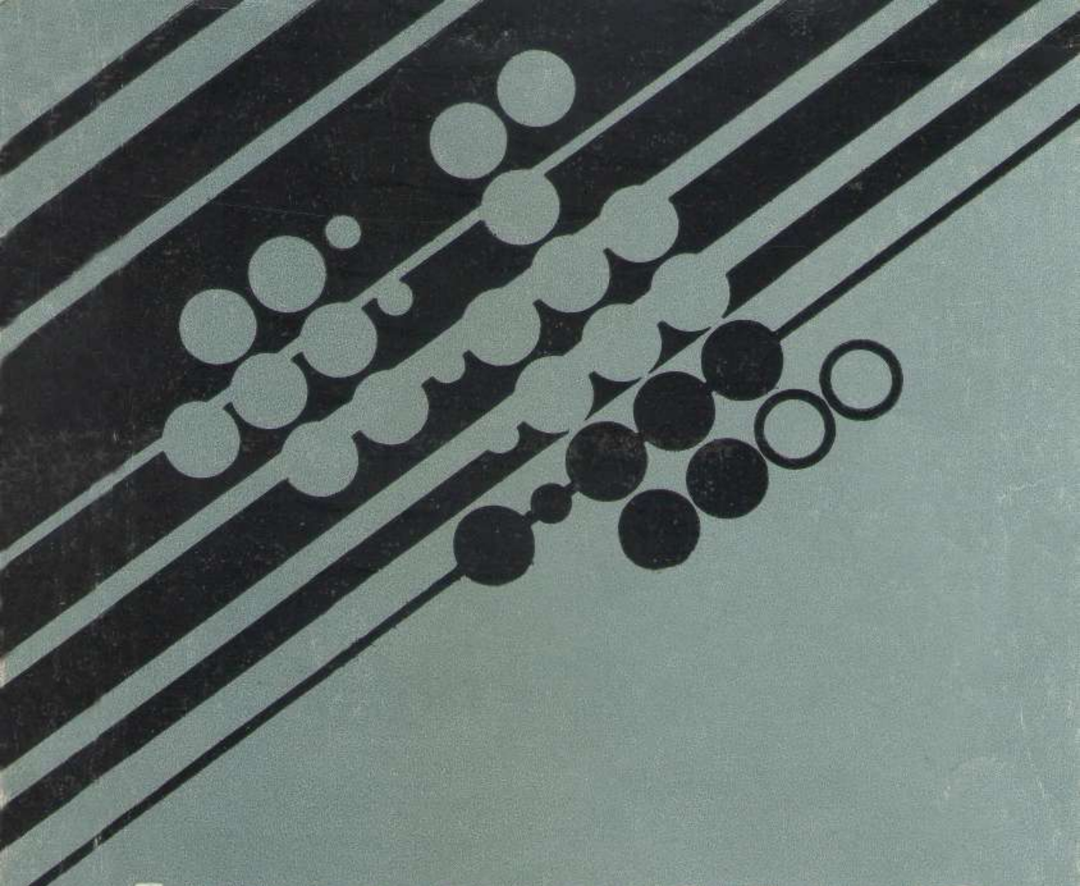


Динамические системы и комплексный анализ

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ

Физико-технический институт низких температур

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

Сборник научных трудов

Киев Наукова думка 1992

УДК 513.18-517.53-519.21

Динамические системы и комплексный анализ: Сб. науч. тр. / АН Украины. Физ.-техн. ин-т низких температур; Редкол.: В.А.Марченко (отв. ред.) и др. - Киев: Наук. думка, 1992. - 176 с. - ISBN 5-12-002791-1.

В сборнике помещены статьи, посвященные современным вопросам теории динамических систем, теории функций комплексного переменного и их приложениям к математической физике и теории вероятностей. Исследованы динамические системы, возникающие при изучении предельных множеств целых функций, в задаче о колебаниях пологой оболочки, при итерациях многочленов.

Для специалистов в области динамических систем, комплексного анализа, математической физики и теории вероятностей.

Утверждено к печати ученым советом
Физико-технического института низких температур АН Украины

Редакция физики и кибернетики
Редактор А.С.Слыщенко

Д $\frac{1602010000-288}{221-92}$ 201-92

ISBN 5-12-002791-1

СОДЕРЖАНИЕ

УДК 517.535.4+517.93

В.С.Азарин, В.Б.Гинер, М.Ю.Любич

ПРЕДЕЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Изучаются свойства предельного множества целой функции конечного порядка как фазового пространства некоторой динамической системы.

1. Пусть $A(\rho)$ - класс целых функций порядка ρ и нормального типа при порядке ρ, т.е. для $f \in A(\rho)$ выполняется условие

$$\limsup_{r \to \infty} \ln M(r,f)\, r^{-\rho} < \infty ,$$

где $M(r,f)$ - максимум модуля f на окружности $\{ |z| = r \}$.

Напомним основные факты, относящиеся к понятию предельного множества f [1-3]. Пусть $u(z) = \ln |f(z)|$ - субгармоническая функция в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbb{C})$ - пространство распределений Шварца, т.е. пространство обобщенных функций над основным пространством $\mathcal{D}(\mathbb{C})$ финитных бесконечно дифференцируемых функций, и пусть $(\cdot)_t$ - преобразование, определенное равенством

$$u_t(z) = u(zt)\,t^{-\rho} .$$

Семейство $\{u_t : t > 0\}$ компактно в следующем смысле: для любой последовательности $t_j \to \infty$ найдутся подпоследовательность $t_j' \to \infty$ и субгармоническая функция v такие, что $u_{t_j'} \to v$ в $\mathcal{D}'$ - топологии.

Предельное множество Frf определяется равенством

$$Frf := \{ v : (\exists t_j \to \infty)[v = \mathcal{D}' - \lim u_{t_j}] \} ,$$

т.е. является множеством предельных точек семейства $\{u_t\}$ при $t \to \infty$. Элементы предельного множества характеризуют в определенном смысле

ISBN 5-12-002791-1. Динамические системы и комплексный анализ. Киев, 1992

асимптотическое поведение $f(z)$ при различных способах стремления z к бесконечности.

Обозначим через $U[\rho,\sigma]$ множество субгармонических функций, удовлетворяющих условиям $v(0)=0$, $v(z)\le\sigma|z|^{\rho}\ \forall z\in\mathbb{C}$. Полагаем

$$U[\rho] = \bigcup_{\sigma>0} U[\rho,\sigma]$$

и будем писать $U\propto U[\rho]$, если $U\subset U[\rho,\sigma]$ при некотором σ.

Для $v\in U[\rho]$ введем преобразование $(\cdot)_{\tau}$ равенством

$$v_{\tau}(z) = v(\tau z)\tau^{-\rho}$$

и будем для $U\propto U[\rho]$ писать $U_{\tau}=U$,
если U инвариантно относительно преобразования $(\cdot)_{\tau}$.

Напомним также, что замкнутое множество в топологическом пространстве называется связным, если его нельзя разбить на два замкнутых непересекающихся подмножества.

Предельное множество $Fr f$ обладает следующими свойствами: а) замкнуто в $\mathcal{D}'$-топологии; б) связно; в) $Fr f\propto U[\rho]$; г) $(Fr)_{\tau} = Fr f$. Выясним, в какой мере эти свойства являются достаточными для того, чтобы множество U, обладающее ими, было предельным множеством функции $f\in A(\rho)$.

В [2] (см. также [4]) доказана такая теорема.

Теорема А.С. Если U удовлетворяет условиям а), в), г) и U выпукло, то $\forall\rho$ существует функция $f\in A(\rho)$ такая, что $Fr f = U$.

Пусть $v\in U[\rho]$. Рассмотрим множество

$$Sv = clos\left\{ v_{\tau} : \tau\in(0,\infty)\right\},$$

являющееся замыканием в $\mathcal{D}'$ орбиты преобразования $(\cdot)_{\tau}$. Это минимальное множество, содержащее v и обладающее свойствами а)-г).

Полагаем

$$Fr_0 v = \left\{ w : (\exists\tau_j\to 0)\left[w = \mathcal{D}'-\lim v_{\tau_j}\right]\right\},$$

$$Fr_{\infty} v = \left\{ w : (\exists\tau_j\to\infty)\left[w = \mathcal{D}'-\lim v_{\tau_j}\right]\right\}.$$

Эти предельные множества для v при $\tau\to 0$ и $\tau\to\infty$ есть "концы" орбиты $S(v)$ (α и ω- предельные множества в терминологии теории динамических систем [5]).

В [3] (см. также [6]) доказана следующая теорема.

Теорема А.Г. Для того чтобы существовала функция $f \in A(\rho)$ такая, что $Frf = Sv$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$Fr_0 v \cap Fr_\infty v = \emptyset . \tag{1.1}$$

Там же показано, что условие (1.1) может не выполняться и можно указать v, для которого (1.1) выполняется, но Sv не является выпуклым.

Таким образом, условия а)-г) не являются достаточными для предельности множества, а выпуклость не необходима.

Пусть v_τ является периодической функцией относительно $\ln \tau$. Точнее, положим

$$\tau = e^t, \quad T_t v = v_\tau, \quad t \in (-\infty, \infty) \tag{1.2}$$

и рассмотрим класс $U_\omega(\rho) \in \bar{U}(\rho)$ функций v, удовлетворяющих условию

$$T_{t+\omega} v = T_t v \qquad \forall t \in (-\infty, \infty).$$

Для $v \in U_\omega(\rho)$ выполняется условие (1.1), так как

$$Fr_0 v = Fr_\infty v = \{ T_t v : t \in [0, \omega] \}.$$

Предельные множества вида Sv для указанных v будем называть периодическими.

Если $v \in U_\omega(\rho)$ для двух несоизмеримых ω, то она инвариантна относительно преобразования (1.2), а соответствующая целая функция - функция вполне регулярного роста в смысле Левина-Пфлюгера [7]. Поэтому целые функции f с периодическим Frf можно рассматривать как обобщение целых функций вполне регулярного роста (о функциях с периодическим предельным множеством см. [8]).

Любое предельное множество можно аппроксимировать периодическими предельными множествами в следующем смысле.

Пусть $U_n \cup U \subset U[\rho]$. Если выполняются условия:

$a) \; (v_j \in U_{n_j}) \wedge (D' - \lim v_j = v) \Rightarrow v \in U,$

$б) \; \forall v \, (v \in U \Rightarrow \forall n \; \exists \, v_n \in U_n \, (D' - \lim v_n = v) \,),$

то будем писать

$$U = D' - \lim U_n . \tag{1.3}$$

В [9] доказана такая теорема.

<u>Теорема Г</u>. Для того чтобы множество U было предельным для некоторой функции $f \in A(\rho)$, необходимо и достаточно, чтобы для некоторой последовательности периодических предельных множеств U_n выполнялось условие (1.3).

Сформулируем теорему, которая обобщает приведенные выше.

Введем на $U \subset U[\rho]$ метрику, эквивалентную D'-топологии:

$$d(v_1, v_2) = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle v_1 - v_2, \psi_j \rangle| / 2^j (1 + |\langle v_1 - v_2, \psi_j \rangle|,$$

где $\{\psi_j\}$ - множество, плотное в $D(\mathbb{C})$, а

$$\langle g, \psi \rangle = \int_{R^2} g \psi \, d\sigma .$$

В [10] (см. также [12]), доказана следующая теорема.

<u>Теорема В.Б</u>. Пусть $U \subset\subset U[\rho]$. Для того чтобы существовала функция $f \in A(\rho)$ такая, что $Fr f = U$, необходимо и достаточно существование кусочно-непрерывного отображения $v(\cdot|t) : (0,\infty) \to U$, удовлетворяющего условиям

$$d(v(\cdot|\tau t), \; v_\tau(\cdot|t)) \to 0, \;\; t \to \infty \qquad (1.4)$$

равномерно по $\tau \in [a, b] \subset\subset (0, \infty)$;

$$clos\{v(\cdot|t) : t \in [a, \infty)\} = U \quad \forall a > 0 . \qquad (1.5)$$

Отметим дополнительно, что для f выполняется условие согласованности с $v(\cdot|t)$, а именно:

$$D' - \lim_{t \to \infty} [v(\cdot|t) - (\ln|f(\cdot)|)_t] = 0 , \qquad (1.6)$$

т.е. асимптотика f полностью определена отображением $v(\cdot|t)$.

В конкретных примерах часто расматриваются множества $U \subset\subset U[\rho]$, зависящие от параметров. Например, если $h_1(\varphi)$, $h_2(\varphi)$ - тригонометрические выпуклые функции, то множество

$$U[h_1, h_2] = \{v_{c_1,c_2} = (c_1 h_1 + c_2 h_2) r^\rho : c_1 + c_2 = 1, \; c_1, c_2 > 0$$

является предельным для целой функции $f \in A(\rho)$ для которой индикатор равен $max(h_1, h_2)$, а нижний индикатор равен $min(h_1, h_2)$ [11]. Здесь множество U гомеоморфно отрезку в R^2. В [10] (см. также [4]) приведен пример целой функции, для которой предельное множество не является линейно связным, и для этого рассмотрено предельное множество вида

$$U[\varphi, h_1, h_2] = \left\{ v = (c_1 h_1 + c_2 h_2) r^{\rho} : c_2 = \varphi(c_1),\ c_1 \in [0,1] \right\},$$

которое геоморфно графику функции φ в R^2.

Любое периодическое предельное множество геоморфно окружности.

Рассмотрим общую ситуацию.

Пусть $U \subset U[\rho]$ и $w(\cdot, m): M \to U$ – гомеоморфизм связного компакта в метрическом пространстве (в частности, многообразия) M на U. Тогда преобразование (1.2) индуцирует на M динамическую систему по формуле

$$T_t w(\cdot, m) = w(\cdot, T^t m), \qquad (1.7)$$

а отображение $v(\cdot \mid t)$ из теоремы В.Б. – псевдотраекторию

$$m(t): (-\infty, \infty) \to M,$$

удовлетворяющую условиям

$$m(t+\tau) - T^{\tau} m(t) \to 0, \ t \to \infty \qquad (1.8)$$

равномерно по $\tau \in [a, b]$;

$$clos\left\{ m(t) : t \in [a, \infty) \right\} = M \quad \forall a > 0. \qquad (1.9)$$

Псевдотраекторию, удовлетворяющую условию (1.8), будем называть асимптотически динамической, а T^t – ее динамической асимптотикой. Будем говорить, что псевдотраектория плотна в M, если выполняется условие (1.9).

Обозначим через $\mathfrak{M}(T)$ множество мер ограниченной вариации на единичной окружности T с топологией слабой C^*-сходимости, а через $K(T)$-шар вида

$$K(T) = \left\{ \nu \in \mathfrak{M}(T) : var\, \nu \le 1 \right\}.$$

<u>Теорема 1</u>. Пусть T^t – динамическая система на метрическом компакте M, который гомеоморфно вкладывается в $K(T)$. Для любого $\rho > 0$ существует $U \subset U[\rho]$ такое, что U гомеоморфно M и преобразование T_t индуцирует на M динамическую систему T^t по формуле (1.7).

Отметим, что любые конечномерные компакты гомеоморфно вкладываются в $K(T)$.

Таким образом, если на M есть плотная а.д. псевдотраектория, то каждое U, построенное по теореме I, дает по теореме В.Б. целую функцию f с предельным множеством $Fr f = U$.

Следующее утверждение, анонсированное в [12], дает возможность устанавливать наличие или отсутствие а.д. псевдотраекторий, плотных в M.

Напомним, что точка $m_0 \in M$ называется неблуждающей [5], если для любой окрестности $O \ni m_0$ и произвольно большого S существуют $m \in O$ и $t > S$ такие, что $T^t_m \in O$. Другими словами, возвращаемость имеет место в произвольно малой окрестности точки m_0.

Множество неблуждающих точек обозначим через $\Omega(T^t)$. Это замкнутое инвариантное подмножество M.

Множество $A \subset M$ называется аттрактором для T^t [5], если оно обладает такими свойствами:

а) для любой окрестности $O \supset A$ существует окрестность $A \subset O' \subset O$, удовлетворяющая условию $T^t O' \subset O \ \forall t > 0$, где $T^t O'$ - образ; O';

б) существует окрестность $O_0 \supset A$ такая, что $T^t_m \to A$ при $t \to \infty$ для $m \in O_0$.

<u>Теорема 2.</u> Если $\Omega(T^t) = M$, то M имеет плотную а.д.-псевдотраекторию с д.а. T^t. Если существует аттрактор $A \neq M$, то M не имеет плотных а.д.-псевдотраекторий с д.а. T^t.

Таким образом, динамические системы с конечным числом стационарных точек или изолированными устойчивыми траекториями, какие встречаются в обычных задачах механики, не пригодны для построения предельных множеств целых функций. Впрочем, периодические движения порождают периодические предельные множества.

Динамическая система называется почти периодической на компакте (п.п.д.с.), если верна импликация

$$(d(m, m_1) \to 0) \Rightarrow (d(T^t m,\ T^t m_1) \to 0 \tag{1.10}$$

равномерно по $t \in (-\infty, \infty)$.

Отметим, что равномерно по $t \in [a,b] \subset (-\infty,\infty)$ (т.е. для любого конечного интервала) соотношение (1.10) всегда выполняется вследствие непрерывности $T^t m$ по (t, m). Поэтому периодические динамические системы, т.е. такие, что

$$\exists \omega : T^{t+\omega}_m = T^t m \quad \forall m \in M$$

являются почти периодическими.

Все точки M являются неблуждающими относительно п.п.д.с. [5]. Поэтому такие динамические системы имеют а.д.-псевдотраекторию по теореме 2 и, значит, пригодны для построения предельных множеств по теореме 1 и теореме В.Б.

Результаты этой статьи были анонсированы в [12].

Одновременно в работе [15] (см. также [13]) был сформулирован и доказан для плюрисубгармонических функций критерий, характеризующий предельное множество, но использующий другие термины теории динамических систем. Из теоремы, доказанной в [15], в частности, следуют теоремы А.С. и А.Г., а свойство преобразования $(\cdot)_t$ "быть цепной рекуррентностью на U^n", использованное для формулировок в [15], эквивалентно, как можно показать, существованию а.д.-траектории в U.

Это повлияло на окончательное изложение работы [16] (см. также [17]), где доказано и используется следующее обобщение теоремы В.Б.

Будем называть оператор G, действующий из $U[\rho]$ в $U[\rho]$, полунепрерывным сверху, если

$$[v_j \xrightarrow{D'} v] \wedge [Gv_j \xrightarrow{D'} w] \Rightarrow w(z) \leq Gv(z) \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

<u>Теорема Г.В.Б</u>. Пусть функция $f \in A(\rho)$ и Frf - ее предельное множество. Пусть $G: Frf \to U[\rho,\sigma]$ - полунепрерывный сверху оператор, перестановочный с $(\cdot)_t$ и $G(Frf)$ - образ Frf.

Тогда $\exists g \in A(\rho)$ такая, что $Frg \supset G(Frf)$ и $\forall t_j \to \infty$ верна импликация

$$[(\ln|f|)_{t_j} \to v] \wedge [(\ln|g|)_{t_j} \to w] \Rightarrow w(z) \leq Gv(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Отметим, что если оператор G непрерывен на Frf, то утверждение теоремы Г.В.Б. непосредственно следует из теоремы В.Б., так как свойство асимптотической динамичности переносится с траектории $v(\cdot|t) \in Frf$ на траекторию $Gv(\cdot|t)$, по которой можно построить g.

В этом случае

$$Frg = G(Frf).$$

В общем случае G не непрерывен [16, 17], и для доказательства теоремы Г.В.Б. конструкция должна быть усовершенствована.

<u>2. Доказательство теоремы 1</u>. Рассмотрим отдельно случаи целого и нецелого ρ. Пусть ρ - нецелое число. Тогда для любой $v \in U[\rho]$ верно представление [14]

$$v(z) = \int_{\mathbb{C}} H(z/\zeta, p)\,\mu(d\zeta), \qquad (2.1)$$

где $p = [\rho]$,

$$H(\lambda, p) = \ln|1-\lambda| + Re\Big(\sum_{k=1}^{p} \frac{\lambda^k}{k}\Big),$$

а μ – мера, ассоциированная по Риссу с v и удовлетворяющая условию

$$\mu(|z|<r) \le \Delta r^{\rho} \quad \forall r>0 . \qquad (2.2)$$

Наоборот, любая мера, удовлетворяющая (2.2) (будем этот факт обозначать $\mu \in \mathfrak{M}[\rho,\Delta]$), порождает по формуле (2.1) функцию $v \in U[\rho,\sigma]$, где σ зависит лишь от Δ.

Обозначим через $(\cdot)_\tau$ преобразование над $\mu \in \mathfrak{M}[\rho,\Delta]$, определенное равенством

$$\mu_\tau(E) = \mu(\tau E)\tau^{-\rho}, \qquad (2.3)$$

где τE – гомотетия $E \subset \mathbb{C}$.

Если обозначить через $I(\cdot,\mu)$ канонический потенциял (2.1), то

$$(I(\cdot,\mu))_\tau = I(\cdot,\mu_\tau) .$$

Так как соответствие $\mu \to I(\cdot,\mu)$ является гомеоморфизмом в $\mathcal{D}'$-топологии, то достаточно указать множество $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}[\rho,\Delta]$ при некотором Δ, обладающее свойствами, которые указаны в теореме 1.

Для удобства перейдем к новым координатам заменой

$$x : \ln x, \qquad \tau : = \ln \tau$$

и введем новые функции

$$q(x) = v(e^x)e^{-\rho x}$$

и новые меры

$$\nu(dx \otimes dy) = r^{-\rho}\mu(r dr \otimes d\varphi) . \qquad (2.4)$$

При этом преобразование $(\cdot)_\tau$ над v переходит в сдвиг

$$S_\tau q(x) = q(x+\tau) .$$

Преобразование $(\cdot)_\tau$ над μ переходит в сдвиг

$$S_\tau \nu(E) = \nu(E+\tau) . \qquad (2.5)$$

Условие $v \in U[\rho,\sigma]$ переходит в такое:

$$\sup_x q(x) \le \sigma ,$$

а условие $\mu \in \mathfrak{M}[\rho,\Delta]$ – в условие

$$\int_{x\le 0} e^{\rho x} S_\tau \nu(dx\, dy) \le \Delta \quad \forall \tau . \qquad (2.6)$$

Отметим, что из (2.6) следует, что

$$\nu(E+t) \leq C(E) \quad \forall t$$

для любого компакта E.

Пусть

$$Y(dy, m): M \to K(\mathbb{T}).$$

Полагаем

$$\nu(dx\,dy, m) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(dy, T_m^{x-t})\, \chi(t)\,dt\, \rho\,dx, \tag{2.7}$$

где $\chi(t)$ – положительная непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi(t)\,dt = 1 \tag{2.8}$$

и условию, что сдвиги $\chi(t)$ плотны в $L^1(-\infty, \infty)$. Например, этим условиям удовлетворяет функция

$$\chi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Проверив условие (2.6), получим

$$\int_{x\leq 0} e^{\rho x}(S_\tau \nu)(dx\,dy) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t)\,dt \int_{x\leq 0} e^{\rho x} Y(dy, Tm^{x+\tau-t})\,\rho\,dx \leq$$

$$\leq \sup_\tau Y(\mathbb{T}, T_m^\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t)\,dt = 1.$$

Проверим инвариантность

$$S_\tau \nu(dx\,dy, m) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(dy, T_m^{x+\tau-t})\, \chi(t)\,dt\,\rho\,dx =$$

$$= \nu(dx\,dy, T^\tau m).$$

Пусть $\mu(\cdot, m)$ определено по $\nu(\cdot, m)$ равенством (2.4):

$$\mathfrak{M} = \{\mu(\cdot, m) : m \in M\};$$

$$I(\mathfrak{M}) = \{I(\cdot, \mu) : \mu \in \mathfrak{M}\}.$$

Легко видеть, что $U : I(\mathfrak{M})$ является образом M при непрерывном отображении

$$I(\cdot, \mu(\cdot, m)) : M \to U,$$

причем $T^{\tau} m$ переходит в $I(\cdot, \mu_{\tau}) = I_{\tau}(\cdot, \mu)$.
Проверим гомеоморфизм M и U. Достаточно проверить, что разным $m_1, m_2 \in M$ соответствуют разные ϑ_1, ϑ_2, т.е. что (2.7) – гомеоморфизм.

Пусть

$$\vartheta(dx\,dy,\ m_1) = \vartheta(dx\,dy,\ m_2).$$

Тогда для

$$\psi(x, y) = \psi_1(x), \psi_2(y), \quad \psi_1 \in D(\mathbb{R});\ \psi_2 \in D(\mathbb{T})$$

имеем равенство

$$\langle \vartheta(\cdot, m_1), \psi \rangle = \langle \vartheta(\cdot, m_2), \psi \rangle,$$

где $\langle , \rangle$ обозначает, как обычно, результат действия $\vartheta \in D'(\mathbb{C})$ на $\psi \in D(\mathbb{C})$.

Отсюда получаем

$$\int \psi_1(x)\,dx \left(\int_{-\infty}^{\infty} \langle Y(\cdot, T^{x-t} m_1), \psi_2 \rangle_{\mathbb{T}} \chi(t)\,dt\,\rho \right) = \tag{2.9}$$
$$= \int \psi_1(x)\,dx \left(\int_{-\infty}^{\infty} \langle Y(\cdot, T_1^{x-t} m_2), \psi_2 \rangle_{\mathbb{T}} \chi(t)\,dt\,\rho \right),$$

где $\langle , \rangle_{\mathbb{T}}$ – результат действия функционала $Y(dy, m) \in D'(\mathbb{T})$ на $\psi_2 \in D(\mathbb{T})$.

Полагаем

$$F_j(u) = \langle Y(\cdot, T^u m_j), \psi_2 \rangle_{\mathbb{T}}, \quad j = 1, 2.$$

Из (2.9) следует, что

$$(F_1 * \chi)(x) = (F_2 * \chi)(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Так как сдвижки χ плотны в $L'(\mathbb{R})$, то отсюда получаем

$$F_1(u) \equiv F_2(u), \quad u \in \mathbb{R}.$$

Значит, $\forall u \in \mathbb{R}$

$$Y(\cdot, T^u m_1) = Y(\cdot, T^u m_2) \qquad D'(T).$$

При $u=0$ имеем

$$Y(\cdot, m_1) = Y(\cdot, m_2),$$

а так как M гомеоморфно вложено в $K(T)$, то $m_1 = m_2$ ч.т.д.

Рассмотрим случай целого ρ. Обозначим для μ, удовлетворяющей условию (2.2):

$$\delta(r,\mu) = \int_{K_{r,1}} \zeta^{-\rho} d\mu; \quad \delta(\mu) = \sup\{|\delta(r,\mu)| : r\in(0,\infty)\},$$

где $K_{r,1}$ – кольцо, заключенное между окружностью $\{|\zeta| = r\}$ и $\{|\zeta| = 1\}$. Пусть $\delta(\mu) < \infty$. Тогда [14] функция

$$I(z,\mu,\rho) = \int_{|\zeta|\le 1} H(z/\zeta, \rho-1)\mu(d\zeta) + \int_{|\zeta|>1} H(z/\zeta,\rho)\mu(d\zeta)$$

принадлежит $U[\rho,\sigma]$, причем μ – это риссовская мера $I(z,\mu,\rho)$, а σ зависит лишь от Δ и $\delta(\mu)$.

Пусть теперь $Y_2(dy, m) \in K(T)$.

Полагаем

$$c(m) = \int_0^{2\pi} e^{-i\rho y} Y_2(dy, m),$$

$$Y_1(dy,m) = \operatorname{Re}[Y_2(dy,m) - c(m)e^{+i\rho y}dy + 2|c(m)|dy],$$

$$Y(dy,m) = Y_1(dy,m) \Big/ \int_0^{2\pi} Y_1(dy,m).$$

Тогда $Y \in K(T)$ и удовлетворяет условию

$$\int_0^{2\pi} e^{-i\rho y} Y(dy, m) = 0.$$

Легко проверить, что мера ν, заданная формулой (2.7), удовлетворяет условию

$$\int_{\pi} e^{-i\rho y} \nu(dx\,dy) = 0,$$

где π – любой прямоугольник вида

$$\pi = \{(x, y) : x \in [a, b],\ y \in [0, 2\pi]\}.$$

Из определения (2.4) следует, что соответствующая мера μ удовлетворяет условию

$$\partial(r, \mu) = 0.$$

и, значит, по [14] ей можно поставить в соответствие

$$v(z, m) = I(z, \mu(\cdot, m), \rho).$$

Соответствие между $Y(dy, m)$ и $v(z, m)$ взаимно однозначное.

Теорема 1 доказана и для случая целого ρ.

3. Доказательство теоремы 2. Пусть $\mathscr{R}(T^t) = M$. Рассмотрим плотное множество точек $m_j \in M$ таких, что

$$d(m_j, m_{j+1}) \to 0, \quad j \to \infty. \tag{3.1}$$

Полагаем

$$m(t) = T^{t-t_j} y_j, \quad t \in [t_j, t_{j+1}], \quad j = \overline{1, \infty}. \tag{3.2}$$

где y_j и t_j найдены индуктивно следующим образом.

