_n$. Так как в этом случае $M_\alpha = CI$, α_g эквивалентно тождественному представлению G в $Aut(M_n)$, а $Sp(\alpha)$ совпадает с множеством неприводимых представлений группы $U(M_n)/T$, где $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, то $1 = \Gamma(\alpha) \neq \Gamma'(\alpha)$.

Пусть $\sum(G)$ – множество классов эквивалентности всех представлений компактной группы G. Относительно операций прямой суммы тензорного произведения и инволюции $\sum(G)$ является алгеброй. Если Λ – подмножество в $\hat{G}$, то обозначим через $[\Lambda]$ подалгебру в $\sum(G)$, порожденную Λ [2]. Пусть, далее, $A(G,\Lambda)$ – аннулятор Λ $(A(G,\Lambda) = \{g \in G : T_\lambda(g) = 1$ для всех $\lambda \in \Lambda\})$ и $A(\sum(G), H)$ – аннулятор $H \subset G$ в $\sum(G)$.

Рассмотрим класс представлений α группы G, для которых $Sp\,\alpha \setminus \Gamma'(\alpha)$ – конечное множество в $\hat{G}$. Для таких представлений справедлива

<u>Теорема 3</u>. Если M фактор, то для всех $g \in A(G, \Gamma'(\alpha))$ $\alpha_g \in Int\,M$ и $U_g \in Z(M_\alpha)$, где $Int\,M$ – множество внутренних автоморфизмов M, а U_g – унитарный оператор из M, для которого

$$\alpha_g(x) = U_g(x)U_g^* \quad (x \in M).$$

Доказательство. Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$ – элементы множества $Sp\,\alpha$, которые не содержатся в $\Gamma'(\alpha)$. Так как для любого проектора $e \in Z(M_\alpha)$

$$\bigcap_{\substack{f\in Z(M_\alpha)\\ f\leq e}} Sp\,\alpha_f \subset \Gamma'(\alpha),$$

то существует $q \in Z(M_\alpha)$ $(q^2 = q,\ q = q^*)$ такой, что $Sp\,\alpha_q \in \Gamma'(\alpha)$.

Следовательно, сужение автоморфизма α_q на неймановскую алгебру $qMq - \alpha_q|_{qMq} = I$. Отсюда, $\alpha_g = Ad\,U_g^{*}$ $(U_g \in M)$ (I.5.3 работы [5]). Так как M – фактор, то стандартным способом можно показать, что $qU_g = e^{i\varphi}q$. Действительно, если это не так, то найдутся два ортогональных проектора l_1 и l_2, принадлежащих q, для которых $|Sp\,l_1U_g - Sp\,l_2U_g| \geq \delta > 0$. Пусть v – частичная изометрия из M, обладающая свойствами $v^*v \leq l_1$, $vv^* \leq l_2$. Тогда легко видеть, что $\alpha_g(q^vq) \neq qvq$, но это противоречит принадлежности $g\in A(G,\Gamma'(\alpha))$. Теперь рассмотрим сужение α на неймановскую алгебру $(1-q)M(1-q)$. Здесь могут быть две возможности

а) $Sp\,\alpha_{1-q} \in \Gamma'(\alpha)$,

б) $Sp\,\alpha_{1q} \supset \Gamma'(\alpha)$.

В случае (а) тем же способом можно показать, что $(1-q)U_q = e^{i\varphi_1}(1-q)$. В случае (б) существует $f \leq 1-q$, для которого $fU_g = l^{i\varphi}U_g$. Продолжая этот процесс, мы найдем систему роекторов $\{l_k\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что $U_g = \sum_{k=1}^{\infty} e^{i\varphi_k} l_k$. Утверждение 2 доказано.

Теорема 4. Пусть M – фактор и множество $Sp\,\alpha \setminus \Gamma'(\alpha)$ – конечно. Для выполнения равенства $[\Gamma(\alpha)] = [\Gamma'(\alpha)]$ необходимо и достаточно, чтобы для всех $g \in A(G, \Gamma(\alpha))$ $\alpha_g = Ad\,U_g$ $(U_g \in M)$ и $U_g \in Z(M_\alpha)$.

Доказательство. Необходимость следует из утверждения теоремы 3.

Доказательство достаточности будет следовать из теоремы 28.9 (iii) работы [2] о том, что $A = \{\sigma \in (\ell)(G) : T_\sigma(g) = I$ для всех $g \in A(G,\Gamma(\alpha))\}$, где T_σ (представление из класса эквивалентности σ) совпадает с $[\Gamma(\alpha)]$, если покажем, что из включения $g \in A(G, \Gamma(\alpha))$ вытекает включение $g \in A(G, \Gamma'(\alpha))$. Предположим, что существуют $\lambda \in \Gamma'(\alpha)$ и $h \in A(G, \Gamma(\alpha))$, для которых

* Для абелевых групп $\Gamma'(\alpha) = \bigcap_{l\in Z(M_\alpha)} Sp\,\alpha_l$.

** $Ad\,U_g(x) = U_g x U_g^*$ для всех $x \in M$.

$T_\lambda(h)\neq I$. Так как $\lambda\in\bigcup\limits_{f\in Z(M_\alpha)}\bigcap\limits_{\substack{l\in M_\alpha\\ l\leq f}} Sp\,\alpha_l$, то найдется $f\in Z(M_\alpha)$ такой, что

$$\lambda\in\bigcap_{\substack{l\in Z(M_\alpha)\\ l\leq f}} Sp\,\alpha_l .$$

Рассмотрим два случая:

1. $\dim T_\lambda(G)=1$; 2. $\dim T_\lambda(G)=n_\lambda>1$.

В первом из них характер $\chi_\lambda(g)$ – мультипликативен ($\chi_\lambda(g_1g_2)=\chi_\lambda(g_1)\,\chi_\lambda(g_2)$ для всех $g_1,g_2\in G$) и в силу наших предположений $|\chi_\lambda(h)-1|\geq\varepsilon>0$. Так как $U_h\in Z(M_\alpha)$ и $\lambda\in\bigcap\limits_{l\in f M f_\alpha} Sp\,\alpha_l$, то существуют проектор $q\in Z(M_\alpha)$ и элемент L из qMq, обладающие свойствами

$$\alpha_h(L)=U_h L U_h^*=\chi_\lambda(h)L,$$

$$\|L\xi\|=1,$$

$$\|qU_h-\beta q\|<\varepsilon/4 \qquad (|\beta|=1). \tag{2}$$

Если σ_t^φ – группа модулярных автоморфизмов фактора M, отвечающая состоянию φ, то используя инвариантность φ относительно автоморфизмов α_g, можно показать, что $U_h\in M_\varphi$, где M_φ – централизатор φ. Действительно, в этом случае $\alpha_h^\circ\sigma_t^\varphi=\sigma_{t^\circ}^\varphi\alpha_h$ [10].

Отсюда $\sigma_t^\varphi(x)=U_h^*\,\sigma_t^\varphi(U_h)\,\sigma_t^\varphi(x)\,\sigma_t^\varphi(U_h^*)\,U_h$ и т.к. M-фактор, то $\sigma_t^\varphi(U_h)=\alpha^{it}U_h$ для всех $t\in R$. Следовательно,

$$\alpha=\frac{(U_hU_h^*\xi,\xi)}{(U_h^*U_h\,\xi,\xi)}=\frac{\varphi(1)}{\varphi(1)}=1,$$

поэтому $U_h\in M_\varphi$.

Отсюда и из 2, предполагая, что $\beta=1$, получаем

$$\|\chi_\lambda(h)L\xi-L\xi\|=\|U_hLU_h^*\xi-L\xi\|\leq\|U_hLU_h^*\xi-U_hL\xi\|+$$

$$+\|(U_h-1)L\xi\|=\left((U_h-1)L^*L(U_h^*-1)\xi,\xi\right)^{1/2}+\|(U_h-1)L\xi\|\leq$$

$$\leq\left((U_h^*-1)(U_h-1)L^*L\,\xi,\xi\right)^{1/2}+\frac{\varepsilon}{4}\leq\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Но это противоречит неравенству $|x_\lambda(h)-1| \geqslant \varepsilon > 0$.
Следовательно, $\Gamma_\lambda(h) = 1$.

Пусть $n_\lambda > 1$. Так же как и выше, существуют проектор $q \in Z(M_\alpha)$ и набор операторов $\{x^\lambda_{il}\}_{i=1}^{n_\lambda} \in qMq$, обладающие свойствами

$$\|x^\lambda_{il}\xi\| = 1, \text{ для } \quad i = 1, 2, \ldots, n_\lambda, \tag{3}$$

$$\|U_h q - \beta q\| < \frac{|1-a^\lambda_{mm}(h)|}{4}\left(|\beta| = 1,\ a^\lambda_{mm}(h) \neq 1\right),$$

$$\alpha_h(x^\lambda_{kl})\xi = \sum_{i=1}^{n_\lambda} a^\lambda_{ik}(h)\, x^\lambda_{il}\,\xi,$$

$$(x^\lambda_{kl}\xi,\ x^\lambda_{nl}\xi) = \delta_{kn}.$$

Пусть $|a^\lambda_{mm}(h) - 1| = \varepsilon$. Тогда, по предположению $\varepsilon > 0$, используя соотношение (3), получаем

$$\varepsilon < \|\alpha_h(x^\lambda_{ml})\xi - x^\lambda_{ml}\xi\| =$$

$$= U_h x^\lambda_{ml} U_h^* \xi - x^\lambda_{ml}\xi\| < \varepsilon/2.$$

Следовательно, $\Gamma_\lambda(h) = 1$ и поэтому $h \in A(G, \Gamma'(\alpha))$. Теорема 4 доказана.

3. Скрещенные произведения алгебр фон Неймана на компактные группы автоморфизмов

Пусть M – фактор, для которого M_* сепарабельно. H, G, α – такие же как и выше; $M_\alpha = \{x \in M : \alpha_g(x) = x$ для всех $g \in G\}$. Основным результатом этого пункта является

Теорема 5. M_α тогда и только тогда аппроксимативно конечная неймановская алгебра, когда M аппроксимативно конечен.

Доказательство. Пусть M – а.к. фактор. Тогда по теоремам 6 и 6.2 [7] существует проектор E, для которого $E(B(H)) = M$, а $B(H)$ – множество ограниченных операторов в H.
Обозначим через E_α проектор из M в M_α, действующий согласно формуле

$$x\in M \to \int_G \alpha_g(x)\,d\mu_g \in M_\alpha .$$

Теперь легко видеть, что $E_\alpha \circ E(B(H)) = M_\alpha$ и по теоремам 6, 6.5, 6.2 работы [7] и 3(I) работы [8] M_α – а.к. неймановская алгебра.

Докажем обратное утверждение. Пусть M_α – а.к. неймановская алгебра, $R(M,G)$ – скрещенное произведение M на группу G. $R(M,G)$ порождена операторами $\pi(x), \lambda_p$ $(x\in M,\ p\in G)$, которые действуют в пространстве $L^2(H,G)$ согласно формулам

$$(\pi(x)\xi)(g) = \alpha_g(x)\xi(g),$$

$$(\lambda_p\xi)(g) = \xi(gp).$$

Обозначим через $P=\int_G \lambda_g\, d\mu_g$ проектор $L^2(H,G)$ на постоянные функции $\left((P\xi)(g) = \int_G \xi(gp)\, d\mu_p\right)$, а через E – проектор $L^2(H,G)$ на подпространство, порожденное векторами вида $\sigma_g(x)\xi$ $(\xi\in H,\ x\in M)$. Используя инвариантность $EL^2(H,G)$ относительно операторов из $R(M,G)$ и $PL^2(H,G)$ относительно $R(M,G)'$*, можно показать, что $E\in Z(R(M,G))$ [11].

Пусть $\zeta(P)$ – центральный носитель проектора P. Докажем вспомогательную лемму.

<u>Лемма 5.1</u>. $\zeta(P)=E$.

<u>Доказательство</u>. Предположим, что существует проектор $F\in Z(R(M,G))$, для которого $PF=0$. Тогда $\int_G (PF\alpha_g(x)\times \xi(g), \eta)\, d\mu_g = 0$ для всех $x\in M,\ \eta\in H,\ \xi(g)\in L^2(H,G)$. Отсюда в силу того, что $\int_G (F\xi(g), \alpha_g(x^*)\eta)\, d\mu_g = 0$ для всех $x\in M,\ \xi(g)\in L^2(H,G)$ и линейная оболочка множества $\{\alpha_g(x^*)\eta\}\times (x\in M,\ \eta\in H)$ плотна в $EL^2(H,G)$, $F=0$. Лемма 5.1 доказана.

Из этой леммы вытекает, что неймановская алгебра $L_\infty \otimes M_\alpha$ изоморфна $L_\infty \otimes ER(M,G)E$ и, следовательно, $ER(M,G)E$ – а.к. Для доказательства обратного утверждения теоремы достаточно показать, что существует условное ожидание S $ER(M,G)E$ на $E\pi(M)E$ и воспользоваться утверждениями теорем 3 (е) из работы [8] и 6, 6.2, 6.4 из работы [7].

---

* $R(M,G)'$ – коммутант $R(M,G)$ в $B(L^2(H,G))$.

В свою очередь существование S будет следовать из теоремы 1 работы [3], если мы укажем такое т. норм. состояние ψ на $E\mathcal{R}(M,G)E$, для которого $\mathcal{X}(M)E$ инвариантна относительно группы модулярных автоморфизмов σ_t^{ψ} $(\psi \in \mathcal{R})$. ψ строится следующим способом.

Пусть $\mathfrak{A}$ счетное множество положительных c_λ $\lambda \in Sp\,\lambda$, для которых $\int_G \left(\sum_{\lambda \in Sp\,\alpha} x_\lambda(g)\, c_\lambda \right)^2 d\mu_g = 1.$

Положим

$$\psi(x) = \left(x \sum_{\lambda \in Sp\,\alpha} x_\lambda(g) c_\lambda \xi,\ \sum_{\lambda \in Sp\,\alpha} x_\lambda(g) c_\lambda \xi \right).$$

Тогда ψ – т. норм. состояние на $E\mathcal{R}(M,G)E$ и

$$\sigma_t^{\psi}(\mathcal{X}(M)E) = \mathcal{X}(M)E.$$

Теорема 5.1 доказана.

Техника, развитая при доказательстве предыдущей теоремы, позволяет установить следующее утверждение.

<u>Предложение 5.2</u>. Пусть M, G, α – такие же как и в условии теоремы 5 и G – сепарабельна. Тогда для аппроксимативной конечности M необходимо и достаточно, чтобы алгебра $\mathcal{R}(M,G)$ была аппроксимативно конечной.

Литература

1. Кириллов А.А. Элементы теории представлений. – М.: Наука, 1972. – 342 с.
2. Хьютт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ: В 2-х т. – М.: Мир, 1976. – Т.2. 741 с.
3. Голодец В.Я. Условные ожидания и модулярные операторы неймановских алгебр. – Функц. анализ и его приложения, 1972, 6, № 3, с.68–69.
4. Голодец В.Я. Скрещенные произведения неймановских алгебр. Успехи мат. наук, 1971, № 5, с.3–50.
5. Connes A. Une classification des facteurs de type III. – Ann.Scient.Ec.Norm.sup., ser.4e, 1973, t.6, N 2, p. 133–252.
6. Connes A. Outer conjugacy classes of automorphisms of factors. – Ann. Scient. Ec. Norm. sup., ser.4e, 1975, t.8, N 2, p. 383–420.
7. Connes A. Classification of injective factors. – Ann.Math. 1976, 104, c. 73–105.
8. Connes A., Ghez P., Lima R., Testard D., Woods E. Review of the paper. – Crossed products of von Neumann algebras of Golodets, 1973. – 12 p.
9. Наймарк М.А. Нормированные кольца. – М.: Наука, 1968. – 664 с.

10. Hermann R. States and automorphism groups of operator algebras. - Comm. Math.Phys., 1970, 19, p. 142-160.

11. Paschke W. Inner product modules arising from compact automorphisms groups of von Neumann algebras. - Trans.Amer.Math. Soc., 1976, v. 224, N 1, p. 87-103.

УДК 517.9

В.П.Потапов

ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МАТРИЦ

Статья носит методический характер. В ней излагаются теоремы о дробно-линейных преобразованиях квадратных матриц, обладающих некоторыми специальными свойствами в форме, максимально приближенной к нуждам J-теории [1-7].

Дробно-линейные преобразования матричного круга рассматривались впервые К.Л.Зигелем [8]. Общая теория строилась затем Хуа Ло-Кеном [9] в связи с автоморфизмами некоторых групп. Однако роль индефинитной метрики в изучении преобразований некоторых важных для приложения классов матриц, по-видимому, впервые отмечена в работе [1].

Введение

Рассмотрим дробно-линейное преобразование

$$y=(ax+b)(cx+d)^{-1}, \tag{1}$$

где a, b, c, d - постоянные; x, y - переменные квадратные матрицы n-го порядка. Поставим в соответствие матрицу коэффициентов $2n$ порядка

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Преобразование это будет иметь смысл для тех и только тех матриц x, для которых матрица $cx+d$ будет неособенной. Множество таких матриц x обозначим через R_x, множество соответствующих матриц y - через R_y.

Прежде всего, отметим, что множество R_x будет непустым, тогда и только тогда, когда ранг r прямоугольной матрицы

$$[c, d]$$

размера $n\times 2n$ будет равен n. Действительно, если $r<n$, то строки

матрицы $[c, d]$ будут линейно зависимы и тогда существует такой вектор-строка $f \neq 0$, что

$$fc = 0, \quad fd = 0.$$

Поэтому при любой матрице x имеет место равенство

$$f(cx + d) = 0,$$

т.е. матрица $cx + d$ является особенной и $\mathcal{R}_x$ - пусто.

Наоборот, пусть $\mathcal{R}_x$ - пусто, т.е. для любой матрицы x

$$cx + d$$

является особенной матрицей. Положим

$$x = c^* y^{-1},$$

где неособенная матрица y выбрана так, что

$$dy = dd^*.$$

По условию существует вектор $f \neq 0$ такой, что

$$0 = f(cx + d) = f(cc^* + dd^*) y^{-1},$$

и мы последовательно получаем

$$f(cc^* + dd^*) = 0,$$

$$f(cc^* + dd^*) f^* = 0,$$

$$fcc^* f^* = 0, \quad fdd^* f^* = 0,$$

$$fc = 0, \quad fd = 0,$$

$$f[c, d] = 0.$$

Таким образом, строки матрицы $[c, d]$ - линейно зависимы, т.е. ранг ее $r < n$.

Далее представляется естественным потребовать, чтобы преобразование (I) устанавливало взаимно однозначное соответствие между множествами $\mathcal{R}_x$ и $\mathcal{R}_y$. Покажем, что для этого необходимо и достаточно, чтобы матрица коэффициентов

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

была неособенной. Действительно, предположим, что A – особенная матрица. Тогда существует вектор-колонна

$$\begin{pmatrix} f^* \\ g^* \end{pmatrix},$$

отличный от нуля, аннулирующий справа матрицу A, т.е.

$$af^* + bg^* = 0,$$

$$cf^* + dg^* = 0.$$

Если теперь x_1 – матрица, для которой преобразование (I) имеет смысл и h – достаточно малый вектор, то преобразование будет иметь смысл и для матрицы

$$x_2=(x_1+f^*h)(I+g^*h)^{-1}$$

и мы получим

$$(ax_2+b)(cx_2+d)^{-1}=[a(x_1+f^*h)(I+g^*h)^{-1}+b],$$

$$=[ax_1+b+af^*h+bg^*h],$$

$$=(ax_1+b)(cx_1+d)^{-1},$$

что свидетельствует о нарушении взаимной однозначности.

Пусть наоборот, A – неособенная матрица. Из

$$y=(ax+b)(cx+d)^{-1}$$

последовательно получаем

$$y(cx+d)=ax+b,$$

$$yd-b=(-yc+a)x.$$

Покажем, что $a-yc$ – неособенная матрица. Действительно, в противном случае существовал бы вектор $f\neq 0$ такой, что

$$f(a-yc)=0.$$

Но тогда и

$$f(b-yd)=0.$$

Положив

$$\gamma fy=g,$$

мы получим, что вектор (f,g) $2n$-мерного пространства аннулирует матрицу A, что невозможно. Итак, $a-cy$ – неособенная матрица и

$$x=(a-yc)^{-1}(yd-b). \tag{1'}$$

Таким образом, по заданной матрице y из R_y однозначно определяется матрица x из R_x.

Исходя из требования взаимной однозначности соответствия между множествами R_x и R_y, мы будем во всем дальнейшем изложении рассматривать дробно-линейные преобразования (1) с неособенной матрицей A.

Отметим, что последняя формула указывает на то, что наряду с преобразованиями вида (1) следует рассматривать также и преобразования вида (2)

$$y=(xc_1+d_1)^{-1}(xa_1+b_1). \tag{2}$$

Таким преобразованиям удобно ставить в соответствие матрицу

$$B=\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix}.$$

Прямоугольную матрицу $[c,d]$, имеющую максимально возможный ранг n, назовем невырожденной. Очевидно, пара $[c,d]$ невырождена тогда и только тогда, когда неотрицательная матрица $cc^* + dd^*$ будет неособенной.

Отсюда, в частности, вытекает, что пара $[c,d]$ будет невырожденной одновременно с парой

$$[TcU,\ TdV],$$

где T – произвольная неособенная матрица; U и V – произвольные унитарные матрицы.

Менее тривиальный характер имеет следующая теорема I. Роль этой теоремы заключается в том, что она позволяет при доказательстве различного рода тождеств обойтись рассмотрением простейших (вещественных симметрических!) матриц вида

$$x=\begin{pmatrix} \rho_1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot\ \rho_n \end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 1 \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 1 & \end{pmatrix}.$$

<u>Теорема 1</u>. Если $[c,d]$ – невырожденная пара, то совокупность вещественных симметрических матриц x, для которых $cx+d$-неособенная матрица, всюду плотна во множестве всех вещественных симметрических матриц.

<u>Доказательство</u>. Теорема утверждает, что для любой наперед заданной вещественной симметрической матрицы x_0 найдутся сколь угодно близкие к ней вещественные симметрические матрицы x, такие, что

$$\det(cx+d)\neq 0.$$

Предположим, что это не так, т.е. существуют вещественная симметрическая матрица x_0 и некоторая ее окрестность, для всех вещественных симметрических матриц x, из которой $\det(cx+d)\equiv 0$. Тогда (по принципу аналитического продолжения) матрица $cx+d$ будет особенной для всех без исключения, в том числе и комплексных, симметрических матриц. Тем же свойством обладать должна и матрица

$$CZ+D=Tc\bar{U}U'xU+TdU \quad (C=Tc\bar{U},\ D=TdU,\ Z=U'xU)$$

для произвольной симметрической матрицы Z. Здесь T – неособенная, U – унитарная. Произвол в выборе матриц T и U используем для того, чтобы придать матрице D возможно более простой вид. Выберем T и U так, чтобы

$$TdU=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}=[0,\dots,0\ J_{q+1},\dots,J_n].$$

Так как пара $[C,D]$ является невырожденной, то среди ее $2n$-колонн имеется n линейно независимых. В качестве их можно взять последние $n-q$ колонн $J_{q+1},\dots,J_n$ матрицы D и некоторые q колонн $K_{j_1},\dots,K_{j_q}$ матрицы C.

Тогда матрица

$$F=[K_{j_1},\dots,K_{j_q},\ J_{q+1},\dots,J_n]$$

такая, что $\det F\neq 0$.

Будем считать, что $j_1 < j_2 < \ldots < j_q$ и пусть $j_s \le q < j_{s+1}$. Занумеруем в порядке возрастания элементы множества

$$\{1,\ldots,q\} \setminus \{j_1,\ldots,j_s\} = \{g_1,\ldots,g_{q-s}\}.$$

Расставим колонны матрицы C с помощью умножения ее справа на симметрическую матрицу Z_0 таким образом, чтобы колонны $K_{j_1},\ldots,K_{j_q}$ матрицы C стали первыми q колоннами матрицы CZ_0. Для этого достаточно положить элементы z_{ik} матрицы Z_0 равными

1) если $k = j_{s+t}$ $(t=1,\ldots,q-s)$, то

$$z_{ik} = \begin{cases} 1 \text{ при } i = g_t \\ 0 \text{ при } i \neq g_t, \end{cases}$$

2) если $k = g_t$ $(t=1,\ldots,q-s)$, то

$$z_{ik} = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j_{s+t} \\ 0 \text{ при } i \neq j_{s+t}, \end{cases}$$

3) если $k \notin \{j_{s+1},\ldots,j_q\} \cup \{g_1,\ldots,g_t\}$, то

$$z_{ik} = \begin{cases} 1 \text{ при } i = k \\ 0 \text{ при } i \neq k. \end{cases}$$

Положим $Z = \lambda Z_0$, где λ – произвольный вещественный скаляр. Матрица $CZ + D$ имеет вид

$$C\lambda Z_0 + D = [\lambda K_{l_1},\ldots,\lambda K_{l_q}, \lambda K_{l_{q+1}} + J_{q+1},\ldots,\lambda K_{l_n} + J_n],$$

где колонны $K_{l_1},\ldots,K_{l_q}$ совпадают с точностью до порядка следования с $K_{j_1},\ldots,K_{j_q}$.

Деля в матрице $C\lambda Z_0 + D$ первые колонны $\lambda K_{l_1},\ldots,\lambda K_{l_q}$ на λ и переходя к пределу при $\lambda \to 0$, получим матрицу G, отличающуюся от F быть может лишь порядком следования первых q колонн и, следовательно, $\det G \neq 0$. С другой стороны, т.к. по предположению $\det(CZ + D) \equiv 0$, то $\det G = \lim \frac{1}{\lambda^2} \det(C\lambda Z_0 + D) = 0$. Противоречие показывает, что утверждение теоремы справедливо.

Иногда возникает необходимость в рассмотрении дробно-линейного преобразования пары $[p, q]$

$$y=(ap+bq)(cp+dq)^{-1}.$$

При этом дробно-линейное преобразование (I) является частным случаем преобразования пары.

Переход к парам аналогичен введению проективных координат и позволяет дифференцировать различные случаи "обесконечивания" матрицы x.

Общая часть

Существенным для всего дальнейшего является тот факт, что любое дробно-линейное преобразование вида (I) (с неособенной матрицей A) может быть также записано в виде (2) и наоборот.

Теорема 2: Для совпадения преобразований (I) и (2) необходимо и достаточно, чтобы матрицы их

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix}$$

были связаны соотношением

$$B\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}A=\rho\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где ρ - скаляр (отличный от нуля).

Доказательство. Пусть преобразования (I) и (2) совпадают. Тогда для любой матрицы x справедливо равенство

$$0=(xc_1+d_1)^{-1}(xa_1+b_1)-(ax+b)(cx+d)^{-1}=$$

$$=(xc_1+d_1)^{-1}\left\{(xa_1+b_1)(cx+d)-(xc_1+d_1)(ax+b)\right\}(cx+d)^{-1}$$

или

$$x(a_1c-c_1a)x+x(a_1d-c_1b)+(d_1a-b_1c)x+(b_1d-d_1b)=0. \tag{4}$$

Полагая здесь $x=tI$, где t - вещественный скаляр, и устремляя t к 0 и ∞, мы получим

$$a_1c-c_1a=0, \quad b_1d-d_1b=0, \tag{5}$$

после чего соотношение (4) примет вид

$$x(a_1d-c_1b)=(d_1a-b_1c)x.$$

Положив здесь $x = I$, мы получим

$$a_1 d - c_1 b = d_1 a - b_1 c = t, \tag{5'}$$

$$x t = t x. \tag{6}$$

Считая x диагональной вещественной матрицей с различными диагональными элементами, мы получим из (6), что и t будет диагональной

$$t = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \rho_2 & \dots & 0 \\ \sim & \sim & \sim & \sim \\ 0 & 0 & \dots & \rho_n \end{pmatrix}.$$

Беря, наконец, в качестве x матрицу вида

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

мы убедимся, что диагональные элементы матрицы t одинаковы, т.е.

$$t = \rho I \qquad (\rho \neq 0).$$

Но тогда соотношения (5) и (5′) равносильны равенству (3).

Пусть, наоборот, матрицы A и B связаны соотношением (3). Тогда выполняется равенство (4) и, следовательно, преобразования (I) и (2) совпадают.

Из доказательства теоремы 2 вытекает важное следствие.

Следствие. Для того, чтобы преобразования (I) и (2) совпадали, достаточно совпадения значений их правых частей на вещественных симметрических матрицах.

С каждым дробно-линейным преобразованием вида (I), рассматриваемого класса, мы сопоставили матрицу A его коэффициентов. Покажем, что этим соответствием матрица A определяется однозначно с точностью до скалярного множителя.

Теорема 3. Для того, чтобы дробно-линейные преобразования

$$y = (ax + b)(cx + d)^{-1}, \tag{7}$$

$$y = (a_1 x + b_1)(c_1 x + d_1)^{-1} \tag{8}$$

совпадали, необходимо и достаточно, чтобы матрицы их коэффициентов были коллинеарны, т.е. чтобы

$$A_1 = \rho A \qquad (\rho \neq 0). \tag{9}$$

Доказательство. Пусть (7) и (8) – одно и то же преобразование. Вообразим, что оно записано в виде (2). Тогда справедливы равенства

$$B\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} A = \rho_0 \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

$$B\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} A_1 = \rho_1 \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

откуда и вытекает (9) с $\rho = \dfrac{\rho_1}{\rho_0}$.

Обратное утверждение тривиально.

Следствие. Для того, чтобы преобразования (7) и (8) совпадали, достаточно чтобы совпадали значения их правых частей на вещественных симметрических матрицах.

Действительно, преобразование (7) запишем в виде (2) и применим следствие теоремы 2.

Остановимся на групповых свойствах дробно-линейных преобразований (1) с неособенной матрицей коэффициентов A.

Прежде всего, рассмотрим суперпозицию двух дробно-линейных преобразований

$$y = (a_1 x + b_1)(c_1 x + d_1)^{-1}, \quad z = (a_2 y + b_2)(c_2 y + d_2)^{-1}. \tag{10}$$

Получим

$$z = [a_2(a_1 x + b_1)(c_1 x + d_1)^{-1} + b_2][c_2(a_1 x + b_1)(c_1 x + d_1)^{-1} + d_2]^{-1} =$$

$$= [a_2(a_1 x + b_2) + b_2(c_1 x + d_1)][c_2(a_1 x + b_1) + d_2(c_1 x + d_1)]^{-1} =$$

$$= [(a_2 a_1 + b_2 c_1)x + (a_2 b_1 + b_2 d_1)][(c_2 a_1 + d_2 c_1)x + (c_2 b_1 + d_2 d_1)]^{-1}.$$

Таким образом, матрица A_3 суперпозиции

$$z = (a_3 x + b_3)(c_3 x + d_3)^{-1}$$

коллинеарна произведению $A_2 A_1$, т.е.

$$A_3 = \rho A_2 A_1.$$

Пусть, далее, (10) – взаимно обратные преобразования, т.е. суперпозиция их является тождественным преобразованием

$$Z = X = (Ix + 0)(0x + I)^{-1}.$$

Матрица такого преобразования A_3 коллинеарна единичной, поэтому A_2 будет коллинеарна обратной A_1^{-1}. Этот же результат можно получить другим путем. Для преобразования

$$y=(a_1x+b_1)(c_1x+d_1)^{-1}$$

находим обратное

$$x=(-yc_1+a_1)^{-1}(yd_1-b_1).$$

Ему соответствует матрица

$$B_1=\begin{pmatrix} d_1 & -c_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Обратное преобразование записываем в виде (I)

$$x=(a_2y+b_2)(c_2y+d_2)^{-1},$$

тогда по формуле (3)

$$B_1\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}A_2=\rho\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

но т.к., очевидно,

$$\begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}B_1\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}=A_1,$$

то

$$A_1A_2=\rho I.$$

Это рассуждение приведено здесь потому, что применение формулы (3) является своеобразным штампом для доказательства ряда следующих теорем.

Теорема 4. Для того, чтобы дробно-линейное преобразование (I) переводило симметрические матрицы x в симметрические y, необходимо и достаточно, чтобы матрица A была коллинеарна симплектической матрице, т.е.

$$A'\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}A=\rho^2\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}. \qquad (II)$$

Доказательство. Пусть (I) переводит $x=x'$ в $y=y'$. Тогда преобразования

$$y=(ax+b)(cx+d)^{-1}, \tag{12}$$

$$y=(xc'+d')^{-1}(xa'+b') \tag{13}$$

совпадают на симметрических матрицах x. По следствию теоремы I они совпадают тождественно и тогда по теореме 2 имеет место формула (3), что и дает равенство (II).

Пусть, наоборот, имеет место равенство (II). Тогда, по теореме 2, преобразования (I2) и (I3) совпадают и мы получим для симметрической матрицы

$$y'=\left\{(ax+b)(cx+d)^{-1}\right\}'=(xc'+d')^{-1}(xa'+b')=y.$$

Следствие. Для того, чтобы дробно-линейное преобразование (I) переводило транспонированные матрицы x' в транспонированные y', т.е. чтобы

$$y'=(ax'+b)(cx'+d)^{-1} \tag{14}$$

достаточно, чтобы оно переводило симметрические матрицы x в симметрические y.

Действительно, (I3) совпадает с (I2). Транспонируя (I3), получим (I4).

Совершенно аналогично доказывается

Теорема 5. Для того, чтобы дробно-линейное преобразование (I) переводило эрмитовы матрицы x в эрмитовы y, необходимо и достаточно, чтобы матрица A была коллинеарна $\begin{pmatrix} 0 & iI \\ -iI & 0 \end{pmatrix}$ унитарной матрице, т.е.

$$A^*\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}A=\rho^2\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь ρ^2 – вещественное число, ρ может быть чисто мнимым.

Следствие. Для того, чтобы дробно-линейное преобразование (I) переводило сопряженные матрицы x^* в сопряженные y^*, достаточно, чтобы оно переводило эрмитовы матрицы x в эрмитовы y.

Почти так же,как теорема 4,доказывается теорема 6.

Теорема 6. Для того чтобы дробно-линейное преобразование (I) переводило вещественные матрицы x в вещественные, необходимо и достаточно, чтобы матрица A была коллинеарна вещественной матрице, т.е.

$$A=\rho A_0, \quad \bar{A}_0=A_0.$$

Доказательство. Пусть (I) переводит $x=\bar{x}$ в $y=\bar{y}$. Тогда преобразования

$$y=(ax+b)(cx+d)^{-1}, \tag{15}$$

$$y=(\bar{a}x+\bar{b})(\bar{c}x+\bar{d})^{-1} \tag{16}$$

совпадают на действительных матрицах x. Записав (15) в форме (2), получим равенства

$$B\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} A' = \rho_0 \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

$$B\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \bar{A} = \rho_1 \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\bar{A}=e^{i\alpha}A$$

и, следовательно,

$$A_0=e^{i\frac{\alpha}{2}}A$$

будет вещественной матрицей.

Обратное утверждение тривиально.

Следствие. Для того, чтобы дробно-линейное преобразование (I) переводило комплексно-сопряженные матрицы $\bar{x}$ в комплексно сопряженные $\bar{y}$ достаточно, чтобы оно переводило вещественные матрицы x в вещественные y.

Теорема 7. Если симплектическая матрица A коллинеарна вещественной матрице, то она либо вещественна, либо чисто мнимая.

Действительно, из

$$A'\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

$$A=\rho A_0, \qquad \bar{A}_0=A_0,$$

вытекает

$$\rho^2 A_0' \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} A_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

и т.к. ρ^2 – вещественное число, то ρ – либо действительное, либо чисто мнимое.

Из доказанной теоремы вытекает, что дробно-линейное преобразование (I), переводящее вещественные матрицы в вещественные, симметрические в симметрические, всегда может быть нормировано так, что A будет вещественной симплектической матрицей или вещественной антисимплектической матрицей; последнее означает, что

$$A' \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} A = -\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что если матрица преобразования

$$y = (ax+b)(cx+d)^{-1}$$

будет симплектической, то матрица преобразования

$$z = (cx+d)(ax+b)^{-1}$$

будет антисимплектической.

Специальная часть

Будем рассматривать дробно-линейные преобразования (I), переводящие правую матричную полуплоскость (т.е. совокупность матриц x, удовлетворяющих условию $x^* + x \geq 0$) в себя. Аналогичным образом могут быть изучены преобразования (I), переводящие J-круг в J-круг, J-круг в полуплоскость и т.п.

Пусть в конечномерном линейном комплексном пространстве L задана индефинитная метрика скалярным произведением $[f, g]$.

Вектор $f \in L$ назовем положительным, если $[f, f] > 0$, отрицательным – если $[f, f] < 0$, и нейтральным – если $[f, f] = 0$. Например, для $2n$-мерных векторов-строчек можно положить

$$[f, g] = fJg^*,$$

где

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

Матрицу A назовем плюс-матрицей, если она каждый неотрицательный вектор f переводит в неотрицательный, т.е., если из

$$[f,f] \geqslant 0$$

вытекает

$$[fA, fA] \geqslant 0,$$

или, в рассматриваемой конкретной реализации, если из

$$fJf^* \geqslant 0 \tag{17}$$

вытекает

$$fAJA^*f^* \geqslant 0. \tag{18}$$

В дальнейшем будет показано, что если неособенная матрица A является плюс-матрицей, то и A^* будет плюс-матрицей и наоборот.

Теорема 8. Для того, чтобы дробно-линейное преобразование (I) переводило правую матричную полуплоскость $x^* + x > 0$ в себя, необходимо и достаточно, чтобы матрица коэффициентов была плюс-матрицей.

Доказательство. Вычислим

$$y^* + y = (x^*c^* + d^*)^{-1}(x^*a^* + b^*) + (ax+b)(cx+d)^{-1} =$$

$$= (x^*c^* + d^*)^{-1}\{(x^*a^* + b^*)(cx+d) + (x^*c^* + d^*)(ax+b)\}(cx+d)^{-1} =$$

$$= (x^*c^* + d^*)^{-1}\{x^*(a^*c + c^*a)x + x^*(a^*d + c^*b) +$$

$$+ (b^*c + d^*a)x + (b^*d + d^*b)\}(cx+d)^{-1},$$

но

$$[x^*, I]J\begin{bmatrix} x \\ I \end{bmatrix} = [x^*, I]\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x \\ I \end{bmatrix} = x^* + x,$$

$$[x^*, I]A^*JA\begin{bmatrix} x \\ I \end{bmatrix} = [x^*, I]\begin{pmatrix} c^*a + a^*c & c^*b + a^*d \\ d^*a + b^*c & d^*b + b^*d \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x \\ I \end{bmatrix} =$$

$$= x^*(c^*a + a^*c)x + x^*(a^*d + c^*b) + (b^*c + d^*a)x + (b^*d + d^*b).$$

Поэтому

$$y^* + y = (x^*c^* + d^*)^{-1}\left\{[x^*, I]A^*JA\begin{bmatrix} x \\ I \end{bmatrix}\right\}(cx+d)^{-1}$$

и для того, чтобы из $x^*+x>0$ вытекало $y^*+y>0$, необходимо и достаточно, чтобы из

$$[x^*, I]J\begin{bmatrix}x\\ I\end{bmatrix}>0 \tag{19}$$

вытекало

$$[x^*, I]A^*JA\begin{bmatrix}x\\ I\end{bmatrix}>0. \tag{20}$$

Нетрудно убедиться в том, что последнее условие эквивалентно тому, что A^* является плюс-матрицей.

В самом деле, пусть для матрицы A из (19) вытекает (20) и пусть сначала $[u, v]$ – собственная пара матриц (т.е. v^{-1} существует), удовлетворяющая условию

$$[u, v]J\begin{bmatrix}u^*\\ v^*\end{bmatrix}>0. \tag{21}$$

Покажем, что $[u, v]$ будет удовлетворять и условию

$$[u, v]A^*JA\begin{bmatrix}u^*\\ v^*\end{bmatrix}>0. \tag{22}$$

Положив

$$v^{-1}u=x^*,$$

получим, что

$$[u, v]=v[x^*, I],$$

и, т.к. пара $[u, v]$ удовлетворяет условию (21), то x удовлетворяет условию (19). Но из (19) вытекает (20), а из (20) – условие (22).

Пусть теперь $[u, v]$ – произвольная пара, удовлетворяющая условию (21). Покажем, что пару $[u, v]$ можно рассматривать как передел собственных пар, также удовлетворяющих условию (21).

С той целью рассмотрим неособенную матрицу Γ, обладающую свойством

$$\Gamma u^*=uu^*.$$

При $\sigma>0$ пара

$$[u, v+\sigma\Gamma]$$

будет вместе с парой $[u, v]$ удовлетворять условию (21), т.к.

$$[u, v+\sigma T]J\begin{bmatrix} u^* \\ v^*+\sigma T^* \end{bmatrix} = u(v^*+\sigma T^*)+(v+\sigma T)u^* = uv^*+vu^*+2\sigma uu^* \geqslant 0.$$

С другой стороны, для всех достаточно малых σ матрица $v+\sigma T$ будет неособенной и, по только что доказанному, пара $[u, v+\sigma T]$ будет удовлетворять неравенству (22). Переходя к пределу при $\sigma \to 0$, получим, что и пара $[u, v]$ удовлетворяет неравенству (22).

Пусть, наконец, f – произвольный $2n$-мерный вектор, удовлетворяющий неравенству

$$fJf^* \geqslant 0. \tag{17'}$$

Обозначим $f = (\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n) = (g_1, g_2)$, тогда

$$fJf^* = (g_1, g_2)\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_1^* \\ g_2^* \end{pmatrix} = g_1 g_2^* + g_2 g_1^* \geqslant 0.$$

Покажем, что имеет место неравенство

$$fA^*JAf^* \geqslant 0. \tag{18'}$$

Рассмотрим пару $[u, v]$ квадратных матриц n-го порядка, где

$$u = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \ldots \xi_n \\ 0 & 0 \ldots 0 \\ \sim & \sim \sim \sim \\ 0 & 0 \ldots 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \sim & \sim & & \sim \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта пара удовлетворяет условию (21), т.к.

$$[u, v]J\begin{bmatrix} u^* \\ v^* \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} g_2 g_1^* + g_1 g_2^* & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 \ldots 0 \\ \sim \quad \sim & \sim \quad \sim \\ 0 & 0 \ldots 0 \end{pmatrix} \geqslant 0.$$

Но тогда $[u, v]$ удовлетворяет неравенству (22)

$$[u, v]A^*JA\begin{bmatrix} u^* \\ v^* \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} fA^*JAf^* & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 \ldots 0 \\ \sim & \sim \quad \sim \\ 0 & 0 \ldots 0 \end{pmatrix},$$

а это и означает, что имеет место неравенство (18′).

Наоборот, пусть матрица A^* является плюс-матрицей. Рассмотрим произвольную матрицу x, удовлетворяющую условию (I9). Тогда для произвольного n-мерного вектора g

$$g[x^*, I]J\begin{bmatrix}x\\I\end{bmatrix}g^* \geqslant 0$$

и $2n$-мерный вектор $f=(gx^*, g)$ будет удовлетворять условию (I7′), а значит, и неравенству (I8′), которое уже будет иметь вид

$$g[x^*, I]A^*JA\begin{bmatrix}x\\I\end{bmatrix}g^* \geqslant 0.$$

Так как это неравенство выполняется для любого вектора g, то $[x^*, I]A^*JA\begin{bmatrix}x\\I\end{bmatrix} \geqslant 0$, т.е. из (I9) вытекает (20). Теорема доказана.

Как впервые показал Л.А.Сахнович, каждая неособенная плюс-матрица коллинеарна J-растягивающей, т.е.

$$A=\rho A_0,$$

где

$$A_0 J A_0^* - J \geqslant 0.$$

Отсюда, в частности, следует, что преобразование, переводящее правую матричную полуплоскость в себя, имеет смысл во всей открытой правой полуплоскости. А именно, справедлива следующая

<u>Теорема 9</u>. Если A^* - неособенная J-растягивающая матрица, то дробно-линейные преобразования

$$y=(ax+b)(cx+d)^{-1},$$

$$y=(cx+d)(ax+b)^{-1}$$

имеют смысл для каждой матрицы x, удовлетворяющей неравенству

$$x^*+x>0.$$

<u>Доказательство</u>. По условию

$$[x^*, I]A^*JA\begin{bmatrix}x\\I\end{bmatrix} > [x^*, I]J\begin{bmatrix}x\\I\end{bmatrix}.$$

Однако

$$[x^*, I]\begin{pmatrix}0 & I\\I & 0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x\\I\end{bmatrix}=x^*+x,$$

$$[x^*, I]\begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x \\ I \end{bmatrix} = [x^*a^* + b^*, x^*c^* + d^*]\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} ax+b \\ cx+b \end{bmatrix} = (x^*c^* + d^*)(ax+b) + (x^*a^* + b^*)(cx+d).$$

Таким образом,

$$(x^*c^* + d^*)(ax+b) + (x^*a^* + b^*)(cx+d) \geqslant x^* + x > 0$$

и если $cx+d$ – особенная, то существует вектор $f \neq 0$, такой, что

$$(cx+d) f^* = 0.$$

Но тогда

$$0 = f\left\{(x^*c^* + d^*)(ax+b) + (x^*a^* + b^*)(cx+d)\right\} f^* \geqslant f(x^* + x) f^* > 0,$$

что невозможно.

Аналогично доказывается, что $ax+b$ – неособенная матрица. Теорема доказана.

Для установления факта о коллинеарности плюс-матрицы J-растягивающей, докажем предварительно теорему Кюне.

<u>Теорема 10</u>. Если эрмитова билинейная форма $\mathcal{R}(f, g)$ – неотрицательна на всех нейтральных векторах f, т.е. если из

$$[f, f] = 0$$

вытекает

$$\mathcal{R}(f, f) \geqslant 0,$$

то для произвольного положительного вектора x и произвольного отрицательного вектора y справедливо следующее неравенство:

$$\frac{\mathcal{R}(x, x)}{[x, x]} \geqslant \frac{\mathcal{R}(y, y)}{[y, y]} \tag{23}$$

и существует скаляр μ такой, что для всех векторов f

$$\mathcal{R}(f, f) \geqslant \mu [f, f]. \tag{24}$$

<u>Доказательство</u>. Допустим, что (23) не имеет места. Тогда существуют векторы x_0, y_0, для которых имеет место противоположное неравенство. Нормируя их так, чтобы

$$[x_0, x_0]=1, \qquad [y_0, y_0]=-1,$$

мы получим

$$\Omega(x_0, x_0)+\Omega(y_0, y_0)<0. \tag{25}$$

Положим теперь

$$f=x_0+e^{i\alpha}y_0$$

и подберем скалярный множитель $e^{i\alpha}$ так, чтобы вектор f был нейтральным, т.е. так, чтобы

$$[f,f]=[x_0+e^{i\alpha}y_0, x_0+e^{i\alpha}y_0]=[x_0, x_0]+$$

$$+e^{-i\alpha}[x_0,y_0]+e^{i\alpha}[y_0,x_0]+[y_0, y_0]=e^{-i\alpha}[x_0, y_0]+$$

$$+e^{i\alpha}[y_0, x_0]=Re\left\{e^{-i\alpha}[x_0, y_0]\right\}=0.$$

Очевидно, всегда существуют два противоположных по знаку таких множителя $\pm e^{i\theta}$. Пусть

$$f_1=x_0+e^{i\theta}y_0, \qquad f_2=x_0-e^{i\theta}y_0 \;-$$

два соответствующих вектора. Так как одно из двух вещественных чисел

$$\pm\left[e^{-i\theta}\Omega(x_0, y_0)+e^{i\theta}\Omega(y_0,x_0)\right]$$

заведомо неположительно, то одна из двух форм

$$\Omega(f_1, f_1), \qquad \Omega(f_2, f_2)$$

будет отрицательна, что противоречит условию теоремы. Итак, неравенство (23) доказано.

Обозначим теперь

$$\inf_{[x,x]>0}\frac{\Omega(x,x)}{[x,x]}=\mu. \tag{26}$$

В силу (23), $\mu>-\infty$ и для всех векторов будет справедливо неравенство

$$\Omega(f,f)\geqslant\mu[f,f].$$

Действительно, для положительных векторов оно вытекает из (26), для нейтральных – из определения $\Omega(f,g)$, для отрицательных – из неравенства, вытекающего из (23)

$$\mu > \frac{\Omega(y,y)}{[y,\ y]}.$$

(Здесь, при умножении обеих частей неравенства на отрицательное число $[y,\ y]$, знак неравенства изменится на противоположный).

Теорема доказана.

Теорема 11. Каждая неособенная плюс-матрица A коллинеарна J-несжимающей матрице.

Доказательство. Билинейная форма

$$\Omega(f,g)=[fA,\ gA]$$

удовлетворяет условиям предыдущей теоремы. Поэтому

$$[fA,fA]\geqslant\mu[f,f]$$

при неотрицательном μ. Если $\mu=0$, то A отображает все пространство в правильную часть – неотрицательное подпространство и, следовательно, является особенной. Таким образом, $\mu=\frac{1}{\rho^2}>0$ и матрица ρA будет J-несжимающей.

Теорема 12. Если A J-несжимающая матрица, то и A^* J-несжимающая и наоборот. Таким образом, соотношения

$$AJA^* - J\geqslant 0,$$

$$A^*JA - J\geqslant 0$$

эквивалентны.

Доказательство. Рассмотрим преобразование Кали

$$w=J(I+e^{i\theta}u)(I-e^{i\theta}u)^{-1}, \tag{27}$$

где скалярный множитель $e^{i\theta}$ выбирается так, чтобы для $u=A$ преобразование имело смысл. Тогда

$$\frac{w+w^*}{2}=(I-e^{-i\theta}u^*)^{-1}\left[J-u^*Ju\right](I-e^{i\theta}u)^{-1}; \tag{28}$$

с другой стороны, преобразование (27) может быть записано и в виде

$$w=J(I-e^{i\theta}u)^{-1}(I+e^{i\theta}u) \tag{29}$$

и тогда

$$\frac{W+W^*}{2}=J(I-e^{i\theta}u)^{-1}\left\{J-uJu^*\right\}(I-e^{-i\theta}u^*)^{-1}J. \tag{30}$$

Из (28) и (30) получим для $u=A$

$$J-AJA^*=T(J-A^*JA)T^*,$$

где T – неособенная матрица, что и доказывает теорему.

Следствие. Если A – неособенная плюс-матрица, то и A^* – плюс-матрица, и наоборот.

Действительно, если A – неособенная плюс-матрица, то по теореме 11 существует такой скаляр ρ, что ρA будет J-несжимающей матрицей. По теореме 12 ρA^* будет также J-несжимающей, в частности, A^* будет плюс-матрицей.

Замечание. Для особенных матриц следствие не имеет места. Пусть $J=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $\varepsilon=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\varepsilon$, тогда

$$AJA^*=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\varepsilon J\varepsilon^*\begin{pmatrix}\bar\alpha & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=0,$$

т.е., в частности, A будет плюс-матрицей. Однако

$$A^*JA=\varepsilon^*\begin{pmatrix}|\alpha|^2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\varepsilon=\varepsilon^*J\varepsilon+\varepsilon^*\begin{pmatrix}|\alpha|^2-1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\varepsilon=\varepsilon^*\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\varepsilon(|\alpha|^2-1)$$

и при $|\alpha|<1$ A^* не будет плюс-матрицей.

Будем снова считать, что матрица J имеет вид

$$J=\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix}.$$

Кроме того, введем в рассмотрение матрицу

$$j=\begin{pmatrix}-I & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}.$$

Тогда, очевидно, симплектичность матрицы может быть записана так:

$$A'JjA=Jj. \tag{31}$$

Теорема 13. Симплектическая плюс-матрица A является J-несжимающей матрицей.

Доказательство. По теореме II существует такой скаляр $\rho > 0$, что матрица ρA будет J-несжимающей, т.е.

$$\rho^2 AJA^* > J. \qquad (32)$$

Из (31) найдем

$$A = jJA'^{-1}Jj, \qquad A^* = jJ\bar{A}^{-1}Jj.$$

Подставляя в (32), получим

$$\rho^2 jJA'^{-1}JjJjJ\bar{A}^{-1}Jj \geqslant J$$

или

$$-\rho^2 A'^{-1}J\bar{A}^{-1} \geqslant J,$$

откуда

$$A'J\bar{A} \geqslant \rho^2 J.$$

Перейдем к комплексно-сопряженным

$$A^*JA > \rho^2 J.$$

Однако по теореме 12 это неравенство эквивалентно неравенству

$$AJA^* \geqslant \rho^2 J. \qquad (33)$$

Складывая (32) и (33) мы получим

$$(1+\rho^2)AJA^* \geqslant (1+\rho^2)J$$

или

$$AJA^* \geqslant J,$$

что и требовалось доказать.

Из теорем 7 и 13 вытекает следующая основная

Теорема 14. Если дробно-линейное преобразование

$$y = (ax+b)(cx+d)^{-1}$$

с неособенной матрицей коэффициентов

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

отображает правую матричную полуплоскость $x^*+x\geqslant 0$ в себя и переводит вещественные симметрические матрицы x в вещественные симметрические матрицы y, то преобразование можно так нормировать умножением всех коэффициентов на скалярный множитель ρ, что матрица ρA будет вещественной J-несжимающей симплектической или антисимплектической матрицей.

Литература

1. Потапов В.П. Мультипликативная структура J-нерастягивающих матриц-функций. - Тр. Моск. мат. об-ва, 1955, № 4, с.125-236.
2. Потапов В.П. Общие теоремы о структуре и отщеплении элементарных множителей аналитических матриц-функций. - Докл. АН АрмССР, 1969, 48, № 6, с.257-262.
3. Ефимов А.В., Потапов В.П. J-растягивающие матрицы-функции и их роль в аналитической теории электрических цепей. - Успехи мат. наук, 1973, 28, вып.I (169), с.65-130.
4. Ковалишина И.В., Потапов В.П. Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны - Пика. - Докл. АН АрмССР, 1974, 59, № I, с.17-22.
5. Ковалишина И.В. J-растягивающие матрицы-функции в задаче Каратеодори. - Докл. АН АрмССР, 1974, 59, № 3, с.129-135.
6. Ковалишина И.В. J-растягивающие матрицы-функции и проблема моментов. - Докл. АН АрмССР, 1975, 60, № I, с.3-10.
7. Ковалишина И.В. Аддитивное разложение произвольной реактивной матрицы-функции. - Изв. АН АрмССР, 1971, 6, № I, с.43-60.
8. Siegel C.L. Symplectic Geometrie. - Amer. Journ. Math., 1943, 65, N 1, p. 1-86.
9. Hua Loo-Keng Geometrie of matrices. - Trans. Amer. Math. Soc., 1947, 61, p. 117-142.

УДК 517.946

В.Р.Смилянский

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МНОЖИТЕЛЕЙ СТОКСА I

Введение

В статье сохранены обозначения, введенные в работах [1,2], которые, также как определения и термины этих же работ [1,2], как правило, не поясняются. При ссылках на работы [1,2] арабскими цифрами обозначены формулы и теоремы, римскими (I, II) - номера работ.

Замечание 0. В примечании на с.493 в работе [1] указано: "Рассматриваемые в §§ 1,2,3 системы и уравнения (исключая 3.3) могли иметь конечное число особых точек кроме $z=\infty$." Это ограничение является излишним. Фактически все результаты в § 1 статьи [1] получены для системы (I.0I), удовлетворяющей только указанным на с.483 требованиям. В § 2,3 статьи [1] к этим требованиям добавляется еще требование инвариантности системы (I.0.I) и уравнения (I.0.6) относительно замены $z \to ze^{i\alpha}$. То же самое можно сказать и о всей статье [2]. Это же относится и к настоящей статье.

§ I. Теорема единственности и другие свойства множителей Стокса

Будем в дальнейшем, следуя [3], фундаментальную матрицу (ф.м.) $\Phi(z)$, имеющую асимптотическое представление $\Phi(z) \sim \hat{\Phi}(z)$ в каком-либо секторе, называть асимптотически базисной в этом секторе.

Замечание I. Если какая-либо ф.м. $\Psi(z)$ асимптотически базисна в полуоткрытом секторе $l_\nu \leq \arg z < l_{\nu+\omega}$, то в силу теорем I.I, I.I.I, а также 15.I в работе [3] она асимптотически базисна в открытом секторе $l_{\nu-1} < \arg z < l_{\nu+\omega}$.

Обозначим через N число линий l_ν в секторе $l_1 \leq \arg z < l_1 + 2\pi$. Обозначим через L число линий l_ν в секторе $l_1 \leq \arg z < l_1 + \pi/r+1$ (очевидно, что $1 \leq L \leq n(n-1)/2$). В этом секторе любая пара выражений $Re\,\lambda_\alpha z^{r+1}$, $Re\,\lambda_\beta z^{r+1}$ $(\alpha \neq \beta)$ становится равной только на одной линии l_ν. В дальнейшем любой сектор в z-плоскости, который обладает указанным свойством, будем называть стандартным сектором (С.С.). Число линий l_ν в любом С.С. есть L. Этому определению удовлетворяет как открытый сектор $l_{\nu-L} < \arg z < l_{\nu+1}$, так и полуоткрытый сектор $l_{\nu+1-L} \leq \arg z < l_{\nu+1}$. Ниже для удобства в ряде доказательств и формулировок фигурирует полуоткрытый С.С. Однако все полученные ниже результаты справедливы и для открытого С.С., т.к. если ф.м. асимптотически базисна в полуоткрытом С.С., то в силу замечания I она асимптотически базисна и в открытом С.С. Отметим также, что $\sum\limits_{\nu=1}^{N} k_\nu(k_\nu-1)/2 = (r+1)\,n(n-1)$.

Теорема I.I. (теорема единственности). Пусть матрица P_0 и нумерация характеристических корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (т.е. столбцов $\hat{\Phi}(z)$ зафиксирована (см.I.02, I.03). Тогда в любом С.С.S существует единственная ф.м., асимптотически базисная в этом секторе.

Другими словами: в любом С.С. асимптотическое представление $\hat{\Phi}(z)$ однозначно определяет ф.м. $\Phi(z)$, имеющую это представление.

Если не считать фиксированными P_0 и нумерацию λ_j, то теорему I.I. можно сформулировать иначе: если данная ф.м. $\Phi(z)$ асимптотически базисна в каком-либо С.С.S, то совокупность всех ф.м., асимптотически базисных в S, может быть получена умножением $\varphi(z)$ справа на произвольную диагональную неособую матрицу Γ и перестановкой столбцов.

<u>Замечание 2</u>. Случай $k_\nu = n$ [1] – есть частный случай теоремы I.I. Здесь в каждом С.С. все линии l_ν сливаются в одну $(\mu = 1)$.

<u>Следствия</u>. 1) Матрица $\varphi_\mu(z)$ (П.I.I) по построению асимптотически базисна в С.С. $l_1 \leq \arg z < l_1 + \pi/r+1 = l_{\mu+1}$. Следовательно, она единственна в этом секторе и именно поэтому не зависит от частного вида матрицы $\varphi_1(z)$, с которой начался процесс (P_0 и нумерация λ_j – фиксированы). Таким образом, теорема I.I.I дает способ построения ф.м. $\varphi_\mu(z)$, асимптотически базисной в С.С. $l_1 \leq \arg z < l_1 + \pi/r+1$.

2) Далее, строя последовательным применением теоремы I.I.I матрицы $\varphi_{\mu+1}(z)$, $\varphi_{\mu+2}(z), \dots,$ мы получаем фундаментальные матрицы, асимптотически базисные соответственно в С.С. $l_2 \leq \arg z < l_2 + \pi/r+1 = l_{2+\mu}$; $l_3 \leq \arg z < l_3 + \pi/r+1 = l_{3+\mu}$, последовательно "сдвигая" С.С. в Z- плоскости.

3) Пусть матрица P_0 и нумерация λ_j – зафиксированы.
а) Пусть $\varphi_1(z) = \varphi(z)\, V_\omega$, где $\varphi(z)$ – асимптотически базисна в С.С. $l_{\omega+1-\mu} \leq \arg z < l_{\omega+1}$ $(\omega+1-\mu \geq 1)$, а V_ω – постоянная неособая матрица. Тогда $V_\omega = \Gamma_\omega$; $\varphi(z) = \varphi_\omega(z)$;
б) Пусть $\psi(z)$ – асимптотически базисна в С.С. $l_\nu \leq \arg z < l_\nu + \pi/ /r+1 = l_{\nu+\mu}$, а $\varphi(z)$ – асимптотически базисна в С.С. $l_{\nu+\omega} \leq \arg z < l_{\nu+\omega+\mu}$. Тогда

$$\varphi(z) = \psi(z)\, B_{\nu+\mu-1} B_{\nu+\mu} \dots B_{\nu+\omega+\mu-2}, \tag{I.I}$$

т.е. в обоих случаях одна матрица может быть получена из другой последовательным применением теоремы I.I.I.
в) Выражение $\Gamma_\mu Y \Gamma_\mu^{-1}$ не зависит от выбора $\varphi_1(z)$. Детальнее, пусть $\varphi_1'(z) = \varphi_1(z)\, G$, где постоянная неособая матрица G такая, что $\varphi_1'(z) \sim \varphi_1(z) \sim \hat{\varphi}(z)$ $(|z| \to \infty,\ z \in s_1)$, а в остальном произвольна. Пусть $\varphi_1'(z e^{i\alpha}) = \varphi_1'(z) Y'$; $\varphi_1(z e^{i\alpha}) = \varphi_1(z) Y$; $(Y, Y'$ – постоянные неособые матрицы; $\alpha = \sigma\alpha_0, \varphi)$ и $\varphi_1'(z) = \varphi_\mu'(z)\Gamma_\mu'$; $\varphi_1(z) = \varphi_\mu(z)\Gamma_\mu$.
Тогда

$$1.\ \Gamma_\mu' = \Gamma_\mu G, \qquad 2.\ \Gamma_\mu Y \Gamma_\mu^{-1} = \Gamma_\mu' Y' (\Gamma_\mu'). \tag{I.2}$$

Так как матрицы D_j и B_j по определению взаимообратны (1.1.6), то далее везде приводятся выражения только для D_j.

Теорема 1.2. Пусть системы (1.0.1) или уравнение (1.06) не меняют своего вида при замене $z \to ze^{i\sigma\alpha_0}$ (1.2.1, П.2.1).

а) Пусть $\varphi_1(z)$ – не исключительная матрица. Тогда для обхода точки $z=\infty$ достаточно знать множители Стокса в секторе $l_1 \leq$ $\leq \arg z < l_1 + \sigma\alpha_0 + \varphi = l_{\varepsilon+l+1}$ (всего $\sigma n(n-1) + \frac{1}{2}[n(n-1) - k_{\varepsilon+l+1}(k_{\varepsilon+l+1}-1)]$ множителей Стокса), а именно матрицы $D_1, D_2, \dots, D_{\varepsilon+l-1}$. Обход производится по формулам (1.2.9). При этом

$$\varphi_{\varepsilon x+\omega}\left(ze^{ix\sigma\alpha_0}\right) = \varphi_{\varepsilon x+\omega}\left(ze^{ix\sigma\alpha_0}\right); \quad l \leq \omega \leq \varepsilon \quad (x=0,1,2,\dots), \qquad (1.3)$$

$$V_{\varepsilon x+\omega} = \Gamma_{\varepsilon x+\omega}; \quad l \leq \omega \leq \varepsilon \quad (x=0,1,2,\dots), \qquad (1.4)$$

$$Y = \Gamma_l^{-1} e^{i\sigma\alpha_0 R}\,\Gamma_{\varepsilon+l}, \qquad (1.5)$$

$$D_{\varepsilon x+\omega} = e^{-ix\sigma\alpha_0 R} D\omega\, e^{ix\sigma\alpha_0 R}; \quad l \leq \omega \leq \varepsilon-1 \quad (x=0,1,2,\dots) \quad (1.6)$$

б) Пусть $\varphi_1(z)$ – исключительная матрица. 1) Исключительная матрица $Z_1'(z)$, $(Z_1(z))$ – это ф.м., асимптотически базисная в С.С. $l_2 - \varphi \leq \arg z < l_2$. 2) $Y = e^{i\sigma\alpha_0 R}\,\Gamma_{\varepsilon+1}$. 3) В рассматриваемом случае все множители Стокса выражаются через множители Стокса в секторе $l_1 \leq \arg z \leq l_1 + \sigma\alpha_0 \equiv l_{\varepsilon+1}$ (т.е. через $\sigma n(n-1)$ множителей Стокса), т.к. в этом случае (1.3), (1.4), (1.6) справедливы для $1 \leq \omega \leq \varepsilon$ $(x=0,1,2,\dots)$. Для обхода достаточно знать матрицы $D_1, D_2, \dots, D_\varepsilon$.

Подчеркнем, что в теореме П.2.1 при $\varphi_1(z) = Z_1'(z)$ матрица $Y_{\varepsilon x+\omega}$ только выражена через множители Стокса в секторе $l_1 < \arg z \leq l_1 + \sigma\alpha_0$, но не доказано, что $V_{\varepsilon x+\omega} = \Gamma_{\varepsilon x+\omega}$, т.е. что он может быть получена последовательным применением теоремы 1.1.1.

Теорема 1.3. Пусть уравнение (1.06) не меняет своего вида при замене $z \to ze^{i\varphi}$; $\varphi = \pi/r+1$ (см. § 3 в работе [1]). Пусть в (1.3.4) $C_{0,j}$ выбраны так, что $C_{0,j} = C_{0,(n-j+1)}$.

а) Пусть $\varphi_1(z)$ не является асимптотически базисной в С.С. $l_2 - \varphi \leq \arg z < l_2$ (не "исключительная"). Тогда для обхода точки

$z=\infty$ достаточно знать множители Стокса в секторе $l_1 \le \arg z < l_1 + 2\varphi \equiv l_{2L+1}$ (всего $n(n-1) - \frac{1}{2}k_{2L-1}(k_{2L-1}-1)$ множителей Стокса), а именно матрицы $D_1, D_2, \ldots, D_{2L-1}$. Обход производится так же как описано в § 3 работы [1]. При этом

$$1.\ \overset{1}{\psi}_{Lx+L}(ze^{ix\varphi}) = \varphi_{Lx+L}(ze^{ix\varphi}); \qquad 2.\ \vec{V}_{Lx+L} = \Gamma_{Lx+L}; \qquad x = 1, 3, \ldots;$$

$$3.\ \psi_{Lx+L}(ze^{ix\varphi}) = \varphi_{Lx+L}(ze^{ix\varphi}); \qquad 4.\ V_{Lx+L} = \Gamma_{Lx+L}; \qquad x = 0, 2, 4, \ldots;$$

$$Y = \Gamma_L^{-1} e^{i\varphi R} \vec{\Gamma}_{2L} = \Gamma_L^{-1} e^{i\varphi R} \Gamma_{2L}. \tag{1.8}$$

б) Пусть $\varphi_1(z) \equiv z_1^n(z)$ асимптотически базисна в С.С. $l_2 - \varphi \le \arg z < l_2$ ("исключительная"). В этом случае все множители Стокса выражаются через множители Стокса в секторе $l_1 \le \arg z \le l_1 + \varphi \equiv l_{L+1}$ (т.е. через $\frac{1}{2}n(n-1)$ множителей Стокса) и для обхода достаточно знать матрицы $D_1, D_2, \ldots, D_L$. При этом $(1 \le \omega \le L)$

$$\overset{1}{\psi}_{Lx+\omega}(ze^{ix\varphi}) = \varphi_{Lx+\omega}(ze^{ix\varphi}); \qquad \vec{V}_{Lx+\omega} = \Gamma_{Lx+\omega}; \qquad x = 1, 3, \ldots; \tag{1.9}$$

$$\psi_{Lx+\omega}(ze^{ix\varphi}) = \varphi_{Lx+\omega}(ze^{ix\varphi}); \qquad V_{Lx+\omega} = \Gamma_{Lx+\omega}; \qquad x = 0, 2, 4, \ldots;$$

$$1.\ \overset{1}{\varphi}_{L+1}(ze^{i\varphi}) = Z_1^{1}(z) e^{i\varphi R}; \qquad 2.\ Y = \overset{1}{e}{}^{i\varphi R}\,\Gamma_{L+1} \equiv e^{i\varphi R} \vec{\Gamma}_{L+1}; \tag{1.10}$$

$$D_{Lx+\omega} = \left[\overset{1}{e}{}^{-i\varphi R}\right]^{x} D_\omega \left[\overset{1}{e}{}^{i\varphi R}\right]^{x}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1.11}$$

Результаты § 5 статьи в работе [1] относительно Y легко распространить на указанный во введении общий случай системы (I.0.I). Действительно, пусть $A(z)$ аналитична при $|z| > a$; $a = const_1 > 0$. Тогда в области $|z| > a$ всегда можно построить описанный в § 5 многоугольник и т.д.