Пусть известно t_j. Находим y_j, t_{j+1} так, чтобы выполнялись условия

$$t_{j+1} - t_j > j, \quad d(y_j, m_j) \leq d(m_j, m_{j+1}), \tag{3.3}$$

$$d(T^{t_{j+1} - t_j} y_j, m_j) \leq d(m_j, m_{j+1}). \tag{3.4}$$

Это возможно, так как точка m_j неблуждающая. Кривая $m(t)$ плотна в M вследствие (3.1) и (3.3). Покажем, что выполняется условие (1.8).

Пусть $\tau \in [0, a], a > 0$. Тогда

$$\sup_\tau \sup_{t \in [t_j, t_{j+1}]} d(T^\tau m(t), m(t+\tau)) =$$

$$= \max\Big(\sup_\tau \sup_{t \in [t_j, t_{j+1} - \tau)} d(T^\tau m(t), m(t+\tau);$$

$$\sup_\tau \sup_{t \in [t_{j+1} - \tau, t_{j+1})} d(T^\tau m(t), m(t+\tau))\Big). \tag{3.5}$$

По определению $m(t)$ для $t \in [t_j, t_{j+1} - \tau)$ имеем

$$d(T^{\tau}m(t),\ m(t+\tau)) = d\left(T^{t+\tau-t_{j+1}}y_j,\ T^{\tau+t-t_j}y_j\right) = 0. \qquad (3.6)$$

Далее, для $t \in [t_{j+1}-\tau, t_{j+1})$, получаем

$$d(T^{\tau}m(t), m(t+\tau)) = d\left(T^{t+\tau-t_{j+1}}(T^{t_{j+1}-t_j}y_j);\ T^{t+\tau-t_{j+1}}y_{j+1}\right);$$

Так как $t+\tau-t_{j+1} \in [0,a]$, то

$$\sup_{t\in[t_{j+1}-\tau,\, t_{j+1})} d(T^{\tau}m(t),\ m(t+\tau)) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\tau\in[0,a]} d\left(T^{\tau}(T^{t_{j+1}-t_j}y_j,\ T^{\tau}y_{j+1}\right). \qquad (3.7)$$

Из неравенств (3.3) и (3.4) получаем

$$d(T^{t_{j+1}-t_j}y_j;\ y_{j+1}) \leqslant d(T^{t_{j+1}-t_j}y_j,\ m_j) +$$

$$+ d(m_j,\ m_{j+1}) + d(m_{j+1},\ y_{j+1}) \leqslant$$

$$\leqslant 2d(m_j, m_{j+1}) + d(m_{j+1},\ m_{j+2}).$$

Из (3.1) следует, что $d(T^{t_{j+1}-t_j}y_j, y_{j+1}) \to 0$. Поэтому и правая часть (3.7) стремится к нулю при $j\to\infty$, т.е. для $t\in[t_{j+1}-\tau, t_{j+1}]$

$$d(T^{\tau}m(t),\ m(t+\tau)) \to 0$$

равномерно по $\tau\in[0;a]$. Из ((3.5)-(3.7)) следует, что

$$d(T^{\tau}m(t),\ m(t+\tau)) \to 0,\ t\to\infty,\ \tau\in[0,a].$$

Аналогично для $\tau\in[-a,0]$, что и доказывает первое утверждение теоремы.

<u>4. Доказательство второго утверждения теоремы 2</u>. Пусть $\mathcal{O}_0$ – окрестность, обладающая свойством б) аттрактора. Используя свойство а) аттрактора, выберем окрестности $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ так, чтобы при $t\geqslant 0$ выполнялись условия

$$\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_0,\quad T^t\mathcal{O}_1 \subset\subset \mathcal{O}_0,\quad T^t\mathcal{O}_2 \subset\subset \mathcal{O}_1.$$

Для $m \in O_0$ полагаем

$$\tau_2(m) = \sup\{t : T^t m \notin O_2\}.$$

Вследствие свойства б) аттрактора имеем $\tau_2(m) < \infty$.

Допустим, что существует псевдотраектория, удовлетворяющая условиям (1.8) и (1.9). По свойству (1.9) выберем последовательность t_j так, чтобы $m(t_j) \in O_2$.

Положим

$$t_{2_j} = \sup\{t : t \geqslant t_j,\ \ m(t) \in O_2\},$$

$$t_{1_j} = \inf\{t : t > t_{2_j},\ m(t) \in \overline{O_2 \setminus O_1}\}.$$

Вследствие свойства (1.9) t_{1_j} конечны для любого j.

Покажем, что

$$\tau_{max} := \overline{\lim_{j \to \infty}}\,(t_{1_j} - t_{2_j}) < \infty. \qquad (4.1)$$

Пусть это не так, т.е. $t_{1_j} - t_{2_j} \to \infty$ по некоторой подпоследовательности, для которой сохраняем то же обозначение. Пусть подпоследовательность выбрана так, что $m(t_{2_j}) \to m_2$. Это возможно вследствие компактности.

Для некоторого $\varepsilon > 0$ полагаем

$$l_j = \{m(t) : t \in [t_{2_j} + \varepsilon,\ t_{1_j} - \varepsilon]\}.$$

Тогда $m(t_{2_j} + \tau) \in l_j$ $\forall \tau > 0$ при $j > j_0 = j_0(\tau)$. По свойству (1.8) имеем

$$m(t_{2_j} + \tau) \to T^{\tau} m_2 \notin O_2. \qquad (4.2)$$

Взяв $\tau > \tau_2(m_2)$, получим противоречие с (4.2). Из (4.1) следует, что можно выбирать подпоследовательность (для которой сохраняем то же обозначение) такую, что $t_{1_j} - t_{2_j} \to \tau_0$. Пусть снова $m(t_{1_j}) \to m_1$, $m(t_{2_j}) \to m_2$ и по свойству (1.8) $m_1 = T^{\tau_0} m_2$. С одной стороны, $m_1 \in \overline{O_0 \setminus O_1}$. С другой – $T^{\tau_0} O_2 \subset O_1$ и, значит, $m_1 \notin \overline{O_0 \setminus O_1}$. Это противоречие завершает доказательство теоремы 2.

1. Азарин В.С. Теория роста субгармонических функций. – Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1978. – 73 с.
2. Азарин В.С. Об асимптотическом поведении субгармонических функций конечного порядка // Мат. сб. – 1979. – 108 (150), № 2. – С. 147–167.

3. Азарин В.С., Гинер В.Б. О строении предельных множеств целых и субгармонических функций // Теория функций, функцион. анализ и их прил. - 1984. - Вып. 38. - С. 27-36.
4. Sigurdsson R. Growth properties of analytic and plurisubharmonic functions of finite order // Math. Scand. - 1986. - 59. - P. 235-304.
5. Аносов Д.В., Арансон С.Х., Бронштейн И.У., Гринес В.З. Гладкие динамические системы II. - М.: ВИНИТИ, 1985. - С. 151-242. - (Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. математики. Фундамент. направления; Т. 1).
6. Гинер В.Б. О строении предельных множеств плюрисубгармонических функций конечного порядка в $\mathbb{C}^n$. - Харьков, 1985. - 37 с. Деп. в УкрНИИНТИ 18.01.85, № 7189-85618.
7. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. - М.: Гостехтеориздат, 1956. - 632 с.
8. Гришин А.Ф., Содин М.Л. Рост по лучу, распределение корней по аргументам целой функции конечного порядка и одна теорема единственности // Теория функций функцион. анализ и их прил. - 1988. - Вып. 50. - С. 47-61.
9. Гинер В.Б. Об аппроксимации предельных множеств субгармонических и целых функций периодическими предельными множествами. - Харьков, 1987. - 37 с. Деп. в УкрНИИНТИ 26.03.1987, А 1033.
10. Гинер В.Б. Построение целой функции с заданным предельным множеством. - Харьков, 1987. - 64 с. - Деп. в УкрНИИНТИ 30.07.1987, № 2283.
11. Азарин В.С. Пример целой функции с заданным индикатором и нижним индикатором // Мат. сб. - 1972. - 89(131), № 4. - С. 541-557.
12. Азарин В.С., Гинер В.Б. Критерий существования целой функции с заданным предельным множеством // Докл. АН УССР. Сер. А. - 1988. - № 5. - С. 3-5.
13. Hormander L., Sigurdsson R. Limit sets of plurisubharmonic functions // Math.Scand. - 1989. - 65. - P. 308-320.
14. Содин М.Л. Замечание о предельных множествах субгармонических функций натурального порядка // Теория функций, функцион. анализ и их прил. - 1983. - Вып. 39. - С. 125-129.
15. Hormander L.,Sigurdsson R.Limit sets of plurisubharmonic functions // Sci.Inst.Univ.of Iceland.-Prepr.-Reykjavik,1989.-12p.
16. Азарин В.С., Гинер В.Б. Мультипликаторы целых функций и предельные множества. - Харьков, 1990. - 42 с. - Деп. в ВИНИТИ 04.06.90, № 3003-В90.
17. Азарин В.С., Гинер В.Б. О мультипликаторах целых функций конечного порядка // Докл. АН СССР. - 1990. - 314, № 5. - С.

УДК 517.53

Г.М.Левин, М.Л.Содин

ПОЛИНОМЫ С НЕСВЯЗНЫМ МНОЖЕСТВОМ ЖЮЛИА И ОТОБРАЖЕНИЕ ГРИНА

Показано, что для полиномов с несвязным множеством Жюлиа область притяжения бесконечности $A(\infty)$ бесконечносвязна. После проведения дополнительных разрезов вдоль некоторых линий Грина эта область становится односвязной. Функция Беттхера отображает полученную односвязную область на внешность ежа.

ISBN 5-12-002791-1. Динамические системы и комплексный анализ. Киев, 1992

1. Напомним известные определения, относящиеся к теории итераций полиномов [1-4]. Пусть T - полином степени $d \geq 2$; T^n - его n-я итерация, $A(\infty) = \{z : T^n(z) \to \infty, n \to \infty\}$-область притяжения к бесконечности; $\mathcal{J} = \partial A(\infty)$ - множество Жюлиа полинома T. Через $u(z)$ обозначим функцию Грина области $A(\infty)$ с полюсом в бесконечности, продолженную нулем в $\mathbb{C} \setminus A(\infty)$.

Тогда

$$u(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{d^n} \log^+ |T^n(z)|, \ z \in \mathbb{C}$$

и, следовательно.

$$u(T(z)) = du(z).$$

Пусть $B(z)$ - функция Беттхера полинома T, т.е.

$$B(z) = \lim_{n \to \infty} [T^n(z)]^{1/d^n}; \ B(z) \sim z, \ z \to \infty.$$

Тогда

$$u(z) = \log |B(z)|.$$

Обозначим через C_A множество всех критических точек полинома T, расположенных в $A(\infty)$. Если $C_A = \emptyset$, то множество Жюлиа связно, и функция $B(z)$ конформно отображает односвязную область $A(\infty)$ на внешность единичного круга. Если при этом множество Жюлиа $\mathcal{J}$ локально связно, то по теореме Каратеодори обратная функция $\Phi = B^{-1}$: $: \bar{\mathbb{C}} \setminus \bar{\mathbb{D}} \to A(\infty)$ непрерывно продолжается до отображения окружности $\mathbb{T}$ на $\mathcal{J}$. В этом случае продолженное отображение полусопрягает функцию

$$\tau : t \mapsto dt \ (mod\ 2\pi) \qquad (1)$$

на $\mathbb{T}$ и полином $T(z)$ на множестве Жюлиа $\mathcal{J}$.

В работе [5] (см. также [6]) для полинома $T(z) = z^2 - \lambda, \lambda > 2$ с вещественным канторовским множеством Жюлиа $\mathcal{J}$ было отмечено, что функция $i \log B(z)$ конформно отображает верхнюю полуплоскость $\mathbb{C}_+$ на полуполосу с разрезами

$$\mathcal{P} = \Pi \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{q=0}^{2^n-1} \left\{ z = x + iy : x = \frac{(2q+1)\pi}{2^n}, \ 0 \leq y \leq \frac{a}{2^n} \right\},$$

$$\Pi = \{ z = x + iy : 0 < x < 2\pi, \ 0 < y < \infty \}$$

так, что бесконечность переходит в бесконечность, а множество Жюлиа J – в основание полуполосы с разрезами $\mathcal{P}$. При этом $a = \log|B(0)|$.

Цель настоящей статьи состоит в рассмотрении аналогичных вопросов для произвольных полиномов с несвязным множеством Жюлиа. В В этом случае $C_A \neq \emptyset$ и область $A(\infty)$ бесконечно связна.

2. Рассмотрим функцию Беттхера и отображение Грина. Введем следующие определения:

$$C_A = \{c_1, \dots, c_s\}, \quad 1 \leq s \leq d-1,$$

$$a = \max\left\{u(c_j) : 1 \leq j \leq s\right\},$$

$$K(r) = \{z : u(z) \leq r\}, \quad \Gamma(r) = \partial K(r) = \{z : u(z) = r\},$$

$$G(r) = \bar{\mathbb{C}} \setminus K(r).$$

Если $r > a$, то область $G(r)$ односвязна. В этой области функция Беттхера $B(z)$ однозначно определена и отображает ее на $\{w : |w| > r\}$. Функция $B(z)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$B(T(z)) = [B(z)]^d, \tag{2}$$

вследствие которого функция $B(z)$ аналитически продолжается во всю область $A(\infty)$. Продолженная функция имеет алгебраические точки ветвления в точках множества

$$C(\infty) = \bigcup_{m=0}^{\infty} T^{-m} C_A,$$

однако функция $|B(z)|$ однозначна.

Чтобы сделать функцию $B(z)$ однозначной, используем технику, развитую в [7]. Напомним некоторые понятия из [7].

Линией Грина называется C^1-кривая γ, ортогональная любой линии уровня функции Грина $\Gamma(r)$. Линия Грина γ называется максимальной, если γ не содержится ни в какой другой линии Грина. Таким образом, если $z \in A(\infty) \setminus C(\infty)$, то существует единственная максимальная линия Грина $\gamma(z)$, проходящая через эту точку. Считаем, что все линии Грина направлены так, что $u(z)$ убывает вдоль них. Тогда каждая максимальная линия Грина имеет своим началом либо ∞, либо некоторую точку множества $C(\infty)$. В первом случае максимальная линия Грина называется внешним радиусом, во втором – разрезом.

Через $A^*(\infty)$ обозначим подмножество $A(\infty)$, образованное точками, лежащими на внешних радиусах. Иными словами, $A^*(\infty)$ есть $A(\infty)$

с удаленными разрезами. В частности, $G(a) \subset A^*(\infty)$. Для любой точки $z \in G(a)$ определены координаты Грина

$$\rho = u(z),\ t = \frac{1}{2\pi} \arg B(z).$$

Значение t называется внешним аргументом точки z и обозначается $t = \arg_B z$.

Рассмотрим отображение τ, определенное в (1). Если $\arg_B z = t$, то $\arg_B T(z) = \tau(t)$.

Так как любая точка $z \in A^*(\infty)$ лежит на некотором внешнем радиусе, то внешний аргумент (а следовательно, и гриновы координаты) однозначно определен для всех точек области $A^*(\infty)$. Формула

$$B(z) = e^{\rho + 2\pi t i}$$

задает продолжение функции B в односвязную область $A^*(\infty)$. Продолженная таким образом функция конформно отображает область $A^*(\infty)$ на некоторую звездную относительно бесконечности область $U \subset \{x : |x| > 1\}$. Положим $S = \partial U$.

Пусть $x \in \mathbb{C}$, $|x| > 1$, $I_x = \{\zeta : 1 \le |\zeta| \le x, \arg\zeta = \arg x\}$. Назовем этот отрезок иглой, а точку $x/|x|$ – основанием этой иглы.

<u>Предложение 1.</u> Справедливы следующие утверждения:

1) $T : A^*(\infty) \to A^*(\infty)$;

2) продолженная функция $B(z)$ удовлетворяет функциональному уравнению (2), иными словами, функция

$$T_0 = B \circ T \circ B^{-1} : x \mapsto x^d$$

отображает U в U;

3) $$S = \mathbb{T} \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{T_0^n(x) = B(c_j)} I_x .$$

Доказательства этих утверждений легко следуют из приведенных выше определений.

Назовем множество S ежом. Кожей ежа назовем окружность $\mathbb{T}$ с удаленными основаниями игл. Отметим, что еж S однозначно определяется значениями $B(c_1), \dots, B(c_s)$ и степенью d.

После логарифмической замены переменной $w = i \log x$ еж S перейдет в 2π- периодическую гребенку. Отсюда легко следует отмеченный в п.1 результат о полиноме $T(z) = z^2 - \lambda, \lambda > 2$ с вещественным множеством Жюлиа.

3. Рассмотрим гиперболический случай. Предположим, что полином $T(z)$ гиперболический, т.е. для всех точек z из некоторой компактной окрестности $V\subset J$ и всех ветвей обратной функции T^{-n} выполняется оценка

$$|(T^{-n})'(z)|\leq\beta L^{-n}$$

с некоторыми постоянными $\beta>0,\ L>1$.

Приведем без доказательства два предложения, касающихся этого случая. Их доказательства вполне аналогичны доказательствам соответствующих предложений из [3] (см. также [4]) для случая, когда $A(\infty)$ – односвязная область.

Предложение 2. Пусть T – гиперболический полином. Тогда все максимальные линии Грина заканчиваются в точках множества Жюлиа J.

Определим множество $J^*=\partial A^*(\infty)$. По определению J^* – континуум, т.е. связный компакт. В гиперболическом случае множество J^* состоит из множества Жюлиа J и разрезов, соединяющих точки $C(\infty)$ и J.

Предложение 3. В гиперболическом случае множество J^* локально связно и не имеет внутренних точек.

Так как множество S также локально связно, то по теореме Каратеодори функция $B(z)$ продолжается в этом случае на множество J^*, а обратная функция $\varphi=B^{-1}$ – на множество S.

Замечание 1. Эти предложения остаются в силе и в некоторых других случаях, например когда полином $T(z)$ полугиперболический, т.е. все критические точки, расположенные на J, имеют конечную траекторию [3, 4].

Замечание 2. В общем случае функция $\varphi(x)$ продолжается во все периодические циклы полинома $T_0(x)=x^d$ и переводит их в отталкивающие периодические циклы полинома $T(x)$. Это следует из того, что последние достижимы из $A(\infty)$ вдоль некоторой кривой [8], а следовательно, и вдоль некоторого внешнего радиуса.

4. Пусть $T(z)$ – полином вида

$$T(z)=z^d+b_{d-2}z^{d-2}+\dots+b_1z+b_0.$$

Параметризируем такие полиномы точками $b=(b_0,b_1,\dots,b_{d-2})\in\mathbb{C}^{d-2}$. Пусть $H\subset\mathbb{C}^{d-2}$ – замыкание точек b, соответствующих полиномам с несвязным множеством Жюлиа. Будем использовать обозначения $A_b(\infty),A_b^*(\infty),u_b(z)$ и т.д.

Предложение 4. Пусть $\{b_n\}\subset int(H)$, $b_n\to b$. Тогда области $A^*_{b_n}(\infty)$ сходятся к $A_b(\infty)$, если в $b\in\partial H$, и к $A_b^*(\infty)$, если $b\in int(H)$. Здесь сходимость понимается как сходимость к ядру в смысле Каратеодори.

Доказательство. Рассмотрим только первый случай $b\in\partial H$. Случай $b\in int(H)$ рассматривается аналогично. Будем использовать тот факт [3], что функция $u_b(z)$ – непрерывная функция от $(z,b)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^{d-2}$. Разобьем доказательство на два шага.

Шаг 1. Пусть $K\subset A_b(\infty)$ – произвольный компакт. Покажем, что $K\subset A^*_{b_n}(\infty)$, $n\geqslant n_0$. Выберем такое $\varepsilon>0$, что $u_b(z)>\varepsilon$, $z\in K$. Тогда

$$u_{b_n}(z)\geqslant\varepsilon/2,\quad z\in K,\quad n\geqslant n_0. \tag{3}$$

Если $c_1, c_2, \ldots, c_{d-1}$ – критические точки полинома $T_b(z)$, то $u_b(c_j)=0$, $1\leqslant j\leqslant d-1$, так как $b\in\partial H$. Поэтому

$$u_{b_n}(c_{j,n})<\varepsilon/2,\quad n>n_0. \tag{4}$$

где $c_{j,n}$ – критические точки полиномов T_{b_n}. Положим

$$a_n=max\left\{u_{b_n}(c_{j,n}):1\leqslant j\leqslant d-1\right\}.$$

Из (3) и (4) следует, что

$$K\subset G_{b_n}(a_n)\subset A^*_{b_n}(\infty),\quad n>n_0.$$

Шаг 2. Покажем, что $A_b(\infty)$ – наибольшая область среди областей со свойством, указанным в шаге 1.

Пусть это не так. Тогда найдется подпоследовательность, которую также обозначим b_n, и область $D\supset A_b(\infty)$ такие, что для любого компакта $K\subset D$ выполняется условие

$$K\subset A^*_{b_n}(\infty),\quad n>n_0.$$

Имеем $J_b\cap D\neq\varnothing$. Выберем в качестве компакта K замкнутую окрестность V точки $z\in J_b\cap D$ такую, что $V\subset D$. Тогда

$$V\subset A^*_{b_n}(\infty),\quad n\geqslant n_0,$$

а значит,

$$V\cap J_{b_n}=\varnothing,\quad n\geqslant n_0.$$

С другой стороны, $J_b\subset D_R=\{z:|z|<R\}$ при некотором $R<\infty$. Выберем число $N\in\mathbb{N}$ так, чтобы

$$T_b^N(V)\supset\bar{D}_{2R}.$$

Так как

$$T_{b_n}^N \to T_b^N, \quad n \to \infty,$$

то

$$T_{b_n}^N(V) \supset \bar{D}_{3/2R}.$$

В частности,

$$J_b \subset T_{b_n}^N(V), \quad n \geq n_0.$$

Выберем точки $y \in J_{b_n}, x \in V$ так, чтобы $T_{b_n}^N(x) = y$. Тогда

$$x \in J_{b_n} \cap V, \quad n \geq n_0.$$

Соотношения (5) и (6) приводят к противоречию. Предложение доказано.

Обозначим через Φ функцию, обратную к функции Бэттхера.

Предложение 5. В условиях предыдущего предложения имеем

$$\Phi_{b_n} \to \Phi_b, \quad n \to \infty$$

равномерно на каждом компакте в $\bar{C} \setminus \bar{D}$ в случае $b \in \partial H$ и равномерно на каждом компакте в $A_b^*(\infty)$, когда $b \in int(H)$.

Доказательство. Рассмотрим только первый случай. Заметим, что $U_{b_n} \to \bar{C}/\bar{D}$ как к ядру в смысле Каратеодори. Теперь утверждение следует из предыдущего предложения и теоремы Каратеодори.

1. Fatou P. Memoire sur les equations fonctionnelles // Bull.Soc. Math. France. - 1919. - 47. - P. 161-271; 1920. - 48. - P.33-94, 208-314.
2. Brolin H. Invariant sets under iteration of rational functions // Ark. Math. - 1966. - 6, N 1. - P. 103-144.
3. Douadi A., Hubbard J. Etude dynamique des polynomes complexes.- Paris, 1984. - 186 p. - (Prepr. / Univ. de Paris, Orsay; 1984-02).
4. Milnor J. Dynamics in one complex variable: introductory lectures. - Stony Brook, 1990. - 127 p. - (Prepr. / Inst. Math. Sci.; 1990/5).
5. Sodin M., Juditskii P. The limit-periodic finite difference operator on $l^2(z)$ associated with iterations of quadratic polynomials // J. Stat. Phys. - 1990. - 60, N 5/6.-P.215-226.
6. Bessis D., Geronimo J.S., Moussa P. Mellin transforms associated with julia sets and physical applications // J. Stat. Phys. - 1984. - 34, N 1/2. - P. 75-110.
7. Arsove M.G., Johnson G.Jr. A conformal mapping technique for infinitely connected regions // Mem. AMS. - 1970. - N 91. - P. 1098-2016.

8. Еременко А.Э., Левин Г.М. О периодических точках многочленов// Укр. мат. журн. - 1989. - 41, № 9. - С. 1467-1471.

УДК 517.5

М.В.Новицкий

ОБ ОЦЕНКАХ НАИЛУЧШИХ КОНСТАНТ В НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА КОЛМОГОРОВА – МАРКОВА

В терминах норм многочленов наименьшего уклонения получены эффективные оценки точных констант в неравенствах типа Колмогорова - Маркова.

1. Пусть f - достаточно гладкая n раз непрерывно дифференцируемая функция и $\|f\|_{p,S}=\|f\|_{L_p(S)}$, где S - отрезок, полупрямая или прямая. Известно [1], что если показатели $1\le p,q,r\le\infty$ удовлетворяют условию

$$\frac{1}{q}\le\frac{n-k}{n}\,\frac{1}{p}+\frac{k}{n}\,\frac{1}{r}, \tag{1.1}$$

то существуют константы C_1 и C_2, не зависящие от функции f, такие, что

$$\|f^{(k)}\|_{q,S}\le C_1\|f\|_{p,S}+C_2\|f\|^{\alpha}_{p,S}\|f^{(n)}\|^{1-\alpha}_{r,S}, \tag{1.2}$$

где $\alpha=n-k-\frac{1}{r}+\frac{1}{q}\Big/n-\frac{1}{r}+\frac{1}{p}$. При этом $C_1=0$, если интервал S бесконечен, и $\alpha=\frac{k}{n}$, если в (1.1) имеет место знак равенства. В [2] найдена точная константа в мультипликативном неравенстве

$$\|f^{(k)}\|_{\infty,R}\le C_2(k,n)\|f\|^{1-\frac{k}{n}}_{\infty,R}\|f^{(n)}\|^{\frac{k}{n}}_{\infty,R}.$$

На множестве многочленов P_{n-1} (1.2) превращается в неравенство

$$\|f^{(k)}\|_{q,S}\le C_1\|f\|_{p,S}.$$

В работе [3] для случая $q=p=\infty, S=[-1;1]$ найдено точное значение константы $C_1(k,n)=T_n^{(k)}(1)$, где $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$ - многочлен Чебышева I рода. Неравенство (1.2) в дальнейшем будем называть не-

ISBN 5-12-002791-1. Динамические системы и комплексный анализ. Киев, 1992

равенством типа Колмогорова - Маркова. Задача о нахождении точных констант C_1 и C_2 по набору $\{p,q,r,k,n\}$ в настоящее время далека от своего решения. Известны лишь сравнительно редкие случаи (см. библиографию в работах [4, 5]), когда константы C_1 и C_2 могут быть найдены. В этой статье даем эффективные оценки наилучших констант в неравенстве (1.2). Сформулируем основной результат работы. Обозначим через $Q_{n-1,k}$ многочлен наименьшего уклонения в метрике $L_p[0,1]$ с фиксированным коэффициентом при x^k, равным $\frac{1}{k!}$.

Теорема 1. Пусть набор $\{p,q,r,k,n\}$ удовлетворяет условию (1.1). Тогда

$$\|f^{(k)}\|_{q,S} \le \frac{A}{|S|^{\gamma}}\|f\|_{p,S} + B\|f\|^{\alpha}_{p,S}\|f^{(n)}\|^{1-\alpha}_{r,S}, \tag{1.3}$$

где

$$|S| = mes\,S, \quad \gamma = k+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}, \quad \alpha = \frac{n-k-\frac{1}{r}+\frac{1}{q}}{n-\frac{1}{r}+\frac{1}{p}}. \tag{1.4}$$

Для величин A и B справедливы формулы

$$A = \frac{2^{k+1+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}}{\|Q_{n-1,k}\|_{p[0,1]}}; \quad B = \frac{2^{2+\frac{1}{q}+\frac{n-k}{n}\frac{1}{p}+\frac{k}{n}\frac{1}{r}}C^{\frac{k}{n}}(p,n,r)}{\|Q_{n-1,k}\|_{p[0,1]}\,(n-1)!^{\frac{k}{n}}}, \tag{1.5}$$

где
$$C(p,n,r) = \frac{1}{[(n-1)p+1]^{\frac{1}{p}}\left[r'(n-1+\frac{1}{p})+1\right]^{\frac{1}{r'}}},$$

r' - показатель двойственный к показателю r.

Метод, которым доказывается неравенство (1.3), естественно называть методом склейки аддитивных оценок. Для его применения доказываем (п. 2), что на любом интервале $\Delta\subset S$ длиной $h\le|S|$ выполняется неравенство

$$\|f^{(k)}\|_{q,\Delta} \le \frac{2^{k+\frac{1}{p}}}{h^{k+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|Q_{n-1,k}\|_{p,[0,1]}}\|f\|_{p,\Delta} + \tag{1.6}$$

$$+\frac{C(n,p,r)\,h^{h-k-\frac{1}{r}+\frac{1}{q}}}{\|Q_{n-1,k}\|_{p,[0,1]}\,2^{h-k-\frac{1}{r}}(h-1)!}\,\|f^{(n)}\|_{r,\Delta}\ .$$

Затем локальные оценки (1.6) склеиваются в глобальную оценку (1.3). Впервые аддитивная оценка, где было указано на связь с многочленами наименьшего уклонения, была получена в работе [5], $k=n-1$. Наш метод получения оценки (1.6) отличается от метода работы [5], хотя и использует ряд его конструкций. В п. 4 устанавливаем мультипликативное неравенство (4.2) для функций почти периодических по Бору и обсуждаем точность полученных оценок.

Отметим, что оценка (4.2) играет важную роль при изучении спектральных инвариантов оператора Шредингера с периодическим и почти периодическим потенциалами.