Теорема I.4. Пользуясь (с учетом замечаний 0 и 3) результатами § I,3-5 в работе [1], и дословно повторяя рассуждения § 6 в работе [1], можно определить все множители Стокса для уравнения типа

$$\frac{d^2y}{dz^2}+z^r a_1(z)\frac{dy}{dz}+z^{2r}a_0(z)y=0, \tag{1.12}$$

$$a_0(ze^{i\varphi})=a_0(z); \qquad a_1(ze^{i\varphi})=-a_1(z). \tag{1.13}$$

Пусть ρ_1, ρ_2 – характеристические числа матрицы Y; пусть $Re\,q_1<Re\,q_2$ в секторе $l_1<\arg z<l_2$. Тогда для уравнения (значок ^{t} означает транспонирование)

$$1.\quad D_1=\begin{pmatrix}1 & i(\rho_1+\rho_2)\\ 0 & 1\end{pmatrix};\ 2.\ D_{x+1}=\begin{pmatrix}D_1 & (x=0,2,4,\dots)\\ D_1^t & (x=1,3,\dots)\end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

Заметим, что в случае рациональных коэффициентов $z^r a_1(z)$, $z^r a_0(z)$ простейшими частными случаями уравнения типа (1.12) является уравнение Бесселя и уравнение для сфероидальных волновых функций.

Как известно [3] система (1.0.1) не меняет своего вида при замене $z\to ze^{i\sigma\alpha_0}$, если $A(z)=\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}A_{\nu q}z^{-\nu q}$ при больших $|z|$, где $q=r+1/\sigma$ целое; σ – целое и $1\le\sigma\le r+1$. Пусть дополнительно σ – нечетное число, а $A_{\nu q}$ – симметрическая матрица, если ν четно, и кососимметрическая матрица, если ν нечетно. Тогда $A(ze^{i\sigma\varphi})=A^t(z)$, а сама система (1.0.1) при замене $z\to ze^{i\sigma\varphi}$ переходит в систему

$$\frac{dw(ze^{i\sigma\varphi})}{dz}=-z^rA^t(z)\,w(ze^{i\sigma\varphi}). \tag{1.15}$$

Как известно, в этом случае любая ф.м. $\Phi(z)$ системы (1.0.1) и любая ф.м. $\varphi(ze^{i\sigma\varphi})$ системы (1.15) связаны соотношением

$$\varphi^t(ze^{i\sigma\varphi})\,\varphi(z)=H, \tag{1.16}$$

где H – произвольная (вообще говоря) постоянная неособая матрица. Если же $\Phi(ze^{i\sigma\varphi})$ получена из вполне определенной ф.м. $\Phi(z)$ путем замены в ней $z\to ze^{i\sigma\varphi}$, то тогда H – также вполне определенная матрица. Именно это и будет предполагаться далее. Будем в дальнейшем введенные выше системы называть сопрягаемыми системами.

При рассмотрении сопрягаемых систем будем считать: 1) матрица $\Lambda_0=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\}$ (что не нарушает общности); 2) $P_0=E$, где E – единичная матрица (при выполнении пункта I) и всегда можно выбрать $P_0 = E$ ([4] гл.У, доказательство теоремы 2.I).

Заметим, что для системы (I.0.I), не меняющей своего вида при замене $z \to ze^{i\sigma\alpha_0}$, в формальном решении (I.0.2) [1, § 2]

$$1.\ Q(z)=\sum_{\nu=0}^{\sigma} Q_{\nu q}\, z^{\nu q}/\nu; \qquad 2.\ P(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} P_{\nu q}\, z^{-\nu q}. \tag{I.18}$$

Теорема I.5. Пусть система (I.0.I) сопрягаема при замене $z \to ze^{i\sigma\varphi}$ (σ – целое, нечетное: $\varphi = \pi/r+1$). Пусть $\Lambda_0 = diag \times \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$; $P_0 = E$. Тогда

$$1.\ R=0;\ 2.\ Q_{\nu q}=0 \text{ для четных } \nu;\ 3.\ \hat{\varphi}(ze^{i\varkappa\sigma\varphi})=\begin{cases}[\hat{\varphi}^t(z)]^{-1}, & \varkappa=1,3,\dots\\ \hat{\varphi}(z), & \varkappa=0,2,4\dots.\end{cases}$$

Пусть

$$1.\quad \varphi_1(ze^{i\sigma\alpha_0})=\varphi_1(z)Y; \qquad 2.\ \varphi_1^t(ze^{i\sigma\varphi})\varphi_1(z)=H. \tag{I.20}$$

Тогда $Y = H^{-1}H^t$. (I.21)

а) Пусть $\varphi_1(z)$ – не исключительная матрица. Тогда для обхода точки $z=\infty$ достаточно знать множители Стокса в секторе $t_1 \le \arg z < t_1+\sigma\varphi+\varphi \equiv t_{\frac{\varepsilon}{2}+L+1}$ (всего $\frac{1}{2}\sigma n(n-1)+\frac{1}{2}[n(n-1)-k_{\frac{\varepsilon}{2}+L+1}(k_{\frac{\varepsilon}{2}+L+1}-1)]$ множителей Стокса), а именно: матрицы $D_1, D_2, \dots, D_{\frac{\varepsilon}{2}+L-1}$. Обход производится по формулам ($1 \le \omega \le \frac{\varepsilon}{2}$; $z \in S_\omega$)

$$\varphi_1(ze^{i\varkappa\sigma\varphi})=\Psi_{\frac{\varepsilon}{2}\varkappa+\omega}(ze^{i\varkappa\sigma\varphi})\,V_{\frac{\varepsilon}{2}\varkappa+\omega}, \qquad \varkappa=0,1,2,\dots, \tag{I.22}$$

$$\Psi_{\frac{\varepsilon}{2}\varkappa+\omega}(ze^{i\varkappa\sigma\varphi})=\begin{cases}[\varphi_\omega^t(z)]^{-1};\\ \\ \varphi_\omega(z),\end{cases} \qquad V_{\frac{\varepsilon}{2}\varkappa+\omega}=\begin{cases}[\Gamma_\omega^t]^{-1}H^tY^{\frac{1}{2}(\varkappa-1)}; & \varkappa=1,3,\dots\\ \Gamma_\omega Y^{\frac{\varkappa}{2}} & \varkappa=0,2,4,\dots\\ H-\Gamma_{\frac{\varepsilon}{2}+L}\Gamma_L,\end{cases} \tag{I.23}$$

где матрица $\Psi_{\frac{\varepsilon}{2}\varphi+\omega}(ze^{i\varkappa\sigma\varphi})$ асимптотически базисна в секторе $S_{\frac{\varepsilon}{2}\varkappa+\omega}$, а матрица $V_{\frac{\varepsilon}{2}\varkappa+\omega}$ дает интересующую нас связь между

$\varphi_1(z)$ и $\psi_{\frac{\varepsilon}{2}x+\omega}(z)$. Кроме того,

$$\psi_{\frac{\varepsilon}{2}x+\omega}\left(ze^{ix\sigma\varphi}\right)=\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}x+\omega}\left(ze^{ix\sigma\varphi}\right);\quad l\leq\omega\leq\frac{\varepsilon}{2};\quad x=0,1,2,\dots;\tag{I.24}$$

$$V_{\frac{\varepsilon}{2}x+\omega}=\Gamma_{\frac{\varepsilon}{2}x+\omega};\qquad l\leq\omega\leq\frac{\varepsilon}{2};\qquad x=0,1,2,\dots;\tag{I.25}$$

$$D_{\frac{\varepsilon}{2}+\omega}=\left[D_{\omega}^{+}\right]^{-1};\qquad l\leq\omega\leq\frac{\varepsilon}{2}-1;\tag{I.26}$$

$$D_{\varepsilon x+\omega}=D_{\omega};\qquad x=0,1,2,\dots;\qquad l\leq\omega\leq\varepsilon-1;\tag{I.27}$$

б) Пусть $\varphi_1(z)$ исключительная матрица. В этом случае все множители Стокса выражаются через множители Стокса в секторе $l_1\leq\arg z\leq l_1+\sigma\varphi\equiv l_{\frac{\varepsilon}{2}+1}$ (т.е. через $\frac{1}{2}\sigma n(n-1)$ множителей Стокса), так как выражения (I.24), (I.25), (I.26) справедливы для $1\leq\omega\leq\frac{\varepsilon}{2}$ $(x=0,1,2,\dots)$, а выражение (I.27) справедливо для $1\leq\omega\leq\varepsilon$ $(x=0,1,2,\dots)$. Для обхода достаточно знать матрицы $D_1, D_2,\dots,D_{\frac{\varepsilon}{2}}$.

Кроме того,

$$1.\quad \varphi_{\frac{\varepsilon}{2}+1}\left(ze^{i\sigma\varphi}\right)=\left[\varphi_1^{t}(z)\right]^{-1};\qquad 2.\quad H=\Gamma^{t}_{\frac{\varepsilon}{2}+1}.\tag{I.28}$$

В связи с теоремой I.5 напомним, что $1\leq\sigma\leq r+1$.

Теорема I.6. Пусть система, рассмотренная в теореме 1.5, имеет порядок $n=2$. Пусть $\sigma=1$. Пусть $\operatorname{Re}q_1<\operatorname{Re}q_2$ в секторе $l_1<\arg z<l_2$. Тогда в соответствии с (б) теоремы 1.5 $\left(\frac{\varepsilon}{2}=l=1\right)$

$$D_{2x+1}=D_1;\qquad D_{2x+2}=\left[D_1^{t}\right]^{-1},\qquad x=0,1,2,\dots;\tag{I.29}$$

$$\Gamma_{l+1}=D_1=\begin{pmatrix}1 & d_{12}\\ 0 & 1\end{pmatrix};\qquad Y=\begin{pmatrix}1, & d_{12}\\ -d_{12}, & (1-d_{12}^2)\end{pmatrix}\tag{I.30}$$

и характеристическое уравнение матрицы Y имеет вид

$$\det\left[E\mu-Y\right]=\mu^2+\mu\left(d_{12}^2-2\right)+1=0.\tag{I.31}$$

Пусть коэффициенты характеристического уравнения (I.3I) определены способом, указанным в замечании 3, и коэффициент при μ есть c. Тогда

$$d_{12}^2 = c + 2 = 2 - (\rho_1 + \rho_2). \tag{I.32}$$

Следовательно, единственный неизвестный множитель Стокса $(-d_{12})$ может быть определен из (I.32) с точностью до знака. Прочие выражаются через d_{12} согласно (I.29), (I.30) и соотношению $B_j = D_j^{-1}$.

Теорема I.7. Пусть в секторе $t_1 < \arg z < t_2$ нумерация столбцов $\varphi_1(z)$ выбрана так, что $Re\,\lambda_\alpha z^{r+1} < Re\,\lambda_\beta z^{r+1}$, если $\alpha < \beta$. Тогда I) матрицы $B_{\chi L+1}$, $B_{\chi L+2}, \ldots, B_{\chi L+L}$, а также их произведение $B_{\chi L+1} B_{\chi L+2} \ldots B_{\chi L+L}$; 2) матрицы $D_{\chi L+L}$, $D_{\chi L+2}$, $\ldots, D_{\chi L+L}$, а также их произведение $D_{\chi L+L} D_{\chi L+L-1} \ldots D_{\chi L+1} \equiv F_{(\chi+1)}$ $(\chi = 0, 1, 2, \ldots)$ – верхние треугольные матрицы с единичными элементами на главной диагонали для четных χ и нижние треугольные матрицы с единичными элементами на главной диагонали для нечетных χ:

$$1.\ \det \Gamma_\nu = 1, \quad 2.\ \Gamma_{\nu L+1} = F_\nu F_{\nu-1} \ldots F_2 F_1, \qquad \nu = 1, 2, \ldots. \tag{I.33}$$

Следствия. I) Пусть Γ_{2L+1} известна. Так как $\Gamma_{2L+1} = F_2 F_1$ $(F_1 = \Gamma_{L+1})$, то F_1, F_2 могут быть однозначно определены с помощью теоремы о разложении матрицы в произведение матриц [5]. (В работе [1] это указано только для случая $k_\nu = n$);

2) Пусть система (I.0.I) не меняет своего вида при замене $z \to z e^{i\alpha_0}$. Пусть $\varphi_1(z)$ – исключительная матрица и пусть известны Y и R. Тогда (см. теорему I.2) $\Gamma_{2L+1} = e^{-i\alpha_0 R}\, Y$ (здесь $c = 2L$) и, следовательно, могут быть определены F_1, F_2. Все же прочие F_3, $F_4, \ldots$ с помощью (I.6) следующим образом выражаются через F_1, F_2:

$$F_{1+2\nu} = e^{-i\nu\alpha_0 R} F_1 e^{i\nu\alpha_0 R}; \quad F_{2+2\nu} = e^{-i\nu\alpha_0 R} F_2 e^{i\nu\alpha_0 R}; \quad \nu = 1, 2, \ldots. \tag{I.34}$$

Пусть дополнительно $r = 0$. Тогда это общего типа система первого ранга и $\Gamma_{\omega+1} = \Gamma_{2L+1}$.

Обозначим через $\Pi(z)$ ту функцию, для которой

$$\Pi(z) \sim P(z) \qquad |z| \to \infty. \tag{I.35}$$

Как известно [3], если $\Pi(z)$ однозначна и регулярна во всей кольцевой окрестности точки $z=\infty$ и если (I.35) выполняется для всех значений $\arg z$, то ряд $P(z)$ сходится к $\Pi(z)$ в этой кольцевой окрестности. Следовательно, в этом случае $\hat{\Phi}(z)$ является истинным, а не формальным решением в окрестности точки $z=\infty$. Существенно иметь критерии для этого случая.

<u>Теорема I.8</u>. Пусть система (I.0.I) или уравнение (I.0.6) не меняют своего вида при замене $z \to ze^{i\alpha_0}$ и $\varphi(ze^{i\alpha_0}) = \varphi(z)\,Y''$ (где $\varphi(z)$ – любая ф.м. в окрестности $z=\infty$). Пусть $Y''=E$. Тогда $\hat{\Phi}(z)$ является истичнным (а не формальным) решением в окрестности точки $z=\infty$, а возможные значения элементов r_j матрицы R ограничены условием

$$r_j = 0,\ \pm(r+1),\quad \pm 2(r+1), \ldots;\quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{I.36}$$

Обход вокруг $z=\infty$ является одновременно обходом вокруг $z=\infty$. Выше обход $z=0$ везде предполагался в направлении положительного отсчета $\arg z$ – против часовой стрелки (для определенности). Однако если направления обхода неравноценны ($Y \neq E$), то может возникнуть необходимость обхода и по часовой стрелке.

Будем все величины, относящиеся к обходу по часовой стрелке, отмечать чертой $\bar{\varphi}_\nu(z)$, $\bar{\Gamma}_\nu$, $\bar{D}_\nu$, $\bar{B}_\nu$, $\bar{Y}$, $\bar{S}_\nu$, $\bar{l}_\nu$ и т.д., причем $\bar{l}_1 \equiv l_1$ (т.е. нумерация линий (I.0.5) против и по часовой стрелке начинается от одной и той же линии). Сразу же заметим, что все результаты, полученные здесь и в работах [1,2] для обхода "против", сохраняются для обхода "по". Нужно только в соответствующих выражениях заменить $i\sigma\alpha_0$, $i\varphi$ соответственно на $-i\sigma\alpha_0$, $-i\varphi$.

Если $\arg z$ взят на линии l_ν, то на линии $\bar{l}_{(N+2-\nu)}$ аргумент независимого переменного есть $(\arg z - 2\pi)$, т.е. l_ν и $\bar{l}_{(N+2-\nu)}$ находятся друг над другом на разных листах римановой поверхности.

В силу замечания I любая матрица $\varphi_1(z)$ по определению асимптотически базисна в секторе $s_1 + \bar{s}_2$, т.е. в $\bar{l}_2 < \arg z < l_2$. Исключительная матрица $\varphi_1(z)$ для обхода "против", вообще говоря, не совпадает с исключительной матрицей $\bar{\varphi}_1(z)$ для обхода "по", т.к. $\varphi_1(z)$ по определению асимптотически базисна в $\bar{l}_{(L+1)} < \arg z < l_2$, а $\bar{\varphi}_1(z)$ – в $\bar{l}_2 < \arg z < l_{L+1}$. Но, конечно, обе они асимптотически базисны в $s_1 + \bar{s}_2$. Если $L=1$ ($k_\nu = n$), то они совпадают. Для $n=2$ это выполнено всегда.

Очевидно также, что для обхода "против" и обхода "по" могут быть выбраны, вообще говоря, разные матрицы $\varphi_1(z)$ и $\bar{\varphi}_1(z)$.

В связи с этим возникает следующая задача. Пусть известны матрицы $\bar{D}_\nu$, $\bar{B}_\nu$ (для обхода "против"). Спрашивается: выражаются ли через них и если выражаются, то как матрицы $\bar{D}_\nu$, $\bar{B}_\nu$ (для обхода "по")?

Теорема I.9. Пусть $\varphi_1(z) = \bar{\varphi}_1(z)$ – не исключительная матрица. Тогда

$$\bar{D}_\nu = e^{i2\pi R} B_{(N+L-\nu)} e^{-i2\pi R}; \qquad \nu = L, L+1, \ldots, N. \tag{I.37}$$

Матрицы $\bar{D}_\nu$, $\bar{B}_\nu$ для $\nu = 1, 2, \ldots, (L-1)$ можно дополнительно определить в следующих двух случаях: а) пусть $\varphi_1(z)$ – исключительная матрица (для обхода "против") и именно с нее начинается обход "по", тогда

$$\bar{D}_\nu = E \qquad \nu = 1, 2, \ldots, (L-1); \tag{I.38}$$

б) пусть $\varphi_1(z)$ – исключительная матрица для обхода "против". Пусть $\bar{\varphi}_1(z)$ – исключительная матрица для обхода "по" и именно с нее начинается обход "по". Тогда

$$\bar{D}_\nu = B_{(L-\nu)}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, (L-1). \tag{I.39}$$

Литература

1. Смилянский В.Р. О множителях Стокса для различных систем линейных дифференциальных уравнений. I. – Дифференц. уравн., 1970, УI, № 3, с.483-496.
2. Смилянский В.Р. О множителях Стокса для различных систем линейных дифференциальных уравнений. II. – Дифференц. уравн., 1970, УI, № 7, с.1207-1210.
3. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1968. – 108 с.
4. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во иностр. лит., 1958. – 159 с.
5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 52 с.

УДК 536.24.02

Л.А.Темкин

О НЕСТАЦИОНАРНОМ РАЗОГРЕВЕ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ

В работе [1] было рассмотрено асимптотическое поведение при больших значениях времени решения уравнения теплопроводности в процессе без установления – при разогреве однородного тела конечных размеров тепловым потоком, не убывающим со временем. В статье, являющейся продолжением работы [1], изучается разогрев неоднородного тела, причем рассматривается как случай непрерывных, так и разрывных теплофизических характеристик.

I. Постановка задачи в случае непрерывных теплофизических характеристик

Рассмотрим изотропное неоднородное тело D с кусочно-гладкой поверхностью S. Как и в работе [1] задачу о разогреве будем формулировать как задачу о решении уравнения

$$c(X)\frac{\partial u(X,t)}{\partial t} = -Lu(X,t)+q(X,t) \quad (0\le t<\infty,\ X\in \bar{D}=D\cup S) \tag{I.1}$$

при однородном граничном условии

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0 \qquad (0\le t<\infty) \tag{I.2}$$

и начальном

$$u(X,0)=u^0(X) \qquad (X\in D). \tag{I.3}$$

Здесь $Lu=-div(\gamma\, grad\, u)$; n – внешняя нормаль к поверхности S; $c(X)$ – удельная объемная теплоемкость; $\gamma(X)$ – коэффициент теплопроводности среды в точке $X=(x_1,x_2,x_3)\in D$, $c(X)\in C(\bar{D})$, $\gamma(x)\in C^1(\bar{D})$, $c(X)>0$; $\gamma(X)>0$; $u(X,t)$ – температура тела в точке X в момент времени t; $q(X,t)$ – интенсивность теплового потока, подводимого по всему объему D в расчете на единицу объема и времени. Заданная функция $q(X,t)$ и все ее производные по t при каждом $t\in[0,\infty)$ представляет собой, вообще говоря, обобщенную функцию первого порядка сингулярности с носителем на D [2], т.е. источники тепла могут быть не только распределены по объему, но и сосредоточены на поверхностях, линиях и в отдельных точках в D или на S.

Нас будет интересовать асимптотическое представление решения задачи (I.I) – (I.3) для больших значений t при разогреве, когда $\int_0^\infty \int_{\bar{D}} q(X,t)\,dX\,dt=+\infty$.

2. Асимптотическая формула

Решение задачи (I.1) – (I.3) допускает представление с помощью функции Грина задачи Неймана для уравнения теплопроводности в виде [3]

$$u(X,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\bar D}\Gamma(X,t-\tau;Y)q(Y,\tau)dY+\int\limits_{\bar D}c(Y)\Gamma(X,t;Y)u^0(Y)dY\,, \quad (2.1)$$

где функция Грина $\Gamma(x,t;Y)\ (X,Y\in\bar D,\ t\in[0,\infty))$ является решением задачи (1.1) – (1.3) при $q(X,t)=\delta(X-Y)\delta(t),\ u^0(X)\equiv 0$ или, что равносильно, при $q(X,t)\equiv 0,\ u^0(X)\equiv\frac{1}{c(X)}\delta(X-Y)$. Далее будем использовать известное представление $\Gamma(X,t;Y)$ в виде ряда Фурье

$$\Gamma(X,t;Y)=\frac{1}{\int\limits_{\bar D}c(X)dX}+\sum_{j=1}^{\infty}f_j(X)f_j(Y)e^{-\lambda_j t}, \quad (2.2)$$

где сумма распространена по всем положительным собственным значениям λ_j второй краевой задачи для оператора L в области D, а под $f_j(X)$ понимается нормированная с весом $c(X)$ собственная функция, отвечающая λ_j, $(f_i,f_j)_{L_{2,c}}=\int\limits_D c(X)f_i(X)f_j(X)dX=\delta_{ij}$ (символ Кронекера), $i,\ j=0,1,\ldots$.

Наличие постоянного слагаемого в формуле (2.2) объясняется тем, что рассматриваемая задача имеет нулевое собственное значение $\lambda_0=0$, которому отвечает собственная функция $f_0=const$; для нее из условия нормировки получаем значение $\left(\int\limits_D c(X)dX\right)^{-1/2}$. Из (2.2) следует, что при $t\to\infty$ функция Грина допускает асимптотическое представление

$$\Gamma(X,t;Y)=\frac{1}{\int\limits_D c(X)dX}+\Gamma_1(X,t;Y)-\frac{1}{\int\limits_D c(X)dX}+O(e^{-\lambda_1 t}), \quad (2.3)$$

где $\lambda_1=\min\limits_j\{\lambda_j\}\ (\lambda_j>0)$. Оценка остаточного члена в формуле (2.3) равномерна по X,Y.

Из (2.1) с учетом (2.3) имеем

$$u(X,t)=u_1(t)+u_2(X,t)+O(e^{-\lambda_1 t}), \quad (2.4)$$

где

$$u_1(t)=\frac{1}{\int\limits_D c(X)dX}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\bar D}q(Y,\tau)+\frac{1}{\int\limits_D c(X)dX}\int\limits_D c(Y)u^0(Y)dY, \quad (2.5)$$

$$u_2(X,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_D\Gamma_1(X,t-\tau;Y)q(Y,\tau)dY. \quad (2.6)$$

Первый член $u_1(t)$ в формуле (2.4), определяющий разогрев рассматриваемого тела в целом, при $\int\limits_0^\infty \int\limits_D q\,dX\,dt = +\infty$, вообще говоря, является главным. Начальная функция $u^0(X)$ добавляет в асимптотическое представление решения постоянное слагаемое и слагаемое порядка не ниже $exp(-\lambda_1 t)$. Произведя в (2.6) интегрирование по частям по t, получим

$$u_2(X,t)=\int\limits_D \Gamma_2(X,0;Y)q(Y,t)dY-\int\limits_D \Gamma_2(X,t;Y)q(Y,0)dY- \tag{2.7}$$

$$-\int\limits_0^t d\tau \int\limits_D \Gamma_2(X,t-\tau;Y)q'_t(Y,\tau)dY,$$

где обозначено

$$\Gamma_2(X,t;Y)=\int\limits_t^\infty \Gamma_1(X,\tau;Y)d\tau \qquad (=O(e^{-\lambda_1 t}))$$

Введем функции Γ_n по следующей рекуррентной формуле

$$\Gamma_n(X,t;Y)=\int\limits_t^\infty \Gamma_{n-1}(X,\tau;Y)d\tau \qquad (n=2,3,\ldots), \tag{2.8}$$

откуда

$$\Gamma_n(X,t;Y)=\int\limits_t^\infty \int\limits_{\tau_{n-1}}^\infty \ldots \int\limits_{\tau_2}^\infty \Gamma_1(X,\tau_1;Y)\,d\tau_1\ldots d\tau_{n-1}.$$

Для дальнейшего удобно ввести обозначения

$$u_n(X,t)=\int\limits_0^t d\tau \int\limits_D \Gamma_{n-1}(X,t-\tau;Y)q_t^{(n-2)}(Y,\tau)dY \qquad (n=2,3,\ldots); \tag{2.9}$$

$$\alpha_n(X,t)=\int\limits_D \Gamma_n(X,0;Y)q_t^{(n-2)}(Y,t)dY;$$

$$\beta_n(X,t)=\int\limits_D \Gamma_n(X,t;Y)q_t^{(n-2)}(Y,0)dY \quad (n=2,3,\ldots).$$

С учетом этих обозначений формула (2.7) перепишется в виде

$$u_2(X,t)=\alpha_2(X,t)-\beta_2(X,t)-u_3(X,t).$$

Из (2.9) с помощью интегрирования по частям по t получим

$$u_n(X,t)=\alpha_n(X,t)-\beta_n(X,t)-u_{n+1}(X,t).$$

Таким образом, мы приходим к формуле

$$u_2(X,t)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\left[\alpha_{i+2}(X,t)-\beta_{i+2}(X,t)\right]-u_{n+3}(X,t),$$

т.е.

$$u(X,t)=u_1(t)+\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\int_{\bar D}\Gamma_{i+2}(X,0;Y)q_t^{(i)}(Y,t)\,dY-$$

$$-\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\int_{\bar D}\Gamma_{i+2}(X,t;Y)q_t^{(i)}(Y,0)\,dY+\int_{\bar D}c(Y)\Gamma_1(X,t;Y)u^0(Y)\,dY-$$

$$-\int_0^t d\tau\int_{\bar D}\Gamma_{n+2}(X,t-\tau;Y)q_t^{(n+1)}(Y,\tau)\,dY. \qquad (2.10)$$

Если $q_t^{(n+1)}(X,t)$ при $t\to\infty$ бесконечно мало по сравнению с $q_t^{(n)}(X,t)$, то, вообще говоря, первая сумма в (2.10) вместе с $u_1(t)$ дает главные члены асимптотического представления решения при больших t. (Это условие выполняется, например, если зависимость q от t при больших значениях t имеет степенной или логарифмический характер.) Остальные члены разложения, кроме последнего интеграла, экспоненциально убывают по t при $t\to\infty$.

Таким образом, задача о построении асимптотического разложения сводится к эффективному нахождению ядер $\Gamma_k(X,0;Y)$. Легко видеть, что эти ядра можно выразить через собственные функции второй краевой задачи для оператора L в области D. Действительно, принимая во внимание формулы (2.2), (2.3) и (2.8), имеем

$$\Gamma_n(X;0;Y)=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\lambda_j^{n-1}}f_j(X)f_j(Y) \qquad (n=1,2,\dots).$$

Ниже будут получены выражения этих ядер через функцию Грина второй краевой задачи для эллиптического оператора L. Такое представление часто оказывается полезным для практических вычислений.

3. Полиномиальный по времени разогрев

В этом пункте мы рассмотрим интересный частный случай, когда тепловой поток является полиномиальной функцией времени

$$q(X,t)=Q(X,t)\equiv\sum_{i=0}^{n}Q_i(X)t^i, \qquad (3.1)$$

причем $Q_i(X)$, – вообще говоря, обобщенные функции с носителем в $\bar{D}$. В этом случае последнее слагаемое в формуле (2.10) равно нулю, и решение принимает вид

$$u(X,t)=\frac{t^{n+1}}{n+1}\left(\int_D c(Y)dY\right)^{-1}\int_{\bar{D}} Q_n(Y)dY+\sum_{i=1}^{n}\frac{t^i}{i}\left\{\left(\int_D c(Y)dY\right)^{-1}\int_{\bar{D}} Q_{i-1}(Y)dY+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{i!}\sum_{k=0}^{n-i}(-1)^k(i+k)!\int_{\bar{D}}\Gamma_{k+2}(X,0;Y)Q_{i+k}(Y)dY\right\}+$$

$$+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k!\int_{\bar{D}}\Gamma_{k+2}(X,0;Y)Q_k(Y)dY+\left(\int_D c(Y)dY\right)^{-1}\int_D c(Y)u^0(Y)dY+O(e^{-\lambda_1 t}). \quad (3.2)$$

Легко видеть, что задача без начального условия (I.I) – (I.2) при тепловом потоке, определяемом функцией (3.I), имеет частное решение вида

$$U(X,t)=\sum_{i=0}^{n+1}U_i(X)t^i. \qquad (3.3)$$

Действительно, подставив (3.3) в уравнение (I.I) и в граничное условие (I.2), получим

$$c(X)\sum_{i=0}^{n}(i+1)t^iU_{i+1}(X)=-\sum_{i=0}^{n+1}t^iLU_i(X)+\sum_{i=0}^{n}t^iQ_i(X), \quad X\in D, \qquad (3.4)$$

$$\sum_{i=0}^{n+1}t^i\frac{\partial U_i(X)}{\partial n}=0, \quad X\in S,$$

откуда

$$LU_{n+1}(X)=0, \quad \left.\frac{\partial U_{n+1}}{\partial n}\right|_S=0. \qquad (3.5)$$

Таким образом, $U_{n+1}(X)$ – собственная функция оператора L с однородным граничным условием, соответствующая нулевому собственному значению. Следовательно, $U_{n+1}(X)=const$. Обозначим $U_{n+1}(X)=\theta_{n+1}$; θ_{n+1} будет определено ниже.

Относительно $U_i(X)$ $(i=0,1,\dots,n)$ из (3.4) получим последовательность задач Неймана для уравнения эллиптического типа:

$$LU_i(X) = Q_i(X) - (i+1)c(X)\,U_{i+1}(X), \qquad X \in D,$$

$$\frac{\partial U_i(X)}{\partial n} = 0, \quad X \in S \qquad (i = n, n-1, \ldots, 0). \tag{3.6}$$

Итак, вопрос о существовании частного решения вида (3.3) сводится к вопросу о существовании решений последовательности задач (3.6). Необходимыми и достаточными условиями разрешимости этих задач являются условия ортогональности

$$\int_D \left[Q_i(X) - (i+1)c(X)U_{i+1}(X)\right] dX = 0 \qquad (i = 0, \ldots, n), \tag{3.7}$$

причем решения $U_i(X)$ определены с точностью до аддитивных постоянных θ_i $(i = 0, \ldots, n+1)$. Каждая постоянная θ_i $(i = 1, \ldots, n+1)$ определяется из условия разрешимости задачи для функции $U_{i-1}(X)$. Таким образом, частное решение вида (3.3) всегда существует и определено с точностью до аддитивной постоянной θ_0.

Определим ядро $H(X, Y)$ так, чтобы функция

$$u(X) = \int_D H(X, Y) F(Y)\, dY$$

была решением задачи

$$Lu = F, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0 \qquad \left(\int_D F(X)\, dX = 0\right),$$

удовлетворяющим условию

$$\int_D c(X)\, u(X)\, dX = 0.$$

Эти условия вместе с условием симметрии $H(X, Y) \equiv H(Y, X)$ определяют функцию H с точностью до аддитивной постоянной. Можно проверить, что функция $H(X, Y)$ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$L_Y H(X, Y) = -\frac{c(Y)}{\int_D c(X)\, dX} + \delta(X - Y), \qquad X, Y \in D$$

с однородным граничным условием

$$\frac{\partial H(X, Y)}{\partial n_Y} = 0, \quad X \in D, \quad Y \in S$$

и может быть выражена через функцию Грина $G(X, Y)$ задачи Неймана, определяемую обычным образом [4] по формуле [5]

$$H(X,Y)=G(X,Y)+\bar{\bar{G}}_c-\bar{G}_c(X)-\bar{G}_c(Y);\ \bar{G}_c(X)=\frac{\int\limits_D c(Y)G(X,Y)dY}{\int\limits_D c(Y)dY},\ \bar{\bar{G}}_c=\frac{\int\limits_D c(Y)\bar{G}_c(Y)dY}{\int\limits_D c(Y)dY}.$$

Определив таким образом ядро $H(X,Y)$, решения задач (3.6) запишем в виде

$$U_i(X)=\int\limits_D H(X,Y)\left[Q_i(Y)-(i+1)c(Y)U_{i+1}(Y)\right]dY+\theta_i \qquad (i=n,n-1,\dots,0), \quad (3.8)$$

причем постоянные θ_i определятся из условия ортогональности (3.7) в виде

$$\theta_i=\frac{\int\limits_D Q_{i-1}(X)dX}{i\int\limits_D c(X)dX} \qquad (i=1,\dots,n+1).$$

Из формулы (2.10) следует, что если тепловой поток $q(X,t)$ имеет вид полинома $Q(X,t)$, то решение $U(X,t)$ задачи (1.1) - (1.3) приближается к частному решению $U(X,t)$ вида (3.3), отличаясь от него на слагаемое порядка $O(e^{-\lambda_1 t})$. При этом постоянную θ_0, с точностью до которой определено частное решение $U(X,t)$, следует определять из начального условия (1.3), а именно

$$\theta_0=\frac{\int\limits_D c(X)u^0(X)dX}{\int\limits_D c(X)dX}.$$

Введя оператор H по формуле

$$Hw(X)=\int\limits_D c(Y)H(X,Y)w(Y)dY,$$

запишем рекуррентные соотношения (3.8) в виде

$$U_i(X)=\int\limits_D H(X,Y)Q_i(Y)dY-(i+1)HU_{i+1}(X), \quad i=n,\dots,0.$$

Пользуясь тем, что $HU_{n+1}(X)=0$, по индукции легко показать

$$U_i(X)=\frac{1}{i!}\sum_{k=0}^{n-i}(-1)^k(i+k)!\int\limits_D\left[H^kH(X,Y)\right]Q_{i+k}(Y)dY+\theta_i.$$

Окончательно получим, что решение задачи (I.I) - (I.3) при больших t в случае, когда тепловой поток является полиномиальным по t, имеет, с точностью до слагаемого $O(e^{-\lambda_1 t})$, вид

$$U(X,t) = t^{n+1}\theta_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} t^i \Big\{ \theta_i +$$

$$+ \frac{1}{i!}\sum_{k=0}^{n-i}(-1)^k (i+k)! \int_{\bar{D}} \left[H^k H(X,Y)\right] Q_{i+k}(Y)\,dY \Big\}. \tag{3.9}$$

Приравнивая последовательно коэффициенты при t^i $(i=n+1, n, \ldots, 1)$ в разложениях (3.2) и (3.9), получим соотношения, связывающие ядра $\Gamma_i(X,0;Y)$ с функцией Грина второй краевой задачи для оператора L в области D

$$\Gamma_{k+2}(X,0;Y) = H^k H(X,Y), \qquad k=0,1,\ldots, \tag{3.10}$$

т.е.

$$\Gamma_{k+2}(X,0;Y) = \int_D \ldots \int_D c(Z_1)\ldots c(Z_k)\,H(X,Z_1)H(Y,Z_k)H(Z_1,Z_k)\ldots$$

$$\ldots H(Z_{k-1},Z_k)\,dZ_1\ldots dZ_k.$$

Из (3.10), в частности, вытекают рекуррентные соотношения для нахождения Γ_k

$$\Gamma_2 = H, \qquad \Gamma_{k+1} = H\Gamma_k, \qquad k=2,3,\ldots .$$

4. Замечание об асимптотической формуле (2.10)

Используя полученные результаты, можно уточнить высказанное в п.2 утверждение о том, что первая сумма в (2.10) вместе с $u_1(t)$ дает главные члены асимптотического представления решения при больших t.