2. Нашей целью является доказательство оценки (1.6). Без ограничения общности можно считать, что $\Delta=[0,h]$, $h>0$.

Приведем вспомогательные утверждения. Обозначим через $\omega(t)$, $t\in[0,h]$ n раз непрерывно дифференцируемую функцию на отрезке $[0,h]$, удовлетворяющую условиям

$$\omega^{(i)}(0)=0,\quad i=0,1,\dots,n-1\ . \tag{2.1}$$

<u>Лемма 1.</u> Пусть функция $\omega(t)$ удовлетворяет системе условий

$$(-1)^n\int_0^h\frac{t^s}{s!}\,\omega^{(n)}(h-t)\,dt=\delta_{sk}\ . \tag{2.2}$$

Тогда для любой функции $f\in C^n[0,h]$ выполняется равенство

$$f^{(k)}(0)=\int_0^h(-1)^n\omega^{(n)}(h-t)f(t)\,dt-\int_0^h\omega(h-t)f^{(n)}(t)\,dt\ . \tag{2.3}$$

Наоборот, если выполнются условия (2.1) и (2.3), то $\omega(t)$ удовлетворяет условиям (2.2).

<u>Доказательство</u>. Пусть u и v являются n раз непрерывно дифференцируемыми функциями, удовлетворяющими условиям

$$v^{(l)}(0)=0,\quad u^{(l)}(h)=0,\quad l=0,1,2,\dots,n-1\ .$$

Тогда
$$\int_0^h u(t)\,v^{(n)}(t)\,dt=\int_0^h(-1)^n u^{(n)}(t)\,v(t)\,dt\ .$$

Полагаем $u(t) = \omega(h-t)$, $v(t) = f(t) - \sum_{l=0}^{n-1} f^{(l)}(0)\frac{t^s}{s!}$. Подставляя u и v в предыдущее равенство, получаем

$$\int_0^h \omega(h-t) f^{(n)}(t)dt = -\sum_{l=0}^{n-1} f^{(l)}(0)\int_0^h (-1)^n \omega^{(n)}(h-t)dt +$$

$$+ \int_0^h \omega(h-t) f(t)dt = -f^{(k)}(0) + \int_0^h f(t)(-1)^n \omega^{(n)}(h-t)dt \ ,$$

откуда и следует (2.3). Обратное утверждение есть следствие формулы (2.3), если положить $f(t) = \frac{t^s}{s!}$, $s = 0, 1, \ldots, n-1$.

Лемма 2. Пусть $Q(t) = \sum_{s=0}^{n-1} b_s \frac{t^s}{s!}$ – многочлен наименьшего уклонения в метрике $L_p[0, h]$. Тогда система

$$\int_0^h \frac{t^s}{s!} d\sigma(t) = \delta_{sk}\ , \quad s = 0, 1, \ldots, n-1$$

имеет решение

$$d\sigma(t) = \frac{|Q(t)|^{p-1} \operatorname{sign} Q(t)}{\| Q \|_p^p} .$$

Доказательство. Если Q – многочлен наименьшего уклонения, то он минимизирует значение функционала

$$F(b_0, \ldots, b_{n-1}) = \int_0^h \left| \sum_{s=0}^{n-1} b_s \frac{t^s}{s!} \right|^p dt - \lambda b_k .$$

Поэтому $\frac{\partial F}{\partial b_s} = 0$ и, следовательно,

$$p\int_0^h |Q(t)|^{p-1} \operatorname{sign} Q(t) \frac{t^s}{s!} dt = \lambda \delta_{sk} . \qquad (2.4)$$

Умножая обе части равенства (2.4) на b_s и складывая их, получаем $\lambda = p\|Q\|_p^p$. Следовательно,

$$\frac{1}{\|Q\|_p^p}\int_0^h |Q(t)|^{p-1} \operatorname{sign} Q(t)\,\frac{t^s}{s!}\,dt = \delta_{sl}\,.$$

Построим функцию ω. Согласно лемме 2, для построения функции $\omega(t)$, удовлетворяющей условиям (2.2), полагаем

$$(-1)^n \omega^{(n)}(h-t) = \frac{1}{\|Q\|_p^p}\,|Q(t)|^{p-1} \operatorname{sign} Q(t)\,. \qquad (2.5)$$

Проделав замену $u=h-t$, получим

$$\omega^{(n)}(u) = \frac{1}{\|Q\|_p^p}\,|Q(h-u)|^{p-1} \operatorname{sign} Q(h-u)\,. \qquad (2.6)$$

Поскольку $\omega(0)=\omega'(0)=\dots=\omega^{(n-1)}(0)=0$, то

$$\omega(t) = \frac{1}{\|Q\|_p^p}\int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!}\,|Q(h-u)|^{p-1} \operatorname{sign} Q(h-u)\,du\,. \qquad (2.7)$$

Приведем аддитивную оценку. Применяя неравенство Гельдера к каждому слагаемому правой части равенства (2.3), получаем

$$|f^{(k)}(0)| \le \|\omega^{(n)}\|_{p'}\,\|f\|_p + \|\omega\|_{r'}\,\|f^{(n)}\|_r\,.$$

Учитывая, что $\omega^{(n)}$ удовлетворяет (2.5), находим

$$\|\omega^{(n)}\|_{p'} \le \frac{1}{\|Q\|_p^p}\left[\int_0^h |Q(t)|^{(p-1)p'}dt\right]^{\frac{1}{p'}} = \frac{1}{\|Q\|_p}\,.$$

Из соотношения (2.7) следует, что

$$|\omega(t)| \le \frac{t^{n-1+\frac{1}{p}}}{\|Q\|_p (n-1)!\left[(n-1)p+1\right]^{\frac{1}{p}}}, \quad t\in[0,h]\,.$$

После интегрирования этого неравенства имеем

$$\|\omega\|_{r'} \le \frac{C(n,p,r)}{\|Q\|_p (n-1)!} h^{n+\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} ,$$

где

$$C(n,p,r) = \frac{1}{[(n-1)p+1]^{\frac{1}{p'}} [r'(n-1+\frac{1}{p})+1]^{\frac{1}{r'}}} .$$

Поскольку $\|Q\|_{p,[0,h]} = \|Q_{n-1,k}\|_{p,[0,1]} h^{k+\frac{1}{p}}$, то

$$|f^{(k)}(0)| \le \frac{\|f\|_{p,[0,h]}}{h^{k+\frac{1}{p}} \|Q_{n-1,k}\|_{p,[0,1]}} + \tag{2.8}$$

$$+ \frac{C(n,p,r) h^{n-k-\frac{1}{r}} \|f^{(n)}\|_{r,[0,h]}}{\|Q_{n-1,k}\|_{p,[0,1]} (n-1)!} .$$

Заменив в неравенстве (2.8) функцию $f(t)$ на $f(h-t)$, получим аналогичную оценку для $|f^{(k)}(h)|$.

Следовательно, если любой интервал Δ длиной h разделить пополам и к левой части применить неравенство типа (2.8), а к правой части - аналогичное, то получим

$$\|f^{(k)}\|_{\infty,\Delta} \le \frac{2^{k+\frac{1}{p}}}{h^{k+\frac{1}{p}} \|Q_{n-1,k}\|_{p,[0,1]}} \|f\|_{p,\Delta} +$$

$$+ \frac{C(n,p,r) h^{n-k-\frac{1}{r}}}{\|Q_{n-1,k}\|_{p,[0,1]} (n-1)!\, 2^{n-k-\frac{1}{r}}} \|f^{(n)}\|_{r,\Delta} .$$

Неравенство (1.6) для L_q-нормы получается интегрированием предыдущего неравенства.

3. Приведем лемму о склейке и доказательство теоремы 1.

Случай 1: $mes\, S = |S| = \infty$. Если интервал бесконечен, то в аддитивной оценке можно вместо Δ поставить S, а параметр $h > 0$ будет произвольным положительным числом. Выбирая h таким, что первое слагаемое в правой части (1.6) равно второму, получаем мультипликативное неравенство (т.е. $A = 0$) (1.3).

Случай 2: $mes\, S = |S| < \infty$.

Лемма о склейке [6]. Пусть набор $1 \le p, q, r \le \infty$ удовлетворяет условию (1.1), а тройка функций $\{u, f, g\}$ на каждом интервале $\Delta \subset S$ удовлетворяет аддитивной оценке

$$\|g\|_{q,\Delta} \le \frac{\gamma_1}{|\Delta|^{\eta}} \|f\|_{p,\Delta} + \gamma_2 |\Delta|^{\nu} \|u\|_{r,\Delta},$$

причем γ_1 и γ_2 не зависят от Δ и η, $\nu \ge 0$, $\nu + \eta > 0$, $\alpha = \nu/_{\nu+\eta}$. Тогда

$$\|g\|_{q,S} \le 2^{1+\frac{1}{q}} \left[\frac{\|f\|_{p,S}}{|S|^{\eta}} + \gamma_1^{\alpha} \gamma_2^{1-\alpha} \|f\|_{p,S}^{\alpha} \|u\|_{r,s}^{1-\alpha} \right].$$

Доказательство теоремы 1 непосредственно следует из аддитивной оценки (1.6) и леммы о склейке.

4. Приведем следствия из теоремы 1.

Теорема 2. Пусть $f(x)$, $x \in R$ и все производные функции $f(x)$ до порядка n включительно являются почти периодическими по Бору функциями. Тогда, если $0 < k < n$ и

$$\frac{1}{q} = \left(1 - \frac{k}{n}\right) \frac{1}{p} + \frac{k}{n} \frac{1}{r}, \qquad (4.1)$$

то выполняется мультипликативное неравенство

$$\|f^{(k)}\|_{B_q} \le B \|f\|_{B_p}^{1-\frac{k}{n}} \|f^{(n)}\|_{B_r}^{\frac{k}{n}}, \qquad (4.2)$$

где B вычисляется по формуле (1.5), а $\|f\|_{B_p}$ обозначает норму функции f в пространстве Безиковича B_p.

Доказательство. Заменим в (1.3) меру dx на усредненную меру $\frac{dx}{mes\, S}$. Полагая $mes\, S = \lambda$, получаем

$$\lambda^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{\lambda}\int_S |f^{(k)}(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \le A\left(\frac{1}{\lambda}\int_S |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ B\left[\left(\frac{1}{\lambda}\int_S |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{\alpha}\left[\left(\frac{1}{\lambda}\int_S |f^{(n)}(x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}}\right]^{1-\alpha}\lambda^{\frac{\alpha}{p}+\frac{1-\alpha}{r}}.$$

Из (4.1) следует, что $\alpha = 1-\frac{k}{n}$, и, значит, $\frac{\alpha}{p}+\frac{1-\alpha}{r}=\frac{1}{q}$. Полагая $\lambda\to\infty$, получаем (4.2).

В приложениях в связи с наличием множителя $\|Q_{n-1,k}\|_{p,[0,1]}$ пользоваться оценкой (1.3) весьма затруднительно. Ее можно упростить. Дадим упрощенный вариант этой оценки. Пространство многочленов степени не выше $n-1$ является конечномерным n-мерным пространством, в котором все L_p-метрики эквивалентны. Известна [7] оценка

$$\|P_{n-1}\|_{\infty,[0,1]} \le \left(2(p+1)\right)^{\frac{1}{p}}(n-1)^{\frac{2}{p}}\|P_{n-1}\|_{p,[0,1]} .$$

Поэтому

$$\frac{1}{\|Q_{n-1,k}\|_{p,[0,1]}} \le \frac{\left(2(p+1)\right)^{\frac{1}{p}}(n-1)^{\frac{2}{p}}}{\|Q_{n-1,k}\|_{\infty,[0,1]}}.$$

Из неравенства Маркова следует, что

$$1 = |Q^{(k)}_{n-1,k}(0)| \le T^{(k)}_{n-1}(1)\,2^k\|Q_{n-1,k}\|_{\infty,[0,1]} ,$$

и, значит,

$$\frac{1}{\|Q_{n-1,k}\|_{p,[0,1]}} \le \left[2(p+1)\right]^{\frac{1}{p}}(n-1)^{\frac{2}{p}}2^k T^{(k)}_{n-1}(1) .$$

Поскольку

$$T^{(k)}_{n-1}(1) \le 2(n-1)^k C^k_{n-1} ,$$

то

$$B \leqslant \gamma_0 (n-1)^{\frac{2}{p}} 2^k C^k_{n-1} \quad , \qquad (4.3)$$

где γ_0 – некоторая абсолютная постоянная. Известно [8], что точная константа в неравенстве (1.3) при $p=q=r=2$ и $S=[0,\infty)$ имеет асимптотику $\lambda(k)n^k$, где $\lambda(k)$ – некоторая функция; k фиксированно; $n\to\infty$. Следовательно, наша оценка (4.3) наилучшей константы является точной по порядку роста n при фиксированном k.

1. Габушин В.Н. Неравенства для норм функций и ее производных в метриках L_p // Мат. заметки. – 1967. – № 3. – С. 291–298.
2. Колмогоров А.Н. О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале / Учен. зап. Моск. ун-та. Сер. Математика. – 1939. – 30, кн. 3. – С. 3–16.
3. Марков В.А. О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке. – Спб., 1982.
4. Арестов В.В. О некоторых экстремальных задачах для дифференцируемых функций одной переменной // Тр. МИАН СССР. – 1975. – 138. – С. 3–28.
5. Буренков В.И. О точных постоянных в неравенствах для норм промежуточных производных на конечном интервале // Там же. – 1980. – 156. – С. 22–29.
6. Габушин В.Н. Неравенства для производных решений обыкновенных дифференциальных уравнений в метриках $L_p (0<p<\infty)$ // Дифференц. уравн. – 1988. – 24, № 10. – С. 1662–1670.
7. Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 360 с.
8. Купцов Н.П. Колмогоровские оценки для производных в $L_2[0,\infty)$ // Тр. МИАН СССР. – 1975. – 138. – С. 94–117.

УДК 517.55

Л.И.Ронкин

ОБ ОЦЕНКЕ ЧАСТНОГО ФУНКЦИЙ, ГОЛОМОРФНЫХ НА АЛГЕБРАИЧЕСКОМ МНОЖЕСТВЕ

Рассмотрены функции $f_1(z)$, $f_2(z)$ и $f_3(z)$, голоморфные на алгебраическом множестве $A \subset \mathbb{C}^n$ и связанные между собой равенством $f_2(z)=f_3(z)f_1(z)$. Получена оценка величины $M_{f_3}(r)=\max\{|f(z)|:|z|=r, z\in A\}$ через $M_{f_2}(r)$ и $M_{f_1}(r)$.

В работе [1] изучался вопрос о категории частного (см. [2]) двух функций, голоморфных на алгебраическом многообразии в $\mathbb{C}^n$. Иными словами, вопрос об оценке роста указанного частного в предположении, что рост исходных функций характеризуется порядком, типом или

ISBN 5-12-002791-1. Динамические системы и комплексный анализ. Киев, 1992

классом сходимости. В настоящей статье дается некоторое обобщение результата, полученного в [1]. При этом устраняется неточность, допущенная в [1] при доказательстве указанного утверждения.

Введем необходимые обозначения. Пусть G – область в $\mathbb{C}^n$; Λ – аналитическое множество в G. Пространство всех функций, голоморфных в G, обозначим через $H(G)$. Через $H(\Lambda)$ обозначим семейство всех функций, голоморфных на Λ. Заметим, что при $G=\mathbb{C}^n$ пространство $H(\Lambda)$ совпадает с пространством сужений на Λ функций из $H(\mathbb{C}^n)$. В этом случае (а именно он рассматривается здесь) полагаем

$$M(R;f)=M(R;f,\Lambda)=\max\{|f(z)|: z\in\Lambda,\ |z|=R\}.$$

Если $\varphi(\zeta)$ – функция, определенная на окружности $\{\zeta\in\mathbb{C}:|\zeta|=R\}$, то через $M_\varphi(R)$ обозначается величина $\sup\{|\varphi(\zeta)|:\zeta\in\mathbb{C},|\zeta|=R\}$, а через $\mathfrak{m}(R;\varphi)$ – среднее значение функции φ, т.е.

$$\mathfrak{m}(R;\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(Re^{i\theta})\,d\theta .$$

Обозначим также: $U_R(z^0)=U_R^n(z^0)=\{z\in\mathbb{C}^n: |z_i-z_i^0|<R,\ i=1,\dots,n\}$, $S_R(z^0)=S_R^n(z^0)=\{z\in\mathbb{C}^n: |z-z^0|=R\}$, $B_R(z^0)=B_R^n(z^0)=\{z\in\mathbb{C}^n:|z-z^0|<R\}$, $B_R=B_R(0)$, $S_R=S_R(0)$,

$$D_{\varepsilon,R}(z^0)=\{(z,\zeta)\ :z\in U_R^n(z^0),\quad \zeta\notin U_R^1(0)\},$$

$$D_{\varepsilon,R}=D_{\varepsilon,R}(0),\quad f^+=\max\{f,0\},\quad f^-=(-f)^+ .$$

Через $d\omega_\zeta$ обозначим элемент площади в плоскости переменного ζ.

Напомним, что аналитическое множество $\Lambda\subset\mathbb{C}^n$ называется алгебраическим (алгебраическим многообразием), если оно есть множество общих корней какой-либо системы полиномов от переменных $z_1\in\mathbb{C},\dots,z_n\in\mathbb{C}$.

Теорема. Пусть Λ – алгебраическое множество в $\mathbb{C}^n$ положительной размерности и пусть функции $f_1\in H(\Lambda)$ и $f_2\in H(\Lambda)$ такие, что $f_2/f_1=f_3\in H(\Lambda)$. Тогда для любого числа $\mu>0$ найдутся такие постоянные $C_1=C_1(\mu,\Lambda)$, $C_2=C_2(\mu,\Lambda,f_1,f_2)$ и $C_3=C_3(\mu,\Lambda,f_1,f_2)$, что $\forall R>1$:

$$\ln^+M(R;f_3)\leq$$

$$\leq C_1[\ln^+M((1+\mu)R;f_1)+\ln^+M((1+\mu)R;f_2)]+C_2\ln R+C_3 .$$

Для доказательства этой теоремы понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. Пусть $f_1(\zeta)$ и $f_2(\zeta)$, $\zeta\in\mathbb{C}$ – функции, голоморфные при $|\zeta|\geqslant r$ и такие, что частное $f_2/f_1 \overset{def}{=} f_3$ также голоморфно при $|\zeta|\geqslant r$ и, кроме того, $f_1(re^{i\theta})\neq 0 \quad \forall\theta\in[0,2\pi]$. Пусть, далее, μ – какое-нибудь число из интервала $(0,1)$. Тогда при всех $R\geqslant 2r$ справедливо неравенство

$$\ln^+ M_{f_3}(R)\leqslant\frac{4}{\mu}\left\{\ln^+ M_{f_2}((1+\mu)R)+\ln^+ M_{f_1}((1+\mu)R)\right\}+$$

$$+\frac{4}{\mu}\left\{\mathfrak{m}\left(r;\ln^+|f_2|\right)+\mathfrak{m}\left(r;\ln^-|f_1|\right)\right\}+$$

$$+d\,\mathfrak{m}\left(r;\frac{\partial}{\partial r}\ln|f_1(re^{i\theta})|\right),$$

где $\quad d=d(\mu,R,r)=r\left\{(1-\mu)^2\ln(1-\mu)-(1+\mu)^2\ln(1+\mu)-2\mu\ln\frac{R}{r}\right\}$.

Доказательство. Ввиду субгармоничности функции $\ln|f(\zeta)|$ имеем

$$\ln|f_3(Re^{i\theta})|\leqslant\frac{1}{\pi(\mu R)^2}\int\limits_{U_{\mu R}(Re^{i\theta})}\ln|f_3(\zeta)|\,d\omega_\zeta=$$

$$=\frac{1}{\pi(\mu R)^2}\int\limits_{U_{\mu R}(Re^{i\theta})}\left(\ln|f_2(\zeta)|-\ln|f_1(\zeta)|\right)d\omega_\zeta\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi(\mu R)^2}\int\limits_{U_{\mu R}(Re^{i\theta})}\left(\ln^+|f_2(\zeta)|+\ln^-|f_1(\zeta)|\right)d\omega_\zeta\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi(\mu R)^2}\int\limits_{(1-\mu)R\leqslant|\zeta|\leqslant(1+\mu)R}\left(\ln^+|f_2(\zeta)|+\ln^-|f_1(\zeta)|\right)d\omega_\zeta=$$

$$=\frac{2}{(\mu R)^2}\int\limits_{(1-\mu)R}^{(1+\mu)R}\left\{\mathfrak{m}\left(t;\ln^+|f_2|\right)+\mathfrak{m}\left(t;\ln^-|f_1|\right)\right\}dt.$$

Поэтому

$$\ln^+ M_{f_3}(R)\leqslant$$

$$\leq \frac{2}{(\mu R)^2} \int\limits_{(1-\mu)R}^{(1+\mu)R} \left\{ \mathfrak{M}\left(t; \ln^+|f_2|\right) + \mathfrak{M}\left(t; \ln^-|f_1|\right)\right\} t\,dt. \quad (1)$$

Отметим, что для любой субгармонической в кольце функции $u(\zeta)$ ее среднее $\mathfrak{M}(t;u)$,как известно, является выпуклой функцией от $\ln t$, и значит, его максимум на отрезке достигается на концах отрезка. Поэтому

$$\int\limits_{(1-\mu)R}^{(1+\mu)R} \mathfrak{M}\left(t;\ \ln^+|f_2|\right) t\,dt \leq$$

$$\leq 2\mu R^2 \left\{ \mathfrak{M}\left((1+\mu)R;\ \ln^+|f_2| + \mathfrak{M}\left(r; \ln^+|f_2|\right)\right\}. \qquad (2)$$

Для оценки интеграла

$$\int\limits_{(1-\mu)R}^{(1+\mu)R} \mathfrak{M}\left(t; \ln^-|f_1|\right) t\,dt$$

воспользуемся неравенством

$$\mathfrak{M}(R;u) \geq \mathfrak{M}(r;u) + r\ln\frac{R}{r}\,\mathfrak{M}\left(r; u'_r(re^{i\theta})\right), \qquad (3)$$

справедливом для любой функции, субгармонической при $|\zeta|\geq r$ и гладкой в окрестности окружности $|\zeta|=r$. При дополнительном предположении о гладкости функции $u(\zeta)$ всюду это неравенство выводится следующим образом:

$$0 \leq \int\limits_r^R \frac{1}{t}\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{r<|\zeta|<t} \Delta u\, d\omega_\zeta\right\}dt =$$

$$= \int\limits_r^R \left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u'_t(te^{i\theta})\,d\theta - \frac{r}{t}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u'_r\left(re^{i\theta}\right)d\theta\right\}dt =$$

$$= \mathfrak{M}(R;u) - \mathfrak{M}(r;u) - r\ln\frac{R}{r}\,\mathfrak{M}\left(r; u'_r\right).$$

Случай произвольной субгармонической функции сводится к рассмотренному стандартным образом, т.е. с помощью аппроксимации ее гладкими субгармоническими функциями.

Из неравенства (3) вытекает, что

$$\mathfrak{M}(t;\ln^-|f_1|) \le \mathfrak{M}(t;\ln^+|f_1|) -$$

$$-\mathfrak{M}(r;\ln|f_1|) - r\ln\frac{t}{r}\,\mathfrak{M}\left(r;\frac{\partial}{\partial r}\ln^+|f_1(re^{i\theta})|\right),$$

и значит (см. (2)),

$$\int\limits_{(1-\mu)R}^{(1+\mu)R} \mathfrak{M}(t;\ln^-|f_1|)\,t\,dt \le$$

$$\le 2\mu R^2\mathfrak{M}((1+\mu)R;\ln^+|f_1|) - 2\mu R^2\mathfrak{M}(r;\ln|f_1|) +$$

$$+2\mu R^2\mathfrak{M}(r;\ln^+|f_2|) - r\,\mathfrak{M}\left(r;\frac{\partial}{\partial r}\ln|f_1(re^{i\theta})|\right)\int\limits_{(1-\mu)R}^{(1+\mu)R} t\ln\frac{t}{R}\,dt =$$

$$= 2\mu R^2\mathfrak{M}((1+\mu)R;\ln^+|f_1|) + 2\mu R^2\mathfrak{M}(r;\ln^-|f_1|) -$$

$$-R^2 r\left[(1+\mu)^2\ln(1+\mu) - (1-\mu)^2\ln(1-\mu) + 2\mu\ln\frac{R}{r}\right]\mathfrak{M}\left(r;\frac{\partial}{\partial r}\ln|f_1(re^{i\theta})|\right).$$

Отсюда и из (1), (2) получаем

$$\ln^+M_{f_3}(R) \le \frac{4}{\mu}\left(\mathfrak{M}((1+\mu)R;\ln^+|f_1|) + \mathfrak{M}((1+\mu)R;\ln^+|f_2|)\right) +$$

$$+\frac{4}{\mu}\left\{\mathfrak{M}(r;\ln^+|f_2|) + \mathfrak{M}(r;\ln^-|f_1|)\right\} -$$

$$-r\left((1+\mu)^2\ln(1+\mu) - (1-\mu)^2\ln(1-\mu) + 2\mu\ln\frac{R}{r}\right)\mathfrak{M}\left(r;\frac{\partial}{\partial r}\ln|f_1(re^{i\theta})|\right) \le$$

$$\le \frac{4}{\mu}\left\{\ln^+M_{f_1}((1+\mu)R) + \ln^+M_{f_2}((1+\mu)R)\right\} +$$

$$+\frac{4}{\mu}\left\{\mathfrak{M}(r;\ln^+|f_2|) + \mathfrak{M}(r;\ln^-|f_1|)\right\} -$$

$$-r\left[(1+\mu)^2\ln(1+\mu) - (1-\mu)^2\ln(1-\mu) + 2\mu\ln\frac{R}{r}\right] \times$$

$$\times\,\mathfrak{M}\left(r;\frac{\partial}{\partial r}\ln|f_1(re^{i\theta})|\right).$$

Лемма доказана.

Для формулировки леммы 2 дополнительно к ранее введенным понадобятся следующие обозначения:

$$M(R\,;\,f(z,\zeta),\,\varepsilon,\,z^0)=$$
$$=\max\left\{|f(z,\zeta)| : z\in B^n_\varepsilon(z^0),\ |\zeta|=R\right\},$$
$$M(R\,;\,f(z,\zeta),\,\Lambda,\,K)= \tag{4}$$
$$=\max\left\{|f(z,\zeta)| : (z,\zeta)\in\Lambda,\ z\in K,\ |\zeta|=R\right\}$$

и

$$M(R;f(z,\zeta),\Lambda,\varepsilon,z^0)=M(R;f(z,\zeta),\Lambda,B^n_\varepsilon(z^0))\,. \tag{5}$$

Функция $f(z,\zeta)$ в (4) предполагается определенной в области $D_{\varepsilon,R_0}(z^0)$, а в (5) – на аналитическом в этой области множестве Λ.

Лемма 2. Пусть функции $P_i(z,\zeta,w)$, $z\in\mathbb{C}^n$, $w\in\mathbb{C}$, $\zeta\in\mathbb{C}$, имеют вид

$$P_i(z,\zeta,w)=\sum_{j=0}^{k}a_{i,j}(z,\zeta)\,w^{k-j}\;,$$

где k не зависит от i, $a_{i,0}=1$ и коэффициенты $a_{i,j}(z,\zeta)$ голоморфны в $D_{\varepsilon,R_0}(z^0)$. Пусть, далее, $\mathcal{X}$ – аналитическое множество в $D_{\varepsilon,R_0}(z^0)$ и при $(z,\zeta)\notin\mathcal{X}$ можно занумеровать корни полиномов $P_i(z,\zeta,w)$ так, что каждый корень полинома $P_3(z,\zeta,w)$ есть частное соответствующих корней полиномов $P_2(z,\zeta,w)$ и $P_1(z,\zeta,w)$. Тогда для любых фиксированных $\varepsilon'<\varepsilon$ и $\mu\in(0,1)$ с некоторыми, не зависящими от R, положительными c_1 и c_2 выполняется неравенство

$$\max_{1\le j\le n} \ln^+ M(R;a_{3},\varepsilon',z^0)\le$$
$$\le\max_{\substack{i=1,2\\ l=1,\dots,k}}\left\{\frac{4(k+1)}{\mu}\ln^+ M\big((1+\mu)R;\,a_{i,l},\varepsilon',z^0\big)\right\}+$$
$$+\,c_1\ln R\;+c_2\ \ \forall R>R_0\;.$$

Доказательство. Обозначим корни полинома $P_i(z,\zeta,w)$ через $w_{i,j}=w_{i,j}(z,\zeta)$, $j=1,\dots,k$. При этом нумерацию корней выбираем так, чтобы были верны равенства

$$w_{3,j} = w_{2,j} / w_{1,j}\,, \quad (z,\zeta) \notin \varkappa \ .$$

Это возможно согласно условию леммы. Заметим, что при $(z,\zeta)\notin\varkappa$

$$a_{3,j} = (-1)^j \sum_{\nu_1<\ldots<\nu_j} \frac{w_{2,\nu_1}\cdots w_{2,\nu_j}}{w_{1,\nu_1}\cdots w_{1,\nu_j}} =$$

$$= (-1)^j (w_{1,1}\cdots w_{1,k})^{-1} \sum_{\nu_1<\ldots<\nu_j} w_{2,\nu_1}\cdots w_{2,\nu_j} w_{1,l_1}\cdots w_{1,l_{k-j}}\,, \tag{6}$$

где $l_1,\ldots,l_{k-j}$ – выборка из чисел $1,\ldots,k$, дополнительная к выборке $\nu_1,\ldots,\nu_j$. Обозначим последнюю сумму в (6) через $\alpha_j(z,\zeta)$. Тогда равенство (6) примет вид

$$a_{3,j} = (-1)^j \Big(\prod_{l=1}^{k} w_{1,l}\Big)^{-1} \alpha_j(z,\zeta) =$$

$$= (-1)^{j-k} a_{1,k}^{-1}(z,\zeta)\,\alpha_j(z,\zeta)\,, \quad (z,\zeta)\notin\varkappa\,.$$

Так как коэффициенты $a_{3,j}$ и $a_{1,k}$ голоморфны в $D_{\varepsilon,R_0}(z^0)$, то определенная в области $D_{\varepsilon,R_0}(z^0)\setminus\varkappa$ функция $\alpha_j(z,\zeta)$ продолжается голоморфно на всю область $D_{\varepsilon,R_0}(z^0)$. При этом, поскольку

$$|w_{i,j}| \le \sum_\nu |a_{i,\nu}|\,,$$

то

$$|\alpha_j| \le \Big(\sum_\nu |a_{1,\nu}| + \sum_\nu |a_{2,j}|\Big)^k \ .$$

Применяя лемму 1 к функциям $a_{3,j}\alpha_j$ и $a_{1,k}$, заключаем, что $\forall j$

$$\ln^+ M(R\,;\,a_{3,j}\,,\varepsilon',z^0) \le c_1 \ln R + c_2 +$$

$$+\frac{4}{\mu}(k+1)\max_{\substack{1\le\nu\le k\\ i=1,2}} \ln^+ M((1+\mu)R\,;\,a_{i,\nu},\varepsilon',z^0)\,,$$

где постоянные c_1 и c_2 зависят от μ и выбора функций $a_{i,j}$.