Производная $q_t^{(n)}(X,t)$ при больших t растет как некоторая функция $\varphi(t)$, т.е.

$$q_t^{(n)}(X,t) = \varphi(t)\psi(X) + \chi(X,t). \tag{4.1}$$

Пусть $\varphi \in C(D)$, $\chi \in C(D)$, $q_t^{(n+1)} \in C(D)$ и

$$\frac{\max\limits_{X\in D}\left|\chi(X,t)\right|}{|\varphi(t)|} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0, \qquad \frac{\max\limits_{\tau\in[0,t]}\max\limits_{X\in D}\left|q_t^{(n+1)}(X,\tau)\right|}{|\varphi(t)|} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0. \qquad (4.2)$$

Тогда

$$\frac{\max\limits_{X\in D}\left|R(X,t)\right|}{\max\limits_{X\in D}\left|\alpha_{n+2}(X,t)\right|} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0, \qquad (4.3$$

где $R(X,t)$ - остаточный член в формуле (2.10).

Действительно, используя (4.1), (4.2) и (3.10), имеем

$$\alpha_{n+2}(X,t)=\int\limits_D \Gamma_{n+2}(X,0;Y)\, q_t^{(n)}(Y,t)\,dY=$$

$$=\varphi(t)\left\{\int\limits_D H^n H(X,Y)\psi(Y)\,dY+\int\limits_D H^n H(X,Y)\frac{\chi(Y,t)}{\varphi(t)}\,dY\right\}=$$

$$=\varphi(t)\left\{\int\limits_D H^n H(X,Y)\psi(Y)\,dY+o(1)\right\}.$$

Аналогичная оценка имеет место и для $\alpha_i(X,t)$ $(i=2,\dots,n+1)$.

Оценим $R(X,t)$. Можно показать, что

$$\max_{X\in D}\int\limits_0^\infty\int\limits_D\left|\Gamma_{n+2}(X,\tau;Y)\right|dY\,d\tau<\infty.$$

Тогда

$$\|R\|_C=\max_{X\in D}\left|\int\limits_0^t\int\limits_D \Gamma_{n+2}(X,t-\tau;Y)\,q_t^{(n+1)}(Y,\tau)\,dY\,d\tau\right|\le$$

$$\le\max_{\tau\in[0,t]}\max_{X\in D}\left|q_t^{(n+1)}(X,\tau)\right|\max_{X\in D}\int\limits_0^t\int\limits_D\left|\Gamma_{n+2}(X,\tau;Y)\right|dY\,d\tau.$$

Из этих оценок и второго из условий (4.2) следует (4.3).

Аналогично, пусть $\varphi\in L_1(D)$, $\chi\in L_1(D)$, $q_t^{(n+1)}\in L_1(D)$ и

$$\frac{\int\limits_D\left|\chi(X,t)\right|dX}{|\varphi(t)|}\xrightarrow[t\to\infty]{}0, \qquad \frac{\int\limits_D\left|q_t^{(n+1)}(X,t)\right|dX}{|\varphi(t)|}\xrightarrow[t\to\infty]{}0.$$

Тогда

$$\frac{\int\limits_D |R(X,t)|\, dX}{\int\limits_D |\alpha_{n+2}(X,t)|\, dX} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$$

При сделанных предположениях все слагаемые в первой сумме правой части формулы (2.10) упорядочены по порядку их роста по t. Поэтому остаточный член сравнивается с последним слагаемым, имеющим наиболее медленный рост по t.

5. Случай разрывных теплофизических характеристик

В этом пункте рассмотрим случай, когда функции $c(X)$ и $\gamma(X)$ кусочно-постоянны. Для простоты записи будем предполагать, что тело D, ограниченное поверхностью Σ, состоит из двух частей D_1 и D_2, в каждой из которых $c=const$, $\gamma=const$. Если тело D состоит из нескольких таких частей, то все рассмотрения проводятся совершенно аналогично.

Обозначим $S=\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2$, $\Sigma_1=\Sigma \cap \bar{D}_1$, $\Sigma_2=\Sigma \cap D_2$. Поверхности S и Σ удовлетворяют условиям Ляпунова. Будем рассматривать разогрев тела D через поверхность Σ (носитель $q(X,t)$ целиком принадлежит Σ). Тогда температура $u(X,t)$ и $v(X,t)$ в областях D_1 и D_2 удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial u(X,t)}{\partial t} = æ_1 \Delta u(X,t), \qquad X \in D_1, \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial v(X,t)}{\partial t} = æ_2 \Delta v(X,t), \qquad X \in D_2 \tag{5.2}$$

с условиями согласования

$$u(X,t) = v(X,t), \qquad X \in S; \tag{5.3}$$

$$\gamma_1 \frac{\partial u(X,t)}{\partial n} = \gamma_2 \frac{\partial v(X,t)}{\partial n}, \qquad X \in S. \tag{5.4}$$

Здесь $æ_1$ и $æ_2$ – коэффициенты температуропроводности, γ_1 и γ_2 – коэффициенты теплопроводности в областях D_1 и D_2 соответственно.

Тепловой поток на границе тела будем считать полиномиальной функцией времени

$$\gamma_1 \frac{\partial u(X,t)}{\partial n} = \sum_{i=0}^{n} t^i Q_i(X), \qquad X \in \Sigma_1 \tag{5.5}$$

$$\gamma_2 \frac{\partial v(X,t)}{\partial n} = \sum_{i=0}^{n} t^i Q_i(X), \qquad X \in \Sigma_2 . \tag{5.6}$$

Нормаль n на Σ – внешняя по отношению к области D, на S – внешняя по отношению к D_1.

Аналогично предыдущему (см. п.3) будем искать решение задачи (5.1) – (5.6) в виде

$$u(X,t) = \sum_{i=0}^{n+1} t^i U_i(X), \qquad X \in D_1 ,$$

$$v(X,t) = \sum_{i=0}^{n+1} t^i V_i(X), \qquad X \in D_2 .$$

Относительно функций U_i и V_i получим следующую систему краевых задач:

$$\Delta U_{n+1}(X) = 0 \quad (X \in D_1), \quad \Delta V_{n+1}(X) = 0 \quad (X \in D_2); \tag{5.7}$$

$$\frac{\varkappa_1}{i+1} \Delta U_i(X) = U_{i+1}(X) \quad (X \in D_1), \quad \frac{\varkappa_2}{i+1} \Delta V_i(X) = V_{i+1}(X) \quad (X \in D_2), \; i = 0, \ldots, n; \tag{5.8}$$

$$U_i(X) = V_i(X), \quad \gamma_1 \frac{\partial U_i(X)}{\partial n} = \gamma_2 \frac{\partial V_i(X)}{\partial n} \quad (X \in S), \quad i = 0, \ldots, n+1; \tag{5.9}$$

$$\frac{\partial U_{n+1}(X)}{\partial n} = 0 \quad (X \in \Sigma_1), \quad \frac{\partial V_{n+1}(X)}{\partial n} = 0 \quad (X \in \Sigma_2); \tag{5.10}$$

$$\gamma_1 \frac{\partial U_i(X)}{\partial n} = Q_i(X) \quad (X \in \Sigma_1), \quad \gamma_2 \frac{\partial V_i(X)}{\partial n} = Q_i(X) \quad (X \in \Sigma_2), \; i = 0, \ldots, n. \tag{5.11}$$

В дальнейшем будем предполагать, что к тем областям и функциям, с которыми мы будем иметь дело, применимы формулы Грина.

Легко видеть, что $U_{n+1} = V_{n+1} = W = const$ является решением краевой задачи (5.7), (5.9), (5.10). С помощью первой формулы Грина стандартным образом доказывается единственность (с точностью до аддитивной постоянной) решения задач (5.7) – (5.11). Постоянную W можно найти, используя необходимые условия разрешимости задачи (5.8), (5.9), (5.11), при $i = n$:

$$\gamma_1 \int\limits_S \frac{\partial U_n}{\partial n} dS + \int\limits_{\Sigma_1} Q_n dS - W \frac{(n+1)\gamma_1}{\varkappa_1} mes\, D_1 = 0,$$

$$-\gamma_2 \int\limits_S \frac{\partial V_n}{\partial n} dS + \int\limits_{\Sigma_2} Q_n dS - W \frac{(n+1)\gamma_2}{\varkappa_2} mes\, D_2 = 0.$$

Из этих равенств с учетом условий согласования (5.9) получим

$$W = \left[(n+1)\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} mes\, D_1 + \frac{\gamma_2}{\varkappa_2} mes\, D_2\right)\right]^{-1} \int\limits_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2} Q_n dS.$$

Аналогично при $i = 1, \ldots, n$ решения задачи (5.8), (5.9), (5.11) определяются с точностью до аддитивных постоянных. Из условий разрешимости этой задачи для U_{i-1} и V_{i-1} в областях D_1 и D_2 получим

$$\frac{1}{i} \int\limits_\Sigma Q_{i-1} dX = \frac{\gamma_1}{\varkappa_1} \int\limits_{D_1} U_i dX + \frac{\gamma_2}{\varkappa_2} \int\limits_{D_2} V_i dX. \tag{5.12}$$

Пусть $\bar{U}_i$ и $\bar{V}_i$ – некоторое решение задачи (5.8), (5.9), (5.11). Тогда решение, удовлетворяющее условию (5.12), найдется по формуле

$$U_i = \bar{U}_i + C, \qquad V_i = \bar{V}_i + C,$$

где

$$C = \left(\frac{\gamma_1}{\varkappa_1} mes\, D_1 + \frac{\gamma_2}{\varkappa_2} mes\, D_2\right)^{-1} \left(\frac{1}{i}\int\limits_\Sigma Q_{i-1} dX - \frac{\gamma_1}{\varkappa_1}\int\limits_{D_1} \bar{U}_i dX - \frac{\gamma_2}{\varkappa_2}\int\limits_{D_2} \bar{V}_i dX\right).$$

Нетрудно проверить, что и в случае m областей $D_1, \ldots, D_m$ коэффициент при t^n имеет вид

$$W = \left[(n+1)\sum_{j=1}^{m} \frac{\gamma_j}{\varkappa_j} mes\, D_j\right]^{-1} \cdot \int\limits_\Sigma Q_n dS, \qquad \Sigma = \bigcup_{j=1}^{m} \Sigma_j.$$

Для нахождения следующих членов асимптотического разложения решения построим интегральное уравнение на поверхности S. Записывая в каждой из областей D_1 и D_2 интегральное представление, являющееся следствием формулы Грина, с учетом граничных условий получим

$$\rho_1(X) U_i(X) = -\int\limits_{S \cup \Sigma_1} \frac{\partial L(X,Y)}{\partial n_Y} U_i(Y) dY + \int\limits_S L(X,Y) \frac{\partial U_i(X)}{\partial n} dY + \cdot$$

$$+\frac{1}{\gamma_1}\int\limits_{\Sigma_1} L(X,Y)Q_i(Y)\,dY-\frac{i+1}{\varkappa_1}\int\limits_{D_1} L(X,Y)U_{i+1}(Y)\,dY,$$

(5.13)

$$\rho_2(X)V_i(X)=\int\limits_S \frac{\partial L(X,L)}{\partial n_Y}V_i(Y)\,dY-\int\limits_{\Sigma_2}\frac{\partial L(X,Y)}{\partial n_Y}V_i(Y)\,dY-\int\limits_S L(X,Y)\times$$

$$\times\frac{\partial V_i(Y)}{\partial n}\,dY+\frac{1}{\gamma_2}\int\limits_{\Sigma_2} L(X,Y)Q_i(Y)\,dY-\frac{i+1}{\varkappa_2}\int\limits_{D_2} L(X,Y)V_{i+1}(Y)\,dY. \qquad (5.14)$$

Здесь $L(X,Y)=[4\pi r(X,Y)]^{-1}$, $r(X,Y)$ – расстояние между точками X и Y, $\rho_1(X)=1,\ 1/2,\ \beta/2\pi,\ 0$ при $X\in D_1$, $X\in S\cup\Sigma_1\setminus(S\cap\Sigma_1)$, $X\in S\cap\Sigma_1$, $X\notin\bar D_1$ соответственно, β – внутренний двугранный угол между касательными плоскостями к поверхностям S и Σ_1. Аналогично определяется $\rho_2(X)$.

Из (5.13) и (5.14) с учетом условий согласования (5.9) получим

$$(\gamma_2-\gamma_1)\int\limits_S\frac{\partial L}{\partial n_Y}U_i\,dY-\gamma_1\int\limits_{\Sigma_1}\frac{\partial L}{\partial n_Y}U_i\,dY-\gamma_2\int\limits_{\Sigma_2}\frac{\partial L}{\partial n_Y}V_i\,dY+\int\limits_{\Sigma}LQ_i\,dY-$$

$$-\frac{(i+1)\gamma_1}{\varkappa_1}\int\limits_{D_1}LU_{i+1}\,dY-\frac{(i+1)\gamma_2}{\varkappa_2}\int\limits_{D_2}LV_{i+1}\,dY=\begin{cases}\frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2)U_i(X), & X\in S,\\ \frac{1}{2}\gamma_1U_i(X), & X\in S_1,\\ \frac{1}{2}\gamma_2V_i(X), & X\in\Sigma_2.\end{cases} \qquad (5.15)$$

Таким образом, получена система интегральных уравнений относительно значений искомых функций на поверхностях S, Σ_1 и Σ_2. Если в качестве ядра $L(X,Y)$ выбрать функцию Грина задачи Неймана для области $D=D_1\cup D_2$, вместо системы (5.15) получится одно интегральное уравнение на S (аналогично тому, как это делается в работе [6].

В случае, когда поверхность S не имеет общих точек с Σ ($\Sigma=\Sigma_1$, Σ_2 – пустое множество), система уравнений (5.15) несколько упрощается

$$(\gamma_2-\gamma_1)\int\limits_S\frac{\partial L}{\partial n_Y}V_i\,dY-\gamma_1\int\limits_{\Sigma}\frac{\partial L}{\partial n_Y}U_i\,dY+\int\limits_{\Sigma}LQ_i\,dY-\frac{(i+1)\gamma_1}{\varkappa_1}\int\limits_{D_1}LU_{i+1}\,dY-$$

$$-\frac{(i+1)\gamma_2}{\varkappa_2}\int\limits_{D_2} L\,V_{i+1}\,dY=\begin{cases}\frac{1}{2}\gamma_1 U_i(X), & X\in\Sigma,\\ \frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2)V_i(X), & X\in S.\end{cases} \tag{5.16}$$

Пусть для простоты $Q_i(X)\in C(\Sigma)$.

<u>Теорема</u>. Граничные значения $U_i\big|_\Sigma$, $V_i\big|_S$ решения задачи (5.8), (5.9), (5.II) являются решением системы уравнений (5.16) и, обратно, функции

$$\varphi(X)=\frac{\gamma_2-\gamma_1}{\gamma_1}\int\limits_S \frac{\partial L}{\partial n_Y} V_i\,dY-\int\limits_\Sigma \frac{\partial L}{\partial n_Y} U_i\,dY+\frac{1}{\gamma_1}\int\limits_\Sigma L Q_i\,dY-$$

$$-\frac{i+1}{\varkappa_1}\int\limits_{D_1} L U_{i+1}\,dY-\frac{(i+1)\gamma_2}{\varkappa_2\gamma_1}\int\limits_{D_2} L\,V_{i+1}\,dY,\qquad X\in D_1; \tag{5.17}$$

$$\psi(X)=\frac{\gamma_2-\gamma_1}{\gamma_2}\int\limits_S \frac{\partial L}{\partial n_Y} V_i\,dY-\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\int\limits_\Sigma \frac{\partial L}{\partial n_Y} U_i\,dY+\frac{1}{\gamma_2}\int\limits_\Sigma L Q_i\,dY-$$

$$-\frac{(i+1)\gamma_1}{\varkappa_1\gamma_2}\int\limits_{D_1} L U_{i+1}\,dY-\frac{i+1}{\varkappa_2}\int\limits_{D_2} L\,V_{i+1}\,dY,\qquad X\in D_2, \tag{5.18}$$

где U_i, V_i – решение системы уравнений (5.16), являются решением краевой задачи (5.8), (5.9), (5.II).

Указанные переходы (5.8), (5.9), (5.II) $\leftrightarrow$ (5.16) взаимно обратны.

<u>Доказательство</u>. Здесь не является очевидным только то, что функции (5.17) и (5.18) удовлетворяют граничному условию (5.II) на $\Sigma=\Sigma_1$ и условиям согласования (5.9) на S.

Введем функцию $\varphi_l(X)$, гармоническую в области $D_l=R_3\setminus\bar{D}$, равную нулю на бесконечности и определяемую правой частью формулы (5.17) при $X\in D_l$. Учитывая первое из уравнений (5.16) и скачок потенциала двойного слоя при приближении точки X к поверхности Σ извне, получим

$$\lim_{X\to X_0}\varphi_l(X)=0,\qquad X\in D_l,\quad X_0\in\Sigma.$$

Следовательно, $\varphi_l(X)\equiv 0$ при $X\in D_l$.

Продифференцируем правую часть равенства (5.17) по нормали к поверхности Σ и перейдем к пределу извне. При этом предел нормальной производной потенциала двойного слоя существует. Следовательно, по теореме Ляпунова [7] существует предел нормальной производной изнутри, равный пределу извне. Получим

$$0 \equiv \lim_{X \to X_1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_1} \int_S \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{\partial L}{\partial n_Y} V_i \, dY - \frac{\partial}{\partial n_x} \int_\Sigma \frac{\partial L}{\partial n_Y} U_i \, dY - \frac{1}{2\gamma_1} Q_i(X_1) +$$

$$+ \frac{1}{\gamma_1} \int_\Sigma \frac{\partial L}{\partial n_x} Q_i \, dY - \frac{i+1}{\varkappa_1} \int_{D_1} \frac{\partial L}{\partial n_x} U_{i+1} \, dY - \frac{(i+1)\gamma_2}{\varkappa_1 \gamma_1} \int_{D_2} \frac{\partial L}{\partial n_x} V_{i+1} \, dY; \quad X_1 \in \Sigma, \quad X \in D_1.$$

С учетом этого соотношения имеем

$$\lim_{X \to X_1} \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_1} \int_S \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{\partial L}{\partial n_Y} V_i \, dY - \frac{\partial}{\partial n_x} \int_\Sigma \frac{\partial L}{\partial n_Y} U_i \, dY + \frac{1}{2\gamma_1} Q_i(X_1) + \frac{1}{\gamma_1} \int_\Sigma \frac{\partial L}{\partial n_x} Q_i \, dY -$$

$$- \frac{i+1}{\varkappa_1} \int_{D_1} \frac{\partial L}{\partial n_x} U_{i+1} \, dY - \frac{(i+1)\gamma_2}{\varkappa_2 \gamma_1} \int_{D_2} \frac{\partial L}{\partial n_x} V_{i+1} \, dY = \frac{1}{\gamma_1} Q_i(X_1) \qquad (X \in D_1, \; X_1 \in \Sigma).$$

Проверим теперь, что выполняются условия (5.9) на S. Используя второе из уравнений (5.16), получим

$$\lim_{X \to X_2} \varphi(X) = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1} \left[\frac{1}{2} V_i(X_2) - \int_S \frac{\partial L(X_2, Y)}{\partial n_Y} V_i(Y) \, dY \right] - \int_\Sigma \frac{\partial L}{\partial n_Y} U_i \, dY + \frac{1}{\gamma_1} \int_\Sigma L Q_i \, dY -$$

$$- \frac{i+1}{\varkappa_1} \int_{D_1} L U_{i+1} \, dY - \frac{(i+1)\gamma_2}{\varkappa_2 \gamma_1} \int_{D_2} L V_{i+1} \, dY = V_i(X_2) \qquad (X \in D_1, \quad X_2 \in S); \tag{5.19}$$

$$\lim_{X \to X_2} \varphi(X) = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2} \left[\frac{1}{2} V_i(X_2) + \int_S \frac{\partial L(X_2, Y)}{\partial n_Y} V_i(Y) \, dY \right] - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \int_\Sigma \frac{\partial L}{\partial n_Y} U_i \, dY + \frac{1}{\gamma_2} \int_\Sigma L Q_i \, dY -$$

$$- \frac{(i+1)\gamma_1}{\varkappa_1 \gamma_2} \int_{D_1} L U_{i+1} \, dY - \frac{i+1}{\varkappa_2} \int_{D_2} L V_{i+1} \, dY = V_i(X_2) \qquad (X \in D_2, \; X_2 \in S). \tag{5.20}$$

Из (5.19) и (5.20) следует справедливость первого из условий (5.9).

Рассмотрим функцию $\varphi_i(X)$, определяемую правой частью (5.17) при $X \in D_2$. Используя второе из уравнений (5.16) и, учитывая скачок потенциала двойного слоя на поверхности S, получим

$$\lim_{X \to X_0} \varphi_i(X) = 0 \qquad (X \in D_2, \quad X_0 \in S),$$

откуда $\varphi_i(X)\equiv 0$ при $X\in D_2$. Отсюда в силу теоремы Ляпунова следует вывод о непрерывности на поверхности S нормальной производной потенциала двойного слоя в правых частях (5.17) и (5.18). Дифференцируя почленно равенства (5.17) и (5.18), получаем второе из соотношений (5.9).

Аналогично предыдущему проверяется, что $\lim\limits_{X\to X_0}\varphi(X)=U_i(X_0)\times$ $\times(X\in D_1,\ X_0\in\Sigma)$.

Теорема доказана.

Заметим, что доказательство теоремы практически не усложнится и в случае, если на поверхности Σ, кроме непрерывно распределенного потока, имеются источники тепла, сосредоточенные в точках.

Систему интегтальных уравнений (5.16) удобно использовать для численного построения коэффициентов асимптотического разложения решения задачи (5.1) – (5.5) при больших t.

Литература

1. Мышкис А.Д., Темкин Л.А. О разогреве ограниченного объема сплошной среды. – ИФЖ, 1973, 25, № 3, с.518-529.
2. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. – М.: Физматгиз, 1959. – 470 с.
3. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. – М.: Наука, 1974. – 431 с.
4. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. – М.: Физматгиз, 1962. – 767 с.
5. Темкин Л.А. Решение некоторых задач динамики жидкости со свободной поверхностью и теории теплопроводности методом интегральных уравнений: Автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук. – Харьков, 1975. – 16 с.
6. Темкин Л.А., Темкина В.С. О расчете собственных колебаний идеальной жидкости в осесимметричном сосуде с учетом поверхностных сил. – Изв. АН СССР, 1972, № 5, с.14-22.
7. Гюнтер Н.М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. – М.-Л.: Гостехиздат, 1953. – 416 с.

УДК 517.9

В.А.Ткаченко

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА СВЕРТКИ В ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ

1. Уравнением типа свертки мы называем уравнение

$$\varphi^* f = g, \tag{1}$$

в котором φ – оператор умножения функций из пространства целых функций заданного роста на целую функцию $\varphi(\lambda)$ и φ^* – сопряженный оператор.

В работе [1], определения и обозначения которой мы используем в дальнейшем без специальных оговорок, были найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы уравнение (I) имело решение $f \in \mathcal{E}(H+h_\varphi)$ при любой правой части $g \in \mathcal{E}(H)$. Эти условия состоят в полной регулярности роста [2] целой функции $\varphi(\lambda)$ с индикатором $h_\varphi(\theta)$ по некоторым направлениям. Наша цель состоит в том, чтобы получить аналогичный результат в несколько более общем случае, когда оператор Φ^* действует из пространства $\mathcal{E}(H_1)$ в пространство $\mathcal{E}(H_2)$. Кроме того, мы укажем некоторые достаточные условия разрешимости уравнения (I) для тех случаев, когда информация о регулярности роста функции φ отсутствует. Всюду в дальнейшем мы предполагаем, что ρ - тригонометрически выпуклые функции H_1 и H_2 удовлетворяют условиям A и B работы [1].

<u>Теорема I</u>. Пусть $H_2 + h_\varphi \leq H_1$ и Φ - оператор умножения в пространстве $F(H_2)$ на функцию φ. Тогда оператор Φ^* непрерывно отображает $\mathcal{E}(H_1)$ в $\mathcal{E}(H_2)$, и для того чтобы уравнение (I) имело решение $f \in \mathcal{E}(H_1)$ при любой правой части $g \in \mathcal{E}(H_2)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:

I) если $\theta \in \mathcal{R}(H_2)$, то $H_2(\theta) + h_2(\theta) = H_1(\theta)$;

2) функция φ имеет вполне регулярный рост на множестве лучей $\rho(H_2) = \{\lambda : \arg\lambda = \theta,\ \theta \in \mathcal{R}(H_2)\}$.

Первая часть утверждения теоремы I доказана в работе [3]. Достаточность условий I и 2 доказана в работе [1]. Кроме того, при выполнении условия I необходимость условия 2 также доказана в работе [1]. Поэтому мы должны проверить необходимость условия I.

Пусть $\{h_k^{(1)}\}_1^\infty$ и $\{h_k^{(2)}\}_1^\infty$ - последовательности ρ - тригонометрически выпуклых функций, построенные по H_1 и H_2 в соответствии с леммой I работы [1]. Как показано [1], из разрешимости уравнения (I) в $\mathcal{E}(H_1)$ при любой правой части $g \in \mathcal{E}(H_2)$ следует существование такой целочисленной последовательности $\{p_k\}_1^\infty$ и положительной последовательности $\{C_k\}_1^\infty$, что

$$\|\psi\|_{h^{(2)}_{p_k}} \leq C_k \|\varphi\psi\|_{h_k^{(1)}} . \tag{2}$$

Из неравенства (2) следует, что подпространство $\Phi F(H_2)$ секвенциально замкнуто в пространстве $F(H_1)$. Действительно, пусть $\varphi\psi_n \in F(H_1)$ и существует в топологии пространства $F(H_1)$ предел $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi\psi_n = \omega$. Обращаясь к описанию секвенциальной сходимости в пространстве $F(H_1)$, данному в работе [3, лемма 2.4], находим, что существует равномерно на каждом компакте $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(\lambda)\psi_n(\lambda)=\omega(\lambda)$ и, что $\|\varphi\psi_n\|_{h_k^{(1)}}\le C$ при некотором $k>1$ и $C>0$. Из (2) в таком случае следует $\|\psi_n\|_{h^{(2)}_{\rho_k}}\le CC_k$. Поскольку последовательность $\{\psi_n\}_1^\infty$ сходится равномерно на каждом компакте к целой функции $\psi=\varphi^{-1}\omega$, то она сходится к ψ и в топологии пространства $F(H_1)$. Значит, $\psi\in F(H_1)$ и $\omega=\varphi\psi$.

Пусть теперь $\theta_0\in\mathcal{R}(H_2)$, но $H_2(\theta_0)+h_\varphi(\theta_0)<H_1(\theta_0)$. В таком случае $H_2(\theta_0)\ne-\infty$ и локальным увеличением функции $H_2(\theta)$ в окрестности точки θ_0 можно получить такую тригонометрически выпуклую функцию $H_3(\theta)$, что $H_3(\theta)+h_\varphi(\theta)\le H_1(\theta)$ и $H_2(\theta_0)<H_3(\theta_0)$. Выберем, далее, целую функцию $\omega\in F(H_3)$ таким образом, что $h_\omega(\theta_0)>H_2(\theta_0)$. Очевидно, $\omega\varphi\in F(H_1)$. С другой стороны, какой бы ни была отличная от тождественного нуля функция $\varphi\in F(H_2)$, по теореме 2 из работы [3] найдутся такие последовательности полиномов $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$, что $\frac{p_n}{q_n}\varphi\in F(H_2)$ при всех $n\ge1$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n}\varphi=\omega$ в топологии пространства $F(H_3)$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n}\psi\varphi=\omega\varphi\in F(H_1)$, но $\omega\bar{\in}F(H_2)$ вопреки замкнутости подпространства $\varphi F(H_2)$. Теорема I доказана.*

2. Пусть функция H удовлетворяет условиям А и В работы [1] и пусть δ – положительное число. Для каждой функции $h\in\mathfrak{M}(H)$ положим

$$h^\delta(\theta)=\begin{cases}(1+\delta)^{\rho}\max\limits_{|\alpha-\theta|\le\delta}\{h(\alpha)+h_\varphi(\alpha)\} & \max\limits_{|\alpha-\theta|\le\delta}\{h(\alpha)+h_\varphi(\alpha)\}\ge0;\\ (1-\delta)^{\rho}\max\limits_{|\alpha-\theta|\le\delta}\{h(\alpha)+h_\varphi(\alpha)\} & \max\limits_{|\alpha-\theta|\le\delta}\{h(\alpha)+h_\varphi(\alpha)\}<0.\end{cases}$$

Очевидно, функция $h^\delta(\theta)$ тригонометрически выпукла. Положим

$$H^\delta(\theta)=\sup_{h\in\mathfrak{M}(H)}h^\delta(\theta).$$

Ясно, что функция H^δ также тригонометрически выпукла и удовлетворяет условиям А и В из работы [1]. Кроме того, $H\le H^\delta$.

<u>Теорема 2</u>. При каждом $\delta>0$ существует такое число $K>0$, что если $\varphi(\lambda)$ – ненулевая целая функция не выше нормального типа σ при порядке ρ, то уравнение (I) имеет решение $f\in\mathcal{E}(H+h_\varphi)$ для любой правой части $g\in\mathcal{E}(H^\delta+K\sigma)$.

* Отметим, что при $\rho=1$ она в эквивалентной формулировке была доказана О.В.Епифановым [4-5].

Доказательство. Нам понадобится следующее известное предложение [2] об оценке снизу функции, голоморфной в круге.

Пусть функция $\varphi(\lambda)$ голоморфна в круге $|\lambda|\le 2eR$, $R>0$, $\varphi(0)=1$ и η – произвольное положительное число, не превышающее $\frac{3}{2}e$. Тогда внутри круга $|\lambda|\le R$, но вне исключительных кружков с общей суммой радиусов, меньшей $4\eta R$,

$$\ln|\varphi(\lambda)|>-K(\eta)\ln M_{\varphi}(2eR), \tag{3}$$

где

$$K(\eta)=2+\ln\frac{3e}{2\eta} \qquad \text{и} \qquad M_{\varphi}(r)=\max_{\theta}|\varphi(re^{i\theta})|.$$

Считая δ фиксированным, положим $q=1+\frac{\delta}{4e}$ и $\eta=\frac{\delta}{32eq}$. Пусть $\lambda=re^{i\theta}$ и целое $m>0$ таково, что $q^m<r\le q^{m+1}$. Поскольку $8\eta q^{m+1}<\frac{\delta}{4e}q^m$, а ширина кольца $q^m\le|z|\le q^{m+1}$ равна $\frac{\delta}{4e}q^m$, найдется такое число R_m, $q^m<R_m<q^{m+1}$, что выполнена оценка

$$\ln|\varphi(R_me^{i\alpha})|\ge-K(\eta)(2eq)^{\rho}(\sigma+\varepsilon)r^{\rho}+\ln C_{\varepsilon}, \tag{4}$$

в которой $K(\eta)$ выбирается из (3) и C_{ε} не зависит от m и r.

Функция $\omega_m(z)=\varphi(R_me^{i\theta}+z)\varphi^{-1}(R_me^{i\theta})$ равна 1 при $z=0$ и в круге $|z|<\delta r$ удовлетворяет оценке сверху

$$\ln|\omega_m(z)|\le\left\{(q+\delta)^{\rho}+K(\eta)(2eq)^{\rho}\right\}(\sigma+\varepsilon)r^{\rho}+\ln C_{\varepsilon}.$$

Снова обращаясь к (3), находим, что существует такое число $t>0$, для которого $\frac{\delta r}{4e}<t<\frac{\delta r}{2e}$ и

$$\ln\left|\omega_m\left(te^{i\beta}\right)\right|\ge-K\left(\frac{1}{32}\right)\left\{\left((q+\delta)^{\rho}+K(\eta)(2eq)^{\rho}\right)(\sigma+\varepsilon)r^{\rho}+\ln C_{\varepsilon}\right\}. \tag{5}$$

При этом, поскольку $q^{m+1}-q^m=\frac{\delta r}{4e}$, то $|R_me^{i\theta}-\lambda|\le t$.