Лемма доказана.

Пусть Λ, f_1, f_2, f_3 – те же, что и в условии доказываемой теоремы. Положим $\tilde{\Lambda} = \{(\zeta, z): \zeta \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}^n, z/\zeta \in \Lambda\}$. Так как множество Λ алгебраическое, то замыкание $\bar{\tilde{\Lambda}}$ множества $\tilde{\Lambda}$ также является алгебраическим множеством. Пусть $\tilde{\Lambda}_{z^0}$ – какой-нибудь неприводимый росток множества $\bar{\tilde{\Lambda}}$ в точке $(0, z^0)$. Аналитическое множество, порождающее этот росток, также будем обозначать через $\tilde{\Lambda}_{z^0}$. Пусть множество $\tilde{\Lambda}_{z^0}$ не содержится полностью в плоскости $\zeta = 0$ и пусть оно имеет комплексную размерность k. Тогда по соображениям размерности базис в пространстве переменных $z_1, \dots, z_n$ можно выбрать так, что в некоторой окрестности точки $(0, z^0)$ будет выполняться условие

$$\{(\zeta, z) \in \tilde{\Lambda}_{z^0} : \zeta = 0, z_1 = z_1^0, \dots, z_{k-1} = z_{k-1}^0\} = (0, z^0) .$$

Такой базис является k-правильным [3], и его первыми k координатами являются координаты $\zeta, z_1, \dots, z_{k-1}$. Поэтому [3] существует такой поликруг $\mathcal{E} = U_\varepsilon^k(0, 'z^0)$, $'z^0 = (z_1^0, \dots, z_{k-1}^0)$ и в нем – аналитическое $(k-1)$-мерное множество χ, что при $(\zeta, \lambda) = (\zeta, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}) \notin \chi$ и некотором $\delta > 0$ пересечение

$$\tilde{\Lambda}_{z^0} \cap \{U_\varepsilon^k(0, 'z^0) \times U_\delta^{n-k+1}(''z^0)\} \cap \{(\zeta, z): z_1 = \lambda_1, \dots, z_{k-1} = \lambda_{k-1}\} ,$$

где $''z = (z_k, \dots, z_n)$ состоит из ρ различных точек $(\zeta, \lambda, æ^{(1)}), \dots, (\zeta, \lambda, æ^{(\rho)})$, $æ^{(j)} \in \mathbb{C}^{n-k+1}$, $\lambda \in \mathbb{C}^{k-1}$, причем ρ не зависит от (ζ, λ), и в окрестности каждой точки $(\zeta^0, \lambda^0) \notin \chi$ точки $æ^{(j)} = æ^{(j)}(\zeta, \lambda)$ могут быть занумерованы так, что их координаты будут аналитическими функциями от ζ и λ.

Рассмотрим симметрические функции $\varphi_j^{(i)}(\zeta, \lambda)$, $j = 1, \dots, \rho$, $i = 1, 2, 3$, построенные по числам $f_i(\zeta\lambda, \zeta æ^{(j)}(\frac{1}{\zeta}, \lambda))$. Эти функции, как следует из предыдущего, голоморфны при $|\zeta| > \frac{1}{\varepsilon}, |\lambda_1| < \varepsilon, \dots, |\lambda_{k-1}| < \varepsilon, (1/\zeta, \lambda) \in \chi\}$. Далее, поскольку $æ^{(j)} \in B_\delta^{n-k+1}(''z^0)$, а функции $f_i(z)$ ограничены на $\Lambda \cap G$, $G \subset\subset \mathbb{C}^n$, то функции $\varphi_j^{(i)}(\zeta, \lambda)$ ограничены в области $\{(\zeta, \lambda): |\zeta| > \frac{1}{\varepsilon}, \lambda \in U_\varepsilon^{k-1}('z^0), (\frac{1}{\zeta}, \lambda) \notin \chi\}$, и значит, голоморфно продолжаются на всю область $\{(\zeta, \lambda): |\zeta| > \frac{1}{\varepsilon}, \lambda \in U_\varepsilon^{k-1}('z^0)\}$. Эти продолжения также будем обозначать через $\varphi_j^{(i)}(\zeta, \lambda)$. Из определения функций $\varphi_j^{(i)}(\zeta, \lambda)$ следует, что

$$\max\{|\varphi_j^{(i)}(\zeta, \lambda)| : \lambda \in B_\varepsilon^{k-1}('z^0), |\zeta| = R\} \leq$$

$$\leq \binom{\rho}{j} \{M(R|z^0|(1 + \delta + \varepsilon); f_i\}^j . \qquad (7)$$

Отметим, что функции $f_i(\zeta\lambda, \zeta æ^{(j)}(\frac{1}{\zeta}, \lambda))$ при $(\frac{1}{\zeta}, \lambda) \notin \chi, (\zeta, \lambda) \in U_\varepsilon^k(0, {}'z^0)$ являются соответственно решениями уравнений

$$\chi^p + \varphi_1^{(i)} \chi^{p-1} + \ldots + \varphi_p^{(i)} = 0 .$$

Кроме того, из определения чисел $æ^{(j)}$ и того, что

$$f_2(z)/f_1(z) = f_3(z), \ \forall z \in \Lambda ,$$

следует, что при $|\zeta| > \frac{1}{\varepsilon}$, $\lambda \in U_\varepsilon^{k-1}({}'z^0)$, $(\frac{1}{\zeta}, \lambda) \notin \chi$ и

$$(\zeta, \lambda) \notin \chi_1 = \left\{ (\zeta, \lambda) : \prod_{j=1}^{p} f_1\left(\zeta\lambda, \zeta æ^{(j)}\left(\frac{1}{\zeta}, \lambda\right) \neq 0\right\}$$

выполняется равенство

$$\frac{f_2\left(\zeta\lambda, \zeta æ^{(j)}(\frac{1}{\zeta}, \lambda)\right)}{f_1\left(\zeta\lambda, \zeta æ^{(j)}(\frac{1}{\zeta}, \lambda)\right)} = f_3\left(\zeta\lambda, \zeta æ^{(j)}\left(\frac{1}{\zeta}, \lambda\right)\right).$$

Таким образом, в рассматриваемой ситуации находимся в условиях применения леммы 2, согласно которой

$$\max_{1 \le j \le p} \ln^+ M\left(R ; \varphi_j^{(\zeta)}, \varepsilon', {}'z^0\right) \le$$

$$\le \frac{4(p+1)}{\mu} \max_{\substack{i=1,2 \\ j=1,\ldots,p}} \ln^+ M\left((1+\mu)R; \varphi_j^{(i)}, \varepsilon', \lambda^0\right) + c_1 \ln R + c_2 ,$$

и значит (см. (7)),

$$\max_{1 \le j \le p} \ln^+ M\left(R ; \varphi_j^{(\zeta)}, \varepsilon', {}'z^0\right) \le$$

$$\le \frac{4p(p+1)}{\mu} \max_{i=1,2} \ln^+ M\left(R(1+\mu)(1+\delta+\varepsilon); f_i\right) + c_1 \ln R + c_2' . \qquad (8)$$

Далее, поскольку числа $f_3\left(\zeta\lambda, \zeta æ^{(ij)}(\frac{1}{\zeta}, \lambda)\right)$ являются корнями уравнения $\chi^p + \varphi_1^{(\zeta)}\chi^{p-1} + \ldots + \varphi_p^{(\zeta)}$, то

$$\left| f_3\left(\zeta\lambda, \zeta z^{(j)}\left(\frac{1}{\zeta}, \lambda\right)\right)\right| \le \sum_{j=1}^{p} \left| \varphi_j^{(3)}(\zeta, \lambda)\right| ,$$

и из (8) следует, что при $|\zeta| < R$

$$\max_{1\le j\le p} \ln^+ \left| f_3\left(\zeta\lambda, \zeta z^{(j)}\left(\frac{1}{\zeta}, \lambda\right)\right)\right| \le$$

$$\le \frac{4p(p+1)}{\mu} \max_{i=1,2} \ln^+ M\left((1+\mu)(1+\delta+\varepsilon)R; f_i\right) + c_1 \ln R + c_2 .$$

Отсюда, учитывая, что:

1) $\left(\zeta\lambda, \zeta z^{(j)}\left(\frac{1}{\zeta}, \lambda\right)\right) \in \Lambda$,

2) для каждой точки z^0 имеется лишь конечное число указанных ростков Λ_{z^0} ,

3) существует конечное число точек $z^{(j)}$ таких, что соответствующие им по предыдущему построению поликруги

$$U_{\varepsilon_j}^{k-1}(z^{(j)}) \times U_{\delta_j}^{n-k-1}({}'z^{(j)})$$

покрывают сферу $|z| = 1$, заключаем, что

$$\ln^+ M(R; f_3) \le$$

$$\le \frac{A_1}{\mu} \max_{i=1,2} \ln^+ M\left((1+\mu)(1+\delta+\varepsilon)R;\ f_i\right) +$$

$$+ A_2 \ln R + A_3 \quad \forall R > 0 ,$$

где $A_1 = A_1(\Lambda)$, $A_2 = A_2(\Lambda, f_1, f_2, \mu)$; $A_3 = A_3(\Lambda, f_1, f_2, \mu)$.

Теорема доказана.

Рост функций $f \in H(\Lambda)$ можно характеризовать порядком

$$\rho(f) = \overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{\ln \ln^+ M(R; f, \Lambda)}{\ln R} ,$$

типом

$$\sigma(f, \rho) = \overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{\ln^+ M(R; f, \Lambda)}{R^{\rho}} ,$$

а в случае $\sigma(f, \rho) = 0$ – сходимостью или расходимостью интеграла

$$\int^{\infty} \frac{\ln^+ M(t; f, \Lambda)}{t^{\rho+1}}\, dt .$$

Из доказанной выше теоремы для функций f_1, f_2, f_3, фигурирующих в ее условии, вытекают, в частности, следующие утверждения:

а) $\rho(f_3) \le \max(\rho(f_1), \rho(f_2))$;

б) если $\rho(f_1)=\rho(f_2)=\rho$ и $\sigma(f_1,\rho)<\infty, \sigma(f_2,\rho)<\infty$, то $\sigma(f_3,\rho)<\infty$;

в) если $\rho(f_1)=\rho(f_2)=\rho$ и $\sigma(f_1,\rho)=\sigma(f_2,\rho)=0$, то $\sigma(f_3,\rho)=0$;

г) если $\sigma(f_1,\rho)=0, \sigma(f_2,\rho)=0$ и $\int^{\infty} \frac{\ln^+ M(t; f_i, \Lambda)dt}{t^{\rho+1}} < \infty$, $i=1,2$, то $\int^{\infty} \frac{\ln^+ M(t; f_3, \Lambda)dt}{t^{\rho+1}} < \infty$.

Другими словами, категория роста частного f_3 не превосходит максимума из категорий функций f_1 и f_2. Это утверждение из [1] как раз то, которое было указано в начале статьи.

1. Ронкин Л.И. О категории частного функций, голоморфных на алгебраическом многообразии / Мат. структуры, вычисл. мат., моделир. - София, 1985. - № 12. - С. 17-22.
2. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. - М.: Гостехтеоризадат, 1956. - 632 с.
3. Эрве М. Функции многих комплексных переменных. - М.: Мир, 1965.- 164 с.

УДК 517.535.4

Н.Н.Строчик

НЕКОТОРЫЕ ТАУБЕРОВЫ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ НУЛЯМИ

Показано, что для целой функции нецелого порядка с нулями на отрицательном луче из существования асимптотики определенного вида для одной из функций вдоль некоторого луча следует существование некоторой асимптотики для считающей функции нулей.

Предполагаем известными основные понятия и определения неванлинновской теории [1]. Покажем, что для целой функции f нецелого порядка с нулями на отрицательном луче из существования асимптотики определенного вида для одной из функций $G(z) = \ln|f(z)|$, $H_1(z) = Re\,\frac{f'(z)}{z^{\rho} f(z)}$, $H_2(z) = Im\,\frac{f'(z)}{z^{\rho} f(z)}$ вдоль некоторого луча $\{z : \arg z = \theta\}$ следует существование некоторой асимптотики для считающей функции нулей $n(r) = n(r, 0, f)$. Результаты такого рода, впервые установленные

ISBN 5-12-002791-1. Динамические системы и комплексный анализ. Киев, 1992

Титчмаршем [2], имеются в работах [3-7]. В этих работах можно найти дальнейшие литературные ссылки.

Основное отличие наших результатов состоит в том, что функции, с помощью которых задаются асимптотические выражения, берутся из более широких классов, а в некоторых случаях и в том, что асимптотика задается для функций $G(re^{i\theta})$, $H_1(re^{i\theta})$, $H_2(re^{i\theta})$ при $r\to\infty$ не обязательно для $\theta=0$.

Приведем некоторые необходимые в дальнейшем определения и утверждения.

Считаем, что $\lambda\in\Lambda_0$, если λ - непрерывная неотрицательная функция на $\mathbb{R}_+$, дифференцируемая вне дискретного множества D и такая, что

$$
\begin{gathered}
r\lambda'(r)\to 0,\quad r\to\infty,\quad r\notin D,\\
a=\rho+\eta_2\le\lambda(r)\le\rho+1-\eta_1=b,\quad \eta_1>0,\ \eta_2>0,\quad \rho\in\mathbb{Z}_+ .
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Обозначим через Λ следующий класс функций $h:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$:

$$
\Lambda=\left\{h:(\exists\lambda\in\Lambda_0)\left(h(r)\sim\exp\left(\int_1^r\lambda(t)\,d\ln t\right)\right),\ h(r)\uparrow\infty,\ r\to\infty\right\}. \tag{2}
$$

Этот класс функций ввел Дрейсин [8].

Отметим, что класс L функций роста $\varphi(r)\sim r^{l(r)}$, $r\to\infty$, где $l(r)$ - некоторый колеблющийся уточненный порядок [1], $a\le l(r)\le b$, содержится в классе Λ, но не совпадает с ним. В самом деле, в [9] показано, что для произвольного колеблющегося порядка $l(r)$ существует дважды дифференцируемая функция $l_1(r)$ такая, что при $r\to\infty$ выполняется равенство $l_1(r)=l(r)+o(\ln^{-1}r)$ и $l_1''(r)r^2\ln r\to 0$ при $r\to\infty$. Пусть $\varphi_1(r)=r^{l_1(r)}$. Полагая $\lambda(r)=r\varphi_1'(r)/\varphi_1(r)$, получаем $r\lambda'(r)=2r\,l_1'(r)+l_1''(r)r^2\ln r+l_1'(r)r\ln r\to 0$ и $\varphi(r)\sim\varphi_1(r)=\exp\left(\int_1^r\lambda(t)\,d\ln t\right)$, $r\to\infty$. Значит, $L\subset\Lambda$.

Вместе с тем существуют примеры, показывающие, что $L\ne\Lambda$. Действительно, пусть $h(r)=r^{0,5+\sin(\ln\ln r)/4}$, $r\ge r_0$ и $\lambda(r)=r(\ln h(r))'=0{,}5+\cos(\ln\ln r)/4+\sin(\ln\ln r)/4$. Тогда $r\lambda'(r)=(\cos(\ln\ln r)-\sin(\ln\ln r))/(4\ln r)\to 0$ при $r\to\infty$, значит, $\lambda\in\Lambda_0$ и $h\in\Lambda$. Пусть $r_k=\exp(\exp(2k\pi+\pi/2))$, $r_k'=\exp(\exp(2k\pi-\pi/2))$, $k\in\mathbb{Z}_+$. Тогда

$$
h(r_k)=r_k^{3/4},\quad h(r_k')=(r_k')^{1/4}. \tag{3}
$$

Предположим, что существует колеблющийся порядок $l(r)$ такой, что $h(r)\sim r^{l(r)}$, $r\to\infty$. Тогда из (3) следует, что

$$l(r_k)\to 3/4,\quad l(r'_k)\to 1/4,\quad l(r_k)-l(r'_k)\to 1/2,\quad k\to\infty .$$

Применяя теорему Лагранжа, получаем

$$l(r_k)-l(r'_k)=\pi\,\frac{ln(r)}{d\ln\ln r}\bigg|_{r=\xi_k}=\pi\,\frac{dl(r)}{dr}\,r\ln r\bigg|_{r=\xi_k}\to 0\,,$$
$k\to\infty$, $\xi_k\in(r'_k,r_k)$.

Следовательно, наше предположение неверно.

Приведем формулировки теорем, которыми будем пользоваться.

Теорема К [10]. Пусть измеримая функция $k(x)\geq 0$ $(-\infty<x<+\infty)$ и удовлетворяет следующим условиям:

$$а)\ \int_{-\infty}^{\infty}(e^{\alpha x}+e^{\beta x})k(x)\,dx<\infty\,, \tag{4}$$

где α и β – фиксированные постояннные $(-\infty<\beta<\alpha<+\infty)$;

$$б)\ K(w)=\int_{-\infty}^{\infty}k(x)e^{xw}dx\neq 0\qquad(\beta\leq Im\ w\leq\alpha);$$

$$в)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left|K\left(x+\frac{\alpha+\beta}{2}i\right)\right|}{e^{\frac{\pi x}{\alpha-\beta}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left|K\left(x+\frac{\alpha+\beta}{2}i\right)\right|}{e^{-\frac{\pi x}{\alpha-\beta}}}=0\,.$$

Пусть, далее, измеримые функции $\varphi(x)$ и $g(x)$ такие, что для φ существуют положительные числа M_1 и M_2 такие, что

$$M_1e^{\beta(y-x)}\leq\frac{\varphi(y)}{\varphi(x)}\leq M_2e^{\alpha(y-x)}\quad(-\infty<x<y<+\infty), \tag{5}$$

а $g(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\sup_{-\infty<x<+\infty}\left|\frac{g(x)}{\varphi(x)}\right|<\infty\,. \tag{6}$$

Тогда из асимптотического соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty}k(x-y)g(x)dx\ \sim\int_{-\infty}^{\infty}k(x-y)\varphi(x)dx\qquad(y\to+\infty)$$

следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}k_1(x-y)g(x)dx\sim\int_{-\infty}^{\infty}k_1(x-y)\varphi(x)dx\qquad(y\to+\infty)$$

для произвольной измеримой неотрицательной функции k_1, удовлетворяющей (4).

Замечание. Очевидно, в этой теореме можно требовать лишь, чтобы k и k_1 не меняли знак на R, если в (') вместо k подставим $|k|$.

Формулировку следующей теоремы, принадлежащей М.А.Субханкулову [5], приведем в виде, удобном для наших приложений.

Теорема С. Пусть φ и ψ – положительные неубывающие функции, $\psi(u)=0$ при $u\le r$, $r>0$, $\varphi(u)=0$ при $u\le h$, $h>0$ и существуют постоянные a и b такие, что при $u>h$

$$\left(\frac{v}{u}\right)^a < \frac{\varphi(v)}{\varphi(u)} < \left(\frac{v}{u}\right)^b, \quad h<u<v, \quad 0<a<b. \tag{7}$$

Пусть интегралы

$$F_1(x)=\int_0^\infty \frac{\varphi(u)\,du}{u^{\beta+1}(u+x)^{\nu}}, \quad F_2(x)=\int_0^\infty \frac{\psi(u)\,du}{u^{\beta+1}(u+x)^{\nu}},$$

$\beta>0$, $\nu>0$, $\beta<a<b<\nu+\beta$, сходятся при $x>0$. Тогда из соотношения $F_2(x)\sim F_1(x)$, $x\to\infty$ следует, что $\psi(x)\sim\varphi(x)$, $x\to\infty$.

Теорема Д [8]. Если $h\in\Lambda$, $z=re^{i\theta}$, $|\theta|<\pi$, то

$$(-1)^{\rho} z^{\rho+1}\int_0^\infty \frac{h(t)\,dt}{t^{\rho+1}(z+t)} = \left\{\frac{\pi e^{i\lambda(r)\theta}}{\sin\pi\lambda(r)} + o(1)\right\} h(r), \quad r\to\infty. \tag{8_1}$$

Пусть f – каноническое произведение Вейерштрасса рода ρ с отрицательными нулями, $\lambda\in\Lambda_0$ удовлетворяет (1) и $n(r)=n(r,0,f)\sim\exp\times$ $\times\left(\int\lambda(t)\,d\ln t\right)$, $r\to\infty$. Тогда при $z=re^{i\theta}$, $|\theta|<\pi$ выполняется равенство

$$\ln f(re^{i\theta}) = \left\{\frac{\pi e^{i\lambda(r)\theta}}{\sin\pi\lambda(r)} + o(1)\right\} n(r), \quad r\to\infty. \tag{8_2}$$

Сформулируем основные результаты настоящей статьи.

Теорема 1. Пусть

А) $h\in\Lambda$, $\lambda\in\Lambda_0$, λ удовлетворяет (1);

Б) f – каноническое произведение Вейерштрасса рода ρ с отрицательными нулями;

В) при некотором $|\theta|<\pi$ таком, что $\cos\rho\theta\cos(\rho+1)\theta\ge 0$, выполняется соотношение

$$\ln|f(re^{i\theta})| = \left\{ \frac{\pi \cos \lambda(r)\theta}{\sin \pi\lambda(r)} + O(1) \right\} h(r), \quad r \to \infty. \qquad (9)$$

Тогда $n(r,0,f) \sim h(r), r\to\infty$ и выполняется (8_2) для всех $|\theta| < \pi$.

Теорема 2. Пусть f – каноническое произведение Вейерштрасса рода ρ с отрицательными нулями и $n(r) = n(r,0,f) \sim \exp\left(\int \lambda(t) d\ln t\right), r\to\infty$, где $\lambda \in \Lambda_0$ удовлетворяет (1). Тогда при $|\theta| < \pi$, $z = re^{i\theta}$

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \left\{ \frac{\pi\lambda(r) e^{i\lambda(r)\theta}}{\sin \pi\lambda(r)} + O(1) \right\} n(r), \quad r\to\infty. \qquad (10)$$

Теорема 3. Пусть h, λ и f удовлетворяют условиям А) и Б) теоремы 1 и при некотором $|\theta| < \pi/2$, $z = re^{i\theta}$ выполняется равенство

$$\mathrm{Re}\, \frac{f'(z)}{z^{\rho} f(z)} = \left\{ \frac{\pi\lambda(r)\cos(\rho+1-\lambda(r))\theta}{\sin \pi\lambda(r)} + O(1) \right\} \frac{h(r)}{r^{\rho+1}}, \quad r\to\infty. \qquad (11)$$

Тогда $n(r,0,f) \sim h(r)$ и выполняются (8_2) и (10) для всех $|\theta| < \pi$.

Теорема 4. Пусть h, λ и f удовлетворяют условиям А) и Б) теоремы 1 и при некотором $0 < |\theta| < \pi - \arcsin 1/(\rho+1)$, $z = re^{i\theta}$ выполняется соотношение

$$\mathrm{Im}\, \frac{f'(z)}{z^{\rho} f(z)} = \left\{ -\frac{\pi\lambda(r)\sin(\rho+1-\lambda(r))\theta}{\sin \pi\lambda(r)} + O(1) \right\} \frac{h(r)}{r^{\rho+1}}, \quad r\to\infty. \qquad (12)$$

Тогда $n(r,0,f) \sim h(r)$ и выполняются (8_2) и (10) для всех $|\theta| < \pi$.

Доказательство теоремы 1. Пусть

$$k(x) = \frac{e^{x}\cos(\rho+1)\theta + \cos\rho\theta}{e^{\rho x}(e^{2x} + 2e^{x}\cos\theta + 1)}. \qquad (13)$$

Отметим, что $k(\ln\tau) = \dfrac{\tau\cos(\rho+1)\theta + \cos\rho\theta}{\tau^{\rho}(\tau^2 + 2\tau\cos\theta + 1)} = \mathrm{Re}\, \dfrac{e^{i(\rho+1)\theta}}{\tau^{\rho}(\tau + e^{i\theta})}$, $\tau > 0$.

Условие на θ из В) обеспечивает знакопостоянство $k(x)$. Покажем, что для ядра $k(x)$ выполняются условия теоремы К. Условие а) выполняется при $\rho < \beta < \alpha < \rho+1$. Используя контурное интегрирование и применяя теорему о вычетах, получаем

$$K(w)(1-e^{2\pi w})=2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=i(\pi-\theta)}+\operatorname*{res}_{z=i(\pi+\theta)}\right)\frac{(e^{z}\cos(p+1)\theta+\cos p\theta)e^{-izw}}{e^{pz}(e^{2z}+2e^{z}\cos\theta+1)}=$$

$$=(-1)^{p+1}\pi i\left(e^{(\pi-\theta)w}+e^{(\pi+\theta)w}\right)\neq 0.$$

Далее,

$$K\left(x+\frac{\alpha+\beta}{2}i\right)=\frac{(-1)^{p+1}\pi i\left(\exp(\pi-\theta)\left(x+\frac{\alpha+\beta}{2}i\right)+\exp(\pi+\theta)\left(x+\frac{\alpha+\beta}{2}i\right)\right)}{1-\exp\left(2\pi\left(x+\frac{\alpha+\beta}{2}i\right)\right)}$$

и

$$\left|K\left(x+\frac{\alpha+\beta}{2}i\right)\right|\sim\pi e^{(|\theta|-\pi)x}\quad \text{при}\quad x\to+\infty,$$

$$\left|K\left(x+\frac{\alpha+\beta}{2}i\right)\right|\sim\pi e^{(\pi+|\theta|)x}\quad \text{при}\quad x\to-\infty.$$

Обозначая $\varkappa=\pi/(\alpha-\beta)$, находим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left|K\left(x+\frac{\alpha+\beta}{2}i\right)\right|}{e^{\varkappa x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left|K\left(x+\frac{\alpha+\beta}{2}i\right)\right|}{e^{-\varkappa x}}=0.$$

Покажем, что для функций $\varphi(x)=h(e^{x})$ и $g(x)=n(e^{x})$ выполняются соотношения (5) и (6). Обозначим $t=e^{x}$ и $r=e^{y}$. Так как $h\in\Lambda$, $\lambda\in\Lambda_0$ и λ удовлетворяет (1), то найдутся положительные постоянные m и M такие, что

$$m\exp\left(\int_1^t\lambda(\tau)d\ln\tau\right)\leqslant h(t)\leqslant M\exp\left(\int_1^t\lambda(\tau)d\ln\tau\right),\qquad t\geqslant 2.$$

Тогда

$$\frac{m}{M}e^{a(\ln r-\ln t)}\leqslant\frac{h(r)}{h(t)}\leqslant\frac{M}{m}e^{b(\ln r-\ln t)},$$

следовательно, $h(e^{x})$ удовлетворяет условию (5).

Так как [1]

$$\ln|f(z)|=(-1)^{p}Re\left\{z^{p+1}\int_0^\infty\frac{n(t)dt}{t^{p+1}(t+z)}\right\},\tag{14}$$

то из (8_1), (8_2), (9) и (14) следует, что

$$Re\left\{z^{\rho+1}\int_0^\infty \frac{n(t)dt}{t^{\rho+1}(t+z)}\right\} = Re\left\{z^{\rho+1}\int_0^\infty \frac{h(t)dt}{t^{\rho+1}(t+z)}\right\} + O(h(r)),\ \ \begin{matrix} r\to\infty, \\ z=re^{i\theta}. \end{matrix} \qquad (15)$$

Тогда для ядра $k(x)$ заданного равенством (13), с учетом (8_1),(8_2), (9) и неубывания функции $n(t)$ получаем

$$n(e^y)\int_0^\infty |k(x)|dx = n(e^y)\int_y^\infty |k(x-y)|dx \leqslant \int_y^\infty |k(x-y)|\,n(e^x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^\infty |k(x-y)|\,n(e^x)dx = (1+o(1))\int_{-\infty}^\infty h(e^x)\,|k(x-y)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\pi \operatorname{cosec} \pi\lambda(r) + o(1)\right)h(y) = O\left(h(e^y)\right),\quad y\to\infty,$$

значит, $n(x)=O(h(x))$. В силу (15) из теоремы К следует, что

$$\int_0^\infty \frac{n(t)dt}{t^{\rho+1}(t+r)} \sim \int_0^\infty \frac{h(t)dt}{t^{\rho+1}(t+r)},\quad r\to\infty.$$

Далее, поскольку $h(t)$ удовлетворяет условиям теоремы С, то из этой теоремы следует, что $n(r,0,f)\sim h(r),\ r\to\infty$ и в силу теоремы Д справедливо (8_1).