Пусть теперь $\|\varphi\psi\|_{h_k+h_{\varphi}}<\infty$. Тогда

$$|\psi(\lambda)|\le\max_{|z|=t}|\psi(R_me^{i\theta}+z)|\le\|\varphi\psi\|_{h_k+h_{\varphi}}\max_{\substack{|z|=t\\ se^{i\alpha}=R_me^{i\theta}+z}}\frac{\exp(h_k(\alpha)+h_{\varphi}(\alpha))s^{\rho}}{|\omega_m(z)\varphi(R_me^{i\theta})|}.$$

Подставляя сюда оценки (4) и (5), получаем

$$|\varphi(re^{i\theta})|\le C_\varepsilon\|\varphi\psi\|_{h_k+h_\varphi}\exp\left\{K(\sigma+\varepsilon)r^\rho+\max_{|se^{i\alpha}-re^{i\theta}|<e^{-1}\delta r}(h_k(\alpha)+h_\varphi(\alpha))s^\rho,\right. \tag{6}$$

где

$$K=K(\gamma)\,(2eq)^\rho+K\left(\frac{1}{\delta 2}\right)\left\{(q+\delta)^\rho+K(\gamma)(2eq)^\rho\right\}. \tag{7}$$

Выберем число $\varepsilon>0$ столь малым, что $h_k^{\delta e^{-1}}+\varepsilon K\le h_{k+1}^{\delta e^{-1}}$. Из (6) следует, что

$$\left|\varphi(re^{i\theta})\right|\le C_\varepsilon\|\varphi\psi\|_{h_k+h_\varphi}\exp\left(h_{k+1}^{\delta e^{-1}}(\theta)+K\sigma\right)r^\rho. \tag{8}$$

Для заданной правой части $g\in\mathcal{E}(H^{\delta e^{-1}}+K\sigma)$ уравнения (I) положим

$$\langle f,\varphi\psi\rangle=\langle g,\psi\rangle. \tag{9}$$

Тем самым на линейном подпространстве $L=\varphi F(H)\subset F(H+h_\varphi)$ определен однородный и аддитивный функционал f. Если $\varphi\psi\in F[h_k+h_\varphi]$, то на основании (8) получаем

$$\left|\langle f,\varphi\psi\rangle\right|\le C_\varepsilon\|g\|_{h_{k+1}^{\delta e^{-1}}+K\sigma}\|\varphi\psi\|_{h_k+h_\varphi}.$$

Следовательно, функционал f непрерывен на L и по теореме Хана-Банаха он может быть с сохранением непрерывности продолжен на все пространство $F(H+h_\varphi)$. Согласно (9) всякое такое продолжение определяет решение уравнения (I). Теорема 2 доказана.

Отметим, что (7) дает значение постоянной K, зависящее лишь от δ и ρ.

3. При $\rho=1$ пространство $\mathcal{E}(H)$ с помощью преобразования Бореля можно реализовать в виде пространства $A(\Omega)$ функций, аналитических в выпуклой области Ω с опорной функцией $H(-\theta)$. Если $\varphi(\lambda)$ – целая функция экспоненциального типа с индикатором $h_\varphi(\theta)$, $\gamma(\xi)$ – ее преобразование Бореля и P – компакт с опорной функцией $h_\varphi(-\theta)$, то уравнение (I) записывается в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_l f(z+\zeta)\gamma(\zeta)\,d\zeta=g(z),\qquad (z\in\Omega), \tag{10}$$

где замкнутый простой контур l охватывает компакт P и столь близок к P, что $r+l\in\Omega+P$. Согласно теореме 2, уравнение (10) имеет решение $f(z)\in A(\Omega+\rho)$, если его правая часть $g(z)$ аналитична в области $\Omega_\delta+KD_\sigma$, где Ω_δ – выпуклая область с опорной функцией $H^\delta(-\theta)$ и $D_\sigma=\{\zeta\in\mathbb{C}^1:|\zeta|<\sigma\}$. Например, в случае когда Ω – прямоугольная полуполоса $\{\zeta\in\mathbb{C}^1: Re\,\zeta>0; |Im\,\zeta|<\alpha\}$, область Ω_δ покрывается углом $\{\zeta\in\mathbb{C}^1:|arg(\zeta-A)|<\delta\}$. Если Ω – конечная область, то такой же будет и Ω_δ. Ряд результатов о разрешимости уравнения (10) в этом случае известен [6-8].

При произвольном $\rho>0$ уравнение (1) можно записать в виде дифференциального уравнения бесконечного порядка в производных Гельфонда – Леонтьева [9]. В случае $H(\theta)=const$ теорема разрешимости доказана Ю.Н.Фроловым [10]. Соответствующий результат для пространства A, введенного А.Ф.Леонтьевым [11], получил А.А.Миролюбов [12].

Литература

1. Ткаченко В.А. Уравнения типа свертки в пространствах аналитических функционалов. – Изв. АН СССР, сер. матем., 1977, 41, № 2, с.378-392.

2. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. – М.: Гостехиздат, 1956. – 632 с.

3. Ткаченко В.А. Об операторах, коммутирующих с обобщенным дифференцированием в пространствах аналитических функционалов с заданным индикатором роста. – Мат. сб., 1977, 102, № 3, с.435-456.

4. Епифанов О.В. Разрешимость уравнения свертки в выпуклых областях. – Мат. заметки, 1974, 15, № 5, с.787-796.

5. Епифанов О.В. Об эпиморфности свертки в выпуклых областях. – Докл. АН СССР, 1974, 217, № 1, с.18-19.

6. Scheffer I.M. A local solution of the difference equation y(x)=F(x) and of related equation. – TAMS, 936, 39, p. 345-379; A correction, 1937, 41, p. 153-159.

7. Scheffer I.M. A solution of difference-differential equation. – Duke Math. J., 1937, 3, p. 593-609.

8. Pisanelli M.D. Une generalization des theoremes de Malgrande et Martineau sur les equations de convolution. – C.R.Acad. sci., 1972, p. 1319-1322.

9. Гельфонд А.О., Леонтьев А.Ф. Об одном обобщении ряда Фурье. – Матем. сб., 1951, 29, № 3, 477-500.

10. Фролов Ю.Н. О неоднородных уравнениях бесконечного порядка в обобщенных производных. – Вест. МГУ, сер. мат., мех., 1960, № 4, с.3-13.

11. Леонтьев А.Ф. К вопросу о представлении произвольных функций некоторыми общими рядами. – Мат. заметки, 1967, № 6, с.689-698.

12. Миролюбов А.А. Об одной теореме существования. – Сиб. мат. журн., 1969, 10, № 6, с.1249-1257.

УДК 517.946

В.Н.Фенченко

АСИМПТОТИКА ПОТЕНЦИАЛА ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ОБЛАСТЯХ С МЕЛКОЗЕРНИСТОЙ ГРАНИЦЕЙ

В ограниченной области Ω трехмерного пространства R_3 рассмотрим замкнутое множество $F^{(N)}$, состоящее из N непересекающихся связных компонент $F_i^{(N)}$, ограниченных гладкими поверхностями $\partial F_i^{(N)}$. Поставим в области $\Omega^{(N)}=\Omega\setminus F^{(N)}$ следующую краевую задачу:

$$\Delta u(x)=-4\pi f(x), \qquad x\in\Omega^{(N)}, \tag{1}$$

$$u(x)=c_i^{(N)}, \qquad x\in\partial F_i^{(N)}, \tag{2}$$

$$\int\limits_{\partial F_i^{(N)}}\frac{\partial u(x)}{\partial\nu_x}\,\partial\Gamma_x=0, \qquad i=1,2,\ldots,N, \tag{3}$$

$$u(x)=0, \qquad x\in\partial\Omega, \tag{4}$$

где $f(x)$ – заданная функция из $L_2(\Omega)$; $c_i^{(N)}$ – некоторые постоянные, а ν – внешняя нормаль к границе области $\Omega^{(N)}$.

Эта задача имеет единственное решение, которое будем обозначать через $u^{(N)}(x)$. Как известно, функция $u^{(N)}(x)$ является потенциалом электростатического поля, создаваемого зарядами с плотностью распределения $f(x)$ в среде, содержащей незаряженные проводящие включения $F_i^{(N)}$. На ограничивающей поверхности потенциал для определенности полагаем равным нулю.

Нас интересует асимптотическое поведение решения $u^{(N)}(x)$, когда количество компонент множества $F^{(N)}$ неограниченно возрастает, а их диаметры $a_i^{(N)}$ и расстояния между ними $r_{i,j}^{(N)}$ стремятся к нулю.

В работе [1] был изучен случай, когда суммарный объем $\tau^{(N)}$ множества $F^{(N)}$ стремится к нулю. При этом оказывалось, что влияние множества $F^{(N)}$ на решение задачи (1) – (4) имело порядок $O(\tau^{(N)})$. В данной работе с помощью методов [2,3] изучается случай, когда $\tau^{(N)}$ не стремится к нулю и множество $F^{(N)}$ в результате оказывает конечное влияние на решение задачи (1) – (4).

Введем основную характеристику множества $F^{(N)}$, описывающую его влияние на решение задачи (I) – (4). Пусть $K^0 = K(x^0, h)$ – куб с центром в точке $x^0 \in \Omega$ и ребрами длины $h>0$, ориентированными по координатным осям, а $l = \{ l_1, \ l_2, \ l_3 \}$ – единичный вектор.

Рассмотрим величину

$$T_l(N,h,x^0) = \inf_{v^{(N)}} \int_{K^0 \cap \Omega^{(N)}} \left\{ |\nabla v^{(N)}|^2 + h^{-2-\gamma} |v^{(N)} - (x-x^0, l)|^2 \right\} dx, \tag{5}$$

где

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right\}; \quad (x-x^0, l) = \sum_{i=1}^{3} [x_i - x_i^0] l_i, \quad \gamma > 0,$$

а нижняя грань берется в классе функций из $W_2^1(K^0 \cap \Omega^{(N)})$, удовлетворяющих условию (2) на компонентах множества $K^0 \cap F^{(N)}$. Это множество функций будем обозначать через $\tilde{W}_2^1(K^0 \cap \Omega^{(N)})$.

Можно показать, что существует единственная функция $v_l^{(N)} = v_l^{(N)}(x)$, доставляющая минимум в (5), причем она является решением краевой задачи

$$-\Delta v_l^{(N)}(x) + h^{-2-\gamma} v_l^{(N)}(x) = h^{-2-\gamma}(x-x^0, l), \qquad x \in K^0 \cap \Omega^{(N)}, \tag{6}$$

$$v_l^{(N)}(x) = c_i^{(N)}, \qquad x \in \partial F_i^{(N)}, \tag{7}$$

$$\int_{\partial F_i^{(N)}} \frac{\partial v_l^{(N)}(x)}{\partial \nu_x} \, \partial \Gamma_x = 0, \qquad i : F_i^{(N)} \subset K^0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial v_l^{(N)}(x)}{\partial \nu_x} = 0, \qquad x \in \partial K^0 \setminus F^{(N)}. \tag{9}$$

Обозначим через $v_i^{(N)}$ функцию $v_l^{(N)}$, когда l – орт оси x_i. Тогда из предыдущего следует, что $v_l^{(N)} = \sum_{i=1}^{3} l_i \cdot v_i^{(N)}$ и значит

$$T_l(N, h, x^0) = \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}(N, h, x^0)\, l_i\, l_k, \tag{10}$$

где

$$a_{i,k}(N,h,x^0)=\int\limits_{K^0\cap\Omega^{(N)}}\left\{(\nabla v_i^{(N)},\nabla v_k^{(N)})+h^{-2-\gamma}[v_i^{(N)}-(x_i-x_i^0)][v_k^{(N)}-(x_k-x_k^0)]\right\}dx. \quad (11)$$

Система чисел $\{a_{ik}\ (N,h,x^0),\ 1\le i,k\le 3\}$ является тензором в R_3. Его, а также меру $\tau^{(N)}\ (h,x^0)$ области $K(x^0,h)\cap\Omega^{(N)}$, примем за основные количественные характеристики множества $F^{(N)}$ в кубе $K(x^0,h)$.

Нетрудно проверить, что если $K(x^0,h)\cap F^{(N)}=\emptyset$, то $a_{ik}\ (N,h,x^0)=h^3\delta_{i,k}$, где $\delta_{i,k}$ – символ Кроненера.

Тензор $\{a_{i,k}\ (N,h,x^0)\}$, вообще говоря, зависит от произвольного параметра $\gamma>0$, однако при больших N и малых h эта зависимость не существенна (см. теорему) и потому не указывается.

Обозначим через $\mathcal{W}_i^{(N)}$ – минимальный шар, содержащий в себе компоненту $F_i^{(N)}$ множества $F^{(N)}$, а через $\rho_{i,j}^{(N)}$ – расстояние между шарами $\mathcal{W}_i^{(N)}$ и $\mathcal{W}_j^{(N)}$.

Будем говорить, что последовательность функций $u^{(N)}(x)$ из $L_2(\Omega^{(N)})$ сходится к $u(x)$ из $L_2(\Omega)$, если

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_{\Omega^{(N)}}\left|u^{(N)}(x)-u(x)\right|^2\chi^{(N)}(x)\,dx, \quad (12)$$

где $\chi^{(N)}(x)$ – характеристическая функция множества $\Omega^{(N)}$.

Сформулируем основной результат.

<u>Теорема</u>. Если выполняются условия

а) $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\rho_{i,j}^{(N)}\left[a_i^{(N)}+a_j^{(N)}\right]^{-1}=\theta_1>0,$

б) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\ \lim_{N\to\infty}\ \tau^{(N)}\ (h,x)h^{-3}=b(x),$

с) для некоторого $\gamma\quad(0<\gamma<2)$

$$\lim_{h\to 0}\ \varliminf_{N\to\infty}\ a_{i,k}(N,h,x)h^{-3}=\lim_{h\to 0}\ \varlimsup_{N\to\infty}\ a_{ik}(N,h,x)h^{-3}=a_{i,k}(x),$$

где $b(x)$, $a_{i,k}(x)$ – непрерывные функции, а тензор $\{a_{i,k}(x)\}_{i,k=1}^3$ положительно определен:

$$\forall\xi\in R_3,\quad\sum_{i,k=1}^3 a_{i,k}(x)\xi_i\xi_k>\theta_2\sum_{i=1}^3\xi_i^2,\quad\theta_2>0,$$

то последовательность решений $u^{(N)}(x)$ задачи (1) – (4) сходится к решению $u(x)$ задачи

$$\sum_{i,k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,k}(x)\frac{\partial}{\partial x_k} u(x)\right) = -4\pi f(x)\,b(x), \qquad x \in \Omega, \tag{13}$$

$$u(x) = 0, \qquad x \in \partial\Omega. \tag{14}$$

Кроме того, из этих условий следует, что условие (c) выполняется при любом $\gamma > 0$.

<u>Доказательство</u>. Решение $u^{(N)} = u^{(N)}(x)$ задачи (1) – (4) минимизирует функционал

$$I(u^{(N)}) = \int_{\Omega^{(N)}} \left\{ |\nabla u^{(N)}|^2 - 8\pi f u^{(N)} \right\} dx \tag{15}$$

в классе функций $u^{(N)} = u^{(N)}(x) \in \tilde{\mathring{W}}{}_2^1(\Omega^{(N)})$ – функций из $\mathring{W}_2^1(\Omega^{(N)})$, удовлетворяющих условию (2) на компонентах $F_i^{(N)}$ множества $F^{(N)}$. Отсюда следует, что

$$\| u^{(N)} \|_{W_2^1(\Omega^{(N)})} \le c \, \| f \|_{L_2(\Omega)} \tag{16}$$

с постоянной c, не зависящей от N. Очевидно, это же неравенство имеет место и для функций $u^{(N)}(x)$, продолженных естественным образом равенствами $u^{(N)}(x) = c_i^{(N)}$, $x \in F_i^{(N)}$ на всю область Ω, т.к.

$$\left\| \tilde{u}^{(N)}(x) \right\|_{W_2^1(\Omega)} \le c \left\| u^{(N)}(x) \right\|_{W_2^1(\Omega^{(N)})}, \tag{17}$$

где постоянная c от N не зависит.

Тогда последовательность $\{ \tilde{u}^{(N)}(x) \}$ продолженных функций слабо компактна в $W_2^1(\Omega)$ и, значит, можно выделить последовательность $\{ \tilde{u}^{(N_i)}(x) \}$ слабо сходящуюся в $W_2^1(\Omega)$ к некоторой функции $u(x) \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$. Покажем, что если выполняются условия теоремы, то $u(x)$ является решением задачи (13) – (14). Так как эта задача имеет единственное решение, то и вся последовательность $\{ \tilde{u}^{(N)}(x) \}$ сходится к $u(x)$ слабо в $W_2^1(\Omega)$ и в силу теоремы вложения сильно в $L_2(\Omega)$, т.е. последовательность $\{ u^{(N)}(x) \}$ сходится к $u(x)$ в смысле (12).

Пусть $w(x)$ – функция из $C_0^2(\Omega)$. Покроем область Ω кубами $K^\alpha = K(x^\alpha, h)$ с ребрами достаточно малой длины $h > 0$, ориентированными по координатным осям, и центрами x^α, образующими пространственную решетку с периодом $h-r$, $(r>0)$.

Известно, что с этим покрытием можно связать разбиение единицы $\{\varphi_\alpha(x)\}$, т.е. построить набор бесконечно-дифференцируемых функций $\varphi_\alpha(x)$, удовлетворяющих условиям

$$0 \le \varphi_\alpha(x) \le 1, \tag{18}$$

$$\varphi_\alpha(x) = 0, \qquad x \notin K^\alpha, \tag{19}$$

$$\varphi_\alpha(x) = 1, \qquad x \in K^\alpha \setminus \bigcup_{\beta\neq\alpha} K^\beta, \tag{20}$$

$$\sum_{(\alpha)} \varphi_\alpha(x) = 1, \qquad x \in \Omega, \tag{21}$$

$$\left|\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_j}(x)\right| \le c r^{-1}, \quad j=1,2,3. \tag{22}$$

Покажем, что можно построить функции $\varphi_\alpha(x)$ так, что при достаточно больших N на $F_i^{(N)}$ они будут удовлетворять условию (2)

$$\varphi_\alpha^{(N)}(x) = c_i^{(N)}, \qquad x \in F_i^{(N)}, \qquad i=1,2,\dots,N, \tag{23}$$

при этом постоянная c в (22) от N не зависит.

Заключим $F_i^{(N)}$ в шары $\mathcal{W}_i^{(N)} \subset \tilde{\mathcal{W}}_i^{(N)}$ соответственно радиусам $a_i^{(N)}/2$ и $(1+\theta_1/2)\,a_i^{(N)}/2$, не пересекающихся в силу условия (а) теоремы.

Построим бесконечно-дифференцируемые функции $\psi_i^{(N)}(x)$, удовлетворяющие условиям

$$\psi_i^{(N)}(x) = 1, \qquad x \in \mathcal{W}_i^{(N)}, \tag{24}$$

$$\psi_i^{(N)}(x) = 0, \qquad x \notin \tilde{\mathcal{W}}_i^{(N)}, \tag{25}$$

$$\left|\frac{\partial\psi_i^{(N)}}{\partial x_j}(x)\right| \le c\, a_i^{(N)^{-1}}, \qquad j=1,2,3, \tag{26}$$

где постоянная c от N не зависит, и рассмотрим функции

$$\varphi_\alpha^{(N)}(x) = \varphi_\alpha(x) + \sum_{i=1}^{N} \left(\varphi_\alpha(x_i^{\alpha,N}) - \varphi_\alpha(x)\right)\psi_i^{(N)}(x). \tag{27}$$

Точки $x_i^{\alpha,N} \in \tilde{\omega}_i^{(N)}$ будем выбирать из пересечения $\tilde{\omega}_i^{(N)}$ с $\bigcup_{\beta\neq\alpha} (K^\beta \setminus K^\alpha)$ или $\bigcup_{\beta\neq\alpha} (K^\alpha \setminus K^\beta)$, если они не пусты, в остальном произвольно. Такой выбор возможен при $(1+\theta_1/2)\, a_i^{(N)} < 2$, что верно для достаточно больших N.

Убедимся, что функции $\{\varphi_\alpha^{(N)}(x)\}$ образуют искомое разбиение единицы. В самом деле, условия (18) – (21) и (23) очевидно выполняются, условие (22) легко проверить

$$\left|\frac{\partial \varphi_\alpha^{(N)}}{\partial x_j}(x)\right| \leq \left|\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_j}(x)\right| + \sum_{i=1}^{N} \left|\varphi_\alpha(x_i^{\alpha,N}) - \varphi_\alpha(x)\right| \left|\frac{\partial \varphi_i^{(N)}}{\partial x_j}(x)\right| +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_j}(x)\right| \leq cr^{-1} + c a_i^{(N)^{-1}} \sum_{i=1}^{N}\sum_{s=1}^{3}\left|\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_s}(\tilde{x}_i^{\alpha,N})\right| \left|x_{i,s}^{\alpha,N} - x_s\right| \leq cr^{-1}. \tag{28}$$

Обозначим через $v_i^\alpha(x) = v_i^{\alpha(N)}(x)$ – функцию, доставляющую минимум в (5), когда l – орт оси x_i, а K^0 – куб K^α, и рассмотрим функцию

$$w^{(N)}(x) = \sum_{(\alpha)} \left[w(x^\alpha) + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial w}{\partial x_i}(x^\alpha)\, v_i^\alpha(x)\right] \varphi_\alpha^{(N)}(x). \tag{29}$$

В силу выбора $\varphi_\alpha^{(N)}(x)$ функция $w^{(N)}(x)$ принадлежит $\overset{\circ}{\tilde{W}}{}_2^1(\Omega^{(N)})$, а т.к. $u^{(N)}(x)$ минимизирует функционал I в этом пространстве, то

$$I(u^{(N)}) \leq I(w^{(N)}). \tag{30}$$

Прежде всего из (5) и условия (c) теоремы следует, что при достаточно больших $N > N(h)$

$$\int_{K^\alpha \cap \Omega^{(N)}} |\nabla v_i^\alpha(x)|^2 dx = O(h^3) \tag{31}$$

и

$$\int_{K^\alpha \cap \Omega^{(N)}} |v_i^\alpha(x) - (x_i - x_i^\alpha)|^2 dx = O(h^{5+\gamma}). \tag{32}$$

Пусть далее $K_1^\alpha = K(x_1^\alpha\ \ h_1)$ – куб с центром в x^α и ребрами длины $h_1 = h - 2r$, т.е. $K_1^\alpha = K^\alpha \setminus \bigcup\limits_{\beta\neq\alpha} K^\beta$. Учитывая (32), запишем

$$\int\limits_{(K^\alpha\setminus K_1^\alpha)\cap\Omega^{(N)}} \left\{|\nabla v_i^\alpha|^2 + h^{-2-\gamma}|v_i^\alpha - (x_i - x_i^\alpha)|^2\right\} dx = \int\limits_{K^\alpha\cap\Omega^{(N)}} \left\{|\nabla v_i^\alpha|^2 + \right.$$

$$\left. + h^{-2-\gamma}\left|v_i^\alpha - (x_i - x_i^\alpha)\right|^2\right\} dx - \int\limits_{K_1^\alpha\cap\Omega^{(N)}} \left\{|\nabla v_i^\alpha|^2 + h_1^{-2-\gamma}\left|v_i^\alpha - \right.\right.$$

$$\left.\left. - (x_i - x_i^\alpha)\right|^2\right\} dx + O(rh^2). \tag{33}$$

Первое слагаемое в (33) равно $a_{i,i}(N, h, x^\alpha)$, второе не менее $a_{i,i}(N, h_1, x^\alpha)$, поэтому при $N > N(h)$

$$\int\limits_{(K^\alpha\setminus K_1^\alpha)\cap\Omega^{(N)}} \left\{|\nabla v_i^\alpha|^2 + h^{-2-\gamma}|v_i^\alpha - (x_i - x_i^\alpha)|^2\right\} dx \le a_{i,i}(N, h, x^\alpha) -$$

$$- a_{i,i}(N, h_1, x^\alpha) + O(rh^2) \quad . \tag{34}$$

и при $r = o(h)$ в силу условия (c) теоремы

$$\int\limits_{(K^\alpha\setminus K_1^\alpha)\cap\Omega^{(N)}} |\nabla v_i^\alpha(x)|^2 dx = o(h^3), \tag{35}$$

$$\int\limits_{(K^\alpha\setminus K_1^\alpha)\cap\Omega^{(N)}} |v_i^\alpha(x) - (x_i - x_i^\alpha)|^2 dx = o(h^{5+\gamma}). \tag{36}$$

Перейдем к оценке $I(w^{(N)})$. Имеем

$$\frac{\partial w^{(N)}}{\partial x_j}(x) = \sum_{(\alpha)} w(x^\alpha)\frac{\partial \varphi_\alpha^{(N)}}{\partial x_j}(x) + \sum_{(\alpha)}\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial w}{\partial x_i}(x^\alpha)\frac{\partial v_i^\alpha}{\partial x_j}(x) \times$$

$$\times \varphi_\alpha^{(N)}(x) + \sum_{(\alpha)}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial w}{\partial x_i}(x^\alpha) v_i^\alpha(x)\frac{\partial \varphi_\alpha^{(N)}}{\partial x_j}(x) \tag{37}$$

и, следовательно,

$$I(w^{(N)})=\sum_{(\alpha)}\sum_{i,k=1}^{3}\int_{K^\alpha\cap\Omega^{(N)}}\frac{\partial w}{\partial x_i}(x^\alpha)\frac{\partial w}{\partial x_k}(x^\alpha)(\nabla v_i^\alpha\nabla v_k^\alpha)\,dx+$$

$$+\sum_{(\alpha)}\sum_{i,k=1}^{3}\int_{K^\alpha\cap\Omega^{(N)}}\frac{\partial w}{\partial x_i}(x^\alpha)\frac{\partial w}{\partial x_k}(x^\alpha)(\nabla v_i^\alpha\nabla v_k^\alpha)(\varphi_\alpha^{(N)2}-1)\,dx+$$

$$+\sum_{(\alpha,\beta)}\sum_{i,k=1}^{3}\int_{K^\alpha\cap\Omega^{(N)}}\frac{\partial w}{\partial x_i}(x^\alpha)\frac{\partial w}{\partial x_k}(x^\alpha)(\nabla v_i^\alpha\nabla v_k^\alpha)\varphi_\alpha^{(N)}\varphi_\beta^{(N)}\,dx-$$

$$-8\pi\int_{\Omega^{(N)}}f w\,dx+E(N,h,r), \tag{38}$$

где подынтегральные выражения в E имеют вид

$$\sum_{(\alpha)}\left\{\left[w(x^\alpha)+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial w}{\partial x_i}(x^\alpha)v_i^\alpha(x)\right]\frac{\partial\varphi_\alpha^{(N)}}{\partial x_j}(x)\right\}^2+$$

$$+2\left\{\sum_{(\alpha)}\left[w(x^\alpha)+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial w}{\partial x_i}(x^\alpha)v_i^\alpha(x)\right]\frac{\partial\varphi_\alpha^{(N)}}{\partial x_j}(x)\right\}\times$$

$$\times\left\{\sum_{(\alpha)}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial w}{\partial x_i}(x^\alpha)\frac{\partial v_i^\alpha}{\partial x_j}(x)\varphi_\alpha^{(N)}(x)\right\}+8\pi f(x)\left\{\sum_{(\alpha)}\times\right.$$

$$\left.\times\left[w(x)-w(x^\alpha)-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial w}{\partial x_i}(x^\alpha)v_i^\alpha(x)\right]\varphi_\alpha^{(N)}(x)\right\}, \tag{39}$$

т.е. являются линейными и квадратичными комбинациями функций

$$\left[v_i^\alpha-(x_i-x_i^\alpha)\right]\frac{\partial\varphi_\alpha^{(N)}}{\partial x_j},\qquad\left[v_i^\alpha-(x_i-x_i^\alpha)\right]\varphi_\alpha^{(N)},$$

$$\varphi_\alpha^{(N)}\frac{\partial v_i^\alpha}{\partial x_j},\qquad(x_i-x_i^\alpha)^2\frac{\partial\varphi_\alpha^{(N)}}{\partial x_j},\qquad(x_i-x_i^\alpha)\varphi_\alpha^{(N)}$$

с коэффициентами, зависящими от $w(x)$. Воспользовавшись оценками (31), (32) и учитывая, что суммирование по параметрам α,β идет в конечных пределах $\alpha, \beta \le M = O(1/h^3)$, а при фиксированном одном параметре второй принимает не более 9 значений, получим

$$\lim_{h\to 0} \overline{\lim_{N\to\infty}} |E| = O(h^{1+\gamma/2}) + O(h^{1+\gamma/2} r^{-1}) = 0, \tag{40}$$

если $r = h^{1+\gamma/4}$.

Аналогично

$$\lim_{h\to 0} \overline{\lim_{N\to\infty}} \Big| \sum_{(\alpha)} \sum_{i,k=1}^{3} \int_{K^\alpha \cap \Omega^{(N)}} \frac{\partial w}{\partial x_i}(x^\alpha) \frac{\partial w}{\partial x_k}(x^\alpha) (\nabla v_i^\alpha \nabla v_k^\alpha) \times$$

$$(\varphi_\alpha^{(N)2} - 1) dx + \sum_{(\alpha,\beta)} \sum_{i,k=1}^{3} \int_{K^\alpha \cap \Omega^{(N)}} \frac{\partial w}{\partial x_i}(x^\alpha) \frac{\partial w}{\partial x_k}(x^\alpha) (\nabla v_i^\alpha \nabla v_k^\alpha) \times$$

$$\times \varphi_\alpha^{(N)} \varphi_\beta^{(N)} dx \Big| = 0 \tag{41}$$

согласно оценкам (35), (36).

Так как

$$\sum_{i,k=1}^{3} \int_{K^\alpha \cap \Omega^{(N)}} (\nabla v_i^\alpha \nabla v_k^\alpha) dx \le \sum_{i,k=1}^{3} \int_{K^\alpha \cap \Omega^{(N)}} \Big\{ (\nabla v_i^\alpha \nabla v_k^\alpha) +$$

$$+ h^{-2-\gamma} [v_i^\alpha - (x_i - x_i^\alpha)][v_k^\alpha - (x_k - x_k^\alpha)] \Big\} dx, \tag{42}$$

то

$$\sum_{(\alpha)} \sum_{i,k=1}^{3} \int_{K^\alpha \cap \Omega^{(N)}} \frac{\partial w}{\partial x_i}(x^\alpha) \frac{\partial w}{\partial x_k}(x^\alpha) (\nabla v_i^\alpha \nabla v_k^\alpha) dx \le$$

$$\le \sum_{(\alpha)} \sum_{i,k=1}^{3} \frac{\partial w}{\partial x_i}(x^\alpha) \frac{\partial w}{\partial x_k}(x^\alpha) a_{i,k}(x^\alpha) + O(h^4), \tag{43}$$

тогда

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} I(w^{(N)}) \le \tilde{I}(w), \tag{44}$$

где

$$\tilde{I}(w)=\int\limits_{\Omega}\left\{\sum_{i,k=1}^{3} a_{i,k}(x)\frac{\partial w}{\partial x_i}(x)\frac{\partial w}{\partial x_k}(x)-4\pi b(x)f(x)w(x)\right\}dx. \tag{45}$$

Так как $C_0^2(\Omega)$ плотно в $\mathring{W}_2^1(\Omega)$, то (45) удовлетворяет любая функция $w(x)$ из $\mathring{W}_2^1(\Omega)$. Однако если $u(x)$ – слабый предел продолженных функций $\tilde{u}^{(N)}(x)$ в $\overset{\gamma}{W}{}_2^1(\Omega)$ по некоторой подпоследовательности $\{N=N_k\}$, то справедливо и обратное неравенство

$$\varliminf_{N=N_k\to\infty} I(u^{(N)})\geqslant\tilde{I}(u), \tag{46}$$

для доказательства которого потребуется следующая

<u>Лемма I</u>. Пусть $w(x)$ – функция из $\mathring{W}_2^1(\Omega)$. Если выполняются условия (а) теоремы I, то существует последовательность функций $\{w^{(N)}(x)\}$ из $\overset{\gamma}{W}{}_2^1(\Omega^{(N)})$, сходящаяся к $w(x)$ в смысле (12) и при достаточно больших N удовлетворяется неравенством

$$\|w^{(N)}(x)\|_{W_2^1(\Omega^{(N)})}\leq c\|w(x)\|_{W_2^1(\Omega)}, \tag{47}$$

где c не зависит от w и N.

<u>Доказательство</u>. Ввиду плотности $C_0^2(\Omega)$ в $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ достаточно доказать лемму для $w\in C_0^2(\Omega)$. Определим $w^{(N)}(x)$ формулой

$$w^{(N)}(x)=w(x)-\sum_{i=1}^{N}\left[w(x)-w(x_i^{(N)})\right]\varphi_i^{(N)}(x), \tag{48}$$

где $\varphi_i^{(N)}(x)$ – функции, удовлетворяющие условиям (24) – (26). Очевидно, так определенные функции $w^{(N)}(x)$ принадлежат $\overset{\gamma}{W}{}_2^1(\Omega^{(N)})$. Далее

$$\begin{aligned}\|w^{(N)}(x)\|_{W_2^1(\Omega^{(N)})}&\leq c\|\tilde{w}^{(N)}(x)\|_{W_2^1(\Omega)}\leq\\ &\leq c\|w(x)\|_{W_2^1(\Omega)}+c\left\|\sum_{i=1}^{N}\left[w(x)-w(x_i^{(N)})\right]\times\right.\\ &\left.\times\varphi_i^{(N)}(x)\right\|_{W_2^1(\Omega)}\leq c\;\|w(x)\|_{W_2^1(\Omega)}.\end{aligned} \tag{49}$$

Из (49) вытекает также сходимость $w^{(N)}(x)$ к $w(x)$ в смысле (12). Лемма доказана.

Перейдем к доказательству неравенства (46). Пусть $u_\varepsilon(x)$ – функция из $C_0^2(\Omega)$ такая, что

$$\| u_\varepsilon - u \|_{W_2^1(\Omega)} \le \varepsilon. \tag{50}$$

Пусть далее $u_\varepsilon^{(N)}$ – последовательность функций из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega^{(N)})$, сходящаяся к u_ε в смысле (12) и такая, что

$$\| u_\varepsilon^{(N)}(x) - u^{(N)}(x) \|_{W_2^1(\Omega)} \le C \, \| u_\varepsilon(x) - u(x) \|_{W_2^1(\Omega)} . \tag{51}$$

Существование такой последовательности следует из применения леммы I к функции $u_\varepsilon(x) - u(x)$.

В разбиении области Ω непересекающимися кубами $K_1^\alpha = K^\alpha \setminus \bigcup_{\beta\neq\alpha} K^\beta$ выделим те из них, которые принадлежат области $\Omega_{\varepsilon,\delta}^{(N)} = \{ |\nabla u_\varepsilon(x)| > \delta > 0 \}$.

В пересечении каждого из выделенных кубов K_1^α, $\alpha = 1, 2, \ldots, N = N(\varepsilon, \delta, h)$ с областью $\Omega^{(N)}$ рассмотрим функцию

$$v^{\alpha(N)}(x) = |\nabla u_\varepsilon(x^\alpha)|^{-1} [u_\varepsilon^{(N)}(x) - u_\varepsilon(x^\alpha)]. \tag{52}$$

Так как $u_\varepsilon(x) \in C_0^2(\Omega)$, то для любого единичного вектора l справедливо неравенство

$$\left\{ \int_{K_1^\alpha \cap \Omega^{(N)}} |v^{\alpha(N)} - (x - x^\alpha, l)|^2 dx \right\}^{1/2} \le |\nabla u_\varepsilon(x^\alpha)|^{-1} \left\{ \int_{K_1^\alpha \cap \Omega^{(N)}} | u_\varepsilon^{(N)} - u_\varepsilon |^2 dx \right\}^{1/2} + \left\{ \int_{K_1^\alpha \cap \Omega^{(N)}} [|\nabla u_\varepsilon(x^\alpha)|^{-1} (\nabla u_\varepsilon(x^\alpha), x - x^\alpha) - (x - x^\alpha, l)]^2 dx \right\}^{1/2} + O(h^{3.5}). \tag{53}$$

Полагая, что $l = l^{(\alpha)} = \nabla u_\varepsilon(x^\alpha) / |\nabla u_\varepsilon(x^\alpha)|$ и учитывая (51), получим

$$\overline{\lim_{N=N_k \to \infty}} \int_{K_1^\alpha \cap \Omega^{(N)}} | v^{\alpha(N)} - (x - x^\alpha, l^{(\alpha)}) |^2 dx = O(h^{3.5}). \tag{54}$$

Далее, согласно (5), имеем

$$\int\limits_{K_1^\alpha \cap \Omega^{(N)}} |\nabla v^{\alpha(N)}|^2 dx + h_1^{-2-\gamma} \int\limits_{K_1^\alpha \cap \Omega^{(N)}} |v^{\alpha(N)} - (x - x^\alpha, l^{(\alpha)})|^2 dx \geq T_{l(\alpha)}(N, h, x^\alpha) \tag{55}$$

и, следовательно, в силу (52), (54) и (10)

$$\int\limits_{K_1^\alpha \cap \Omega^{(N)}} |\nabla u_\varepsilon^{(N)}|^2 dx \geq T_{l(\alpha)}(N, h_1, x^\alpha) |\nabla u_\varepsilon(x^\alpha)|^2 - O(h_1^{5-\gamma}) =$$

$$= \sum_{i,k=1}^{3} a_{i,k}(N, h, x^\alpha) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(x^\alpha) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_k}(x^\alpha) - O(h^{5-\gamma}), \tag{56}$$

а так как $N(\varepsilon, \delta, h_1) = O(h^{-3})$, то

$$\sum_{\alpha=1}^{N(\varepsilon,\delta,h_1)} \int\limits_{K_1^\alpha \cap \Omega^{(N)}} |\nabla u_\varepsilon^{(N)}|^2 dx - 8\pi \int\limits_{\Omega^{(N)}} f u_\varepsilon^{(N)} dx \geq \sum_{\alpha=1}^{N(\varepsilon,\delta,h_1)} \sum_{i,k=1}^{3} a_{i,k}(N, h_1, x^\alpha) \times$$

$$\times \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(x^\alpha) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_k}(x^\alpha) - 8\pi \int\limits_{\Omega^{(N)}} f u_\varepsilon^{(N)} dx - O(h_1^{2-\gamma}). \tag{57}$$

Перейдем в (57) к пределу сначала по $N = N_k \to \infty$ при фиксированных $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, а затем перейдем к пределу при $h_1 \to 0$. Учитывая условия теоремы (б), (с), непрерывность $a_{i,k}(x)$, $b(x)$ и гладкость $u_\varepsilon(x)$, а также (51), получим

$$\lim_{N=N_k \to \infty} I(u_\varepsilon^{(N)}) \geq \int\limits_{\Omega_{\varepsilon,\delta}} \sum_{i,k=1}^{3} a_{i,k}(x) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(x) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_k}(x) dx -$$

$$- 8\pi \int\limits_{\Omega} b(x) f(x) u_\varepsilon(x) dx. \tag{58}$$

Теперь, переходя к пределу в (58) по $\delta \to 0$, и наконец по $\varepsilon \to 0$, учитывая при этом (47), (50), приходим к окончательному неравенству (46).

Из (46) и (44) следует, что для $w(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$

$$\tilde{I}(u) \leq \tilde{I}(w), \tag{59}$$

т.е. u минимизирует функционал (45), а отсюда вытекает, что $u(x)$ является решением задачи (13), (14).

Покажем теперь, что условие c теоремы выполняется при любом $\gamma > 0$, если оно выполняется для какого-то значения $\gamma_0 > 0$. Предварительно покажем, что для любой области D, граница которой имеет нулевую меру

$$\lim_{N\to\infty} \int_{D\cap\Omega^{(N)}} |\nabla u^{(N)}|^2 dx = \int_D \sum_{i,k=1}^{3} a_{i,k} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx. \tag{60}$$

Воспользовавшись неравенством (56), аналогично предыдущему получим

$$\varliminf_{N\to\infty} \int_{D\cap\Omega^{(N)}} |\nabla u^{(N)}|^2 dx \geq \int_D \sum_{i,k=1}^{3} a_{i,k} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx, \tag{61}$$

поэтому, предполагая, что (60) не верно, получим

$$\varlimsup_{N\to\infty} \int_{D\cap\Omega^{(N)}} |\nabla u^{(N)}|^2 dx \geq \int_D \sum_{i,k=1}^{3} a_{i,k} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \tag{62}$$

но последнее противоречит равенству

$$\lim_{N\to\infty} I(u^{(N)}) = \tilde{I}(u), \tag{63}$$

в чем легко убедиться в силу условия δ теоремы, учитывая сходимость $u^{(N)}(x)$ к $u(x)$ в $L_2(\Omega)$.

Пусть $x^0 \in \Omega_0 \subset \Omega$, подберем правую часть $f(x) = f_0(x)$ в уравнении (13) так, чтобы решение $u(x)$ задачи (13) – (14) в области Ω_0 было равно $(x - x^0, l)$, где l – единичный вектор. Пусть $u^{(N)}(x)$ – решение задачи (1) – (4) с той же правой частью $f_0(x)$ в уравнении (1), а $K^0 = K(x^0, h)$ – куб, принадлежащий области Ω_0. Согласно (5)

$$\int_{K^0\cap\Omega^{(N)}} |\nabla u^{(N)}|^2 dx + h^{-2-\gamma} \int_{K^0\cap\Omega^{(N)}} |u^{(N)} - (x - x^0, l)|^2 dx \geq T_l(N, h, x^0), \tag{64}$$

откуда, учитывая сходимость $u^{(N)}(x)$ к $u(x)=(x-x^0,l)$ в K^0, в $L_2(\Omega)$, получим

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_{K^0\cap\Omega^{(N)}}|\nabla u^{(N)}|^2dx\geq\overline{\lim_{N\to\infty}}\ T_l(N,h,x^0)\tag{65}$$

и, следовательно, в силу (60), (10) и непрерывности $a_{i,k}(x)$

$$\sum_{i,k=1}^{3}a_{i,k}(x^0)l_il_k\geq\overline{\lim_{h\to0}}\ \overline{\lim_{N\to\infty}}\ \frac{T_l(N,h,x^0)}{h^3}=\sum_{i,k=1}^{3}\lim_{h\to0}\lim_{N\to\infty}\frac{a_{i,k}(N,h,x^0)}{h^3}l_il_k.\tag{66}$$

Из (66) следует, что если условие (с) теоремы при каком-нибудь $\gamma>0$ не выполняется, то найдутся орт l, число $\varepsilon>0$, сколь угодно малые $h>0$ и подпоследовательность $N=N_k\to\infty$, что

$$\frac{T_l(N,h,x^0)}{h^3}\leq\sum_{i,k=1}^{3}a_{i,k}(x^0)l_il_k-\varepsilon,\qquad N>N(h).\tag{67}$$

Пусть функция $v_l^{(N)}(x)$ минимизирует функционал (5) при рассматриваемых l и γ, а $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ образуют разбиение единицы, связанное с покрытием $\{K(x^0,h),\quad\Omega\setminus K(x^0,h-2h^{1+\gamma/4})\}$ и удовлетворяющее требованиям (18) – (23). Рассмотрим в области $\Omega^{(N)}$ функцию

$$w_h^{(N)}(x)=u^{(N)}(x)\varphi_1(x)+v_l^{(N)}(x)\varphi_0(x),\tag{68}$$

принадлежащую, очевидно, $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega^{(N)})$ и запишем ее в виде

$$w_h^{(N)}(x)=u(x)+[v_l^{(N)}(x)-(x-x^0,l)]\varphi_0(x)+[u^{(N)}(x)-u(x)]\varphi_1(x),\tag{69}$$

откуда получим

$$\frac{\partial w_h^{(N)}}{\partial x_i}(x)=\frac{\partial v_l^{(N)}}{\partial x_i}(x)\varphi_0(x)+[v_l^{(N)}(x)-(x-x^0,l)]\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_i}(x)+\frac{\partial u^{(N)}}{\partial x_i}(x)\varphi_1(x)+$$
$$+[u^{(N)}(x)-u(x)]\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}(x),\tag{70}$$

и потому

$$I(w_h^{(N)}) = \int\limits_{\Omega^{(N)}} |\nabla u^{(N)}|^2 dx - 4\pi \int\limits_{\Omega^{(N)}} f u dx + \int\limits_{K^0 \cap \Omega^{(N)}} |\nabla v_l^{(N)}|^2 \varphi_0^2 dx -$$

$$- \int\limits_{K^0 \cap \Omega^{(N)}} |\nabla u^{(N)}|^2 (1-\varphi_1^2) dx + E(N, h, r), \tag{71}$$

где в E подынтегральные выражения линейно и квадратично зависят от функций $[v_l^{(N)}(x) - (x - x^0, l)] \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i}(x)$, $[u^{(N)}(x) - u(x)] \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}(x)$, $[u^{(N)}(x) - u(x)] \varphi_1(x)$.

Так как в силу (67) для $v_l^{(N)}(x)$ верны оценки (31), (32), то, учитывая сходимость $u^{(N)}(x)$ $k u(x)$ в $L_2(\Omega)$, получим

$$\overline{\lim_{N=N_k \to \infty}} E = O(h^{3+\gamma/4}). \tag{72}$$

Далее, в силу (67), (60) и непрерывности $a_{i,k}(x)$

$$\int\limits_{K^0 \cap \Omega^{(N)}} |\nabla v_l^{(N)}|^2 \varphi_0^2 dx \leq T_l(N, h, x^0) \leq h^3 \Big(\sum_{i,k=1}^{3} a_{i,k}(x^0) l_i l_k - \varepsilon \Big), \tag{73}$$

$$\overline{\lim_{N \to \infty}} \int\limits_{K^0 \cap \Omega^{(N)}} |\nabla u^{(N)}|^3 (1-\varphi_1^2) dx \geq \sum_{i,k=1}^{3} a_{i,k}(x^0) l_i l_k h^3 + o(h^3). \tag{74}$$

Из (73), (74) и (60) следует, что найдется $h > 0$ и подпоследовательность $N = N_k \to \infty$, для которых справедливо неравенство

$$I(w_h^{(N)}) \leq \tilde{I}(u) - \frac{\varepsilon}{2} h^3, \tag{75}$$

что противоречит равенству (63), т.к. $w_h^{(N)}$ из $\overset{\circ}{\tilde{W}}{}_2^1(\Omega^{(N)})$, а $u^{(N)}$ минимизирует I в этом классе.

Итак, неравенство (67) не верно, значит условие (c) теоремы выполняется при любом $\gamma > 0$. Теорема доказана.

Тензор $\{a_{i,k}(x)\}_{i,k=1}^{3}$ в ряде случаев можно выразить через более простые характеристики множества $F^{(N)}$.

Пусть $F^{(N)}$ состоит из шаров радиуса r, содержащихся в области Ω с центрами в узлах периодической решетки с периодами по осям соответственно h_1, h_2, h_3 ($h_i > 2r$). Пусть при $N \to \infty$,

$$r=O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{N}}\right),\quad h_i=O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{N}}\right),\quad h_i/r=const.$$

Итак, в области Ω выделены параллелепипеды $\Pi_i^{(N)}$ со сторонами h_1, h_2, h_3, содержащие шары $F_i^{(N)}$ радиуса r. Рассмотрим параллелепипед $\Pi=\left\{-\frac{h_i}{2r}<x_i<\frac{h_i}{2r},\ i=1,2,3\right\}$ с шаром $F=\left\{\sum\limits_{i=1}^{3} x_i^2\le 1\right\}$ единичного радиуса.

В области $P=\Pi\setminus F$ рассмотрим функцию $u_k(x)\in \tilde{W}_2^1(\Pi\setminus F)$, являющуюся решением следующей задачи:

$$\Delta u_k(x)=0,\qquad x\in P, \tag{76}$$

$$u_k(x)=\pm h_k/2r,\qquad x\in\partial\Pi\cap\left\{x: x_k=\pm\frac{h_k}{2r}\right\} \tag{77}$$

$$u_k(x)=c,\qquad x\in\partial F, \tag{78}$$

$$\int\limits_{\partial F}\frac{\partial u_k(x)}{\partial\nu_x}\,d\Gamma_x=0, \tag{79}$$

$$\frac{\partial u_k(x)}{\partial\nu}=0,\quad x\in\partial\Pi\setminus\bigcup_{i\ne k}\left\{x: x_i=\pm\frac{h_i}{2r}\right\}, \tag{80}$$

которая имеет единственное решение. Заметим, что эта задача эквивалентна задаче, где (79) отсутствует, а постоянная c в (78) равна нулю.

Покажем, что для рассматриваемого множества $F^{(N)}$ компоненты тензора $\left\{a_{i,k}(x)\right\}_{i,k=1}^{3}$ вычисляются по формулам

$$a_{i,k}(x)=\frac{r^3}{h_1 h_2 h_3}A_{i,k}=\frac{r^3}{h_1 h_2 h_3}A_{i,i}\,\delta_{i,k}, \tag{81}$$

где

$$A_{i,k}=\int\limits_{\Pi\setminus F}(\nabla u_i\,\nabla u_k)\,dx.$$

Так как функция $u_k(x)$ нечетна по x_k и четна по x_i, $i\ne k$, то легко видеть, что $A_{i,k}=0$ при $i\ne k$ и вторая часть (81) доказана.

Пусть $K^0=K(x^0,h)$ – куб с центром в точке x^0 и ребрами длины h, ориентированными по координатным осям. Определим в $K(x^0,h)$

функцию $\bar{V}_k^{(N)}(x)$, задаваемую в областях $P_i^{(N)}=\Pi_i^{(N)}\setminus F_i^{(N)}$ формулой

$$\bar{V}_k^{(N)}(x)=r\, u_k\left(\frac{x-x^i}{r}\right)+x_k^i-x_k^0, \tag{82}$$

где $u_k(x)$ – решение задачи (76) – (79); x^i – центры шаров $F_i^{(N)}$. В силу симметрии на стыках областей $P_i^{(N)}$ $\bar{V}_k^{(N)}(x)$ непрерывна и имеет непрерывную нормальную производную. Следовательно, $\bar{V}_k^{(N)}(x)$ в $K^0\cap\Omega^{(N)}$ удовлетворяет уравнению $\Delta\bar{V}_k^{(N)}(x)=0$ и постоянна на границе шаров $F_i^{(N)}$. Будем искать функцию $V_k^{(N)}(x)$, доставляющую минимум в (9) в виде

$$V_k^{(N)}(x)=\bar{V}_k^{(N)}(x)+w^{(N)}(x). \tag{83}$$

Тогда $w^{(N)}(x)$ должна минимизировать функционал

$$I_k(w^{(N)})=\int\limits_{K^0\cap\Omega^{(N)}}|\nabla w^{(N)}|^2dx+h^{-2-\gamma}\int\limits_{K^0\cap\Omega^{(N)}}|w^{(N)}|^2dx+$$

$$+2\int\limits_{\partial K^0\cap\Omega^{(N)}}\frac{\partial\bar{V}_k^{(N)}}{\partial\nu}w^{(N)}d\Gamma+2h^{-2-\gamma}\int\limits_{K^0\cap\Omega^{(N)}}[\bar{V}_k^{(N)}-(x_k-x_k^0)]w^{(N)}dx \tag{84}$$

в классе функций w, равных нулю на гранях $\partial K^0\cap\{x_k-x_k^0=\pm h\}$ и принадлежащих $\hat{W}_2^1(\Omega^{(N)})$.
Так как $I_k(0)=0$, то $I_k(w^{(N)})\le 0$ и, следовательно,

$$\int\limits_{K^0\cap\Omega^{(N)}}|\nabla w^{(N)}|^2dx+h^{-2-\gamma}\int\limits_{K^0\cap\Omega^{(N)}}|w^{(N)}|^2dx\le 2\int\limits_{\partial K^0\cap\Omega^{(N)}}\frac{\partial\bar{V}_k^{(N)}}{\partial\nu}w^{(N)}d\Gamma+$$

$$+2h^{-2-\gamma}\int\limits_{K^0\cap\Omega^{(N)}}[\bar{V}_k^{(N)}-(x_k-x_k^0)]w^{(N)}dx. \tag{85}$$

Имеем

$$\int\limits_{K^0\cap\Omega^{(N)}}|\bar{V}_k^{(N)}-(x_k-x_k^0)|^2dx=\sum_{(i)}r^2\int\limits_{K^0\cap\Omega^{(N)}}\left|u\left(\frac{x-x^i}{2}\right)-\frac{x_k-x_k^i}{r}\right|^2dx\approx$$

$$\approx \frac{h^3}{h_1 h_2 h_3} r^6 \int_P |u(\xi) - \xi_k|^2 d\xi, \tag{86}$$

$$\int_{\partial K^0 \cap \Omega^{(N)}} \left(\frac{\partial \bar{v}_k^{(N)}}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma = \sum_{(i)} r^2 \int_{\partial K^0 \cap P_i^{(N)}} \left[\frac{\partial}{\partial \nu_x} u_k\left(\frac{x - x^i}{r}\right)\right]^2 d\Gamma \leq$$

$$\leq 2h^2 r^2 \frac{h_1 + h_2 + h_3}{h_1 h_2 h_3} \max_{\Gamma} \int_{\Gamma \cap P} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu_\xi}\right)^2 d\Gamma_\xi, \tag{87}$$

где Γ – плоскости, параллельные координатным осям

$$\Gamma = \left\{\xi_k = c\right\}, \qquad -\frac{h_k}{2r} \leq c \leq \frac{h_k}{2r}, \qquad k = 1, 2, 3.$$

Продолжим $w^{(N)}(x)$ на множество $F^{(N)}$ соответствующими постоянными, тогда продолженная функция будет удовлетворять неравенствам

$$\int_{\Pi_i^{(N)}} |\tilde{w}^{(N)}|^2 dx \leq c\left\{r^2 \int_{P_i^{(N)}} |\nabla w^{(N)}|^2 dx + \int_{P_i^{(N)}} |w^{(N)}|^2 dx\right\}, \tag{88}$$

$$\int_{\Pi_i^{(N)}} |\nabla \tilde{w}^{(N)}|^2 dx \leq c \int_{P_i^{(N)}} |\nabla w^{(N)}|^2 dx. \tag{89}$$

Воспользуемся неравенством

$$\int_{\partial K^0} |\tilde{w}^{(N)}|^2 d\Gamma \leq 6\varepsilon \int_{K^0} |\nabla \tilde{w}^{(N)}|^2 dx + 6\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{h}\right) \int_{K^0} |\tilde{w}^{(N)}|^2 dx, \tag{90}$$

где $\varepsilon > 0$ и произвольно. Выберем $\varepsilon = h^{1 + \frac{\gamma}{2}}$, тогда, учитывая (88), (89), получим

$$\int_{\partial K^0 \cap \Omega^{(N)}} |w^{(N)}|^2 d\Gamma \leq c h^{1+\gamma/2} \left\{\int_{K^0 \cap \Omega^{(N)}} |\nabla w^{(N)}|^2 dx + h^{-2-\gamma} \int_{K^0 \cap \Omega^{(N)}} |w^{(N)}|^2 dx\right\}. \tag{91}$$

В силу (86), (87), (91) правая часть в (85) оценивается как

$$2\int\limits_{\partial K^0\cap\Omega^{(N)}} \frac{\partial \bar v_k^{(N)}}{\partial \nu} w^{(N)} d\Gamma + 2h^{-2-\gamma}\int\limits_{K^0\cap\Omega^{(N)}} [\bar v_k^{(N)} - (x_k - x_k^0)] w^{(N)} dx \le$$

$$\le c(\tau h^{\frac{1-\gamma}{2}} + h^{\frac{6+\gamma}{4}}) \left\{ \int\limits_{K^0\cap\Omega^{(N)}} [|\nabla w^{(N)}|^2 + h^{-2-\gamma}|w^{(N)}|^2] dx \right\}^{1/2} \tag{92}$$

и тогда при достаточно больших N

$$\int\limits_{K^0\cap\Omega^{(N)}} |\nabla w^{(N)}|^2 dx + h^{-2-\gamma}\int\limits_{K^0\cap\Omega^{(N)}} |w^{(N)}|^2 dx \le ch^{3+\gamma/2}. \tag{93}$$

Если теперь воспользоваться формулами (82), (83), оценками (86), (93) и условиями теоремы, то придем к равенству (81).

Литература

1. Фенченко В.Н. О некоторых задачах электростатики в областях с мелкозернистой границей. – Мат. физика и функц. анализ, 1972, вып.3, с.88–94.
2. Хруслов Е.Я. Первая краевая задача в областях со сложной границей для уравнений высших порядков. – Мат. сб., 1977, 103 (145), № 4 (8), с.614–629.
3. Хруслов Е.Я. Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи при измельчении границы. – Мат. сб., 1978, 106 (148), № 4 (8), с.604–621.

УДК 517.94 + 513.88

А.М.Холькин

ОСЦИЛЛЯЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СИСТЕМ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ И ДИРАКА НА ОСИ

В работе [1] установлена осцилляционная теорема для самосопряженной матричной задачи Штурма – Лиувилля на полуоси

$$l[y] = -(P(x)y')' + Q(x)y = \lambda R(x)y. \tag{1}$$

В настоящей работе устанавливается осцилляционная теорема для системы (1) на всей оси и для симметрических систем первого порядка, в частности системы Дирака.

Существенную роль при этом играет построение матричного решения системы (1), удовлетворяющего граничному условию на сингулярном конце.

I. Обозначим $(y,z)=\sum_{i=1}^{m} y_i \bar{z}_i$ скалярное произведение векторов $y=(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, $z=(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ в унитарном пространстве E_m, $\langle y,z\rangle = \int_a^b (R(x)\, y(x), z(x))dx\ (-\infty \le a < b \le \infty)$, скалярное произведение в гильбертовом пространстве $H(a,b)=L_m^2((a,b), R(x)\,dx)$ вектор-функций $y(x)$ со значениями в E_m. Нормы векторов в E_m обозначаем $|y|$, нормы элементов в $H(a,b)$ – через $\|y(\cdot)\|$.

Пусть минимальные дифференциальные операторы $L'^{(-)}_b$, $L'^{(+)}_b$, L', порожденные соответственно в $H(-\infty, b)$, $H(b,\infty)$, $H(-\infty,\infty)$ дифференциальным выражением

$$l_R[y]=R^{-1}(x)\, l[y], \tag{2}$$

полуограничены снизу.

Здесь $P(x)>0$, $R(x)>0$, $Q(x)$ – эрмитовы $m\times m$ матрицы, которые вместе с $P'(x)$, $R'(x)$ непрерывно зависят от x.

Рассмотрим расширения $L^{(-)}_b$, $L^{(+)}_b$ операторов $L'^{(-)}_b$, $L'^{(+)}_b$, определенные граничным условием

$$\cos B\, P(b)\, y'(b) - \sin B\, y(b)=0.$$

В случае $P(x)=R(x)\equiv I_m$ (I_m – единичная $m\times m$ матрица) полуограниченные снизу операторы $L^{(-)}_b$, $L^{(+)}_b$, L' самосопряжены, однако при $P(x)\not\equiv I_m$ индексы дефекта операторов $L^{(-)}_b$, $L^{(+)}_b$ могут оказаться отличными от нуля [1,2].

Пусть операторы $L^{(-)}_b$ и $L^{(+)}_b$ имеют соответственно индексы дефекта (m_-, m_-), (m_+, m_+), $0\le m_-, m_+ \le m$.

Как известно [3-5], для любого замкнутого симметрического оператора A с плотной областью определения в сепарабельном пространстве H, имеющего равные дефектные числа (k,k) существует пространство граничных значений $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$, где $\mathcal{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство $(\dim\mathcal{H}=k\le\infty)$, Γ_1, Γ_2 – линейные отображения $D(A^*)$ на $\mathcal{H}$ такие, что 1) имеет место "формула Грина"

$$\langle A^* y,z\rangle_H - \langle y, A^* z\rangle_H = (\Gamma_1 y, \Gamma_2 z)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_2 y, \Gamma_1 z)_{\mathcal{H}}, \tag{3}$$

$y,z\in D(A^*)$; 2) для любых $\gamma_1,\gamma_2\in\mathcal{H}$ существует такой вектор $y\in D(A^*)$, что $\Gamma_1 y=\gamma_1$, $\Gamma_2 y=\gamma_2$; 3) если $y\in D(A)$, то $\Gamma_1 y=\Gamma_2 y=0$.

Выберем произвольным образом пространства граничных значений $(H^{(-)}, \Gamma_1^{(-)}, \Gamma_2^{(-)})$, $(H^{(+)}, \Gamma_1^{(+)}, \Gamma_2^{(+)})$ операторов $L^{(-)}_b$ и $L^{(+)}_b$.

Пусть $0\le f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)\in C_0^\infty$, $f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)=1$ и

$$f_1(x)=\begin{cases}1, & x\le a_1\\ 0, & x\ge a_2\end{cases}\qquad (-\infty<a_1<a_2<b), \tag{4}$$

$$f_2(x)=\begin{cases}0, & x\le c_1\\ 1, & x\ge c_2\end{cases}\qquad (b<c_1<c_2<\infty). \tag{5}$$

Лемма I. Положим $\mathcal{H}=H^{(-)}\oplus H^{(+)}$, $\Gamma_1 y=\{\Gamma_1^{(-)}f_1 y,\ \Gamma_1^{(+)}f_2 y\}$, $\Gamma_2 y=\{\Gamma_2^{(-)}f_1 y,\ \Gamma_2^{(+)}f_2 y\}$, $y\in D(L'^*)$. Тогда тройка $(\mathcal{H},\Gamma_1,\Gamma_2)$ является пространством граничных значений оператора L' в указанном выше смысле.

Доказательство. Проверим свойство (I). Для произвольных функций $y(x), z(x)\in D(L'^*)$ при $i\ne k$ в силу (I), (4) и (5) имеем

$$\langle L'^* f_i y, f_k z\rangle-\langle f_i y, L'^* f_k z\rangle=(f_i y, P(f_k z)')-(P(f_i y)', f_k z)\Big|_{-\infty}^{\infty}=0;$$

$$\langle L'^* f_3 y, f_3 z\rangle-\langle f_3 y, L'^* f_3 z\rangle=0.$$

Поэтому

$$\langle L'^* y,z\rangle-\langle y,L'^* z\rangle=\langle L_b^{(-)*}f_1 y, f_1 z\rangle-\langle f_1 y, L_b^{(-)*}f_1 z\rangle+$$

$$+\langle L_b^{(+)*}f_2 y, f_2 z\rangle-\langle f_2 y, L_b^{(+)*}f_2 z\rangle=\left(\Gamma_1^{(-)}f_1 y,\Gamma_2^{(-)}f_1(z)\right)_{H^{(-)}}-\left(\Gamma_2^{(-)}f_1 y,\Gamma_1^{(-)}f_1 z\right)_{H^{(-)}}+$$

$$+\left(\Gamma_1^{(+)}f_2 y,\Gamma_2^{(+)}f_2 z\right)_{H^{(+)}}-\left(\Gamma_2^{(+)}f_2 y,\Gamma_1^{(+)}f_2 z\right)_{H^{(+)}}=(\Gamma_1 y,\Gamma_2 z)_{\mathcal{H}}-(\Gamma_2 y,\Gamma_1 z)_{\mathcal{H}}$$

и "формула Грина" (2) доказана.

Свойство (2). Возьмем произвольные $\gamma_1=\{\gamma_1^{(-)},\gamma_1^{(+)}\}$, $\gamma_2=\{\gamma_2^{(-)},\gamma_2^{(+)}\}\in\mathcal{H}$. Тогда существуют $y^{(-)}(x)\in D(L_b^{(-)*})$, $y^{(+)}(x)\in D(L_b^{(+)*})$ такие, что $\Gamma_i^{(-)}y^{(-)}=\gamma_i^{(-)}$, $\Gamma_i^{(+)}y^{(+)}=\gamma_i^{(+)}$, $i=1,2$.

Считая $y^{(-)}(x)=0$ при $x>b$, $y^{(+)}(x)=0$ при $x<b$ имеем, что $f_1 y^{(-)}$, $f_2 y^{(+)}\in D(L'^*)$. Так как $(1-f_1^2)y^{(-)}\in D(L_b^{(-)})$, $(1-f_2^2)y^{(+)}\in D(L_b^{(+)})$, то $\Gamma_i^{(-)}f_1^2 y^{(-)}=\Gamma_i^{(-)}y^{(-)}$, $\Gamma_i^{(+)}f_2^2 y^{(+)}=\Gamma_i^{(+)}y^{(+)}$ и, полагая $y=f_1 y^{(-)}+f_2 y^{(+)}\in D(L'^*)$, получим

$$\Gamma_i y=\left\{\Gamma_i^{(-)}f_1^2 y^{(-)},\ \Gamma_i^{(+)}f_2^2 y^{(+)}\right\}=\left\{\gamma_i^{(-)},\gamma_i^{(+)}\right\}=\gamma_i,\quad i=1,2.$$

Свойство (3). Если $y\in D(L')$, то $f_1 y\in D(L_b^{(-)})$, $f_2 y\in D(L_b^{(+)})$ и $\Gamma_i y=\{\Gamma_i^{(-)}f_1 y,\ \Gamma_i^{(+)}f_2 y\}=0$. Лемма доказана.

Сужение оператора L'^{*} на множество всех функций $y(x)\in D(L'^{*})$, удовлетворяющих распадающимся граничным условиям

$$\cos A\,\Gamma_1^{(-)} f_1 y - \sin A\,\Gamma_2^{(-)} f_1 y = 0,$$

$$\cos C\,\Gamma_1^{(+)} f_2 y - \sin C\,\Gamma_2^{(+)} f_2 y = 0, \tag{6}$$

где A, C – эрмитовы матрицы порядка m_- и m_+ соответственно, представляет собой самосопряженное расширение $\tilde{L}'$ минимального оператора L'.

Для самосопряженного расширения $\tilde{L}_b$ оператора $L_b'^{(+)}$ распадающиеся граничные условия имеют вид

$$\cos B\,P(b)\,y'(b) - \sin B\,y(b) = 0, \tag{7}$$

$$\cos C\,\Gamma_1^{(+)} y - \sin C\,\Gamma_2^{(+)} y = 0 \tag{8}$$

(при $\cos B = 0$ обозначим самосопряженное расширение L_b^{0}).

Лемма 2. Для любого $\lambda < \lambda_c = \inf \sigma_c(\tilde{L})$ существует ровно m линейно независимых решений $y_1(x,\lambda),\ y_2(x,\lambda),\dots,\ y_m(x,\lambda)\in H(b,\infty)$, $(b > -\infty)$ уравнения (1), удовлетворяющих при $m_+ > 0$ граничному условию (6). Эти решения можно выбрать так, чтобы они были аналитическими по λ в некоторой окрестности Λ интервала $(-\infty, \lambda_c)$ в комплексной плоскости, которая не зависит от b.

Доказательство. Выберем произвольное $b_0 > -\infty$ и рассмотрим минимальный оператор $L_{b_0}'^{(+)}$ с индексами дефекта $(m+m_+,\ m+m_+)$. В силу лемм XIII.6.7 и XIII.6.9 [3], которые переносятся на рассматриваемый случай, при $\lambda < \lambda_c \le \inf \sigma_c(\tilde{L}_{b_0})$ существует $m+m_+$ линейно независимых решений

$$z_1(x,\lambda),\ z_2(x,\lambda),\dots,\ z_{m+m_+}(x,\lambda)\in H(b,\infty)$$

уравнения (1). Так как в условии (6) C – матрица порядка m_+, то из этих решений можно образовать по крайней мере m линейно независимых комбинаций

$$y_1(x,\lambda),\ y_2(x,\lambda),\dots,\ y_m(x,\lambda)\in H(b,\infty), \tag{9}$$

удовлетворяющих граничному условию (6).

В действительности их ровно m, т.к. если бы при некотором $\lambda<\lambda_c$ этих решений было больше m, то из них можно было бы составить ненулевую линейную комбинацию, удовлетворяющую условиям (6) и

$$P(b)\,y'(b)=iy(b), \qquad (10)$$

однако оператор L_1, порожденный в $H(b,\infty)$ дифференциальным выражением (2) и граничными условиями (6), (10), вещественных собственных значений не имеет. Действительно, если $L_1 y=\lambda y$, $Jm\lambda=0$, то

$$0=\langle L_1 y,y\rangle-\langle y,L_1 y\rangle=\langle y(b),P(b)y'(b))-(P(b)y'(b),y(b))=-2i\,(y(b),y(b))$$

и, следовательно, $y(b)=y'(b)=0$, т.е. $y(x)\equiv 0$.

Построим решения (9) так, чтобы они были аналитическими по $\lambda\in(-\infty,\lambda_c)$.