Доказательство теоремы 2. Пусть выполнены условия теоремы 2. Заметим, что

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = (-1)^\rho z^{\rho+1}\int_0^\infty \frac{n(t)(\rho(t+z)+t)}{t^{\rho+1}(t+z)^2}\,dt. \qquad (16)$$

Следуя рассуждениям [8], получаем асимптотическую формулу ($z=re^{i\theta}$):

$$\int_0^\infty \frac{n(t)(\rho(t+z)+t)}{t^{\rho+1}(t+z)^2}\,dt = \left\{\frac{(-1)^\rho \pi\lambda(r)e^{i(\lambda(r)-\rho-1)\theta}}{\sin \pi\lambda(r)} + o(1)\right\}\frac{n(r)}{r^{\rho+1}},\quad r\to\infty. \qquad (17)$$

Сначала покажем, что

$$\int_0^r \frac{n(t)\left(\rho(t+z)+\rho\right)}{t^{\rho+1}(t+z)^2}\,dt = \frac{n(r)}{r^{\lambda(r)}}\int_0^\infty \frac{t^{\lambda(r)-\rho-1}\left(\rho(t+z)+t\right)dt}{(t+z)^2} + \tag{18}$$
$$+ O\left(\frac{n(r)}{r^{\rho+1}}\right), \qquad r\to\infty .$$

Так как $n\in\Lambda$, то для произвольно выбранного $\varepsilon>0$ выполняются неравенства

$$\frac{n(s)}{n(t)} \le (1+\varepsilon)\left(\frac{s}{t}\right)^{\rho+1-\eta_1} \qquad (t_0(\varepsilon)<t<s), \tag{19}$$

$$\frac{n(s)}{n(t)} \le (1+\varepsilon)\left(\frac{s}{t}\right)^{\rho+\eta_2} \qquad (s_0(\varepsilon)<s<t). \tag{20}$$

Выберем $K>1$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\int_0^{K^{-1}} \frac{\tau^{\eta_2-1}\left|\rho(\tau+e^{i\theta})+\tau\right|}{|\tau+e^{i\theta}|^2}\,d\tau < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{21}$$

$$\int_K^\infty \frac{\tau^{-\eta_1}\left|\rho(\tau+e^{i\theta})+\tau\right|}{|\tau+e^{i\theta}|^2}\,d\tau < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{22}$$

Тогда при $|z|=r>K$ из неравенств (20) и (21) следует, что

$$\int_{t_0(\varepsilon)}^{K^{-1}r} \frac{n(t)\left|\rho(t+z)+t\right|dt}{t^{\rho+1}|t+z|^2} \le \frac{(1+\varepsilon)n(r)}{r^{\rho+\eta_2}}\int_0^{K^{-1}r} \frac{t^{\eta_2-1}\left|\rho(t+z)+t\right|dt}{|t+z|^2} =$$

$$= \frac{(1+\varepsilon)n(r)}{r^{\rho+1}}\int_0^{K^{-1}} \frac{\tau^{\eta_2-1}\left|\rho(\tau+e^{i\theta})+\tau\right|d\tau}{|\tau+e^{i\theta}|^2} < \frac{\varepsilon(1+\varepsilon)}{2}\,\frac{n(r)}{r^{\rho+1}}, \tag{23}$$

$$\int_0^{s_0(\varepsilon)} \frac{n(t)|\rho(t+z)+t|}{t^{\rho+1}|t+z|^2}\,dt = O\left(\frac{1}{r}\right) = o\left(\frac{n(r)}{r^{\rho+1}}\right), \quad r \to \infty .$$

Аналогично из (19) и (22) получаем

$$\int_{Kr}^{\infty} \frac{n(t)|\rho(t+z)+t|}{t^{\rho+1}|t+z|^2}\,dt < \frac{(1+\varepsilon)n(r)}{r^{\rho+1}} \int_K^{\infty} \frac{\tau^{-\eta_1}|\rho(\tau+e^{i\theta})+\tau|}{|\tau+e^{i\theta}|^2}\,d\tau <$$

$$< \frac{\varepsilon(1+\varepsilon)}{2}\,\frac{n(r)}{r^{\rho+1}} . \tag{24}$$

При $t \in (K^{-1}r,\ Kr)$ справедлива формула [8]

$$n(t) = n(r)\left(\frac{t}{r}\right)^{\lambda(r)+\delta(t,r)},$$

где $\delta(t,r) \to 0$ равномерно по t при $r \to \infty$. Тогда, выбрав $\sigma > 0$ так, чтобы

$$\sigma \int_{K^{-1}}^{K} \frac{\tau^{\mu-\rho-1}|\rho(\tau+e^{i\theta})+\tau|}{|\tau+e^{i\theta}|^2}\,d\tau < \varepsilon,$$

где

$$\rho + \eta_2 \le \mu < \rho+1-\eta_1 , \tag{25}$$

найдем r_0 так, чтобы выполнялось неравенство

$$(1-\sigma)\left(\frac{t}{r}\right)^{\lambda(r)} < \frac{n(t)}{n(r)} < (1+\sigma)\left(\frac{t}{r}\right)^{\lambda(r)}, \quad r_0 < K^{-1}r < t < Kr . \tag{26}$$

Из неравенств (25), (26) получаем

$$\left| \int_{K^{-1}r}^{Kr} \frac{n(t)(\rho(t+z)+t)\,dt}{t^{\rho+1}(t+z)^2} - \frac{n(r)}{r^{\rho+1}} \int_{K^{-1}}^{K} \frac{\tau^{\lambda(r)-\rho-1}(\rho(\tau+e^{i\theta})+\tau)\,d\tau}{(\tau+e^{i\theta})^2} \right| <$$

$$< -\frac{\varepsilon n(r)}{r^{\rho+1}} .$$

Следовательно, в силу произвольности ε выполняется (18). Применив теорию вычетов, вычислим интеграл

$$I(r,\theta)=\int_0^\infty \frac{\tau^{\lambda(r)-p-1}\left(p(\tau+e^{i\theta})+\tau\right)}{(\tau+e^{i\theta})^2}\,d\tau=$$
$$=\frac{(-1)^p\,\pi\lambda(r)}{\sin\pi\lambda(r)}\,e^{i(\lambda(r)-p-1)\theta}. \tag{27}$$

Тогда из (18) и (27) следует (17), а из (16) и (17) – утверждение теоремы 2.

<u>Доказательство теоремы 3</u>. Покажем, что ядро $q(x)=Re\dfrac{p(e^x+e^{i\theta})+e^x}{e^{px}(e^x+e^{i\theta})^2}$ при $|\theta|<\pi/2$ удовлетворяет условиям теоремы К. Для удобства обозначим $q_1(\tau)=q(\ln\tau)$. Тогда непосредственным вычислением получим

$$q_1(\tau)=Re\,\frac{p(\tau+e^{i\theta})+\tau}{\tau^p(\tau+e^{i\theta})^2}=$$

$$=\frac{(p+1)\tau^3+\tau^2(3p+2)\cos\theta+\tau((2p+2)\cos^2\theta+p-1)+p\cos\theta}{\tau^p|\tau+e^{i\theta}|^4}$$

и $q_1(\tau)>0$ при $|\theta|<\pi/2$.

Теперь с помощью контурного интегрирования и теоремы о вычетах для преобразования Фурье $Q(w)$ функции $q(x)$ находим

$$Q(w)=\frac{\pi w(-1)^p\left(e^{i\theta(p+1)-\theta w}+e^{-i\theta(p+1)+\theta w}\right)}{2\,\mathrm{sh}\,\pi w}.$$

Очевидно, при $\theta=0$ имеем $Q(w)\neq 0$. Пусть $0<|\theta|<\pi/2$. Тогда из $Q(w)=0$ следует, что $Re\,w=0$ и $w=iv$. Но $Q(iv)=4\pi v(-1)^p\cos\theta(p+1-v)/\sin\pi v$. Так как $p<v<p+1$, то $Q(iv)\neq 0$. Очевидно, $Q(w)$ удовлетворяет условию в) теоремы К. Проверка условий (5), (6) производится так же, как и в доказательстве теоремы 1.

Поскольку

$$Re\frac{f'(z)}{z^p f(z)}=(-1)^p\,Re\int_0^\infty \frac{n(t)(p(t+z)+t)}{t^{p+1}(t+z)^2}\,dt,$$

то из (11) и (16) следует, что

$$\operatorname{Re}\int_0^\infty \frac{n(t)(p(t+z)+t)dt}{t^{p+1}(t+z)^2} = \operatorname{Re}\int_0^\infty \frac{h(t)(p(t+z)+t)dt}{t^{p+1}(t+z)^2} +$$

$$+ o\left(\frac{h(r)}{r^{p+1}}\right), \quad r\to\infty .$$

Теперь, применяя теорему К, получаем

$$\int_0^\infty \frac{n(t)dt}{t^{p+1}(t+r)} \sim \int_0^\infty \frac{h(t)dt}{t^{p+1}(t+r)}, \quad r\to\infty,$$

поскольку ядро $q_0(x)=e^{-px}(e^x+r)^{-1}$ удовлетворяет (4). Тогда из теоремы С следует, что $n(r,0,f)\sim h(r)$, $r\to\infty$. По теореме Д выполняется (8_2), а из теоремы 2 следует (10).

<u>Доказательство теоремы 4</u> аналогично доказательству теоремы 3. Пусть

$$p_1(\tau) = \operatorname{Im}\frac{p(\tau+e^{i\theta})+\tau}{\tau^p(\tau+e^{i\theta})^2}, \quad p(x)=p_1(e^x).$$

Так как

$$p_1(\tau) = \frac{-\sin\theta\left(\tau^2(p+2)+2(p+1)\tau\cos\theta+p\right)}{\tau^p\,|\tau+e^{i\theta}|^4},$$

то условие $0<|\theta|<\pi-\arcsin(1/(p+1))$ обеспечивает знакопостоянство ядра $p(x)$.

Преобразование Фурье ядра $p(x)$ имеет вид

$$P(w) = \frac{(-1)^p\pi i w\left(e^{i\theta(p+1)-\theta w}+e^{-i\theta(p+1)+\theta w}\right)}{2\,\operatorname{sh}\pi w} \neq 0 .$$

С помощью тех же рассуждений, что и в доказательстве теоремы 3, получаем $n(r,0,f)\sim h(r)$, $r\to\infty$. Соотношение (8_2) следует из теоремы Д, а (10) вытекает из теоремы 2.

Приведем пример, показывающий, что условие $\cos p\theta\cos(p+1)\theta>0$ в теореме 1, которое обеспечивает знакоопределенность ядра k, существенно.

Пусть $|\theta| < \pi$ такое, что $\cos p\theta \cos(p+1)\theta < 0$. Тогда существует ρ, $p<\rho<p+1$ такое, что $\cos \rho\theta = 0$, т.е. $\rho = m\pi/(2\theta)$, где m — целое нечетное число. Тогда [4] для $f_\rho(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(-\frac{z}{n^{1/\rho}}, p\right)$ выполняется равенство

$$\ln f_\rho(re^{i\varphi}) = \frac{\pi}{\sin \pi\rho} r^\rho e^{i\rho\varphi} + O(r^p \ln r).$$

Пусть $h \in A$, $\lambda \in A_0$, $p+\eta < \lambda(r) < \rho-\eta$, $\eta > 0$ и

$$f_h(z) = (-1)^p z^{p+1} \int_0^\infty \frac{[h(t)]}{t^p(t+z)} dt, \qquad f(z) = f_\rho(z) f_h(z),$$

где $[s]$ обозначает целую часть числа s. Тогда

$$\ln|f(re^{i\varphi})| = \frac{\pi}{\sin \pi\rho} r^\rho \cos \rho\varphi + \frac{\pi}{\sin \pi\lambda(r)} h(r) \cos \lambda(r)\varphi +$$

$$+ o(r^{\rho-\eta}), \quad r \to \infty.$$

При $\rho = m\pi/(2\theta)$, m — целое нечетное, и $\varphi = \theta$ имеем

$$\ln|f(re^{i\theta})| = \frac{\pi}{\sin \pi\lambda(r)} h(r) \cos \lambda(r)\theta + o(r^{\rho-\eta}), \quad r \to \infty,$$

в то время как $n(r, \theta, f) \sim r^\rho$.

1. Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. - М.: Наука, 1970. - 592 с.
2. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. - М.: Гостехтеориздат, 1956. - 632 с.
3. Baernstein A. A nonlinear tauberian theorem in function theory// Trans. Amer. Math. Soc. - 1969. - 146. - P. 87-105.
4. Delange H. Un théorème sur les fonctions entières à zéros réels et négatifs // J. Math. pures et appl. - 1952. - 31, Fasc. 1. - P. 55-78.
5. Субханкулов М.А. Тауберовы теоремы с остатком. - М.: Наука, 1976. - 399 с.
6. Шкаликов А.А. Теоремы тауберова типа о распределении нулей голоморфных функций // Мат. сб. - 1984. - 123, вып. 1. - С. 313-347.
7. Хейфиц А.И. Обобщение теоремы Е.Титчмарша о целых функциях с отрицательными нулями // Изв. вузов. Математика. - 1973. - №2.- С. 99-105.
8. Drasin D. A flexible proximate order // Bull. London Math.Soc.- 1974. - 6, N 2. - P. 129-135.
9. Бойчук В.С. О некоторых свойствах уточненного порядка // Сиб. мат. журн. - 1979. - 20, № 2. - С. 229-236.

10. Коренблюм Б.И. Обобщение тауберовой теоремы Винера и гармонический анализ быстрорастущих функций // Тр. Моск. мат. о-ва. - 1958. - 7. - С. 121-148.

УДК 517.3

А.А.Гольдберг, И.Е.Шейхет

СРАВНЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК РОСТА ФУНКЦИЙ В СМЫСЛЕ ПОЙА И КОНДРАТЮКА

Рост неотрицательных неограниченных функций, заданных на положительной полуоси, можно характеризовать различными величинами. Выведены различные соотношения между порядками и нижними порядками в смысле Пойа, употребляемыми более 30 лет, и введенными в последнее десятилетие порядками и нижними порядками в смысле А.А.Кондратюка.

Обозначим через G класс неограниченных неотрицательных функций, заданных на полуотрезке $[1,\infty)$. Рост функций из G помимо общественных величин (порядка ρ и нижнего порядка λ) характеризуется также порядком ρ_* и нижним порядком λ_* в смысле Пойа [1]. Напомним определения этих величин. Последовательностью пиков Пойа порядка ρ первого рода для $g\in G$ называется последовательность (r_n), $r_n\to\infty$, такая, что неравенство

$$g(r)\le(r/r_n)^\rho g(r_n)(1+\delta_n),\quad a_n^{-1}r_n\le r\le a_n r_n \tag{1}$$

выполняется для некоторых $a_n\to+\infty, \delta_n\to 0+, n\to\infty$. Последовательностью пиков Пойа порядка ρ второго рода для $g\in G$ называется последовательность (s_n), $s_n\to\infty$, такая, что неравенство

$$g(r)\ge(r/s_n)^\rho g(s_n)(1-d_n),\ b_n^{-1}s_n\le r\le b_n s_n \tag{2}$$

выполняется для некоторых $b_n\to+\infty, d_n\to 0+, n\to\infty$. Точная верхняя (нижняя) грань порядков последовательностей пиков Пойа первого рода для $g\in G$ называется порядком ρ_* (нижним порядком λ_*) функции g в смысле Пойа. Если пики Пойа отсутствуют, то считаем, что $\lambda_*=\rho_*=+\infty$. Оказывается, что к тем же величинам придем, если будем использовать пики Пойа второго рода. В работе [1] показано, что $\lambda_*\le\lambda\le\rho\le\rho_*$. В работе [2] доказано, что для $g\in G$

$$\lambda_*=\inf\left\{\rho: \lim_{\substack{r\to\infty\\ A\to\infty}} g(Ar)/(A^\rho g(r))=0\right\}, \tag{3}$$

ISBN 5-12-002791-1. Динамические системы и комплексный анализ. Киев, 1992

$$\rho_* = \sup\left\{ p : \overline{\lim_{\substack{r\to\infty \\ A\to\infty}}}\, g(Ar)/(A^p g(r)) = \infty \right\}. \qquad (4)$$

Считаем, что $\inf \phi = +\infty, \sup \phi = -\infty$. Известно [2], что $g \in G$ имеет пики Пойа первого и второго рода порядка $p<\infty$ тогда и только тогда, когда $\lambda_* \le p \le \rho_*$.

В своих исследованиях по применению рядов Фурье в теории мероморфных и субгармонических функций А.А.Кондратюк [3, 4] ввел другие величины, характеризующие рост функции $g \in G$. Пусть $m \in [2,\infty)$ (А.А.Кондратюк рассматривал только целые m, но для нас это не имеет значения), $g \in G$,

$$g_m(r) = \int_1^r t^{1-m} dt \int_1^t g(\tau)\tau^{m-3} d\tau . \qquad (5)$$

Порядком ρ_m и нижним порядком λ_m в смысле Кондратюка будем называть числа, определяемые из равенств

$$\lambda_m(\lambda_m + m - 2) = \underline{\lim_{r\to\infty}}\, g(r)/g_m(r), \qquad (6)$$

$$\rho_m(\rho_m + m - 2) = \overline{\lim_{r\to\infty}}\, g(r)/g_m(r) . \qquad (7)$$

В работе [3] показано, что $\lambda_m \le \lambda \le \rho \le \rho_m$ (доказательство, проведенное для $m=2$, без изменений пригодно и для $m>2$). Здесь рассмотрим связь между λ_m, ρ_m и λ_*, ρ_*. Докажем следующую теорему.

Теорема. Если $g \in G$, то:

1) $\lambda_m = 0$ тогда и только тогда, когда $\lambda_* = 0$;

2) $\lambda_m = \infty$ тогда и только тогда, когда $\lambda_* = \infty$;

3) при $\lambda_* > 0$ выполняются неравенства $0 < \lambda_m \le \lambda_* \le \rho_* \le \rho_m$.

При $m=2$ эту теорему, кроме утверждения 2), доказал А.С.Шапиро (Пики Пойа монотонных функций). При доказательстве в случае $m>2$ никаких дополнительных трудностей не возникает, и приведем его лишь для полноты изложения. Основная цель статьи – построить примеры, показывающие неулучшаемость в определенном смысле утверждения 3).

Доказательство теоремы. Проводим его при $m>2$ (в случае $m=2$ изменения минимальны). Из формулы (5) получаем

$$g_m(r) = \frac{1}{m-2} \int_1^r \frac{g(\tau)}{\tau} \left(1 - \left(\frac{\tau}{r}\right)^{m-2} \right) d\tau . \qquad (8)$$

Из соотношения (3) легко выводим, что если $\infty \ge \lambda_* > 0$, то для всякого $0 < q < \lambda_*$ существуют такие $S \ge 1$ и $T \ge 1$, что при $A \ge S$ и $t \ge T$ выполняется неравенство

$$g(\lambda t)/g(t) > \lambda^{q} . \tag{9}$$

Покажем сначала, что из $\lambda_m = 0$ следует, что $\lambda_* = 0$. Предположим, что $\lambda_* > 0$. Из выражений (6), (8) получаем существование последовательности $r_k \to \infty$ такой, что

$$\int_1^{r_k} \frac{g(\tau)}{g(r_k)} \left(1 - \left(\frac{\tau}{r_k}\right)^{m-2}\right) d\ln\tau \to \infty, \quad k \to \infty . \tag{10}$$

Используя неравенство (9), получаем

$$\int_1^{r} \frac{g(\tau)}{g(r)} \left(1 - \left(\frac{\tau}{r}\right)^{m-2}\right) d\ln\tau \leq \int_1^{r} \frac{g(\tau)}{g(r)}\, d\ln\tau =$$

$$= \left(\int_1^{T} + \int_T^{r/S} + \int_{r/S}^{r} \right) \frac{g(\tau)}{g(r)}\, d\ln\tau \leq \frac{g(T)}{g(r)} \ln T + \tag{11}$$

$$+ \int_T^{r/S} \left(\frac{\tau}{r}\right)^{q} d\ln\tau + \ln S \leq o(1) + S^{-q}/q + \ln S, \quad r \to \infty ,$$

что противоречит (10).

Если $\lambda_* = \infty$, то в (9) можно брать q сколь угодно большим, и из (11) и (6) получим, что $\lambda_m = \infty$.

Докажем, что $\lambda_m \leq \lambda_*$. При $\lambda_* = \infty$ это тривиально. Считаем, что $\infty > \rho = \lambda_* > 0$, и воспользуемся соотношениями (2) и (8). Тогда

$$\frac{g_m(s_n)}{g(s_n)} \geq \frac{1}{m-2} \int_{s_n/b_n}^{s_n} \frac{g(\tau)}{g(s_n)} \left(1 - \left(\frac{\tau}{s_n}\right)^{m-2}\right) d\ln\tau \geq$$

$$\geq \frac{1-d_n}{m-2} \int_{s_n/b_n}^{s_n} \left(\frac{\tau}{s_n}\right)^{\rho} \left(1 - \left(\frac{\tau}{s_n}\right)^{m-2}\right) d\ln\tau =$$

$$= \left(\rho(\rho+m-2)\right)^{-1} + o(1), \quad n \to \infty . \tag{12}$$

Отсюда следует, что $\lambda_m \leq \rho$. При $\rho = \lambda_* = 0$ правая часть неравенства (12) стремится к ∞, т.е. получаем, что $\lambda_m = 0$. При $\lambda_m = \infty$ левая часть неравенства (12) стремится к 0, что невозможно ни при каком конечном ρ, т.е. $\lambda_* = \infty$. Утверждения 1) и 2) теоремы доказаны.

Пусть $\infty > \lambda_* > 0, 0 < \rho_* = \rho < \infty$. Из выражений (1), (7) и (9) получаем

$$\frac{m-2}{\rho_m(\rho_m + m-2)} \leq \varlimsup_{n\to\infty} \int_1^{r_n} \frac{g(\tau)}{g(r_n)} \left(1 - \left(\frac{\tau}{r_n}\right)^{m-2}\right) d\ln\tau \leq$$

$$\leq \varlimsup_{n\to\infty} \int_1^{r_n/a_n} \frac{g(\tau)}{g(r_n)} d\ln\tau + \varlimsup_{n\to\infty} \int_{r_n/a_n}^{r_n} \frac{g(\tau)}{g(r_n)} \left(1 - \left(\frac{\tau}{r_n}\right)^{m-2}\right) d\ln\tau \leq$$

$$\leq \varlimsup_{n\to\infty} \int_1^{r_n/a_n} \left(\frac{\tau}{r_n}\right)^{q} d\ln\tau + \varlimsup_{n\to\infty} \int_{r_n/a_n}^{r_n} \left(\frac{\tau}{r_n}\right)^{p} \Bigg(1 - \tag{13}$$

$$- \left(\frac{\tau}{r_n}\right)^{m-2}\Bigg) d\ln\tau = \frac{m-2}{\rho(\rho+m-2)} ,$$

откуда следует, что $\rho_* \leq \rho_m$. Если $\lambda_* < \rho_* = \infty$, то существуют пики Пойа любого сколь угодно большого порядка $\rho > \lambda_*$ и из (13) следует, что $\rho_m = \infty$. Теорема доказана.

<u>Пример 1</u>. Построим функцию $g \in G$, у которой $0 = \lambda_m = \lambda_* = \rho_m \leq \rho_* = 1$. Этот пример показывает, что условие $\lambda_* > 0$ в утверждении 3) теоремы нельзя отбросить.

Здесь и далее $\ln_m x = \ln(\ln_{m-1} x), m \geq 2, \ln_1 x = \ln x$. Возьмем $r_1 > 100$ столь большим, что при $x \geq r_1$ выполняется неравенство $x \leq (x/\ln_2 x)^{\ln_2 x}$. Положим $t_1 = r_1/\ln_2 r_1$. Если определены $t_1, r_1, \ldots, t_{n-1}, r_{n-1}$, то $t_n = t_{n-1}^{\ln_2 r_{n-1}}$, а r_n выбирается так, чтобы $r_n/\ln_2 r_n = t_n$.

Определим g следующими формулами:

$$g(\tau)=\begin{cases} \ln\tau, & 1\le\tau\le t_1, \\ (\tau/t_n)\ln t_n, & t_n\le\tau\le r_n, \\ g(r_n), & r_n\le\tau\le t_{n+1}. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что $g\in G$, g непрерывна на $[1,\infty)$, $g(\tau)\ge\ln\tau$ при всех $\tau\ge 1$, $g(t_n)=\ln t_n$, а при $t_n\le\tau\le t_{n+1}$ выполняется неравенство $g(\tau)\le g(r_n)$. Поэтому при $t_n\le r\le t_{n+1}$

$$g_m(r)\ge g_m(t_n)=\frac{1}{m-2}\int_1^{t_n} g(\tau)\left(1-\left(\frac{\tau}{t_n}\right)^{m-2}\right)d\ln\tau\ge$$

$$\ge\frac{1}{m-2}\int_1^{t_n}\ln\tau\left(1-\left(\frac{\tau}{t_n}\right)^{m-2}\right)d\ln\tau=$$

$$=\frac{1}{m-2}\left\{\frac{1}{2}\left(\ln t_n\right)^2-\frac{1}{m-2}\ln t_n+(m-2)^{-2}-\right.$$

$$\left.-(m-2)^{-2}t_n^{-m+2}\right\}=\frac{1+o(1)}{2(m-2)}\left(\ln t_n\right)^2,\quad n\to\infty.$$

Отсюда

$$\varlimsup_{r\to\infty} g_m(r)/g(r)\ge\varlimsup_{n\to\infty} g_m(t_n)/g(r_n)=$$

$$=\frac{1}{2(m-2)}\varlimsup_{n\to\infty}\frac{(\ln t_n)^2}{g(r_n)}=\frac{1}{2(m-2)}\varlimsup_{n\to\infty}\frac{t_n\ln t_n}{r_n}=$$

$$=\frac{1}{2(m-2)}\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln t_n}{\ln_2 r_n}=\infty.$$

Из (7) следует, что $\rho_m=0$, а значит, $\lambda_m=\lambda_*=0$. С другой стороны, для любого r выполняется неравенство $g(t)\le g(r)(t/r)$ при $t\ge r$ и $g(Ar)/(A^P g(r))\le A^{1-P}$, $A>1$. Из (4) получаем $\rho_*\le 1$. При $q_n\le r<\infty$ выполняется неравенство $g(r) \leq g(r_n)(r/r_n)$, т.е. (r_n) является последовательностью пиков Пойа первого рода порядка $\rho=1$ с $\delta_n=0$, $a_n=\ln_2 r_n$ (см. (1)). Следовательно, $\rho_*=1$.

<u>Пример 2</u>. Покажем, что для любых λ_* и ρ_* таких, что $0<\lambda_*\leq\rho_*<\infty$, можно указать такую функцию $g\in G$, для которой $0<\lambda_m<\lambda_*\leq\rho_*<\rho_m<\infty$.

Пусть сначала $\lambda_*=\rho_*$. Возьмем произвольное $0<\alpha<\infty$. Положим $g(r)=r^{\alpha}(2+\sin\ln r)$, если $\alpha\geq 1$, и $g(r)=r^{\alpha}(2+\alpha\sin\ln r)$, если $0<\alpha<1$. Очевидно, $g\in G$. Рассмотрим случай $\alpha\geq 1$, при $0<\alpha<1$ все рассуждения аналогичны. Из $A^{\alpha-\rho}/3\leq g(Ar)/(A^{\rho}g(r))\leq 3A^{\alpha-\rho}$ с помощью (3) и (4) легко находим, что $\lambda_*=\rho_*=\alpha$. Непосредственный подсчет дает

$$g_m(r)=\frac{2r^{\alpha}}{\alpha(\alpha+m-2)}+\left((\alpha+m-2)^2+1\right)^{-1}(\alpha^2+1)^{-1}r^{\alpha}\times$$

$$\times\left\{\left(\alpha(\alpha+m-2)-1\right)\sin\ln r-(2\alpha+m-2)\cos\ln r\right\}+$$

$$+O(1),\quad r\to\infty.$$

Пусть $r_n=\exp(2\pi n)$. Тогда $(n\to\infty)$

$$\frac{g_m(r_n)}{g(r_n)}\to\frac{1}{\alpha(\alpha+m-2)}-$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{2\alpha+m-2}{((\alpha+m-2)^2+1)(\alpha^2+1)}<\frac{1}{\alpha(\alpha+m-2)}.$$

Если $t_n=\exp(\pi+2\pi n)$, то $(n\to\infty)$

$$\frac{g_m(t_n)}{g(t_n)}\to\frac{1}{\alpha(\alpha+m-2)}+$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{2\alpha+m-2}{((\alpha+m-2)^2+1)(\alpha^2+1)}>\frac{1}{\alpha(\alpha+m-2)}.$$

Значит, $\lambda_m(\lambda_m+m-2)<\alpha(\alpha+m-2)<\rho_m(\rho_m+m-2)$, т.е. $\lambda_m<\alpha=\lambda_*=\rho_*<\rho_m$. Ясно, что $\lambda_m>0$, $\rho_m<\infty$. Наша функция обладает необходимыми свойствами.

Пусть $\lambda_*<\rho_*$. Возьмем произвольные $\alpha>\beta>0$ и постоянную C такую, что $C>2$ и $(\alpha-\beta)(C-1)-1>0$. Положим

$$g(r)=r^{\alpha+\beta\sin\ln_4 r}(C+\sin\ln r)$$

при $r \geqslant r_0 > \exp_5 1$ и $g(r)=0$ при $1 \leqslant r \leqslant r_0$, где r_0 настолько велико, что $g \in G$. Здесь $\exp_n x = \exp(\exp_{n-1} x)$, $n \geqslant 2$, $\exp_1 x = \exp x$.

Обозначим $a(r) = \alpha + \beta \sin \ln_4 r$. Найдем порядки по Пойа для функции g. Пусть $f(r) = r^{a(r)}$, $A > 1$. По теореме о конечных приращениях

$$\ln f(Ar) - \ln f(r) = \left.\frac{d f(x)}{d \ln x}\right|_{x=\xi(r,A)} \ln A =$$

$$= \left(\alpha + \beta \sin \ln_3 \xi(r,A) + o(1)\right) \ln A, \quad r \to \infty,$$

где $r \leqslant \xi(r,A) \leqslant Ar$. Поэтому $f(Ar)/f(r) \leqslant A^{\alpha+\beta+o(1)}$, $r \to \infty$. Следовательно, $g(Ar)/(A^{\alpha+\beta+\varepsilon} g(r)) \leqslant (C+1)/(A^{\varepsilon+o(1)}(C-1)) \to 0$ при $A \to \infty, r \to \infty$, $\varepsilon > 0$. Поэтому $\rho_* \leqslant \alpha + \beta$ согласно (4). Возьмем $A_m = m$, $r_m = \exp_4(\pi/2 + 2\pi m)$. Тогда $\ln_4(A_m r_m) = \ln_4 r_m + (1+o(1))\gamma_m$, $m \to \infty$, где $\gamma_m = \ln A_m/(\ln r_m \ln_2 r_m \ln_3 r_m)$. Если $\rho < \alpha + \beta$, то

$$g(A_m r_m)/(A_m^{\rho} g(r_m)) \geqslant \frac{C-1}{C+1} f(A_m r_m)/(A_m^{\rho} f(r_m)) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{C-1}{C+1} A_m^{-\rho + a(r_m) - \beta\gamma_m(1+o(1))} r_m^{-\beta\gamma_m(1+o(1))} =$$

$$= \frac{C-1}{C+1} A_m^{-\rho+\alpha+\beta}\left(1 + o(1)\right) \to +\infty, \quad m \to \infty.$$

Следовательно, $\rho_* = \alpha + \beta$. Аналогично доказывается, что $\lambda_* = \alpha - \beta$. За счет выбора α и β можно получить любые заданные $0 < \lambda_* < \rho_* < \infty$.

Оценим величины λ_m и ρ_m. Докажем, что

$$g_m(r) = r^{a(r)} \mathcal{R}(r)\left(1 + o(1)\right), \quad r \to \infty, \tag{14}$$

где

$$\mathcal{R}(r) = \frac{C}{a(r)(a(r)+m-2)} +$$

$$+ \frac{a(r)+m-2}{(a^2(r)+1)((a(r)+m-2)^2+1)}\left(a(r)\sin \ln r - \cos \ln r\right) -$$

$$- \frac{1}{(a^2(r)+1)((a(r)+m-2)^2+1)}\left(a(r)\cos \ln r + \sin \ln r\right).$$

При $\tau\in[t/\ln t,\ t\,]$ выполняются соотношения $(t\to\infty)$

$$\ln_4 t-(1+o(1))(\ln t\,\ln_3 t)^{-1}\leqslant \ln_4\tau\leqslant \ln_4 t, \tag{15}$$

$$\sin\ln_4\tau=\sin\ln_4 t+O\left((\ln t\ln_3 t)^{-1}\right),$$

$$\tau^{a(\tau)}=\tau^{a(t)}(1+o(1)). \tag{16}$$

Тогда в силу (16)

$$\int\limits_1^t g(\tau)\tau^{m-3}d\tau\geqslant\int\limits_{t/\ln t}^{t} g(\tau)\tau^{m-3}d\tau=$$

$$=(1+o(1))\int\limits_{t/\ln t}^{t}\tau^{a(t)+m-3}(C+\sin\ln\tau)d\tau= \tag{17}$$

$$=(1+o(1))t^{a(t)+m-2}\omega\left(t,a(t)\right),\quad t\to\infty,$$

где
$$\omega(t,x)=\frac{C}{x+m-2}+$$

$$+\frac{1}{(x+m-2)^2+1}\left((x+m-2)\sin\ln t-\cos\ln t\right).$$

Учитывая, что $C>2$, легко проверить, что $\omega(t,x)$ при $t\geqslant 1,\ x>0$ ограничена сверху и снизу положительными постоянными. Снова используя (15) и (16), получаем

$$g_m(r)\geqslant\int\limits_{r/\ln r}^{r} t^{1-m}dt\int\limits_{t/\ln t}^{t} g(\tau)\tau^{m-3}d\tau\geqslant$$

$$\geqslant (1+o(1)) \int\limits_{r/\ln r}^{r} t^{a(t)-1} \omega(t, a(t))\, dt =$$

$$= (1+o(1)) \int\limits_{r/\ln r}^{r} t^{a(r)-1} \omega(t, a(t))\, dt = \tag{18}$$

$$= r^{a(r)} \mathscr{P}(r)(1+o(1)), \quad r \to \infty .$$

Так как

$$\int\limits_{1}^{t/\ln t} g(\tau)\tau^{m-3} d\tau \leqslant \frac{g(t)}{m-2} \left(\frac{t}{\ln t}\right)^{m-2} = o\left(t^{a(t)+m-2}\right), \quad t \to \infty ,$$

то вместе с (17) это дает

$$\int\limits_{1}^{t} g(\tau)\tau^{m-3} d\tau = t^{a(t)+m-2} \omega(t, a(t))(1+o(1)), \quad t \to \infty .$$

Так как величина $\omega(t,x)$ ограничена при $t \geqslant 1$, $x > 0$, то

$$\int\limits_{1}^{r/\ln r} t^{1-m} dt \int\limits_{1}^{t} g(\tau)\tau^{m-3} d\tau = O(1) \int\limits_{1}^{r/\ln r} t^{a(t)-1} dt =$$

$$= o\left(r^{a(r)}\right), \quad r \to \infty .$$

Последнее можно проверить с помощью правила Лопиталя. Теперь (см. 18))

$$g_m(r) = \int\limits_{1}^{r/\ln r} t^{1-m} dt \int\limits_{1}^{t} g(\tau)\tau^{m-3} d\tau + \int\limits_{r/\ln r}^{r} t^{1-m} dt \int\limits_{1}^{t} g(\tau)\tau^{m-3} d\tau =$$

$$= o\left(r^{a(r)}\right) + r^{a(r)} \mathscr{P}(r)(1+o(1)) =$$

$$= r^{a(r)}\mathcal{P}(r) + o\left(r^{a(r)}\right), \quad r \to \infty.$$

Отсюда получаем

$$g_m(r)/g(r) = \mathcal{P}(r)/\left(C + \sin \ln r\right) + o(1), \quad r \to \infty . \tag{19}$$

Возьмем $\nu_n = \exp_3\left(\pi/2 + 2\pi n\right)$, $\mu_n = [\nu_n]$, $r_n = \exp 2\pi\mu_n$. У нас $\sin \ln_4 r_n =$ $= \sin\left(\ln_3 \nu_n + o(1)\right) = 1 + o(1)$, $a(r_n) = \alpha + \beta + o(1)$, $n \to \infty$. Тогда

$$\frac{g_m(r_n)}{g(r_n)} = \mathcal{P}(r_n)/C + o(1) - \frac{1}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+m-2)} -$$

$$- \frac{1}{C}\,\frac{2(\alpha+\beta)+m-2}{((\alpha+\beta)^2+1)((\alpha+\beta+m-2)^2+1)} + o(1), \quad n \to \infty .$$

Поэтому

$$\underline{\lim}_{r\to\infty}\, g_m(r)/g(r) < 1/\left\{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+m-2)\right\}.$$

Аналогично, взяв $\nu'_n = \exp_3(-\pi/2 + 2\pi n)$, $\mu'_n = [\nu'_n]$, $r'_n = \exp \pi(2\mu'_n + 1)$, получим

$$\overline{\lim}_{r\to\infty}\, g_m(r)/g(r) > 1/\left\{(\alpha-\beta)(\alpha-\beta+m-2)\right\}.$$

Из (6), (7) следует, что $\lambda_m < \alpha - \beta = \lambda_*$, $\rho_m > \alpha + \beta = \rho_*$.

1. Edrei A. Sums of deficiencies of meromorphic functions // J. analyse math. - 1965. - 14. - P. 79-107.
2. Drasin D., Shea D.F. Polya peaks and the oscillation of positive functions // Proc. Amer. Math. Soc. - 1972. - 34, N 2. - P. 403-411.
3. Кондратюк А.А. Ряды Фурье и мероморфные функции. - Львов: Вищ. шк., 1988. - 196 с.
4. Кондратюк А.А. Сферические гармоники и субгармонические функции // Мат. сб. - 1984. - 125, № 2. - С. 147-166.

УДК 513.18

Г.Р.Белицкий

О ДИАГОНАЛИЗУЕМОСТИ И ПРИВОДИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Доказана общая теорема о диагонализуемости линейных дифференциальных и функциональных уравнений в подалгебре алгебры гладких функций. Доказательство основано на теореме Банаха о сжимающих отображениях. Применение доказанной теоремы к конкретным ситуациям приводит к уточнению некоторых известных ранее результатов (например, уточнению оценок класса гладкости и оценок на малые знаменатели в задаче приводимости на торе).

В задаче приводимости линейных уравнений к постоянным коэффициентам обычно применяются методы КАМ-теории [1]. Предлагаемый здесь более прямой метод, основанный на принципе сжатых отображений, позволяет получить общую теорему о диагонализуемости функциональных и дифференциальных уравнений, которой иногда достаточно для исследования исходной системы. Кроме того, вопрос о приводимости диагональной системы сводится здесь к решению одномерных гомологических уравнений, что позволяет уточнить некоторые известные ранее результаты: оценки класса гладкости, оценки на малые знаменатели и т.д.

<u>1. Формулировки результатов</u>. Обозначим через $C_b^k(\mathbb{R}^n)$, $0\le k\le\infty$ алгебру комплекснозначимых функций $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ класса C^k с ограниченными производными; через $C_b^\omega(\mathbb{R}^n)$ – алгебру аналитических функций $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$, допускающих оценку (что эквивалентно продолжаемости f до аналитической ограниченной функции в некоторую полосу $\{z\in\mathbb{C}^n \mid z=x+iy,\ \|y\|\le h\}$)

$$\sup_x\left|\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n} f(x)}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}\right|\le c r^{k_1+\ldots+k_n}(k_1+\ldots+k_n)!$$

с некоторыми $c=c(f)$, $r=r(f)$. Пусть $B\subset C_b^k(\mathbb{R}^n)$ – замкнутая подалгебра с единицей.

Гомеоморфизм $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ задает автоморфизм

$$(f^{G})(x)=f(F(x))\quad(f\in C^0(\mathbb{R}^n)).$$

ISBN 5-12-002791-1. Динамические системы и комплексный анализ. Киев, 1992

Пусть подалгебра $\mathcal{B}$ инвариантна относительно σ и σ^{-1}.

Рассмотрим задачу о приведении $m \times m$-матрицы Q над $\mathcal{B}$ к диагональному виду относительно преобразований

$$(\Phi Q)(x) = \Phi^{\sigma}(x) Q(x) \Phi^{-1}(x), \qquad (1)$$

где Φ- матрица с элементами из $\mathcal{B}$, обратимая над $\mathcal{B}$. Ограничимся случаем, когда F является композицией сдвига и линейного отображения:

$$F(x) = \Lambda x + \alpha, \quad \Lambda \in Aut(\mathbb{R}^n), \quad \alpha \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть T - верхнетреугольная $m \times m$-матрица над $\mathcal{B}$ с диагональю $D = diag(d_1(x), \ldots, d_m(x))$ и верхнетреугольными элементами $t_{ij}(x)(i<j)$. Положим $\rho = max(r^{-1}, r)$, где r -спектральный радиус оператора Λ. В случае $k=\infty$ предполагаем, что $\rho = 1$, а при $k=\omega$ считаем оператор Λ унитарным.

<u>Теорема</u>. Пусть диагональные элементы $d_2(x), \ldots, d_m(x)$ обратимы в $\mathcal{B}$ и

$$q = \rho^k \max_{i<j} \sup_x |d_i(x) d_j^{-1}(x)| < 1 \qquad (2)$$

Существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что каждая матрица

$$Q(x) = T(x) + P(x), \quad P = (p_{ij})$$

над $\mathcal{B}$, удовлетворяющая условию

$$\sup_x |p_{ij}(x)| \leq \varepsilon_0 \quad (i, j = 1, \ldots, m),$$

преобразованием (1) приводится к диагональной.

Матрица T приводится к своей диагонали D, однако не утверждается (и это неверно), что Q эквивалентна D. Из доказательства видно, что $\varepsilon_0 \geq c_1 q$, где c_1 зависит лишь от n, m и числа

$$l_T = \max_{i<j} \sup_x |t_{ij}(x)|.$$

В частности, если T с самого начала диагональна $(t_{ij} = 0)$, то c_1 зависит лишь от размерностей. Элементы диагональной матрицы, к которой приводится Q, отличаются от d_i на величину

$$\delta = c_2 \max_{ij} \sup_x |p_{ij}(x)|,$$

где c_2 также зависит лишь от l_1. Наконец, если возмущение P непрерывно или гладко зависит от параметра, то такое утверждение справедливо и относительно приводящей матрицы φ.

Пусть $v(x)=\Lambda_0 x+\alpha_0(\Lambda_0\in End(R^n),\ \alpha_0\in R^n)$ – векторное поле, $F^t(x)=e^{\Lambda_0 t}x+\int_0^t e^{\Lambda_0(t-s)}\alpha ds\ (t\in R^1)$ – его поток. Допустим, что алгебра B инвариантна относительно этого потока. Рассмотрим в $R^n\times C^m$ систему дифференциальных уравнений

$$\dot x=\Lambda_0 x+\alpha_0,\quad \dot y=A(x)y. \tag{3}$$

Здесь $A=T_0+P$ – верхнетреугольная матрица над B с диагональю $A_0=diag(a_1,\dots,a_m)$, $P=(p_{ij})$, $p_{ij}\in B$ – возмущение. Пусть поток системы (3) имеет вид

$$H^t(x,y)=(F^t(x),\ Q^t(x)_{ij}).$$

Преобразование $y\to\varphi(x)y$ переводит поток H^t в такой:

$$H^t(x,y)=\left(F^t(x),\ \tilde Q^t(x)y\right),\ \tilde Q^t(x)=\varphi(F^t x)Q^t(x)\varphi(x).$$

Если $\varphi\in C^k$, $k\geq 1$, это преобразование переводит систему (3) в аналитическую с матрицей

$$\tilde A=(\varphi A)=\varphi^{-1}A\varphi-\varphi^{-1}v\varphi.$$

При $k=0$ под приведением системы (3) к диагональной понимаем приведение к потоку, в котором матрица $Q^t(x)$ диагональна при всех $t\in R^1$.

Следствие 1. Пусть выполнено условие

$$q_0\equiv k\max_{\lambda\in spec\Lambda}|Re\,\Lambda|+\max_{i<j}\sup_x\left(Re\,a_i(x)-Re\,a_j(x)\right)<0. \tag{4}$$

Существует ε_0 такое, что каждая система (3), удовлетворяющая условию $|p_{ij}(x)|\leq\varepsilon_0$, приводится к диагональной некоторым обратимым над B преобразованием $y\to\varphi(x)y$.

В самом деле, матрица $Q^t(x)$, соответствующая системе (3), имеет вид $Q^t(x)=T^t(x)+P^t(x)$, где T^t – верхнетреугольная с диагональными элементами

$$d_i^t(x)=\exp\int_0^t a_i(F^s x)ds.$$

Применим нашу теорему к паре $F(x)=F^t(x)\big|_{t=1}$, $Q(x)=Q^t(x)\big|_{t=1}$. Условие (2) следует из (4). Пусть φ – преобразование (1) над B, приводящее Q к диагональной $\tilde{D}=diag\,(\tilde{d}_1(x),\dots,\tilde{d}_m(x))$. Тогда матрица $\tilde{Q}^t$, отвечающая потоку $\tilde{H}^t$, полученному из H^t преобразованием φ, удовлетворяет условиям

$$\tilde{Q}^t\big|_{t=1}=\tilde{D},\quad \tilde{Q}^t(Fx)\tilde{D}(x)=\tilde{D}(x)\tilde{Q}^t(x)\quad (t\in\mathbb{R}^1).$$

Так как $|\tilde{d}_i(x)\,\tilde{d}_{i+1}^{-1}(x)|<\tilde{q}<1$, то матрица $\tilde{Q}^t$ диагональна при всех t.

Вопрос о приводимости диагональной матрицы в условиях нашей теоремы сводится к разрешимости одномерного мультипликативного гомологического уравнения

$$\varphi^{\sigma}(x)\,\varphi^{-1}(x)=cd(x)$$

с заданным $d\in B$ и неизвестными φ, $c=const$. Это уравнение не имеет даже непрерывных решений. Если же при всех d, близких к d_i, оно разрешимо в некоторой алгебре $B_0\supset B$, то матрица Q приводится к постоянной преобразованием над B_0.

Пусть D с самого начала постоянна и невырождена, $D=diag\,(\lambda_1,\dots,\lambda_m)$. Тогда каждая матрица, близкая к D, имеет логарифм в B. Поэтому мультипликативное гомологическое уравнение сводится к обычному

$$\varphi^{\sigma}-\varphi=c_0+d_0.$$

В частности, если $\Lambda=E$ (т.е. F – сдвиг), то условие (2) сводится к неравенству $|\lambda_i|\neq|\lambda_j|$ $(i\neq j)$. Рассматривая алгебру функций, периодических по каждой переменной, получаем следующее следствие.

Следствие 2. Пусть $|\lambda_i|\neq|\lambda_j|$ $(i\neq j)$. Тогда каждая близкая к D матрица Q с периодическими элементами класса C^k периодическим преобразованием (1) класса C^k приводится к диагональной. Если, кроме того, сдвиг α удовлетворяет условию

$$|e^{i(I,\alpha)}-1|\geq c\,|I|^{-\nu}\quad (I\in\mathbb{Z}^n)$$

и $\nu+m+1\leq k$, то Q периодическим преобразованием класса $C^{k-\nu-m-1}$ приводится к постоянной. Если Q аналитична, то для аналитической приводимости достаточно условия

$$\lim_{|I|\to\infty}|e^{i(I,\alpha)}-1|^{\frac{1}{|I|}}=1.$$

Следствие 3. Система

$$\dot{x} = \alpha, \quad \dot{y} = (diag(\lambda_1, \dots, \lambda_m) + (p_{ij}(x))) y , \qquad (5)$$

в которой $Re\lambda_i \neq Re\lambda_j$, а p_{ij} – достаточно малые периодические функции класса C^k, периодическим преобразованием приводится к диагональной. Если, кроме того, вектор α удовлетворяет условию

$$|(I,\alpha)| \geq c\,|I|^{-\nu} \quad (I \in \mathbb{Z}^n)$$

и $\nu+m+1 \leq k$, то система (5) периодическим преобразованием класса $C^{k-\nu-m-1}$ приводится к постоянной. Если p_{ij} аналитичны, то для аналитической приводимости системы достаточно условия

$$\lim_{|I| \to \infty} |(I,\alpha)|^{\frac{1}{|I|}} = 1 .$$

Это утверждение уточняет результаты, изложенные в [1].

Теорема вытекает из сформулированной ниже леммы, которая представляет также самостоятельный интерес, так как гарантирует приводимость к блочно-диагональному виду за пределами условий теоремы.

2. Основная лемма. Рассмотрим блочно-треугольную матрицу

$$T(x) = \begin{pmatrix} T_1 & U \\ 0 & T_2 \end{pmatrix},$$

где T_1 и T_2 – матрицы над B размером $m_1 \times m_1$ и $m_2 \times m_2$ соответственно, $m_1 + m_2 = m$, а $U - m_1 \times m_2$ – матрицы над B.

Лемма. Пусть T_2 обратима над B и пусть в пространствах $\mathbb{C}^{m_1}$, $\mathbb{C}^{m_2}$ существуют нормы такие, что

$$q \equiv \rho^k \sup_{\alpha} \|T_1(x)\| \|T_2^{-1}(x)\| < 1 . \qquad (6)$$

Тогда найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что каждая матрица

$$Q(x) = T(x) + P(x), \quad P = (p_{ij})$$

над B, удовлетворяющая условию $|p_{ij}(x)| \leq \varepsilon_0$, преобразованием (1) приводится к блочно-треугольной.

Отсюда индукцией по числу блоков получаем такое следствие.

Следствие 4. Пусть T – верхняя блочно-треугольная матрица над B с диагональными блоками $T_1, \dots, T_s$ размером $m_1 \times m_1, \dots, m_s \times m_s$. Пусть блоки $T_2, \dots, T_s$ обратимы над B и в пространствах $\mathbb{C}^{m_1}, \dots$, $\mathbb{C}^{m_s}$ существуют нормы такие, что

$$q \equiv \rho^k \max_{i<j} \sup_x \|T_i(x)\| \|T_j^{-1}(x)\| < 1 .$$

Тогда найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что каждая матрица

$$Q(x) = T(x) + P(x) \quad P = (p_{ij})$$

над B с условием $|p_{ij}(x)| \leq \varepsilon_0$ преобразованием (1) приводится к блочно-треугольной.

Теорема, очевидно, содержится в этом следствии.

Диагонализуемость матрицы Q в условиях леммы проводится в несколько приемов. Сначала находим преобразование

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} E_1 & \varphi_0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

над B, приводящее T к блочно-диагональной. Здесь E_i $(i=1,2)$ – единичные матрицы размером $m_i \times m_i$, а φ_0 – неизвестная $m_1 \times m_2$-матрица. Тогда для φ_0 получаем уравнение

$$\varphi_0^\sigma T_2 - T_1 \varphi_0 = -u . \tag{8}$$

Если это уравнение имеет решение над B, то Φ_0 приводит Q к виду

$$\tilde{Q} = diag(T_1, T_2) + \tilde{P}, \quad \tilde{P} = \Phi_0^\sigma P \Phi_0^{-1} .$$

Пусть p_{ij} $(i,j=1,2)$ – блоки матрицы $\tilde{P}$ размером $m_i \times m_j$. Находим преобразование

$$\Phi = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ \varphi & E_2 \end{pmatrix},$$

приводящее Q к верхней блочно-треугольной матрице. Это дает для φ уравнение

$$\varphi^\sigma \tilde{T}_1 - \tilde{T}_2 \varphi = \varphi^\sigma \tilde{P}_{12} \varphi - \tilde{P}_{21} , \tag{8$'$}$$

где $\tilde{T}_i = T_i + \tilde{P}_{ii}$ $(i=1,2)$. Если матрица $\tilde{P}$ (т.е. матрица P) достаточно мала, то неравенство (6) сохранится, если в нем T_i заменить на $\tilde{T}_i$. Преобразование Φ приведет матрицу Q к блочно-треугольной с диагональными блоками $\tilde{T}_1 - \tilde{P}_{12}\varphi$, $\tilde{T}_2 + \varphi^\sigma \tilde{T}_{12}$. Снова применив преобразование (7), получим блочно-треугольную матрицу.

3. Доказательство основной леммы (окончание). Осталось доказать разрешимость над B уравнений (8), (8$'$). Первое из них получа-

ется, если во втором положить $\tilde{P}_{12}=0$ и заменить σ на σ^{-1}. Поэтому достаточно доказать разрешимость уравнения (8). Запишем его в виде

$$\varphi=\tilde{T}_2^{-1}\varphi^{\sigma}\tilde{T}_1-\tilde{T}_2^{-1}\varphi^{\sigma}\tilde{P}_{12}\varphi-\tilde{T}_2^{-1}\tilde{P}_{21}\,. \qquad (9)$$

При $j=1,\ 2,\ldots$ введем в пространстве $(\mathbb{R}^n)^{\times j}$ норму $\|\cdot\|_j$ таким образом, чтобы

$$q_1\equiv\sup_j\|\Lambda^{\times j}\|_j\ \sup_x\|T_1(x)\|\|T_2^{-1}(x)\|<1\,.$$

В дальнейшем индекс в обозначении $\|\cdot\|_j$ опускаем.

Обозначим через $L(\varphi)$ оператор в правой части (9). Полагая

$$\delta=\sup_x\|\tilde{P}_{12}(x)\|,\qquad \|\varphi\|=\sup_x\|\varphi(x)\|,$$

$$\|\varphi^{(j)}\|=\sup_x\|\varphi^{(j)}(x)\|,$$

получаем

$$\|(L\varphi)^{(j)}\|\leq\left(q_1+a\delta\|\varphi\|\right)\|\varphi^{(j)}\|+R_j\ (j=0,1,\ldots)\,. \qquad (10)$$

Здесь

$$R_j=R_j\left(\|\varphi\|,\ \ldots,\ \|\varphi^{(j-1)}\|\right)=\sum_{i\leq j-1}a_{ij}\|\varphi^{(i)}\|+$$

$$+\sum_{\substack{i+l\leq j\\ i,l\leq j-1}}a_{ijl}\|\varphi^{(i)}\|\|\varphi^{(l)}\|+b_j\ ,$$

где b_j, a_i, a_{ij} и a_{ijl} определяются заданными элементами $\tilde{T}_1$, $\tilde{T}_2$, Λ, P_{12}, P_{21}. В частности, $R_0=b_0=\|\tilde{T}_2^{-1}P_{21}\|$.

Зафиксируем $c_0>0$ так, чтобы $c_0q_1<c_0-b_0$. Пусть $\delta>0$ такое, что

$$(q_1+a\delta c_0)c_0+b_0<c_0\,.$$

Тогда из условия $\|\varphi\|<c_0$ вытекает неравенство $\|L\varphi\|<c_0$.

Случай $0\leq k<\infty$. Положим

$$\|\varphi\|_1=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j\|\varphi^{(j)}\|\ ,$$

где $\alpha_0=1$, α_j $(j\geq1)$ выбраны по индукции так, чтобы

$$\sum_{j=1}\alpha_jR_j\left(c_0;\ c_0\alpha_1^{-1},\ \ldots,\ c_0\alpha_{j-1}^{-1}\right)<c_0(1-q-a\delta c_0)-b_0\,.$$

Покажем, что шар $S(c_0)$ радиусом c_0 в норме $\|\cdot\|_1$ инвариантен относительно L. В самом деле, если $\varphi\in S(c_0)$, то $\|\varphi^{(j)}\|\leqslant c_0\alpha_j^{-1}$. Поэтому

$$\|L\varphi\|_1\leqslant(q_1+a\delta c_0)\|\varphi\|_1+b_0+\sum_{j=1}^{k}\alpha_j R_j(c_0,\dots,c_0\alpha_{j-1}^{-1})<c_0 .$$

Введем теперь в $S(c_0)$ метрику таким образом, чтобы оператор L был сжатием. Если $\varphi,\psi\in S(c_0)$, то

$$\|(L\varphi-L\psi)^{(j)}\|\leqslant(q_1+a\delta c_0)\|(\varphi-\psi)^{(j)}\|+\sum_{i\leqslant j}B_{ij}\|(\varphi-\psi)^{(i)}\|,$$

где $B_{i0}=0$, а B_{ij} при $j\geqslant 1$ определяется числом c_0 и элементами $\tilde{T}_1$, $\tilde{T}_2$, Λ, $\tilde{P}_{12}$, $\tilde{P}_{21}$. Положим

$$\|\varphi\|_2=\sum_{j=0}^{k}\beta_j\|\varphi^{(j)}\|,\quad d(\varphi,\psi)=\|\varphi-\psi\|_2,\quad (\varphi,\psi\in S(c_0)).$$

Здесь $\beta_k=1$, а $\beta_i\,(i\leqslant k-1)$ выбраны так, чтобы

$$\beta_i>\delta_1^{-1}\sum_{j>i}\beta_j B_{ij}\quad(i=0,1,\dots,k),$$

где $\delta_1<1-q_1-a\delta c_0$. Тогда

$$d(L\varphi,L\psi)\leqslant(q_1+a\delta c_0+\delta_1)d(\varphi,\psi).$$

Следовательно, уравнение (10) имеет решение $\varphi\in S(c_0)$.