Оператор L_1^* порождается дифференциальным выражением (2) и граничными условиями (6) и $P(b)\,y'(b)=-iy(b)$. Он также не имеет действительных собственных значений. Поэтому при любом $\lambda<\lambda_c$ оператор

$$R_\lambda=(L_1-\lambda I)^{-1}$$

определен во всем пространстве $H(b,\infty)$ и аналитически зависит от Λ в некоторой окрестности Λ интервала $(-\infty,\lambda_c)$ в комплексной плоскости.

Определим m линейных функционалов на $H(b,\infty)$ для каждого $\lambda\in\Lambda$

$$\varphi_k(f,\lambda)=(R_\lambda f)^{\langle k\rangle}(b), \qquad k=1,2,\dots,m,$$

где $(R_\lambda f)^{\langle k\rangle}$ – k – координата вектора $R_\lambda f$. Они ограничены в силу леммы XIII.2.16 [3]. По теореме Рисса

$$\varphi_k(f,\lambda)=\langle f(\cdot),\ g_k(\cdot,\bar\lambda)\rangle.$$

Вектор – функции $g_1(x,\lambda)$, $g_2(x,\lambda),\dots,g_m(x,\lambda)\in H(b,\infty)$ аналитически зависят от λ для $\bar\lambda\in\Lambda$ и линейно независимы. Действительно, если $\sum_{k=1}^{m}c_k g_k=0$, то для любой функции $f(x)\in H(b,\infty)$

$$\sum_{k=1}^{m}\bar c_k\,(R_\lambda f)^{\langle k\rangle}(b)=\sum_{k=1}^{m}\bar c_k\,\varphi_k(f,\lambda)=\sum_{k=1}^{m}\bar c_k\langle f(\cdot),g_k(\cdot,\bar\lambda)\rangle=\langle f(\cdot),\sum_{k=1}^{m}c_k g_k(\cdot,\bar\lambda)\rangle=0$$

и, следовательно, для любой функции $y=R_\lambda f\in D(L_1)$ имеем $(y(b),h)=0$, где $h=(c_1,c_2,\dots,c_m)$. Значит, $h=0$, т.е. $c_k=0$, $k=1,2,\dots,m$.

Пусть L_2 сужение L_1, определенное граничным условием (6) и $y(b)=y'(b)=0$. Если $f\in D(L_2)$ и $\lambda\in\Lambda$, то

$$\langle(L_2-\lambda I)f,\, g_k\rangle=\langle(L_1-\lambda I)f,\, g_k\rangle=\varphi_k\,((L_1-\lambda I)f,\lambda)=$$

$$=(R_\lambda(L_1-\lambda I)f)^{\langle k\rangle}(b)=(f(b))^{\langle k\rangle}=0.$$

Поэтому $g_k\in D(L_2^*)$ и $(L_2^*-\bar\lambda I)g_k(x,\bar\lambda)=0$ для $\bar\lambda\in\Lambda$. Таким образом, при $\lambda\in\Lambda$ функции $g_k(x,\lambda)\in H(b_0,\infty)$, $k=1,2,\dots,m$ удовлетворяют уравнению (1) при $b_0<x<\infty$ и аналитически зависят от λ.

Линейно независимые решения* $y_k(x,\lambda)$, $k=1,2,\dots,m$ уравнения (1) на оси, определенные начальными условиями $y_k(b_0,\lambda)=g_k(b_0,\lambda)$, $y_k'(b_0,\lambda)=g_k'(b_0,\lambda)$, являются аналитическими по $\lambda\in\Lambda$, принадлежат $H(b,\infty)$ и удовлетворяют граничному условию (6). Лемма доказана.

2. Обозначим через $Y(x,\lambda)$ $m\times m$ матрицу, столбцами которой являются векторы $y_1(x,\lambda)$, $y_2(x,\lambda),\dots,y_m(x,\lambda)$, построенные в лемме 2.

Рассмотрим матрицу

$$\theta(x,\lambda)=\left[p(x)Y'(x,\lambda)+iY(x,\lambda)\right]\left[p(x)Y'(x,\lambda)-iY(x,\lambda)\right]^{-1}.$$

Аналогично тому, как в работах [1], [6] показывается, что матрица $\theta(x,\lambda)$ унитарна и при фиксированном действительном λ ее собственное значение $\omega(x,\lambda)$, попадая в точку $+1$, с возрастанием x движется по единичной окружности монотонно в положительном направлении.

Заметим, что

$$\theta(x,\lambda)-I=2iY(x,\lambda)\left[p(x)Y'(x,\lambda)-iY(x,\lambda)\right]^{-1}, \tag{11}$$

$$\lambda\in\sigma(L_b^0)\Longleftrightarrow 1\in\sigma(\theta(b,\lambda)),\quad \varkappa^0(\lambda)=\varkappa_{\theta(b,\lambda)}(1),$$

где $\varkappa^0(\lambda)$ – кратность λ как собственного значения оператора L_b^0, а $\varkappa_\theta(\omega)$ – кратность ω как собственного значения матрицы $\theta(b,\lambda)$.

<u>Лемма 3</u>. Собственные значения $\lambda_j^0(b)<\lambda_c=\inf\sigma_c(L_b^0)$

оператора L_b^0 в $H(b,\infty)$ монотонно возрастают по b и

$$\lim_{b\to\infty}\left\{\inf\sigma(L_b^0)\right\}=\lambda_c. \tag{12}$$

Доказательство. Известно [7], что собственные значения $\lambda_j^0(b)$ оператора L_b^0 являются неубывающими функциями от b. Докажем их строгую монотонность.

Предположим, что в окрестности некоторой точки b_0 функция $\lambda_j^0(b)$ постоянна $\lambda_j^0(b)=\lambda'$. Тогда λ' является собственным значением оператора L_b^0 для всех b достаточно близких к b_0. В силу (11) матрица $\theta(b_0,\lambda')$ имеет $\varkappa^0(\lambda')$ собственных значений $\omega(b_0,\lambda')=1$. Поскольку собственные значения $\omega(b,\lambda')$ матрицы $\theta(b,\lambda')$ непрерывны и с возрастанием b движутся через точку $+1$ единичной окружности строго в положительном направлении, то при достаточно близких значениях $b>b_0$ все собственные значения $\omega(b,\lambda')$ будут отличны от $+1$ и, следовательно, $\lambda'\notin\sigma(L_b^0)$. Полученное противоречие означает, что собственные значения $\lambda_j^0(b)$ строго возрастают.

Поскольку $\inf\sigma(L_b^0)\le\lambda_c$ и является неубывающей* функцией, то

$$\lim_{b\to\infty}\left\{\inf\sigma(L_b^0)\right\}\le\lambda_c. \tag{13}$$

Возьмем произвольное $\mu<\lambda_c$. Так как левее μ оператор L_b^0 имеет лишь конечное число собственных значений, то уравнение (1) при $\lambda=\mu$ неосцилляторно ([7], п.12,13) и $\det Y(x,\mu)$ имеет лишь конечное число нулей при $b<x<\infty$ ([1], с.423, замечание). Обозначим через b_μ наибольший нуль $\det Y(x,\mu)$. Тогда при $b>b_\mu$ оператор L_b^0 не имеет собственных значений левее μ, т.е. $\inf\sigma(L_b^0)\ge\mu$ и учитывая (13), имеем (12). Лемма доказана.

Пусть $\nu(\lambda)$ – количество собственных значений $\lambda_k(b)<\lambda$ оператора $\tilde{L}_b$ с учетом их кратностей, обозначаемых $\varkappa(\lambda_k)$. Для оператора L_b^0 величину $\nu(\lambda)$ обозначаем $\nu^0(\lambda)$. Положим $nul\,Y(x,\lambda)=\dim Ker\,Y(x,\lambda)$.

Теорема 1. Для задачи (1), (7), (8) на полуоси (b,∞) при $\lambda<\lambda_c$

$$\nu(\lambda)-\min\left\{rg\cos B,\ m-\varkappa(\lambda)\right\}\le\sum_{x\in(b,\infty)} nul\,Y(x,\lambda)\le\nu(\lambda),$$

в частности, если $\cos B=0$, то $\sum\limits_{x\in(b,\infty)} nul\,Y(x,\lambda)=\nu^0(\lambda)$.

---

* $\inf\sigma(L_b^0)=\lambda_c$, если оператор L_b^0 не имеет собственных значений левее нижней грани предельного спектра.

Леммы 2,3 позволяют провести доказательство теоремы I с помощью рассуждений аналогичных доказательству теорем 1,2 [1].

3. Рассмотрим минимальный относительно $x=-\infty$ оператор L, порожденный в $H(-\infty,\infty)$ выражением $l_R[y]$ и граничным условием (6). Обозначим L_F его расширение по Фридрихсу,

$$\lambda_1^F \le \lambda_2^F \le \ldots \le \lambda_n^F \le \ldots \ (< \inf \sigma_c(L_F) = \lambda_c)$$

– собственные значения L_F,

$$\lambda_1^0(b) \le \lambda_2^0(b) \le \ldots \le \lambda_n^0(b) \le \ldots (< \inf \sigma_c(L_b^0))$$

– собственные значения оператора L_b^0.

Пусть $Y_b(x,\lambda)$ матричное решение уравнения (I), удовлетворяющее начальным условиям

$$Y_b(b,\lambda)=0, \qquad P(b)\,Y_b'(b,\lambda)=I_m .$$

Положим при $\lambda \in \Lambda$

$$G_b^0(x,t,\lambda)=\begin{cases} -Y(x,\lambda)\,W^{-1}\{Y_b, Y\}\,Y_b^*(t,\bar\lambda), & t<x,\\ Y_b(x,\lambda)\,W^{-1}\{Y, Y_b\}\,Y^*(t,\bar\lambda), & t>x,\end{cases}$$

где $W\{Z_1, Z_2\} = Z_1^*(x,\bar\lambda)P(x)Z_2'(x,\lambda) - Z_1^{*\prime}(x,\bar\lambda)\,P(x)\,Z_2(x,\lambda)$ и не зависит от x для матричных решений $Z_1(x,\lambda)$, $Z_2(x,\lambda)$ уравнения (I). Поэтому

$$W\{Y, Y_b\} = W\{Y, Y_b\}\Big|_{x=b} = Y^*(b,\bar\lambda),$$

$$W\{Y_b, Y\} = W\{Y_b, Y\}\Big|_{x=b} = -Y(b,\lambda).$$

$G_b^0(x,t,\lambda)$ – матричная функция Грина оператора $L_b^0-\lambda I$, в окрестности Λ интервала $(-\infty, \lambda_c)$ (в комплексной плоскости) является мероморфной функцией параметра λ, полюсы которой с учетом ранга вычетов совпадают с собственными значениями $\lambda_n^0(b)$ оператора L_b^0. Функция Грина $G_b^0(x,t,\lambda)$ допускает аналитическое продолжение по λ в полуплоскости $\mathbb{C}^{\pm}: Jm\lambda \gtrless 0$, порождает резольвенту

$R^0_{\lambda,b}$ оператора L^0_b

$$R^0_{\lambda,b} f = \int\limits_b^\infty G^0_b(x,t,\lambda) R(t) f(t)\,dt, \quad f \in H(b,\infty). \tag{14}$$

<u>Лемма 4</u>. При $b \to -\infty$

$$\lambda^0_n(b) \searrow \lambda^F_n.$$

<u>Доказательство</u>. Из мини-максимальной теории собственных значений и леммы 3 следует, что для любого самосопряженного расширения $\tilde{L}$ оператора L

$$\lambda^0_n(b) > \lambda_n(\tilde{L}), \quad \lambda_c(b) \geqslant \lambda_c, \quad \lambda^0_n(b_2) > \lambda^0_n(b_1) \qquad b_2 > b_1.$$

Поэтому существует

$$\lim_{b \to -\infty} \lambda^0_n(b) \stackrel{df}{=} \lambda^0_n \geqslant \lambda^F_n. \tag{15}$$

Последнее получаем, взяв в качестве $\tilde{L}$ оператор L_F.

Обозначим через Λ_0 произвольное компактное множество в $\Delta \cup C^+ \cup C^-$, не содержащее точек $\{\lambda^0_n\}$, λ_c. Заметим, что для отрицательных, достаточно больших по абсолютной величине b $\lambda^0_n(b)$, $\lambda_c(b) \in \Lambda_0$ и в дальнейшем будем рассматривать только такие b.

Следуя, в основном, доказательству леммы 4.1 и теоремы 4.1 ([8], с.297-302) для скалярных дифференциальных операторов, можно показать для векторного случая, что из любой неограниченно убывающей последовательности всегда можно выбрать такую последовательность $b_j \to -\infty$, что последовательность функций Грина $G^0_{b_j}(x,t,\lambda)$ для граничных задач (1), (6) и $y(b_j) = 0$ сходится равномерно по (x,t,λ) в любой компактной (x,t,λ) области, где $\lambda \in \Lambda_0$, к пределу $G(x,t,\lambda)$, который обладает следующими свойствами:

1) $G^*(x,t,\lambda) = G(t,x,\bar{\lambda})$;

2) при фиксированных t и λ производная $\frac{\partial G}{\partial x}$ непрерывна на каждом из интервалов $(-\infty,t)$, (t,∞) и имеет скачок при $x = t$

$$\frac{\partial}{\partial x} G(t-0,t,\lambda) - \frac{\partial}{\partial x} G(t+0,t,\lambda) = P^{-1}(t);$$

3) при фиксированных x и λ норма в E_m матрицы $G(x,t,\lambda) R^{\frac{1}{2}}(t)$ как функция t принадлежит $L_2(-\infty,\infty)$;

4) при фиксированном t функция $G(x,t,\lambda)$ по переменному x удовлетворяет уравнению (1), если $x \neq t$;

5) если $f \in H(-\infty,\infty)$, то функция $y(x,\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,t,\lambda)R(t)f(t)\,dt$ удовлетворяет уравнению $l_R[y]=\lambda y+f$ и принадлежит $H(-\infty,\infty)$.

Кроме того, можно показать:

6) при фиксированном t функция $G(x,t,\lambda)$ по переменному x удовлетворяет граничному условию (6).

Положим для $f \in H(-\infty,\infty)$

$$R_\lambda f=\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,t,\lambda)R(t)f(t)\,dt \tag{16}$$

и проверим, что оператор R_λ ограничен при $\lambda \in \Lambda_0$ и $|R_\lambda f - R^0_{\lambda,b_j}f| \to 0$ при $b_j \underset{0}{\to} -\infty$ равномерно на каждом компакте в (x,λ) области, $\lambda \in \Lambda_0$. Под $R^0_{\lambda,b}f$ понимаем (14).

Пусть сначала f – финитная функция с носителем σ. В силу равномерной сходимости последовательности $G^0_{b_j}$ имеем равномерно на каждом компакте в (x,λ) области $\lambda \in \Lambda_0$, что при $b_j \to -\infty$

$$\left|R_\lambda f - R^0_{\lambda,b_j}f\right| \le \int\limits_\sigma \left|\left[G^0_{b_j}(x,t,\lambda)-G(x,t,\lambda)\right]R(t)f(t)\right|dt \to 0.$$

Так как $\left\|R^0_{\lambda,b_j}\right\| \le d^{-1}_{b_j}(\lambda)$, где $d_{b_j}(\lambda)$ – расстояние от регулярной точки λ оператора L^0_b до его спектра, то при $\lambda \in \Lambda_0$ для всех отрицательных достаточно больших по абсолютной величине b_j $\|R^0_{\lambda,b_j}\| \le C(\Lambda_0)$, где $C(\Lambda_0)$ не зависит от b.

Поэтому для произвольного $0<a<-b_j$

$$\int\limits_{-a}^{a}\left(R(x)R^0_{\lambda,b_j}f,\ R^0_{\lambda,b_j}f\right)dx \le \int\limits_{b_j}^{\infty}\left(R(x)R^0_{\lambda,b_j}f,\ R^0_{\lambda,b_j}f\right)dx \le C^2(\Lambda_0)\,\|f\|^2.$$

Устремляя b_j к $-\infty$, получаем

$$\int\limits_{-a}^{a}\left(R(x)R_\lambda f,\ R_\lambda f\right)dx \le C^2(\Lambda_0)\,\|f\|^2.$$

Отсюда, при $a\to\infty$ для любой финитной функции $f(x)$ имеем, что

$$\left\|R_\lambda f\right\| \le C(\Lambda_0)\,\|f\|. \tag{17}$$

Расширяя по непрерывности, получаем, что R_λ является ограниченным оператором в $H(-\infty,\infty)$ при $\lambda \in \Lambda_0$.

Пусть $f(x)$ произвольная функция из $H(-\infty,\infty)$. Выберем последовательность финитных функций $\{f_k(x)\}$, которая сходится к $f(x)$ в $H(-\infty,\infty)$. В силу свойства 3 функции $G(x,t,\lambda)$, при $k\to\infty$

$$\left|R_\lambda(f-f_k)\right|\le\sqrt{\int_{-\infty}^{\xi}\left|G(x,t,\lambda)R^{1/2}(t)\right|^2dt}\;\|f-f_k\|\to 0$$

и аналогично при $k\to\infty$

$$\left|R^0_{\lambda,b_j}(f-f_k)\right|\to 0.$$

Поэтому равномерно на каждом компакте в (x,λ) области, $\lambda\in\Lambda_0$, при $k\to\infty$, $b_j\to-\infty$

$$\left|R_\lambda f-R^0_{\lambda,b_j}f\right|\le\left|R_\lambda(f-f_k)\right|+\left|(R_\lambda-R^0_{\lambda,b_j})f_k\right|+\left|R^0_{\lambda,b_j}(f-f_k)\right|\to 0. \tag{18}$$

Докажем, что R_λ является обобщенной резольвентой симметрического оператора L.

Для этого, в соответствии с теоремой 6 из работы [9], достаточно проверить, что при $\operatorname{Im}\lambda\ne 0$:

а) $(L^*-\lambda I)R_\lambda=I$;

б) $\|[I+(\lambda-\bar\lambda)R_\lambda]f\|\le\|f\|$ при любом $f\in H(-\infty,\infty)$;

в) $R^*_\lambda=R_{\bar\lambda}$;

г) $R_\lambda f$ – регулярная функция от λ при любом $f\in H(-\infty,\infty)$.

Действительно, в силу свойства 1 функции $G(x,t,\lambda)$ имеем, что $R^*_\lambda=R_{\bar\lambda}$, а в силу свойств 4, 5 и 6 при любом $f\in H(-\infty,\infty)$ $R_\lambda f\in D(L^*)$ и $(L^*-\lambda I)R_\lambda f=f$.

Проверим условие (б). Для произвольного $0<a<-b$ и финитной функции f имеем

$$\int_{-a}^{a}\left|R^{1/2}(x)\left[f(x)-(\lambda-\bar\lambda)\int_b^\infty G^0_b(x,t,\lambda)R(t)f(t)dt\right]\right|^2dx\le$$

$$\le\int_b^\infty\left|R^{\frac12}(x)\left[f(x)-(\lambda-\bar\lambda)R^0_{\lambda,b}f(x)\right]\right|^2dx=\int_b^\infty\left|R^{\frac12}(x)f(x)\right|^2dx\le\int_{-\infty}^\infty\left|R^{\frac12}(x)f(x)\right|^2dx.$$

Здесь мы воспользовались тем, что для резольвенты самосопряженного оператора в (б) имеет место равенство. Устремляя $b=b_j$ к $-\infty$, получаем

$$\int_{-a}^{a}\left|R^{\frac12}(x)\left[f(x)-(\lambda-\bar\lambda)\int_{-\infty}^\infty G(x,t,\lambda)R(t)f(t)dt\right]\right|^2dx\le\|f\|^2.$$

Отсюда при $a \to \infty$ для любой финитной функции $f(x)$ следует (б). В силу (17), расширяя по непрерывности, получаем (б) для всех функций $f \in H(-\infty, \infty)$.

д) Так как аналитичность в сильном и слабом смысле вектор функций совпадает [13], то достаточно установить аналитичность функций $g(\lambda) = \langle R_\lambda f, h \rangle$ при любых $f, h \in H(-\infty, \infty)$, $Jm\,\lambda \neq 0$.

Поскольку функции $g_b(\lambda) = \langle R^o_{\lambda,b} f, h \rangle_b$ являются аналитическими при любых $f, h \in H(-\infty, \infty)$, $Jm\,\lambda \neq 0$ и $|g_b(\lambda)| \leq c\,\|f\|\,\|h\|$ в силу (17), то для аналитичности функций $g(\lambda)$ при $Jm\,\lambda \neq 0$ достаточно доказать, что $g_b(\lambda) \to g(\lambda)$ при $b = b_j \to -\infty$. В силу (18) это так для любой финитной функции $h(x)$ и произвольной $f \in H(-\infty, \infty)$.

Пусть $h(x)$ – произвольная функция из $H(-\infty, \infty)$. Выбирая последовательность финитных функций $\{ h_k(x) \}$, которая сходится к $h(x)$ в $H(-\infty, \infty)$, для любого невещественного λ при $b = b_j \to -\infty$ имеем, что

$$|g(\lambda) - g_b(\lambda)| \leq \left| \langle R_\lambda f, h_k \rangle - \langle R^o_{\lambda,b} f, h_k \rangle_b \right| +$$

$$+ \left\| R_\lambda f \right\| \cdot \left\| h - h_k \right\| + \left\| R^o_{\lambda,b} f \right\| \cdot \left\| h - h_k \right\| \to 0.$$

Таким образом, $G(x, t, \lambda)$ порождает обобщенную резольвенту симметрического оператора L по формуле (16) и в силу построения при $\lambda < \lambda_c$ может иметь полюсы лишь в точках λ^o_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Занумеруем эти полюсы (с учетом рангов вычетов): $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots$ Рассуждая аналогично тому, как в работе [1] (при завершении доказательства леммы 6) видим, что $\lambda^o_n \leq \mu_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, а из леммы 7 [1] следует, что $\mu_n \leq \lambda^F_n$. Вместе с (15) эти неравенства дают, что $\lambda^o_n = \mu_n = \lambda^F_n$. Лемма доказана.

<u>Теорема 2</u>. Пусть минимальный относительно $x = -\infty$ оператор L, порожденный в $H(-\infty, \infty) = L^2_m((-\infty, \infty), R(x)\,dx)$ выражением $l_R[y]$ и граничным условием (6), полуограничен, $\nu_F(\lambda)$ – количество собственных значений $\lambda^F_n < \lambda$, отвечающих его расширению по Фридрихсу L_F, $\nu_o(\lambda)$ – количество собственных значений $\lambda^o_n < \lambda$ (с учетом кратности) самосопряженного расширения $\tilde{L}_o$, резольвента R_λ которого получается предельным переходом при $b = b_j \to -\infty$ резольвент $R^o_{\lambda,b}$ задачи (1), (6), $y(b) = 0$. Тогда при $\lambda < \lambda_c = \inf \sigma_c(\tilde{L}_o)$

$$\sum_{x \in (-\infty, \infty)} \operatorname{rul} Y(x, \lambda) = \nu_F(\lambda) = \nu_o(\lambda).$$

Теорема 3. В предположениях теоремы 2 пусть Λ означает такое самосопряженное расширение в $H(-\infty,\infty)$ оператора L, что левее некоторого фиксированного $\mu < \lambda_c$

$$\lambda_n(\Lambda) = \lambda_n^F \ (<\mu), \qquad n = 1, 2, \dots,$$

$\tilde{L}$ — произвольное самосопряженное полуограниченное расширение L в $H(-\infty,\infty)$,

$$\rho = \min_{\Lambda} Def \left\{ \tilde{L} \,\middle|\, D(L) \cap D(\Lambda) \right\},$$

(Def означает дефектное число оператора), $\nu_{\tilde{L}}(\lambda)$ — считающая функция для собственных чисел, меньших λ оператора $\tilde{L}$. Тогда при $\lambda \le \mu$

$$\nu_{\tilde{L}}(\lambda) - \rho \le \sum_{x \in (-\infty,\infty)} nul\, Y(x,\lambda) = \nu_F(\lambda) = \nu_0(\lambda) \le \nu_{\tilde{L}}(\lambda).$$

Если же $Def\, L = d$ и для оператора L (замкнутого) λ не является собственным числом, то при $\lambda \le \mu$

$$\nu_{\tilde{L}}(\lambda) - \min\left\{ \rho, d - \varkappa_{\tilde{L}}(\lambda) \right\} \le \sum_{x \in (-\infty,\infty)} nul\, Y(x,\lambda) = \nu_F(\lambda) \dot{\le} \nu_{\tilde{L}}(\lambda).$$

С учетом леммы 4 доказательство теорем 2,3 проводится аналогично доказательству теорем 3,4 [1].

4. Рассмотрим самосопряженный оператор M, порожденный в $H(-\infty,\infty)$ симметрической системой первого порядка

$$m[y] = Jy' + H(x)y = \lambda y,$$

где $J^* = J^{-1} = -J$; $H(x)$ — непрерывно дифференцируемая эрмитова $m \times m$ матрица $(m = 2p)$, непрерывный спектр которой не покрывает всю ось.

В случае, когда

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ -I_p & 0 \end{pmatrix}, \qquad H(x) = \begin{pmatrix} P(x) & Q(x) \\ Q(x) & -P(x) \end{pmatrix}, \quad P = P^*, \quad Q = Q^*,$$

получаем одномерный самосопряженный оператор Дирака на оси.

Симметрический оператор M_0, порожденный в $H(0,\infty)$ дифференциальной операцией $m[y]$, имеет дефектные числа $N_{\pm} = p$ ([10], [11]). Пусть

$$y_1(x,\mu), \quad y_2(x,\mu), \dots, y_p(x,\mu) \in H(0,\infty)$$

— линейно независимые решения системы $m[y]=\mu y$, а

$$y_{p+1}(x,\lambda),\quad y_{p+2}(x,\lambda),\dots,\ y_{2p}(x,\lambda)\in H(0,\infty)$$

линейно независимые решения системы $m[y]=\lambda y$. Тогда при $\lambda\neq\mu$ функции

$$y_1(x,\mu),\quad y_2(x,\mu),\dots,\ y_p(x,\mu),\ y_{p+1}(x,\lambda),\dots,y_{2p}(x,\lambda) \tag{19}$$

также линейно независимы. Действительно, если

$$\sum_{k=1}^{p}\alpha_k\, y_k(x,\mu)+\beta_k\ y_{p+k}(x,\lambda)=0, \tag{20}$$

то

$$0=m\Big[\sum_{k=1}^{p}\alpha_k\, y_k+\beta_k\, y_{p+k}\Big]=\mu\sum_{k=1}^{p}\alpha_k\, y_k+\lambda\sum_{k=1}^{p}\beta_k\, y_{p+k}. \tag{21}$$

Сравнивая (20) и (21), получим, что $\alpha_k=\beta_k=0$, $k=1,2,\dots,p$. Рассмотрим матрицу $\tilde{Y}(x,\mu,\lambda)$, столбцами которой являются вектор-функции (19).

Обозначим $\nu(\mu,\lambda)$ количество собственных значений $\mu<\lambda_k<\lambda$ оператора M с учетом их кратности.

Теорема 4. Пусть (α,β) лакуна непрерывного спектра оператора M. При $\alpha<\mu<\lambda<\beta$

$$\sum_{x\in(-\infty,\infty)} nul\ \tilde{Y}(x,\mu,\lambda)=\nu(\mu,\lambda). \tag{22}$$

Доказательство. Возьмем $c=(\lambda+\mu)/2$ и рассмотрим дифференциальную операцию $m_c[y]=m[y]-cy$. Тогда $m_c[y_k(x,\mu)]=-\frac{\lambda-\mu}{2}y_k(x,\mu)$, $m_c[y_{p+k}(x,\lambda)]=\frac{\lambda-\mu}{2}y_{p+k}(x,\lambda)$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $\lambda=-\mu>0$.

Квадрат оператора M, как известно [12], унитарно эквивалентен самосопряженному оператору Штурма – Лиувилля L, порожденному операцией

$$l[y]=U^{-1}(x)m[m[U(x)y]]=-y''+U^{-1}(x)Q_1(x)U(x)y=\lambda^2 y, \tag{23}$$

где $U(x)$ – унитарная матрица, $Q_1(x)=\frac{1}{4}(JH+HJ)^2+\frac{1}{2}(JH'-H'J)+H^2$. Функции

$$U^{-1}(x)y_1(x,-\lambda),\dots,U^{-1}(x)y_p(x,-\lambda),U^{-1}(x)y_{p+1}(x,\lambda),\dots,U^{-1}(x)y_{2p}(x,\lambda)$$

при $\lambda > 0$ являются линейно независимыми решениями уравнения (23). Поэтому $Y(x,\lambda) = U^{-1}(x)\tilde{Y}(x,-\lambda,\lambda)$ является матричным решением уравнения (23), $y(x,\lambda) = Y(x,\lambda)h \in H(0,\infty)$ при любом $h \in E_m$ и в силу теоремы 2

$$\sum_{x\in(-\infty,\infty)} mul\, Y(x,\lambda) = \nu_0(\lambda),$$

где $\nu_0(\lambda)$ - количество собственных значений $\lambda_k < \lambda$ (с учетом кратности) оператора L. Так как $\nu(-\lambda,\lambda) = \nu_0(\lambda)$ и

$$\sum_{x\in(-\infty,\infty)} mul\, Y(x,\lambda) = \sum_{x\in(-\infty,\infty)} mul\, \tilde{Y}(x,-\lambda,\lambda),$$

то имеем (22). Теорема доказана.

Литература

1. Рофе-Бекетов Ф.С., Холькин А.М. О связи между спектральными и осцилляционными свойствами матричной задачи Штурма-Лиувилля.- Мат. сб., 1977, 102 (144), № 3, с.410-424.
2. Брусенцев А.Г., Рофе-Бекетов Ф.С. Условия самосопряженности сильно эллиптических систем произвольного порядка. - Мат. сб., 1974, 95 (137), № 1, с.108-129.
3. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Спектральная теория. - М.: Мир, 1966. - 1063 с.
4. Кочубей А.Н. О расширении симметрических операторов и симметрических бинарных отношений. - Мат. заметки, 1975, 17, вып.1, с.41-48.
5. Брук В.М. Об одном классе краевых задач со спектральным параметром в граничном условии. - Мат. сб., 1976, 100 (142), № 2, с.210-216.
6. Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. - М.: Мир, 1968. - 749 с.
7. Глазман И.М. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. - М.: Наука, 1963.- 339 с.
8. Коддингтон, Левинсон. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Изд-во иностр.лит., 1958. - 474 с.
9. Штраус А.В. Обобщенные резольвенты симметрических операторов. - Изв. АН СССР, 1954, сер. мат., 18, № 1, с.51-86.
10. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Введение в спектральную теорию.- М.: Наука, 1970. - 671 с.
11. Мартынов В.В. Условия дискретности и непрерывности спектра в случае самосопряженной системы дифференциальных уравнений первого порядка. - Докл. АН СССР, 1965, 165, № 5, с.996-999.
12. Мартынов В.В. Прямые методы качественного спектрального анализа несамосопряженной системы дифференциальных уравнений первого порядка, II. - Диф. уравнения, 1968, IУ, (12), с.2243-2257.
13. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. - М.: Изд-во иностр. лит., 1962. - 829 с.

УДК 539.12 : 530.145

И.Ю.Чудинович

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ В КВАНТОВЫХ ТЕОРИЯХ С ПОЛЯМИ НУЛЕВОЙ МАССЫ

Целью статьи является изучение зависимости ренормированных фейнмановских амплитуд от внешних импульсов в теориях с нулевыми массами. Приведем основные определения.

I. Ренормированные фейнмановские амплитуды

Рассматриваются теории с лагранжианами взаимодействия, полиномиально зависящими от полевых операторов и их производных. Чтобы избежать излишней громоздкости приводимых формул, при изложении ограничимся случаем лагранжианов вида

$$L(x) = L(A_1(x), \dots, A_Q(x)),$$

где $A_j(x)$ $(1 \le j \le Q)$ – операторы бозонных полей с массами $m_j \ge 0$; L – нормальный полином; x – вектор в пространстве Минковского с компонентами x^i $(i = 0, \dots, 3)$.

При вычислении амплитуд по теории возмущений возникают "ультрафиолетовые" и "инфракрасные" расходимости. Для их устранения размажем массы полей, заменив обычные полевые операторы в импульсном пространстве операторами с нетривиальным коммутатором

$$[a_j(k), a_j^*(k')] = \theta(k^0)\tilde{\varphi}_j(k^2)\delta(k-k').$$

Функции $\tilde{\varphi}_j(s)$ удовлетворяют условиям:
1. $\tilde{\varphi}_j(s)$ принадлежат пространству Шварца S;
2. $\operatorname{supp} \tilde{\varphi}_j(s) \subset (0, \infty)$;
3. $\int_0^\infty s^k \tilde{\varphi}_j(s)\,ds = 0$ при $k = 0, 1, 2, \dots$.

Полевые операторы и перестановочные функции в конфигурационном пространстве определяются обычным образом. Причинные функции

$$\Delta^c_{\varphi_j}(x) = (4\pi)^{-2} \int_0^\infty dt\, t^{-2} \varphi_j(t) \exp\left[-\frac{i}{4t} x^2\right], \qquad \text{где}$$

$$\varphi_j(t) = \int_0^\infty e^{-ist} \tilde{\varphi}_j(s)\,ds,$$

а также их преобразования Фурье $\Delta^{c}_{\rho_j}(k)$ бесконечно дифференцируемы. Подробное описание этой схемы можно найти в работах [2,3].

Коэффициентная функция $\Pi(G;\, x_1,\dots,x_n) = \Pi(G)$ вклада связной фейнмановской диаграммы G с вершинами $x_1,\dots,x_n$ в ряд теории возмущений для S - матрицы с точностью до постоянного множителя равна

$$\prod_{\alpha=1}^{L} \Delta^{c}_{\rho_{c(\alpha)}}(x_{l_\alpha} - x_{k_\alpha}).$$

Здесь L - число внутренних линий G, α нумерует линию, соединяющую x_{l_α} и x_{k_α}; $c(\alpha)$ - функция, сопоставляющая линии с номером α номер соответствующего поля.

Снятию размазываний, т.е. предельному переходу $\tilde{\varphi}_j(s) \to \delta(s-m_j^2)$, должна предшествовать вычитательная процедура (R-операция). Вариант R-операции, применяемый нами, описан в работе [2]. Суть его состоит в замене $\Pi(G)$ ренормированными коэффициентными функциями $R\Pi(G;x_1,\dots,x_n) = R\Pi(G)$.