Случай $k=\infty$. Выберем по индукции числа $c_j\,(j\geqslant 1)$ так, чтобы

$$(1-q_1-a\delta c_0)c_j>R_j(c_0,c_1,\dots,c_{j-1})\quad(j\geqslant 1).$$

Множество $K=K(c_0,\dots)$ матриц φ над B, для которых

$$\|\varphi^{(j)}\|\leqslant c_j\quad(j=0,1,\dots)$$

является выпуклым компактом. Из (10) вытекает его инвариантность относительно L. Следовательно, в силу принципа неподвижной точки уравнение (9) имеет решение $\varphi\in K$. Нетрудно построить также метрику в K, в которой L будет сжатием.

Аналитический случай. Рассмотрим замыкание $\bar{B}\subset C_b^\infty(R^n)$. По доказанному уравнение (9) имеет решение φ над $\bar{B}$, причем $\|\varphi\|\leqslant c_0$. Так как $B=\bar{B}\cap C_b^\infty(R^n)$, то достаточно доказать, что это решение удовлетворяет оценкам

$$\|\varphi^{(j)}\|\leqslant ar^j j!\quad(j=0,1,\dots)$$

с учетом аналогичных оценок для элементов матрицы Q. Полагая

$$\delta_j = \frac{\|\varphi^{(j)}\|}{b r_1^{\,i} j!} \quad (j=0,1,\dots),$$

где числа b и r_1 достаточно велики, из (9) получаем неравенства

$$\delta_j \le \tilde{q}\delta_j + N\sum_{i\le j-1}\delta_i + N\sum_{1\le i\le j-1}\delta_1\delta_{i-1}+1$$

с некоторыми $N>0, \tilde{q}<1$. Теперь достаточно доказать оценку $\delta_j \le MQ^j$ $(j=0,1,\dots)$, $M>0$, $Q>0$. Рассмотрим функциональное уравнение

$$h(x)=\tilde{q}h(x)+N\frac{xh(x)}{1-x}+N\frac{xh^2(x)}{1-x}+\frac{1}{1-x}.$$

Оно имеет решение

$$h(x)=(1-\tilde{q})^{-1}\sum_{j=1}^{\infty}h_j x^j,$$

сходящееся в некоторой окрестности точки $x=0$, т.е.

$$|h_j| \le MQ^j \quad (j=0,1,\dots), \quad M>0, \quad Q>0.$$

Коэффициенты $h_j>0$ удовлетворяют рекуррентной системе

$$h_j=\tilde{q}h_j+N\sum_{i\le j-1}h_i+N\sum_{1\le i\le j-1}h_1 h_{i-1}+1, \quad h_0=(1-\tilde{q})^{-1}.$$

Следовательно, $\delta_j \le h_j$. Лемма полностью доказана.

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Самойленко А.А. Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1969. – 245 с.

УДК 517.9

Н.А.Быков

ГЛАДКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА ОКРУЖНОСТИ

Указана полная система инвариантов гладкой сопряженности и построено семейство нормальных форм для аналитических и бесконечногладких векторных полей на окружности.

Целью настоящей работы является получение полной классификации векторных полей с фиксированным типом поведения в каждой точке окружности относительно гладких замен координат, сохраняющих ориентацию. Строится полная система инвариантов гладкой сопряженности, которая кроме локальных инвариантов особых точек содержит интегральный инвариант поля в целом, являющийся специфическим именно для гладкой классификации. Рассматриваемые поля склеены из элементарных на прямой, и инвариант поля в целом имеет характер коэффициента склейки. В частности, классифицированы все аналитические поля на окружности и показана возможность приведения рассматриваемых полей к полиномиальной форме.

Такие задачи для грубых векторных полей и диффеоморфизмов изучены в работах [1-3], общая конструкция для произвольных многообразий изложена в работе [4].

Пусть $S^1=[0,2\pi]$ и $V(x)=v(x)\partial/\partial x$ - векторное поле на S^1, задаваемое 2π-периодической функцией $v(x)$, где $v(x)$ - аналитическая функция или функция класса $C^\infty(S^1)$, имеющая лишь конечнократные нули. В любом случае поле $V(x)$ имеет на окружности не более чем конечное число особых точек $\{x_i\}_{i=1}^m$ с кратностями $\{\pm k_i\}_{i=1}^m$, так что в окрестностях особых точек

$$v(x-x_i)=\pm|c_i|(x-x_i)^{k_i}+\cdots, \quad c_i\neq 0,$$

где многоточие обозначает члены более высокого порядка.

Если $H(y)=h(y)\partial/\partial y$ - росток в нуле одномерного аналитического поля или поля класса C^∞ с конечнократной особенностью, то известно [5], что всякий такой росток аналитическим или бесконечно-гладким преобразованием, сохраняющим ориентацию, может быть приведен к виду $Q(x)=(\pm x^k+ax^{2k-1})\partial/\partial x$. Числовой параметр a зависит от тейлоровых коэффициентов $h_k,\dots,h_{2k-1}$ функции $h(y)$ и равен взятому с обратным знаком коэффициенту при мономе $1/y$ в лорановом разложении функции $1/h(y)$. Кратность особенности $\pm k$ вместе с числом a об-

ISBN 5-12-002791-1. Динамические системы и комплексный анализ. Киев, 1992

разует полную систему инвариантов локальной сопряженности. Поле $Q(x)$ будем рассматривать как локальную нормальную форму для таких ростков, соответствующую инварианту $(\pm k, a)$.

Пусть $I=(A,B)\subset R^1$ – конечный или бесконечный интервал. Воспользовавшись сформулированным выше локальным утверждением, построим нормальные формы для элементарных полей на I. Рассмотрим поле $H(y)=\hbar(y)\partial/\partial y$ на I с единственной особой точкой $y_0\in I$, где $\hbar(y)$ аналитична или принадлежит классу $C^\infty(I)$ и имеет в точке y_0 нуль конечного порядка k. Считаем также, что $H(y)$ имеет поток на I.

Обозначим через $N(x)\partial/\partial x$ одно из полей на R^1:

$$N(x)\partial/\partial x=\pm\frac{x^k\,\partial/\partial x}{1+ax^{k-1}+a^2x^{2k-2}},\quad a\neq 0,\ k>1;$$

$$N(x)\partial/\partial x=\pm\frac{x^k\,\partial/\partial x}{1+x^{2k}},\quad a=0,\quad k>1;$$

$$N(x)\partial/\partial x=(a\pm 1)x\,\partial/\partial x=\lambda x\,\partial/\partial x,\quad k=1.$$

Пусть $P(x)$ – некоторая фиксированная первообразная функции $1/N(x)$; c – некоторая фиксированная постоянная из интервала (A, y_0). Обозначим через $T(y)$ фиксированную первообразную главной части $L(y)$ лоранового разложения функции $1/\hbar(y)$ в точке y_0, а через $R(y)$ – функцию $1/\hbar(y)-L(y)$, так что $R(y)$ аналитична или принадлежит классу C^∞.

<u>Лемма 1</u>. Существует сохраняющий ориентацию диффеоморфизм I на R^1, принадлежащий классу C^∞, или аналитический и сопрягающий поля $N(x)\partial/\partial x$ и $H(y)$.

Всякий диффеоморфизм $F(y)$, удовлетворяющий этим требованиям, можно представить формулой

$$P(F(y))=\begin{cases}T(y)+\int\limits_c^y R(\xi)\,d\xi+b_+, & y\geq y_0,\\ T(y)+\int\limits_c^y R(\xi)\,d\xi+b_-, & y\leq y_0,\end{cases}\tag{1}$$

где b_+, b_- – некоторые константы. Если $F(y)$ принадлежит классу $C^k(I)$, то $b_+=b_-$; если же b_+ и b_- различны, то формула (1) задает диффеоморфизм класса $C^{k-1}(I)$.

<u>Доказательство</u>. Поскольку локальный инвариант поля $N(x)\partial/\partial x$ есть $(\pm k, a)$, то, как уже отмечалось, существует локальный диффео-

морфизм $F(y)$, сопрягающий $H(y)$ и $N(x)\partial/\partial x$. Поле $N(x)\partial/\partial x$ растет на бесконечности не быстрее линейного, следовательно, имеет поток, который обозначим $G_1^t(x)$. Пусть $G_2^t(y)$ – поток поля $H(y)$. Локально справедливы равенства

$$F(y)=G_1^t\circ F\circ G_2^{-t}(y),$$

$$F(y)=G_1^{-t}\circ F\circ G_2^t(y).$$

Этими равенствами $F(y)$ распространяется на весь интервал I и сопрягает потоки $G_1^t(x)$, $G_2^t(y)$ уже в целом.

Непосредственно из уравнения сопряженности

$$N(F(y))=F'(y)h(y)$$

вытекает, что произвольный сопрягающий диффеоморфизм $F(y)$ удовлетворяет уравнению

$$P(F(y))=\begin{cases} T(y)+\int\limits_c^y R(\xi)d\xi+\int\limits_{c_+}^c R(\xi)d\xi+d_+, & y\geq y_0,\\ T(y)+\int\limits_c^y R(\xi)d\xi+\int\limits_{c_-}^c R(\xi)d\xi+d_-, & y\leq y_0\end{cases} \qquad (2)$$

с некоторыми константами c_+, c_-, d_+, d_-.

Отметим, что $P(x)$, $T(y)$ одновременно возрастают или убывают, поэтому уравнение (2) определяет сохраняющий ориентацию диффеоморфизм I на R^1.

Обозначим

$$b_\pm=\int\limits_{c_\pm}^c R(\xi)d\xi+d_\pm .$$

Функции $P(x)$, $T(y)$ имеют вид

$$P(x)=\mp\frac{1}{(k-1)x^{k-1}}-a\ln|x|\pm\frac{a^2}{k-1}x^{k-1},$$

$$P=\mp\frac{1}{(k-1)x^{k-1}}\pm\frac{x^{k+1}}{k+1},$$

$$P=\lambda\ln|x|,\quad T(y)=D(y)/y^{k-1}-a\ln|y|$$

(для простоты вычислений считаем, что $y_0=0$), где $D(y)$ – полином степени не выше $k-2$ с ненулевым свободным членом.

В случае $k=1$ соотношение (2) превращается в явную формулу для $F(y)$:

$$F(y)=e^{b_\pm}\, y \exp\left\{\lambda\int_c^y R(\xi)\,d\xi\right\},$$

из которой следует оставшееся недоказанным утверждение леммы 1.

При $k>1$ положив для определенности знак плюс в формулах для $P(x)$, перепишем (2) в виде

$$\frac{1}{k-1}=\left(\frac{F}{y}\right)^{k-1}D(y)+F^{k-1}\left\{a\ln\frac{F}{y}+sF^{l}\right\}+b_\pm F^{k-1}. \qquad (3)$$

Здесь $s=a^2/(k-1)$, $l=k-1$ при $a\neq 0$, $s=1/(k+1)$, $l=k+1$ при $a=0$.

Гомеоморфизм $F(y)$, задаваемый формулой (2) или эквивалентной ей (3), аналитичен или принадлежит классу C^∞ всюду на $I/\{y_0\}$, поэтому переходя к пределу при $y\to y_0$ и учитывая, что $F(y_0)=0$, получаем

$$\lim_{y\to+y_0}F'(y)=\lim_{y\to-y_0}F'(y)=1\Big/\sqrt[k-1]{(k-1)D(0)}\ .$$

Далее, при $j<k-1$ пределы j-й производной от правой части (3) при $y\to\pm y_0$ не зависят от $b_\pm$ и совпадают с пределами j-й производной первого слагаемого:

$$\lim_{y\to\pm y_0}\left\{D(y)(F(y)/y)^{k-1}\right\}^{(j)}=0,\qquad 0<j<k-1.$$

Пусть из этого соотношения при $j=1,\dots,i-1$ найдены производные $F'(y_0),\dots,F^{(i)}(y_0)$. Тогда, рассматривая его при $j=i$, можно доказать существование $F^{(i+1)}(y_0)$. Действительно,

$$D(0)\lim_{y\to y_0}\left\{(F(y)/y)^{k-1}\right\}^{(i)}=C\ ,$$

где $C=C(D(y),F'(y_0),\dots,F^{(i)}(y_0))$ – известная константа. Положим

$$F(y)=f_1y+\dots+f_{i-2}y^{i-2}+f_{i-1}y^{i-1}+$$

$$+\tau(y)y^i=S(y)+\tau(y)y^i,\quad \tau(y)\underset{y\to y_0}{=}\underline{O}(1).$$

Тогда

$$\left\{\left(\frac{F}{y}\right)^{k-1}\right\}^{(i)}=\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{n=0}^{i}C_{k-1}^{j}\left\{\left(\frac{S}{y}\right)^{k-1-j}\right\}^{(n-i)}\left\{\tau^{j}y^{j(i-1)}\right\}^{(n)}.$$

Если $n \leq j(i-1)$, то пределы при $y \to y_0$ слагаемых с индексами (j,n) существуют, следовательно, существует предел при $y \to y_0$ единственного слагаемого, для которого $n > j(i-1)$, т.е. при $j=1$, $n=i$. Таким образом, $\tau(y)$ дифференцируема в точке y_0 или существует $F^{(i+1)}(y_0)$. Если $F(y)$ принадлежит классу C^k, то из соотношения (3) следует, что

$$b_{\pm}F^{k-1}(y) = b_{\pm}y^{k-1}+\ldots=\delta(y),$$

где $\delta(y)$ – функция класса C^{k-1}. Отсюда имеем $b_+ = b_-$. Лемма доказана.

Назовем типом аналитического или бесконечногладкого поля с конечнократными особенностями на окружности набор

$$\Lambda_M^r=\left\{(z_i)_{i=1}^m,\ (\pm k_i)_{i=1}^m,\ (a_i)_{i=1}^m\right\},$$

где $r=A$ или $r=\infty$ соответствует гладкости поля, $M=max(k_i)_{i=1}^m$. Гладкую эквивалентность полей естественно рассматривать только внутри типа, так как поля с разными локальными структурами заведомо не эквивалентны, и для простоты удобно считать, что сопрягающий диффеоморфизм оставляет особые точки на месте и сохраняет ориентацию.

Отметим, что не всякий набор Λ_M^r задает тип некоторого поля на окружности, для этого необходима топологическая совместимость особенностей. Особенность z_i является источником, если k_i нечетно и входит в набор со знаком плюс, стоком – соответственно при знаке минус. Если k_i четно, то особенность z_i топологически нейтральна; назовем ее перетоком. Считаем, что набор Λ_M^r топологически совместим, если в нем не соседствуют два стока или источника и расположение перетоков согласовано одно с другим и с расположением источников и стоков по направлению фазового потока.

<u>Лемма 2</u>. Для того чтобы набор Λ_M^r задавал тип некоторого поля, необходимо и достаточно, чтобы он был топологически совместим. Всякий такой набор является типом некоторого полиномиального поля на S^1.

<u>Доказательство</u>. Необходимость утверждения очевидна.

Строим поле $X(z)$, реализующее допустимый тип Λ_M^r в виде $X(z)=Q(z)\partial/\partial z+\iota T(z)\partial/\partial z$, где полином $Q(z)$ соответствует гладким инвариантам поля, а полином $T(z)$ – топологическим, $\iota \in \mathbb{R}^+$. Точнее, пусть

$Q(z)$ имеет в точках $z_1, \dots, z_m$ нули и заданные производные так, что локальный тип особых точек $z_1, \dots, z_m$ совпадает с их локальным типом в Λ_M^r. Пусть далее $T(z)$ имеет в качестве нулей только точки $z_1, \dots, z_m$, причем особые точки $z_1, \dots, z_m$ поля $T(z)\partial/\partial z$ являются стоками, источниками либо перетоками соответственно их топологическому типу в Λ_M^r. Будем требовать, чтобы $T^{(i)}(z_j)=0, j=1,\dots,m; \ i=1,\dots, 2k_j$. Тогда можно выбрать l столь большим, что $X(z)$ будет иметь в качестве особенностей только точки $z_1, \dots, z_m$ и их локальная структура будет соответствовать типу Λ_M^r.

Укажем явный вид полиномов $Q(z)$ и $T(z)$, удовлетворяющих сформулированным условиям. Обозначим

$$Q_i(z) = \sum_{j=0}^{k_i-1} \alpha_j^i \sin^{k_i+j}(z - z_i),$$

$$R_i(z) = \prod_{j=1, j\neq i}^{m} \sin^{2k_j}((z-z_j)/2).$$

Положим $Q(z)=\sum_{i=1}^{m} R_i(z)Q_i(z)$. Константы $\alpha_j^i, i=1,\dots,m; j=0,\dots,k_i-1$ могут быть выбраны так, чтобы $Q(z)$ был искомым полиномом.

Особенности допустимого типа Λ_M^r разбиваются на пары сток – источник и множество перетоков. Пусть $\{z_1,z_2\}, \{z_3,z_4\}, \dots, \{z_{2n-1}, z_{2n}\}$ – указанные пары, а $z_{2n+1}, \dots, z_m$ – перетоки. Положим

$$S_i(z) = \sin\left(z + \frac{\pi - z_{2i-1} - z_{2i}}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi + z_{2i-1} - z_{2i}}{2}\right)$$

при $i=1,\dots,n$; $S_i(z) = \sin^2((z-z_i)/2)$, $i=2n+1,\dots,m$.

Тогда полином

$$T_1(z) = (-1)^{n-1}\left(\prod_{i=1}^{n} S_i\right)\left(\prod_{i=2n+1}^{m} S_i\right).$$

имеет нули, соответствующие типу Λ_M^r. В качестве $T(z)$ можно взять полином $(T_1(z))^{\gamma}$, где $\gamma = 2\sum_{i=1}^{m} k_i + 1$. Лемма доказана.

Далее будем рассматривать только допустимые типы. Если $v(z)\partial/\partial z$ – поле без особых точек на S^1, то единственным инвариантом C^l – сопряженности, $0 \leq l \leq A$, является интеграл $I = \oint dz / v(z)$, имеющий смысл времени обхода окружности. Каждое такое поле в том же классе гладкости эквивалентно полю $b\partial/\partial z$, где константа b равна $2\pi/I$.

Оказывается, что для полей V из Λ_M^r правильно регуляризованный интеграл I является классифицирующим инвариантом. Пусть сначала $m \geqslant 2$.

Обозначим через U_i интервалы $]x_{i-1}, x_{i+1}[$, где $x \in [0,2\pi]$ при $i \neq 1$, $x \in [-\pi, \pi]$ при $i=1$. Пусть $c_i \in U_{i-1} \cap U_i$ – некоторые фиксированные константы. Для простоты считаем, что $x_1 = 0 = 2\pi$. Тогда $c_i \in [0,2\pi]$. Полям $V|U_i$ соответствуют функции $R_i(x)$, $T_i(x)$, описанные в лемме 1.

Положим

$$I(V) = \sum_{i=1}^{m} \left\{ \int_{c_{i+1}}^{c_i} R_i(\xi)\,d\xi + T_{i+1}(c_{i+1}) - T_i(c_{i+1}) \right\}.$$

Поскольку функции $R_1(x)$, $T_1(x)$ заданы при $x \in [-\pi, \pi]$, то при $i=1$ в выражении для I следует понимать c_1 как $c_1 = 2\pi$, а при $i = m - T_1(c_1)$ как $T_1(c_1 - 2\pi)$. Считаем также индекс i_{m+1} равным индексу i_1.

Укажем форму представления $I(V)$ в виде несобственного интеграла. Для малых ε обозначим через S_ε^1 область $[0,2\pi] / \bigcup_{i=1}^{m}]x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon[$. Перепишем $I(V)$ в виде

$$I(V) = \sum_{i=1}^{m} \left\{ \int_{c_{i+1}}^{x_i+\varepsilon} R_i\,d\xi + \int_{c_i-\varepsilon}^{x_i} R_i\,d\xi + \int_{x_i+\varepsilon}^{x_i-\varepsilon} R_i\,d\xi + T_{i+1}(c_{i+1}) - T_i(c_{i+1}) \right\}.$$

Следовательно,

$$I(V) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{i=0}^{m} \left\{ \int_{c_{i+1}}^{x_i+\varepsilon} dx/v + \int_{x_i-\varepsilon}^{c_i} dx/v + T_i(x_i - \varepsilon) - \right.$$

$$\left. - T_i(x_i+\varepsilon) \right\} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \oint_{S_\varepsilon^1} \frac{dx}{v(x)} + \sum_{i=1}^{m} \big(T_i(x_i - \varepsilon) - T_i(x_i + \varepsilon) \big) \right\}.$$

В случае $m=1$ под $I(V)$ будем понимать последнее представление. Из того же представления вытекает, что $I(V)$ не зависит от выбора констант $c_1, \dots, c_m$.

<u>Теорема 1.</u> Для эквивалентности полей V и W из типов $\Lambda_M^{r_1}$ и $\Lambda_M^{r_2}$ в классе $C^M(S^1)$ необходимо и достаточно, чтобы $I(V) = I(W)$. Любые два поля из $\Lambda_M^{r_1}$, $\Lambda_M^{r_2}$ эквивалентны в классе $C^{M-1}(S^1)$, в частности, топологически эквивалентны. Если поля эквивалентны в классе $C^M(S^1)$, то они эквивалентны и аналитически при $r_1 = r_2 = A$, эквивалентны в классе $C^\infty(S^1)$ при $r_1 = \infty$ или $r_2 = \infty$.

Отображение $I: \Lambda^r_M \to \mathbb{R}^1$ сюръективно, любое поле из Λ^r_M эквивалентно тригонометрическому полиному из фиксированного семейства полей. Два C^M-эквивалентных полинома этого семейства совпадают.

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится формулируемое ниже предложение.

Вначале считаем, что $m \geq 2$. Поля $V \setminus U_i$, $W \setminus U_i$ удовлетворяют условиям леммы 1, следовательно, существуют диффеоморфизмы $\psi_i, \varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^1$ такие, что $\psi_{i*}(N_i(x)\partial/\partial x) = V \setminus U_i$, $\varphi_{i*}(N_i(x)\partial/\partial x) = W \setminus U_i$, $i = 1, \dots, m$, где $N_i(x)\partial/\partial x$ – стандартные поля на $\mathbb{R}^1$, соответствующие локальному типу особой точки z_i. Назовем такие диффеоморфизмы приводящими. Положим

$$G_i(x) = \psi_{i+1} \circ \psi_i^{-1}(x), \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Тогда $G_i(x)$ – диффеоморфизмы $\mathbb{R}^+$ на $\mathbb{R}^-$, сопрягающие поля $N_i(x)\partial/\partial x$ и $N_{i+1}(x)\partial/\partial x$.

<u>Предложение</u>. Для эквивалентности полей V и W в классе $C^l(S^1)$, $0 \leq l \leq A$ необходимо и достаточно существование приводящих C^l-отображений $\{\psi_i\}_{i=1}^m$, $\{\varphi_i\}_{i=1}^m$ таких, что

$$G_i^W = \varphi_{i+1} \circ \varphi_i^{-1} = \psi_{i+1} \circ \psi_i^{-1} = G_i^V, \quad i = 1, \dots, m.$$

Действительно, пусть $F_* V = W$, $F \in C^l(S^1)$. Выберем приводящий набор $\{\psi_i\}_{i=1}^m$ класса C^l произвольно и положим $\varphi_i(z) = \psi_i \circ F(z)$. Поскольку $\varphi_{i*}(N_i(x)\partial/\partial x) = F_*(\psi_{i*}(N_i(x)\partial/\partial x) = W \setminus U_i$, то набор $\{\varphi_i\}_{i=1}^m$ также является приводящим класса C^l. Для этих наборов $G_i^W = G_i^V$.

Наоборот, пусть существуют C^l-наборы приводящих диффеоморфизмов $\{\psi_i\}_{i=1}^m$, $\{\varphi_i\}_{i=1}^m$ такие, что $G_i^W = G_i^V$. Положим

$$F \setminus U_i = \psi_i^{-1} \circ \varphi_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Так как $\psi_i^{-1} \circ \varphi_i = \psi_{i+1}^{-1} \circ \varphi_{i+1} \setminus U_{i+1} \cap U_i$, то $F(z)$ продолжается во все особые точки z_i как диффеоморфизм класса C^l, и

$$F_*(V \setminus U_i) = \varphi_{i*}(N_i(x)\partial/\partial x) = W \setminus U_i.$$

В случае $l = 0$ $F(z)$ сопрягает потоки полей V и W. Предложение доказано.

<u>Доказательство теоремы 1.</u> Выпишем уравнение, явно определяющее $G_i(x)$. Согласно лемме 1, любой приводящий диффеоморфизм $\psi_{i+1}(z)$ дается соотношением

$$P_{i+1}(\psi_{i+1}(z)) = T_{i+1}(z) + \int_{c_{i+1}}^{z} R_{i+1}(\xi)\,d\xi + b_{i+1}^-,$$

$$z \in]z_i, \; z_{i+1}[.$$

Положим в этом равенстве $z = \psi_i^{-1}(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$,

$$P_{i+1}(G_i(x)) = T_{i+1}(\psi_i^{-1}(x)) + \int\limits_{c_{i+1}}^{\psi_i^{-1}(x)} R_{i+1}\,d\xi + b_{i+1}^- =$$

$$= T_{i+1}(\psi_i^{-1}(x)) + \int\limits_{c_{i+1}}^{\psi_i^{-1}(x)} R_i\,d\xi + \int\limits_{c_{i+1}}^{\psi_i^{-1}(x)} \left(L_i(\xi) - L_{i+1}(\xi)\right)d\xi + b_{i+1}^- =$$

$$= \int\limits_{c_{i+1}}^{c_i} R_i\,d\xi + T_{i+1}(c_{i+1}) - T_i(c_{i+1}) + b_{i+1}^- + \int\limits_{c_i}^{\psi_i^{-1}(x)} R_i\,d\xi + T_i(\psi_i^{-1}(x)).$$

Аналогично

$$P_i(\psi_i(z)) = T_i(z) + \int\limits_{c_i}^{z} R_i(\xi)\,d\xi + b_i^+, \quad z \in]z_i, z_{i+1}[$$

или

$$P_i(x) - b_i^+ = T_i(\psi_i^{-1}(x)) + \int\limits_{c_i}^{\psi_i^{-1}(x)} R_i(\xi)\,d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Объединяя полученные соотношения, для $x \in \mathbb{R}^+$ получаем

$$P_{i+1}(G_i) = P_i(x) + \int\limits_{c_{i+1}}^{c_i} R_i\,d\xi + T_{i+1}(c_{i+1}) - T_i(c_{i+1}) + b_{i+1}^- - b_i^+. \tag{4}$$

Итак, все отображения $G_i(x)$ даются формулой (4) при некоторых $b_1^{\pm}, \ldots, b_m^{\pm}$. В силу монотонности функций $P_i(x)$ для равенства $G_i^V = G_i^W$ необходимо и достаточно совпадение констант в правых частях равенств (4), соответствующих полям V и W.

Теперь возможны две принципиально различные ситуации: $l < M$ и $l \geq M$.

Пусть $l \geq M$. Тогда, согласно лемме 1, $b_i^+ = b_i^- = b_i$, $i = 1, \ldots, m$. Поскольку $\sum\limits_{i=1}^{m} \{b_{i+1} - b_i\} = 0$, в этом случае для равенства $G_i^W = G_i^V$ необходимо, чтобы $I(V) = I(W)$. Этого и достаточно. Действительно, выберем набор $\{b_i\}_{i=1,m}^W$ произвольно и обозначим

$$a_i = \int\limits_{c_{i+1}}^{c_i} R_i^W\,d\xi + T_{i+1}^W(c_{i+1}) - T_i^W(c_{i+1}) + b_{i+1}^W - b_i^W$$

Выберем b_1^V также произвольно, а b_{i+1}^V – так, что

$$\int_{c_{i+1}}^{c_i} R_i^V d\xi + T_{i+1}^V(c_{i+1}) - T_i^V(c_{i+1}) + b_{i+1}^V - b_i^V = a_i .$$

Тогда, поскольку $I(V) = I(W)$, то

$$\int_{c_1}^{c_m} R_m^V(\xi)d(\xi) + T_m^V(c_m) - T_1^V(c_m) + b_1^V - b_m^V = a_m .$$

Пусть теперь $l<M$. Для определенности считаем, что $l<k_1$. Тогда параметры b_1^+, b_1^- свободны. Для $i=2,\dots,m$ положим $b_i^+ = b_i^- = b_i$. Аналогично предыдущему рассуждению фиксируем $(b_1^+)^V$ и выберем $b_2^V, \dots, b_m^V$. Тогда $(b_1^-)^V$ может быть выбрано из соотношения

$$\int_{c_1}^{c_m} R_m^V(\xi)d(\xi) + T_m^V(c_m) - T_1^V(c_m) + (b_1^-)^V - b_m^V = a_m .$$

Таким образом, в случае $l<M$ всегда можно выбрать приводящие отображения так, что $G_i^V = G_i^W$, $i=1,\dots,m$.

Если поля V и W эквивалентны в классе C^M, то, как уже доказано, $I(V) = I(W)$. Выберем приводящие наборы $\{\varphi_i\}_{i=1}^m$, $\{\varphi_i\}_{i=1}^m$ из класса C^∞ или аналитические, что всегда можно сделать, согласно лемме 1. Из равенства интегралов вытекает, что для этих наборов $G_i^V = G_i^W$. Согласно предложению, V и W аналитически (C^∞) эквивалентны. Первая группа утверждений теоремы 1 доказана.