Значение функционала $R\Pi(G)$ на основной функции $\psi(x) = \psi(x_1,\dots,x_n) \in S(R^{4n})$ дается параметрическим интегралом

$$(R\Pi(G),\psi) = const \int_0^\infty \prod_{j=1}^{L} \frac{dt_j}{t_j^2}\varphi_{c(j)}(t_j) \int_0^1 \prod_{G_i\in\{G\}} \frac{(1-\tau_i)^{r_i}}{r_i!} \times$$

$$\times\, d\tau_i \frac{\partial^{r_i+1}}{\partial\tau_i^{r_i+1}} \tau_i^{-4(n_i-1)} \int d^{4n}x \prod_{\alpha=1}^{L} \exp\left[-\frac{i}{4t_\alpha}\frac{(x_{l_\alpha}-x_{k_\alpha})^2}{\varkappa_\alpha^2(\tau)}\right]\psi(x), \qquad (1)$$

абсолютно сходящимся по переменным t_j, τ_i.

Здесь $\{G\}$ - совокупность всех сильно связных расходящихся поддиаграмм диаграммы G; τ_i - параметр, который сопоставляется $G_i \in \{G\}$; n_i и r_i - число вершин и индекс расходимости $G_i \in \{G\}$ соответственно; $\varkappa_\alpha(\tau)$ - произведение τ_i, отвечающих G_i, содержащим линию с номером α.

Каждой внешней линии диаграммы G, ассоциированной с вершиной x_i, сопоставим импульс $p_{i,j}$. Каждой вершине x_i сопоставим линейную форму $\theta_i(p)$ по следующему правилу. Вершинам без внешних линий соответствует нулевая форма. Для остальных вершин

$$\theta_i(p)=\sum_{j=1}^{L_i^{ext}} \varepsilon_{i,j} p_{i,j} .$$

Здесь L_i^{ext} – число внешних линий G, ассоциированных с x_i; индекс j нумерует эти линии; $\varepsilon_{i,j}=1$, если внешняя линия с номером j исходит из x_i; $\varepsilon_{i,j}=-1$, если внешняя линия с номером j входит в x_i.

Вакуумные диаграммы не рассматриваются. Обозначим через $R\tilde{\Pi}(G;k_1,\dots,k_n)=R\tilde{\Pi}(G)$ обобщенное преобразование Фурье $R\Pi(G;x_1,\dots,x_n)$.

Ренормированной фейнмановской амплитудой, отвечающей диаграмме G, назовем $R\tilde{\Pi}(G;\theta_1(p),\dots,\theta_n(p))$.

2. Постановка задачи

Даже после применения к $\Pi(G)$ R-операции вопрос о возможности выполнения в ренормированных коэффициентных функциях и, тем более, в ренормированных амплитудах предельного перехода $\tilde{\varphi}_j(s)\to\delta(s-m_j^2)$ нетривиален. Возникающие здесь трудности связаны со слабым убыванием подынтегральной функции в (I) по параметрам t_α, так что можно лишь надеяться на условную сходимость этого интеграла при $\tilde{\varphi}_j(s)=\delta(s-m_j^2)$.

Решение этой задачи для случая теорий с ненулевыми массами дано в работах [4-6]. Однако предложенные в этих работах методы не удается применить в теориях с нулевыми массами. Наконец, в работе [2] удалось доказать существование предела $R\Pi(G;x_1,\dots,x_n)$ в топологии $S(R^{4n})$ при снятии размазывания масс для широкого класса диаграмм с нулевыми массами. Для удобства сформулируем этот результат в виде теоремы.

Обозначим через X множество номеров полей $A_j(x)$ с ненулевыми массами, через Y – множество $\{1,2,\dots,Q\}\setminus X$.

<u>Теорема I</u>. Пусть G – диаграмма, удовлетворяющая следующему условию. Каждая из поддиаграмм $G_i\in\{G\}$ содержит в качестве внутренней хотя бы одну линию с номером j таким, что $m_{c(j)}>0$. Тогда предел $R\Pi(G;x_1,\dots,x_n)$ при последовательном предельном переходе $\tilde{\varphi}_j(s)\to\delta(s)$, $c(j)\in Y$; $\tilde{\varphi}_k(s)\to\delta(s-m_k^2)$, $c(k)\in X$, $supp\,\tilde{\varphi}_k(s)\subset(\delta,\infty)$, $\delta>0$ есть функционал над пространством Шварца $S(R^{4n})$.

Из утверждения теоремы I, разумеется, не следует существование предела соответствующих ренормированных амплитуд при снятии размазывания масс. В следующем разделе дано доказательство существования этого предела для одного класса фейнмановских диаграмм.

3. Предельный переход к фиксированным массам в ренормированных фейнмановских амплитудах

В работе [2] показано, что $R\Pi(G; x_1, \ldots, x_n)$ представляется в виде

$$const \int_0^1 \prod_{G_i \in \{G\}} \frac{(1-\tau_i)^{r_i}}{r_i!} \frac{d\tau_i}{\tau_i} \int_0^\infty \prod_{j=1}^{L} \frac{dt_j}{t_j^2} \varphi_{c(j)} \left(\frac{t_j}{\varkappa_j^2(\tau)} \right) \times$$

$$\times \prod_{G_\beta \{G\}} D(G_\beta) \left\{ exp \left[-\frac{i}{4} \sum_{\alpha=1}^{L} \frac{(x_{l_\alpha} - x_{k_\alpha})^2}{t_\alpha} \right] \right\},$$

где

$$\prod_{G_\beta \in \{G\}} D(G_\beta) \left\{ exp \left[-\frac{i}{4} \sum_{\alpha=1}^{L} \frac{(x_{l_\alpha} - x_{k_\alpha})^2}{t_\alpha} \right] \right\} =$$

$$= \prod_{G_i \in \{G\}} \left(\frac{\partial}{\partial \tau_i} \right)^{r_i+1} \tau_i^{-4(n_i-1)} exp \left[-\frac{i}{4} \sum_{\alpha=1}^{L} \frac{(x_{l_\alpha} - x_{k_\alpha})^2}{t_\alpha \varkappa_\alpha^2(\tau)} \right] \Bigg|_{\tau_i=1} .$$

$R\tilde{\Pi}(G; k_1, \ldots, k_n)$ дается параметрическим интегралом

$$\delta\left(\sum_{\gamma=1}^{n} k_\gamma \right) \int_0^1 \prod_{G_i \in \{G\}} \frac{(1-\tau_i)^{r_i}}{r_i!} \frac{d\tau_i}{\tau_i} \int_0^\infty \prod_{j=1}^{L} dt_j \, \varphi_{c(j)} \left(\frac{t_j}{\varkappa_j^2(\tau)} \right) \times$$

$$\times \sum_{(m)} S_m(G, t) \Pi_m(k_2, \ldots, k_n) exp \left[i A^{-1}(k_2, \ldots, k_n; t) \right].$$

Здесь $S_m(G,t)$ – однородные рациональные функции переменных t_j $(j=1,\dots,L)$; $\Pi_m(k_2,\dots,k_n)$ – однородные полиномы, зависящие от компонент векторов $k_2,\dots,k_n$, $A^{-1}(k_2,\dots,k_n;\,t)$ – квадратичная форма, обратная к форме

$$A(u,t)=\sum_{\alpha=1}^{L}\frac{\left(u_{l_\alpha}-u_{k_\alpha}\right)^2}{t_\alpha}, \quad u_1\equiv 0.$$

Введем обозначения $V=\{j: c(j)\in X\}$, $W=\{j: c(j)\in Y\}$.

Будем говорить, что связная диаграмма G обладает массивным базисом, если при удалении из нее всех линий с номерами из W диаграмма остается связной.

<u>Теорема 2</u>. Пусть G – диаграмма, обладающая массивным базисом. Тогда предел $R\tilde{\Pi}(G;\,\theta_1(p),\dots,\theta_n(p))$ при предельном переходе $\tilde{\varphi}_j(s)\to\delta(s-m_j^2)$, $j\in X$, $\operatorname{supp}\tilde{\varphi}_j(s)\subset(\delta,\infty)$, $\delta>0$; $\tilde{\varphi}_j(s)\to\delta(s)$, $j\in Y$ есть обобщенная функция медленного роста от внешних импульсов диаграммы G.

Доказательству теоремы предпошлем лемму.

<u>Лемма</u>. Пусть G – диаграмма, обладающая массивным базисом. Для всех m справедливы неравенства

$$\int_0^1 \prod_{G_i\in\{G\}}\frac{d\tau_i}{\tau_i}\prod_{j\in V}\int_0^{\mathcal{R}_j^2(\tau)} dt_j\prod_{l\in W}\int_0^\infty dt_l\,/S_m(G,t)/<\infty. \tag{2}$$

<u>Доказательство</u>.

Пусть $1\in W$. Покажем, что при $t_j\leq 1$, $j\in V$ справедливы неравенства

$$/S_m(G,t)/\leq\sum_{(b)}c_b\,/S_b(G^{(1)},t^{(1)})/\,t_1^{-\mu_b}, \tag{3}$$

где $c_b\geq 0$, $\mu_b\geq 2$, $G^{(1)}$ – диаграмма, получившаяся из G после удаления первой линии; $t^{(1)}$ – совокупность параметров $t_2,\dots,t_L$.

Для этого запишем равенство, которое следует из определения операции $\Pi D(G_i)_L$:

$$\prod_{G_i \in \{G\}} D(G_i) \left\{ \prod_{\alpha=1}^{4} t_\alpha^{-2} exp\left[-\frac{i(x_{l_\alpha} - x_{k_\alpha})^2}{4t_\alpha} \right] \right\} = \sum_{(x_j)} t_1^{-2} \times$$

$$\times \left[\frac{(x_{l_1} - x_{k_1})^2}{t_1} \right]^{x_1} exp\left[-\frac{i(x_{l_1} - x_{k_1})^2}{4t_1} \right] \prod_{(\beta)} D_\beta \left\{ \prod_{\alpha=2}^{4} \left[\frac{(x_{l_\alpha} - x_{k_\alpha})^2}{t_\alpha} \right]^{x_\alpha} \times \right.$$

$$\left. \times t_\alpha^{-2} exp\left[-\frac{i(x_{l_\alpha} - x_{k_\alpha})^2}{4t_\alpha} \right] \right\} c(x_1, x_2, \ldots, x_4), \qquad (4)$$

где $x_j \geqslant 0$, $c(x_1, \ldots, x_4)$ – постоянные множители.

Слагаемые в правой части равенства (4) получаются после дифференцирования экспонент по параметрам τ_i, отвечающим поддиаграммам $G_i \in \{G\}$, содержащим первую линию. Символом $\prod\limits_{(\beta)} D_\beta$ обозначено произведение $D(G_i)$, отвечающих $G_i \in \{G\}$, не содержащим первуг линию.

Преобразование Фурье функционала

$$\prod_{(\beta)} D_\beta \left\{ \prod_{\alpha=2}^{4} \left[\frac{(x_{l_\alpha} - x_{k_\alpha})^2}{t_\alpha} \right]^{x_\alpha} t_\alpha^{-2} exp\left[-\frac{i(x_{l_\alpha} - x_{k_\alpha})^2}{4t_\alpha} \right] \right\}$$

по переменным $u_i = x_i - x_1$ $(i = 2, \ldots, n)$ запишем в виде

$$\sum_{(b)} S_b\left(G^{(1)}, t^{(1)}\right) \Pi_b(k_2, \ldots, k_n) exp\left[i A^{-1}(k_2, \ldots, k_n; t^{(1)}) \right],$$

где $\Pi_b(k_2, \ldots, k_n)$ – однородные полиномы; $A^{-1}(k_2, \ldots, k_n; t^{(1)})$ - квадратичная форма, обратная к форме $\sum\limits_{\alpha=2}^{4} t_\alpha^{-1} (u_{l_\alpha} - u_{k_\alpha})^2$, $u_1 \equiv 0$, невырожденной в силу условия леммы.

Нетрудно видеть, что преобразование Фурье правой части в (4) можно представить в виде суммы слагаемых

$$\delta\left(\sum_{\gamma=1}^{n} k_\gamma \right) t_1^\alpha S_b(G^{(1)}, t^{(1)}) \Pi_{j'}(k) \int d^4 z \, \Pi_{j''+\alpha}(z) \times$$

$$\times \exp\left[iz^2 t_1 + iA^{-1}(k,z;t^{(1)})\right],$$

где $\alpha \geqslant 0$, $\Pi_{j'}$, $\Pi_{j''+\alpha}$ – полиномы степени j' и $j''+\alpha$ соответственно,

$$A^{-1}(k,z;t^{(1)}) = A^{-1}(k_2,\ldots,k_n;t^{(1)}) + z^2 A(t^{(1)}) + z\sum ka(t^{(1)}). \tag{5}$$

В (5) $A(t^{(1)})$ – значение формы $A^{-1}(k_2,\ldots,k_n;t^{(1)})$ на некотором фиксированном векторе. В силу позитивности формы $A(t^{(1)}) \geqslant 0$ $\sum ka(t^{(1)})$ – линейная комбинация компонент векторов k_j, умноженных на коэффициенты формы $A^{-1}(k_2,\ldots,k_n;t^{(1)})$.

Проинтегрировав по z, получим сумму слагаемых

$$\delta\left(\sum_{\gamma=1}^{n} k_\gamma\right) t_1^\alpha S_\delta(G^{(1)},t^{(1)})\left[t_1 + A(t^{(1)})\right]^{-2-\mu} \times$$

$$\times \Pi_{\mu-\nu}\left(ka(t^{(1)})\right) \Pi_{j'}(k) \exp\left[iA^{-1}(k_2,\ldots,k_n;t)\right], \tag{6}$$

$\mu+\nu = 2\alpha + j''$, $\mu \geqslant \nu$, $\Pi_{\mu-\nu}$ – полином степени $\mu-\nu$. Удобно переписать выражение в (6) в виде

$$\delta\left(\sum_{\gamma=1}^{n} k_\gamma\right) t_1^\alpha S_\delta(G^{(1)},t^{(1)})\left[t_1 + A(t^{(1)})\right]^{-2-\mu} \Pi_{j'+\mu-\nu}(k) \times$$

$$\times R(t) \exp\left[iA^{-1}(k_2,\ldots,k_n;t)\right],$$

где $R(t)$ – произведение функций $a(t^{(1)})$.

Поскольку $\mu \geqslant \alpha$, для доказательства (3) достаточно убедиться в ограниченности $a(t^{(1)})$ в области $t_j \leqslant 1$, $j \in V$.

Ограниченность $a(t^{(1)})$ следует из оценки

$$\sum_{j=2}^{L} t_j^{-1}(u_{l_j} - u_{k_j})^2 \geqslant \sum_{j\in V} t_j^{-1}(u_{l_j} - u_{k_j})^2 \tag{7}$$

и из невырожденности формы в правой части (7).

Пусть $W' \subset W$, $V' = V \cup W'$, G' – диаграмма, полученная из G удалением линий с номерами $j \in \{1,\dots,L\} \setminus V'$; $S_\gamma(G', t')$ – соответствующие рациональные функции.

Последовательно применяя (3), приходим к утверждению.

В области $t_j \leq 1$, $j \in V$ справедливы неравенства

$$\left| S_m(G,t) \right| \leq \sum_{(\gamma)} c_\gamma \left| S_\gamma(G',t') \right| \prod_{j \in \{1,\dots,L\} \setminus V'} t_j^{-\mu_j}, \tag{8}$$

где $\mu_j \geq 2$; c_γ – константы.

С помощью (8) докажем лемму. Представим интеграл в (2) в виде суммы слагаемых

$$\int_0^1 \prod_{G_i \in \{G\}} \frac{d\tau_i}{\tau_i} \prod_{j \in V} \int_0^{\mathcal{X}_j^2(\tau)} dt_j \prod_{j' \in W'} \int_0^1 dt_{j'} \prod_{j'' \in W''} \int_1^\infty dt_{j''} \left| S_m(G,t) \right|. \tag{9}$$

Сходимость интегралов (9) следует из (8) и из оценки

$$\prod_{j \in V} \int_0^{\mathcal{X}_j^2(\tau)} dt_j \prod_{j' \in W'} \int_0^1 dt_{j'} \left| S_{\gamma'}(G',t') \right| \leq const \min_{G_j \in \{G\}} \tau_j,$$

полученной в работах [1,2].

Перейдем к доказательству теоремы. Из сказанного ранее следует, что $R\tilde{\Pi}(G;\theta_1(p),\dots,\theta_n(p))$ представима параметрическим интегралом

$$\int_0^1 \prod_{G_i \in \{G\}} \frac{(1-\tau_i)^{r_i}}{r_i!} \frac{d\tau_i}{\tau_i} \int_0^\infty \prod_{j=1}^L dt_j \, \tilde{\varphi}_{c(j)}\left(\frac{t_j}{\mathcal{X}_j^2(\tau)}\right) \sum_{(\delta)} S_\delta(t_1,\dots,t_L) \times$$

$$\times \prod_\delta (\theta_2,\dots,\theta_n) \exp\left[iA^{-1}(\theta_2,\dots,\theta_n;t)\right] \delta\left(\sum_{j=1}^n \theta_j\right). \tag{10}$$

Заменой переменных преобразуем интеграл, являющийся множителем при $\delta(\sum \theta_j)$ в (10), к виду

$$\int_0^\infty \prod_{j=1}^{L} dt_j \, \tilde{\varphi}_{c(j)}(t_j) \int_0^1 \prod_{G_i \in \{G\}} d\tau_i \sum_{(b)} s_b(t,\tau) \, \Pi_b(\theta_2, \ldots, \theta_n) \times$$

$$\times \exp\left[i A^{-1}(\theta_2, \ldots, \theta_n ; \varkappa^2(\tau) t) \right].$$

Здесь $\varkappa^2(\tau) t = (\varkappa_1^2(\tau) t_1, \ldots, \varkappa_L^2(\tau) t_L)$,

$$S_b(t,\tau) = \prod_{G_i \in \{G\}} \frac{(1-\tau_i)^{r_i}}{r_i!} \tau_i^{-1} \prod_{j=1}^{L} \varkappa_j^2(\tau) S_b(\varkappa_1^2(\tau) t_1, \ldots, \varkappa_L^2(\tau) t_L).$$

Из утверждения леммы следует неравенство

$$\int_0^1 \prod_{j \in V} dt_j \int_0^\infty \prod_{j' \in W} dt_{j'} \int_0^1 \prod_{(i)} d\tau_i \left| s_b(t,\tau) \right| < \infty . \tag{11}$$

Пусть $\varphi(p)$ – функция из пространства Шварца, зависящая от всех внешних импульсов. Значение $R\tilde{\Pi}(G; \theta_1(p), \ldots, \theta_n(p))$ на $\varphi(p)$ равно

$$\sum_{(b)} \int_0^\infty \prod_{j=1}^{L} dt_j \, \tilde{\varphi}_{c(j)}(t_j) \int_0^1 \prod_{G_i \in \{G\}} d\tau_i \, S_b(t,\tau) \int dp \, \varphi(p) \times$$

$$\times \Pi_b(\theta_2, \ldots, \theta_n) \exp\left[i A^{-1}(\theta_2, \ldots, \theta_n, \varkappa^2(\tau) t) \right] \delta\left(\sum_{\gamma=1}^{n} \theta_\gamma \right).$$

Сделаем замену в интеграле по p, взяв в качестве новых переменных $\theta_1 = k_1, \ldots, \theta_n = k_n$ (некоторые из них могут оказаться равными нулю) и дополнив эти переменные нужным количеством переменных k_j произвольным образом. В результате придем к сумме интегралов вида

$$\int_0^\infty \prod_{j=1}^{L} dt_j \, \tilde{\varphi}_{c(j)}(t_j) \int_0^1 \prod_{G_i \in \{G\}} d\tau_i \, S_b(t,\tau) \int dk \, \varphi(k) \, \Pi_b(k_2, \ldots, k_n) \times$$

$$\times \exp\left[i\Lambda^{-1}(k_2,\ldots,k_n;\pi^2(\tau)t\right],$$

где $\psi(k)$ получается из $\varphi(p)$ интегрированием по k_1, k_j $/j>n/$.

Оставшаяся часть доказательства с учетом неравенств (II) почти дословно повторяет доказательство теоремы I в [3].

Значительно сложнее обстоит дело в случае, когда диаграмма G не является массивной.

Литература

1. Щербина В.А. Вычислительный формализм в квантовой электродинамике. Препринт ИТФ-69-36. К., 1969. 86 с.
2. Гордевский В.Д., Уваров О.В., Чудинович И.Ю. и др. R операция Боголюбова для локальных взаимодействий. - Теор. и мат. физика, 1974, 20, 2, с.147-159.
3. Чудинович И.Ю., Щербина В.А. Ренормированные фейнмановские амплитуды для полей с фиксированными массами. - Теор. и мат. физика, 1976, 27, I, с.24-37.
4. Хепп К. Теория перенормировок. - М.: Наука, 1974. - 256 с.
5. Speer E. Analytic Renormalization. - J.Math.Phys., 1968, 9, 9, p. 1404-1407.
6. Славнов Д.А. Предельный переход по мнимой добавке к массе в амплитудах Фейнмана. - Теор. и мат. физика, 1975, 22, 3, с.307-313.

УДК 539.12 : 530.145

И.Ю.Чудинович

О ДВУХТОЧЕЧНОЙ ЭЛЕКТРОННОЙ ФУНКЦИИ ГРИНА В В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Перенесем результат теоремы 2 работы [1] на случай собственно-энергетических электронных диаграмм в квантовой электродинамике.

Размазывание массы m спинорных частиц произведем с помощью замены спинорных полевых операторов в импульсном пространстве размазанными операторами с нетривиальными антикоммутаторами

$$\left[\overset{*}{a}_\mu(k),\ a_\nu(p)\right] = \delta_{\mu\nu}\,\delta(k+p)\,\theta(k^0)\,\frac{\vartheta(\sqrt{k^2})}{2\sqrt{k^2}},$$

где $0 \le \mu,\ \nu \le 3$; $\delta_{\mu\nu}$ - символ Кронекера; $\vartheta(s)$ - функция, удовлетворяющая условиям I - 3 первого раздела [1].

Фейнмановское представление для причинной функции спинорного поля $S^c(x)$ имеет вид

$$S^c(x)=\frac{1}{16\pi^2}\int_0^\infty \frac{dt}{t^2}\left[i\varphi_1(t)\sum_{n=0}^{3}\gamma^n\frac{\partial}{\partial x^n}+\varphi_2(t)\right]exp\left(-\frac{i}{4t}x^2\right).$$

Здесь $\varphi_1(t)=\int_0^\infty \tilde{\varphi}(s)\,exp(-is^2t)ds$, $\varphi_2(t)=\int_0^\infty s\tilde{\varphi}(s)exp(-is^2t)ds$, $\gamma^n\ (n=0,\dots,3)$ – матрицы Дирака [2].

Аналогичное представление строится для алгебры полевых операторов электромагнитного поля. Соответствующую функцию распределения масс обозначим через $\tilde{\varphi}_0(s)$. При этом причинная функция электромагнитного поля в конфигурационном пространстве имеет вид

$$\Delta^c(x)=\frac{1}{16\pi^2}\int_0^\infty \frac{dt}{t^2}\varphi_0(t)\,exp\left(-\frac{i}{4t}x^2\right),$$

$$\varphi_0(t)=\int_0^\infty ds\,\tilde{\varphi}_0(s)exp(-ist).$$

Для устранения ультрафиолетовых расходимостей применим вариант R-операции с нулевыми точками вычитаний. Ренормированные коэффициентные функции $R\Pi(G;x_1,\dots,x_n)$ допускают интегральные представления, аналогичные представлениям (1) работы [1], справедливыми в бозонных теориях.

Известно, что вклад в ряд теории возмущений для двухточечной электронной функции Грина дают лишь ренормированные фейнмановские амплитуды $R\Pi(G;p_1,p_2)$, отвечающие связным собственно-энергетическим электронным диаграммам G, не содержащим замкнутых спинорных циклов с нечетным числом вершин. Эти диаграммы не удовлетворяют, вообще говоря, условию теоремы 2 работы [1]. Тем не менее удалось доказать возможность снятия инфракрасных обрезаний и в этом случае.

Теорема. Пусть G – сильно связная собственно-энергетическая электронная диаграмма, не содержащая замкнутых спинорных циклов с нечетным числом вершин. Предел $R\Pi(G;p_1,p_2)$ при предельном переходе $\tilde{\varphi}(s)\to\delta(s-m)$, $supp\,\tilde{\varphi}(s)\subset(\delta,\infty)$, $\delta>0$ и $\tilde{\varphi}_0(s)\to\delta(s)$, $supp\,\tilde{\varphi}_0(s)\subset(0,\infty)$, есть непрерывный функционал над пространством Шварца $S(R^8)$.

Весьма громоздкое доказательство этой теоремы приведено в работе [3]. Заметим, что обобщить эту теорему на случай диаграмм с большим числом внешних спинорных линий не удалось.

При доказательстве теоремы существенен выбор точек вычитаний, помещаемых в начало координат. Известно, что при переносе точек вычитаний из начала координат в точку $\beta = m I\ R\Pi(G; p_1, p_2)$ перестают быть корректно определенными функционалами.

Литература

1. Чудинович И.Ю. О некоторых свойствах матрицы рассеяния в квантовых теориях с полями нулевой массы. – В кн.: Исследования по теории операторов и их приложениям. – Киев.: Наук. думка, 1979, с.209–219.
2. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. – М.: Наука, 1973. – 416 с.
3. Чудинович И.Ю. Ренормированные амплитуды в квантовой электродинамике. Препринт ИТФ-74-152Р. К., 1974. 24 с.

УДК 513.88 + 519.46

Некоторые свойства полных групп автоморфизмов пространства Лебега. Безуглый С.И., Голодец В.Я. - В кн.: Исследования по теории операторов и их приложениям. Сб. науч. тр. К., Наук. думка, 1979, с. 3-13.

Рассмотрены новые топологические свойства полных групп автоморфизмов пространств Лебега. Доказано, что любая полная группа будет топологической, линейно связной и даже односвязной. Описаны замкнутые нормальные делители полной группы и доказано, что группа всех автоморфизмов топологически проста. Показано, что множество автоморфизмов, сопряженных с данным апериодическим автоморфизмом, всюду плотно во множестве всех апериодических автоморфизмов.

Список лит.: 9 назв.

УДК 517.8

Об ω-определенности ростков аналитических отображений. Белицкий Г.Р., Кучко Л.П. - В кн.: Исследования по теории операторов и их приложениям. Сб. науч. тр. К., Наук. думка, 1979, с. 13-21.

В терминах стационарной подгруппы найдены условия, при которых орбита аналитической системы определяется ее формальным рядом Тейлора.

Список лит.: 7 назв.

УДК 539.3

Асимптотический анализ краевых задач устойчивости развертывающихся оболочек. Бабенко В.И. - В кн.: Исследования по теории операторов и их приложениям. Сб. науч. тр. К., Наук. думка, 1979, с. 21-49.

Приведен асимптотический анализ краевых задач теории пологих оболочек, описывающих потерю устойчивости с образованием вмятин, вытянутых вдоль образующей, анизотропных (линейно упругих), развертывающихся (выпуклых), достаточно тонких оболочек при статическом нагружении. Получены упрощенные (эталонные) краевые задачи для определения в основном приближении начальных послекритических деформаций и критических нагрузок, для которых приведены новые результаты.

Табл.3. Список лит.: 17 назв.

УДК 517.946

О возмущении теплового поля движущимися мелкими частицами. Назыров З.Ф., Хруслов Е.Я. - В кн.: Исследования по теории операторов и их приложениям. Сб.науч.тр. К., Наук.думка,1979,с.49-65.

Рассматривается начально-краевая задача для уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f$, описывающая нестационарное тепловое поле, возмущенное движущимися по определенным траекториям мелкими частицами, на которых задана нулевая температура. Изучается асимптотическое поведение решения $u^{(n)}(x,t)$ этой задачи, когда число частиц n неограниченно растет, а их диаметры стремятся к нулю. Доказано, что при $n \to \infty$ $u^{(n)}(x,t)$ сходится к функции $u(x,t)$, удовлетворяющей всюду уравнению $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + c(x,t)u = f$, где функция $c(x,t)$ явно выражается через ньютоновы емкости частиц и параметры их траекторий. Аналогичный результат получен и при случайном распределении частиц в начальный момент.

Список лит.: 4 назв.

УДК 517.39+517.91+513.88

Два инварианта представлений компактных групп автоморфизмами алгебр фон Неймана. Нессонов Н.И. - В кн.:Исследования по теории операторов и их приложениям. Сб. науч. тр. К., Наук. думка, 1979, с. 65-75.

Для произвольных компактных групп вводятся два инварианта Γ и Γ', характеризующие их представления автоморфизмами алгебр фон Неймана и совпадающие для абелевых групп с конновским инвариантом Γ. Найдены необходимые и достаточные условия совпадения Γ и Γ'.

Приведен критерий аппроксимативной конечности неймановской алгебры M в терминах действия компактной группы G автоморфизмов M.

Список лит.: 11 назв.

УДК 517.9

Дробно-линейные преобразования матриц. Потапов В.П. - В кн.: Исследования по теории операторов и их приложениям. Сб. научн.тр. К., Наук. думка, 1979, с.75-91.

Статья носит методический характер. Излагаются теоремы о дробно-линейных преобразованиях квадратных матриц, обладающих некоторыми специальными свойствами в форме, максимально приближенной к нуждам J-теории.

Список лит.: 9 назв.

УДК 517.946

Некоторые свойства множителей Стокса I. Смилянский В.Р. – В кн.: Исследования по теории операторов и их приложениям. Сб. науч.тр. К., Наук. думка, 1979, с.97–107.

Основные результаты. Асимптотическое представление в окрестности иррегулярной особой точки $z=\infty$ однозначно определяет фундаментальную матрицу, имеющую это представление в любом "стандартном" секторе z-плоскости. Дополнительно найден ряд новых свойств множителей Стокса как для систем и уравнений общего вида, так и инвариантных относительно замены $z \to ze^{i\alpha}$ (предыдущие результаты см. РЖМат, 1970, 7Б 272, 11Б 250). Для одного уравнения второго порядка, коэффициенты которого не являются рациональными функциями, определены все множители Стокса; для одной системы второго порядка, коэффициенты которой не являются рациональными функциями, определены все множители Стокса с точностью до знака.

Список лит.: 5 назв.

УДК 536.24.02

О нестационарном разогреве неоднородных тел. Темкин Л.А. – В кн.: Исследования по теории операторов и их приложениям. Сб. науч. тр. К., Наук. думка, 1979, с. 107–123.

Рассмотрено асимптотическое поведение при больших значениях времени решения уравнения теплопроводности в процессе без установления – при разогреве тела конечных размеров тепловым потоком, не убывающим со временем. Изучается разогрев неоднородного тела как в случае непрерывных, так и разрывных теплофизических характеристик.

Список лит.: 7 назв.

УДК 517.9

О разрешимости неоднородного уравнения типа свертки в пространствах аналитических функционалов. Ткаченко В.А. – В кн.: Исследования по теории операторов и их приложениям. Сб. научн. тр. К., Наук. думка, 1979, с.123–128.

В терминах, связанных с характеристической функцией, даны условия эпиморфности оператора типа свертки, который действует из одного пространства аналитических функционалов в другое.

Список лит.: 12 назв.

УДК 517.946

Асимптотика потенциала электростатического поля в областях с мелкозернистой границей. Фенченко В.Н. – В кн.: Исследования по теории операторов и их приложениям. Сб. научн. тр. К., Наук. думка, 1979, с. 129–147.

Рассматривается потенциал электростатического поля в области, содержащей большое количество мелких проводящих включений. Изучается его асимптотическое поведение, когда количество включений возрастает, а их диаметры уменьшаются.

Доказано, что при определенных условиях среда с большим количеством мелких проводящих включений может быть описана введением тензора диэлектрической проницаемости, который может быть вычислен по определенным характеристикам множества включений.

Список лит.: 3 назв.

УДК 517.94 + 513.88

Осцилляционные теоремы для систем Штурма-Лиувилля и Дирака на оси. Холькин А.М. – В кн.: Исследования по теории операторов и их приложениям. Сб. науч. тр. К., Наук. думка, 1979, с. 147–161.

Для самосопряженной матричной задачи Штурма-Лиувилля на оси

$$(-P(x)y')' + Q(x)y - \lambda R(x)y$$

строится матричное решение, удовлетворяющее граничному условию на сингулярном конце, и устанавливается связь между осцилляционными свойствами этого решения и спектром оператора Штурма-Лиувилля на оси.

Кроме того, получена осцилляционная теорема для систем первого порядка, включая систему Дирака.

Список лит.: 13 назв.

УДК 539.12 : 530.145

О некоторых свойствах матрицы рассеяния в квантовых теориях с полями нулевой массы. Чудинович И.Ю. – В кн.: Исследования по теории операторов и их приложениям. Сб. науч. тр. К., Наук. думка, 1979, с. 162–171.

В рамках вычитательной процедуры с нулевыми точками вычитаний доказана возможность снятия инфракрасных обрезаний в ренормированных амплитудах, как функциях четырехмерных импульсов, отвечающих фейнмановским диаграммам с "массивным базисом".

Список лит.: 6 назв.

УДК 539.12 : 530.145

<u>О двухточечной электронной функции Грина в квантовой электродинамике</u>. Чудинович И.Ю. – В кн.: Исследования по теории операторов и их приложениям. Сб. науч. тр. К., Наук. думка, 1979, с.171–173.

В рамках вычитательной процедуры с нулевыми точками вычитаний доказана возможность снятия инфракрасных обрезаний в ряде теории возмущений для двухточечной электронной функции Грина в квантовой электродинамике.

Список лит.: 3 назв.

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ
И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯМ

Сборник научных трудов

Печатается по постановлению ученого совета
Физико-технического института низких температур АН УССР

Редактор А.А.Хрулев, А.И.Кузьменко
Обложка художника А.К.Косупа
Художественный редактор Н.И.Возный
Технический редактор Е.Г.Вегер
Корректор Л.Ю.Каменских

Информ.бланк № 3001.

Подп. к печ. 28.03.79. БФ 06882. Формат 60 x 84/16. Бумага офс. № I. Усл. печ. л. 10,46. Уч.-изд.л. 9,74. Тираж 1150. экз. Заказ № 9-386 Цена 95 коп.

Издательство "Наукова думка", 252601, Киев-4, ГСП, Репина, 3.
Киевская книжная типография научной книги Республиканского производственного объединения "Полиграфкнига" Госкомиздата УССР. 252004, Киев-4, Репина, 4.