Для доказательства сюръективности отображения $I: \Lambda_M^r \to \mathbb{R}^1$ построим семейство полей $P(z,s)$ такое, что $P(\cdot,s)$ принадлежит типу Λ_M^r при всех s и в семействе $P(z,s)$ реализуется любое вещественное I. Тем самым будет доказана и возможность приведения любого поля из Λ_M^r к полю $P(z,s)$ при некотором s аналитическим либо C^∞-преобразованием.

Пусть $Q(z)\partial/\partial z$ – произвольное поле из типа Λ_M^r. Положим $P(z,s) = Q(z)(1-sQ(z))\partial/\partial z$, $m_1 = \min_{z\in S^1} Q(z)$, $m_2 = \max_{z\in S^1} Q(z)$. Множество значений параметра s – $\mathcal{P}$ зависит от типа поля, а именно: положим $\mathcal{P}_1 =]1/m_1, 1/m_2[$, если тип Λ_M^r содержит хотя бы одну нечетную кратность k_i, $\mathcal{P}_2 =]-\infty, 1/m_2[$, если все k_i четные и имеют знак плюс, $\mathcal{P}_3 =$

$=]1/m_1,+\infty[$, если все k_i четные и входят со знаком минус. Перечисленными возможностями исчерпываются все допустимые типы, причем последние две соответствуют полям из сонаправленных перетоков.

При таком выборе $\mathcal{R}$ особенности $P(x,s)\partial/\partial x$ совпадают с особенностями $Q(x)\partial/\partial x$ при всех s из $\mathcal{R}$, более того, $\partial^j P/\partial x^j(x_i,s) = Q^{(j)}(x_i)$ при всех $i=1,\dots,m$, $j=0,\dots,2k_i-1$, $s\in\mathcal{R}$. Таким образом, $P(x,s)\partial/\partial x$ при всех s из Λ^r_M. Далее, имеем $I_0(s)=I(P(x,s)\partial/\partial x)=$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\oint_{S^1_\varepsilon}\frac{dx}{Q(x)(1-sQ(x))}+\sum_{i=1}^{m}\left(T_i^s(x_i-\varepsilon)-T_i^s(x_i+\varepsilon)\right)\right\}.$$

Поскольку $T_i^s(\cdot)$ ввиду равенств отрезков рядов Тейлора функций $P(x,s)$ и $Q(x)$ до степени $2k_i-1$ включительно от s не зависят, то

$$I_0(s)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\oint_{S^1_\varepsilon}\frac{dx}{Q(x)}+\sum_{i=1}^{m}\left(T_i(x_i-\varepsilon)-T_i(x_i+\varepsilon)\right)\right\}+$$

$$+s\oint\frac{dx}{1-sQ(x)}=I\left(Q(x)\partial/\partial x\right)+s\oint\frac{dx}{1-sQ(x)},$$

$$I_0'(s)=\oint\frac{dx}{1-sQ(x)}+s\oint\frac{Q(x)\,dx}{(1-sQ(x))^2}=\oint\frac{dx}{(1-sQ(x))^2}>0.$$

Таким образом, $I_0(s)$ дифференцируемая, возрастающая на $\mathcal{R}$ функция.

Если $s\in\mathcal{R}_1$, то $I_0(s)\to\pm\infty$ соответственно при $s\to 1/m_1,\ 1/m_2$. В случае $s\in\mathcal{R}_2$ в окрестностях особенностей x_i : $Q(x-x_i)\sim a_i\sin^{2n_i}\times(x-x_i)$ при некоторых $a_i\in\mathbb{R}^+$, $n_i\in\mathbb{N}^+$, следовательно, существует $l\in\mathbb{R}^+$ такое, что $Q(x)\le l\prod_{i=1}^{m}\sin^2(x-x_i)\le l\sin^2(x-x_1)$, $x\in S^1$. Теперь получаем

$$\oint\frac{dx}{1-sQ(x)}\ge\oint\frac{dx}{1-sl\sin^2(x-x_1)}\underset{s\to-\infty}{\sim}\frac{1}{\sqrt{l|s|}}.$$

Таким образом, $I_0(s)\to-\infty$ при $s\to-\infty$, очевидно, $I_0(s)\to+\infty$ при $s\to 1/m_2$.

Аналогично при $s\in\mathcal{R}_3$ получаем, что $I_0(s)\to-\infty$ при $s\to 1/m_1$, $I_0(s)\to+\infty$ при $s\to+\infty$.

Таким образом, $I_0(s)$ пробегает $\mathbb{R}^1$, когда s пробегает $\mathcal{R}$, и в силу монотонности $I_0(s)$ поля $P(x,s_1)\partial/\partial x$, $P(x,s_2)\partial/\partial x$ не эквивалентны в классе $C^M(S^1)$ при различных s_1 и s_2.

Согласно лемме 1, в качестве $Q(x)\partial/\partial x$ может быть выбрано полиномиальное поле. Выбирая наиболее простой полином $Q(x)$, получаем семейство простейших представителей в типе Λ_M^r, которое можно рассматривать как семейство глобальных нормальных форм относительно $C^M(C^\infty, C^A)$ сопряженности в типе Λ_M^r.

Пусть теперь $m=1$, т.е. V имеет единственную особую точку x_1, которая в этом случае является перетоком. Тогда V эквивалентно на $S^1/\{x_1\}$ постоянному полю $1\partial/\partial x$, а в окрестности U точки x_1 приводится к локальной нормальной форме, соответствующей типу особенности точки x_1. Длаее можно повторить рассуждения для случая $m \geq 2$.

Теорема 1 доказана.

Рассмотрим некоторые частные случаи и примеры.

1. Пусть V такое, что при всех $i=1,\dots,m$ $L_i(x)$ не содержит мономов $c/(x-x_i)^n$, где n четно. Для таких полей $m=2P$ и особенности являются чередующимися между собой стоками и источниками.

Тогда

$$\sum_{i=1}^{2P} \left(T_i(x_i - \varepsilon) - T_i(x_i + \varepsilon)\right) = 0,$$

$$I(V) = \lim_{\varepsilon \to 0} \oint_{S^1_\varepsilon} \frac{dx}{v(x)} = vP\oint \frac{dx}{v(x)}.$$

Этому условию удовлетворяют, в частности, все грубые поля (поля с невырожденными особыми точками). Для грубых полей дополнительно $M=1$ и, следовательно, гладкая (C^1) классификация отличается от топологической.

2. Для поля V с единственной особенностью $x_1 = 0 = 2\pi$

$$I(V) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{2\pi-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{dx}{v(x)} + T_1(-\varepsilon) - T_1(\varepsilon) \right\}.$$

Пример 1. Любое поле из $\Lambda_1^r = \{(0,\pi); (+1,-1); (0,0)\}$, согласно теореме 1, эквивалентно в классе C^1 (C^∞, аналитически) полю

$$P(x,s)\partial/\partial x = \sin x\,(1 - s\cdot\sin x)\partial/\partial x, \quad |s| < 1,$$

при некотором $s=s_0$. Поскольку

$$I_0(s) = I(\sin x\,\partial/\partial x) + s\int_{2\pi}^{0} \frac{dx}{1 - s\cdot\sin x} = 2\pi s/\sqrt{1-s^2},$$

то $s_0 = I(V)/\sqrt{4\pi^2+I^2(V)}$. Если $I(V)=0$, то V эквивалентно полю $\sin z\, \partial/\partial z$.

Пример 2. Любое поле из $\Lambda_2^r = \{(0)\div(+2)\div(0)\}$ эквивалентно в классе C^2 (C^∞, аналитически) полю $P(z,s)\partial/\partial z = \sin^2\frac{z}{2}(1-s\sin^2\frac{z}{2})\partial/\partial z$, $s\in]-\infty, 1[$. Если $I(V)=0$, то V эквивалентно $\sin^2(z/2)\partial/\partial z$. Все поля из Λ_2^r эквивалентны в классе C^1.

Тот же метод рассуждений, что и для окружности, может быть применен для классификации аналитических и бесконечногладких полей с конечнократными особенностями на прямой. Некомпактность прямой приводит к тому, что коэффициенты, определяющие отображения $G_i(x)$, не связаны соотношениями цикличности, как на окружности, и могут быть выбраны так, что $G_i^V = G_i^W$; $i=1,\dots,m$ для любых полей V и W из типов $\Lambda_M^{r_1}$, $\Lambda_M^{r_2}$.

Теорема 2. Любых два поля, имеющих поток на прямой и принадлежащих типам $\Lambda_M^{r_1}$, $\Lambda_M^{r_2}$, соответственно эквивалентны аналитически (в классе C^∞).

Если тип Λ_M^r состоит из конечного числа особенностей, то все поля этого типа эквивалентны фиксированному полю, задаваемому рациональной функцией.

Отметим, что по такой же схеме могут быть классифицированы и поля класса $C^n(S^1, \mathbb{R}^1)$, где n достаточно велико по сравнению с M.

1. Белицкий Г.Р. Гладкая классификация одномерных диффеоморфизмов с гиперболическими неподвижными точками // Сиб. мат. журн. - 1986. - 27, № 6. - С. 6-8.
2. Быков Н.А. Гладкая классификация грубых векторных полей на окружности // Теория функций, функцион. анализ и их прил. - 1989.- Вып. 52. - С. 110-113.
3. Белицкий Г.Р. Инварианты векторных полей и уравнений на сфере// Укр. мат. журн. - 1989. - 41, № 3. - С. 296-302.
4. Белицкий Г.Р. Функциональные инварианты диффеоморфизмов гладких многообразий // Докл. АН УССР. - 1985. - № 11. - С. 5-8.
5. Takens F. Normal forms for certain singularities of vector fields // Ann. Inst. Fourtier. - 1973. - 23, N 2.-P.163-165.

УДК 517.958

И.Д.Чуешов

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ АТТРАКТОРА В ЗАДАЧЕ О КОЛЕБАНИЯХ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ

Исследован вопрос о поведении аттрактора в задаче о нелинейных колебаниях упругой пологой оболочки в том случае, когда члены,

ISBN 5-12-002791-1. Динамические системы и комплексный анализ. Киев, 1992

учитывающие инерцию вращения элементов оболочки, становятся пренебрежимо малыми.

Рассмотрим следующую задачу:

$$L_t^{\alpha} u + \Delta^2 u - [u+f, v+\theta] + \rho \frac{\partial u}{\partial x_1} = p(x), \tag{1}$$

$$u\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = u_0(x), \ \dot{u}\Big|_{t=0} = u_1(x), \tag{2}$$

где элемент $v = v(u)$ определяется как решение уравнения

$$\Delta^2 v + [u + 2f, u] = 0, \quad v\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0 . \tag{3}$$

Здесь Ω – гладкая ограниченная область в R^2; $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$; $L_t^{\alpha} u = (1 - \alpha\Delta)\ddot{u} + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2\alpha\Delta)\dot{u}$; $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – положительные, а α, ρ – неотрицательные константы;

$$[u,v] = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}. \tag{4}$$

Функции $f(x), \theta(x), p(x), u_0(x), u_1(x)$ предполагаются заданными, причем $f(x) \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$, $\theta(x) \in H^4(\Omega)$, $p(x) \in L^2(\Omega)$, здесь и далее $H^s(\Omega)$ – соболево пространство порядка s.

Математически последовательное изучение этой задачи было начато в работах [1, 2] и продолжено в [3-7]. В частности, для задачи (1), (2), при $\alpha = 0$ справедлива [6, 7] глобальная теорема существования сильных решений, позволяющая вместе с теоремой единственности Воровича [1] построить в пространстве $H_1 = (H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \times H_0^2(\Omega)$ сильно непрерывную эволюционную группу S_t, действующую по формуле $S_t y_0 = y(t) = (u(t); \dot{u}(t))$, где $u(t)$ – решение задачи (1), (2) с начальными условиями $y_0 = (u_0; u_1)$. При достаточно больших $\varepsilon_1 > 0$ эта группа обладает [6] конечномерным максимальным (глобальным) (H_1, H_{1w})-аттрактором M. Напомним [8], что (X, X_w)-аттрактором группы S_t, действующей в гильбертовом пространстве X, называется ограниченное слабо замкнутое в X множество M такое, что: а) $S_t M = M$ при $t \geq 0$; б) для любой слабой окрестности U множества M и любого ограниченного в X множества B найдется такое $t_0 = t_0(U; B)$, что $S_t B \subset U$ для всех $t \geq t_0$.

Что касается случая $\alpha > 0$, то с помощью теоремы существования и единственности слабых решений [2, 9] в работах [3, 4] была построена сильно непрерывная эволюционная группа S_t^α, действующая в пространстве $F = H_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ и обладающая максимальным аттрактором M_α^1 конечной размерности [4]. Группа S_t^α отображает пространство $F_1 = (H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \times H_0^2(\Omega)$ в себя и является в F_1 сильно непрерывной (соответствующее рассуждение при $f=0, \rho=0$ см. в [5]). При этом использование методов, применявшихся в [6, 7], позволяет при любых $\varepsilon_2 > 0, \varepsilon_1 \geq 0$ доказать существование (F_1, F_{1W}) - аттрактора M_α (см. также приведенное ниже замечание 1). Отметим, что доказательство конечномерности аттракторов в [4, 6] опирается на теорему Ладыженской о размерности инвариантных множеств [10].

Цель данной статьи - доказательство близости аттракторов M и M_α при достаточно малых $\alpha > 0$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема. Пусть $\varepsilon_2 = \beta\varepsilon_1, \beta > 0$. Тогда существует $\bar{\varepsilon} > 0$ такое, что при $\varepsilon_1 \geq \bar{\varepsilon}$

$$\lim_{\alpha \to 0} \sup \{ dist_H (y, M) : y \in M_\alpha \} = 0, \qquad (5)$$

где $dist_H(y, M)$ - расстояние в пространстве $H = H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ от элемента $y \in M_\alpha$ до (H_1, H_{1W})-аттрактора M.

В идейном плане доказательство этой теоремы примыкает к рассмотрениям, проведенным в [8] при изучении свойств аттрактора сингулярно возмущенного нелинейного волнового уравнения.

Пусть

$$E_0^\alpha (u_0, u_1) = \| u_1 \|^2 + \alpha \| \nabla u_1 \|^2 + \| \Delta u_0 \|^2 + \frac{1}{2} \| \Delta v(u_0) \|^2,$$

где $v = v(u_0)$ определяется по u_0 согласно (3), $\| \cdot \|$ - норма в пространстве $L^2(\Omega)$.

Лемма 1. Пусть $\varepsilon_2 > 0$ и предположим, что $u_0 \in H_0^2(\Omega) u_1 \in H_0^1(\Omega)$, а $u(t)$ - слабое решение задачи (1), (2) при $\alpha > 0$. Тогда

$$E_0^\alpha (u(t), \dot{u}(t)) \leq A E_0^\alpha (u_0, u_1) e^{-\gamma t} + B,$$

где $A, B, \gamma > 0$. При этом, если $0 < \alpha \leq 1, \varepsilon_2 = \beta\varepsilon_1, \varepsilon_1 \geq \varepsilon_0$, где ε_0 и β - положительные числа, то константа $B > 0$ не зависит от α и ε_1.

Доказательство леммы представляет собой незначительную модификацию рассуждений, приведенных в [4]. Оно опирается на энергетическое равенство для системы (1), (2) и оценку

$$\frac{d}{dt} \left[((1 - \alpha\Delta)\dot{u}, u) + \frac{1}{2}((\varepsilon_1 - \alpha\varepsilon_2\Delta)u, u) \right] \leq$$

$$\leq \|\dot{u}\|^2 + \alpha \|\nabla \dot{u}\|^2 - \frac{3}{4}\left(\|\Delta u\|^2 + \|\Delta v\|^2\right) + C,$$

вытекающую из (1) и [4].

Из леммы 1 вытекает, что аттрактор M_α^1 группы S_t^α в пространстве $F = H_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ (его существование доказано в [4]) принадлежит множеству

$$N_R = \left\{ y = (u_0; u_1) : \|u_1\|^2 + \alpha \|\nabla u_1\|^2 + \|\Delta u_0\|^2 \leq R^2 \right\},$$

где $R > 0$ не зависит от α и ε_1 при условии, что

$$\alpha \in (0,1],\ \varepsilon_2 = \beta\varepsilon_1,\ \varepsilon_1 \geq \varepsilon_0,\ \text{где}\quad \beta, \varepsilon_0 > 0.$$

Как и при доказательстве существования (H_1, H_{1w})- аттрактора группы S_t [6, 7], понадобится следующее утверждение.

<u>Лемма 2.</u> Пусть $v = v(u)$ находится из (3), а элемент $\tilde{v} = v(u, w)$ определяется как решение задачи

$$\Delta^2 \tilde{v} + 2[u + f, w] = 0, \quad \tilde{v}\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0. \qquad (6)$$

Тогда для $u, w \in H_0^2(\Omega)$ справедливы оценки

$$|([w, w], v(u, w)| \leq C(1 + \|\Delta u\|)\|w\| \cdot \|\Delta w\|^2,$$

$$|([w, w], v(u) + \theta)| \leq C(1 + \|\Delta u\|^2)\|w\|^{1/2}\|\Delta w\|^{3/2}.$$

Доказательство леммы опирается на некоторые интерполяционные неравенства [11], свойства симметрии скобки (4) [9] и соотношения

$$\|[u, v]\|_{-l+m\theta} \leq C \|u\|_{2-(1-m)\theta} \|v\|_{3-l+\theta}, \qquad (7)$$

где $l = 1, 2$, $m = 0, 1$, $0 < \theta < 1$, $\|\cdot\|_s$ – норма в пространстве $H^s(\Omega)$ (оценки (7) при $m = 1$ доказаны в [4], при $m = 0$ их доказательство аналогично).

<u>Лемма 3</u>. Пусть $u_0 \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$, $u_1 \in H_0^2(\Omega)$, а $u(t)$ – решение задачи (1), (2) при $\alpha > 0$ такое, что $y(t) = (u(t); \dot{u}(t))$ лежит в N_R для всех $t \geq 0$. Предположим также, что $\varepsilon_2 = \beta\varepsilon_1$, где $\beta > 0$. Тогда существует $\bar{\varepsilon} > 0$ такое, что при условии $0 < \alpha \leq 1$, $\varepsilon_1 \geq \bar{\varepsilon}$ справедливо неравенство

$$\|\ddot{u}(t)\|^2 + \alpha \|\nabla \ddot{u}(t)\|^2 + \|\Delta \dot{u}(t)\|^2 \le$$
$$\le A_1\left(\|\ddot{u}(0)\|^2 + \alpha \|\nabla \ddot{u}(0)\|^2 + \|\Delta \dot{u}(0)\|^2\right) e^{-\gamma_1 t} + B_1 ,$$

где $A_1, \gamma_1 > 0$, а константа $B_1 > 0$ не зависит от $\alpha > 0$.

Доказательство. Как показано в [6], функция $w(t) = \dot{u}(t)$ удовлетворяет уравнению, получающемуся формальным дифференцированием (1) по t. При этом, как и в [6], легко проверить, что

$$\frac{d}{dt} Q\left(w(t), \dot{w}(t)\right) + \varepsilon_1 \|\dot{w}\|^2 + \alpha \varepsilon_2 \|\nabla \dot{w}\|^2 = -\Psi\left(w(t), u(t)\right),$$

где
$$Q(w, \dot{w}) = \frac{1}{2}\left[\|\dot{w}\|^2 + \alpha \|\nabla \dot{w}\|^2 + \|\Delta w\|^2 + \frac{1}{2}\|\Delta \tilde{v}\|^2 - \left([w,w], v + \theta\right)\right],$$

$$\Psi(w, u) = \frac{3}{2}\left([w, w], \tilde{v}\right) + \rho\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}, \dot{w}\right),$$

величины v и $\tilde{v} = v(u, w)$ находятся из (3) и (6) соответственно.

Рассматривая теперь при достаточно малых $\nu > 0$ функционал

$$W(w, \dot{w}) = Q(w, \dot{w}) + \nu\left[\left((1 - \alpha\Delta)\dot{w}, w\right) + \frac{1}{2}\left((\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \alpha \Delta) w, w\right)\right],$$

используя лемму 2 и тот факт, что $y(t) = (u(t); \dot{u}(t)) \in N_R$, получаем утверждение леммы 3.

Замечание 1. Из оценок (7) для $u, w \in H_0^2(\Omega)$ могут быть также получены неравенства

$$\left|\left([w, w],\ v(u, w)\right)\right| \le C\left(1 + \|\Delta u\|\right) \|w\|_1^2 \|\Delta w\|,$$

$$\left|\left([w, w],\ v(u) + \theta\right)\right| \le C\left(1 + \|\Delta u\|^2\right) \|w\|_1 \|\Delta w\|.$$

Опираясь на эти оценки, удается извлечь утверждение леммы 3 для любых $\varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon_1 > 0$ (константа B_1 при этом оказывается зависящей от ε_2, α). Это обстоятельство, а также слабая замкнутость группы S_t^α дают возможность воспользоваться результатами из [8] и гарантировать при всех $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ существование максимального (F_1, F_{1W})-аттрактора M_α.

Оценивая с помощью (1) величину $\|\Delta^2 u_\alpha(t)\|_{-1}$, из лемм 1, 3 получаем, что любая траектория $y_\alpha(t)=(u_\alpha(t);\dot{u}_\alpha(t))$ группы S_t^α, лежащая в аттракторе M_α, обладает свойством

$$\|\ddot{u}_\alpha(t)\|^2+\alpha\|\nabla\ddot{u}_\alpha(t)\|^2+\|\Delta\dot{u}_\alpha(t)\|^2+\|u_\alpha(t)\|_3\leq R_1^2, \tag{8}$$

где R_1 от α не зависит, $0<\alpha\leq 1$, $\varepsilon_2=\beta\varepsilon_1$, $\varepsilon_1\geq\bar{\varepsilon}>0$.

Докажем (5). Так как аттрактор M_α слабо замкнут, то существует элемент $y_{0\alpha}=(u_{0\alpha};u_{1\alpha})\in M_\alpha$ такой, что

$$d(y_{0\alpha})=dist_H(y_{0\alpha},M)=sup\left\{dist_H(y,M):y\in M_\alpha\right\}.$$

Пусть $y_\alpha(t)=(u_\alpha(t);\dot{u}_\alpha(t))$ – траектория системы (1), (2), лежащая в M_α и такая, что $y_\alpha(0)=y_{0\alpha}$. Из (8) вытекает, что найдутся последовательность $\{y_{\alpha_n}(t)\}$ и элемент $y(t)=(u(t);\dot{u}(t))\in L^\infty(-\infty,\infty;F_1)$ такие, что для любого отрезка $[a,b]$ $y_{\alpha_n}(t)$ *– слабо в $L^\infty(a,b;F_1)$ сходится к $y(t)$. При этом $\ddot{u}_{\alpha_n}(t)$ стремится к $\ddot{u}(t)$ *– слабо в $L^\infty(a,b;L^2(\Omega))$. Кроме того, теорема Дубинского позволяет утверждать, что

$$\lim_{n\to\infty}\max_{[a,b]}\|y_{\alpha_n}(t)-y(t)\|_H=0. \tag{9}$$

Эти свойства последовательности $\{y_{\alpha_n}(t)\}$ дают возможность совершить в (1) предельный переход и показать, что $u(t)$ является сильным (определение см. в [6]) решением задачи (1), (2) при $\alpha=0$. Из (1) и (8) вытекает также, что вектор-функция $y(t)=(u(t);\dot{u}(t))$ лежит в $L^\infty(-\infty,\infty;H_1)$. Следовательно, $y(t)\in M$ при всех t. Поэтому из (9) получаем, что $d(y_{0\alpha_n})\to 0$ при $n\to\infty$. Отсюда вытекает (5).

Отметим, что рассуждения, подобные представленным выше, позволяют также показать, что $M_\alpha\to M_{\alpha_0}$ в пространстве $F=H_0^2(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ при $\alpha\to\alpha_0\neq 0$.

1. Ворович И.И. О некоторых прямых методах в нелинейной теории пологих оболочек // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1957. – 21. – С.747-784.
2. Морозов Н.Ф. Избранные двумерные задачи теории упругости. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. – 184 с.
3. Чуешов И.Д. Максимальный аттрактор в задаче о нелинейных колебаниях упругой пологой оболочки // Успехи мат. наук. – 1986. – 41, № 5. – С. 217-218.
4. Чуешов И.Д. Конечномерность аттрактора в некоторых задачах нелинейной теории оболочек // Мат. сб. – 1987. – 133, № 4. – С.419-428.
5. Чуешов И.Д. Структура максимального аттрактора модифицированной системы уравнений Кармана // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1987. – Вып. 47. – С. 99-104.

6. Чуешов И.Д. Сильные решения и аттрактор системы уравнений Кармана // Докл. АН УССР. Сер. А. - 1988. - № 5. - С. 22-25.
7. Чуешов И.Д. Теорема существования сильных решений и аттрактор системы Кармана // Успехи мат. наук. - 1988. - 43, № 4. - С. 178.
8. Бабин А.В., Вишик М.И. Аттракторы эволюционных уравнений. - М.: Наука, 1989. - 284 с.
9. Лионс Ж. - Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. - М.: Мир, 1972. - 588 с.
10. Ладыженская О.А. О конечномерности ограниченных инвариантных множеств для системы Навье-Стокса и других диссипативных систем // Зап. науч. семинара ЛОМИ. - 1982. - 115. - С. 137-155.
11. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. - М.: Мир, 1971. - 372 с.

УДК 517.946

И.Ю.Чудинович

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА АНИЗОТРОПНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С ПАРАМЕТРОМ

Получены равномерные по комплексному параметру ρ энергетические оценки решений краевых задач для уравнения $\rho^2 u + Au = q$, где A - оператор теории упругости. Актуальность этих оценок связана с их использованием при исследовании гладкости решений краевых задач динамической теории упругости.

Пусть в R^n задан матричный дифференциальный оператор L_ρ, действующий на вектор-функции $u(x) = (u_1(x), \ldots, u_n(x))$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ по формуле

$$(L_\rho u)_i = \rho^2 u_i - \partial_j a_{ijkh} \partial_k u_h , \qquad (1)$$

где $\partial_j = \partial/\partial x_j$, $\rho = \sigma + i\tau$ - комплексный параметр, изменяющийся в правой полуплоскости. Поясним использованные в (1) обозначения. Здесь и далее применяем правило суммирования по повторяющимся латинским индексам (кроме индекса n) от 1 до n, по греческим - от 1 до $n-1$, по повторяющемуся индексу n не суммируем. Равенство, содержащее свободные латинские индексы (кроме n), означает его справедливость при всех значениях этих индексов из множества $\{1, \ldots, n\}$. Через a_{ijkh} $(i, j, k, h = 1, \ldots, n)$ обозначены операторы умножения на соответствующие компоненты $a_{ijkh}(x)$ вещественного тензора упругих постоянных анизотропной среды. Предположим справедливость следующих соотношений [1, 2]:

ISBN 5-12-002791-1. Динамические системы и комплексный анализ. Киев, 1992

$$a_{ijkh}(x) = a_{khij}(x) = a_{jikh}(x) \quad (x \in R^n), \tag{2}$$

$$a_{ijkh}(x)\eta_{ij}\eta_{kh} \geq \alpha\eta_{ij}\eta_{ij} \quad \forall \eta_{ij} \in R, \ \eta_{ij} = \eta_{ji},$$

$$a_{ijkh}(x) = a_{ijkh,0} + d_{ijkh}(x),$$

где постоянная $\alpha > 0$, $a_{ijkh,0}$ $(i,j,h = 1,\dots,n)$ постоянны, $d_{ijkh} \in C_0^\infty(R^n)$. Уравнение (1) можно записать в виде

$$(L_\rho u)_i = \rho^2 u_i - \partial_j a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(u),$$

где

$$\varepsilon_{kh}(u) = \frac{1}{2}\left(\partial_k u_h + \partial_h u_k\right)$$

– тензор деформаций среды, связанный с тензором напряжений $\sigma_{ij}(u)$ $(i,j = 1,\dots,n)$ законом Гука

$$\sigma_{ij}(u) = a_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u).$$

Пусть Γ – гладкая класса C^∞ замкнутая поверхность, разделяющая R^n на области $\mathcal{R}^+$ (внутреннюю) и $\mathcal{R}^-$ (внешнюю), локально допускающая выпрямление с помощью невырожденных преобразований координат класса C^∞. Обозначим через $H_l(\mathcal{R}^\pm)$ $(l = 0,1,\dots)$ пространства Соболева n-компонентных вектор-функций со скалярным произведением и нормой его элементов

$$(u,v)_{l,\mathcal{R}^\pm} = \sum_{|k|=0}^{l} (\partial_k u_i, \partial_k u_i)_{\mathcal{R}^\pm}, \quad \|u\|^2_{l,\mathcal{R}^\pm} = (u,u)_{l,\mathcal{R}^\pm},$$

где k – n-компонентный мультииндекс; $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{R}^\pm}$ – скалярное произведение в $L^2(\mathcal{R}^\pm)$. Далее не различаем обозначения одноименных норм скалярных и векторных функций, поскольку это не может привести к недоразумениям. Через $H_{l,\rho}(\mathcal{R}^\pm)$ $(l = 0,1,\dots;\ Re\,\rho = \sigma > 0)$ обозначим пространства с параметром [3], совпадающие при всех ρ как множества с $H_l(\mathcal{R}^\pm)$, нормы элементов которых определяются формулами

$$\|u\|^2_{l,\rho;\mathcal{R}^\pm} = \|u\|^2_{l,\mathcal{R}^\pm} + |\rho|^{2l}\|u\|^2_{0,\mathcal{R}^\pm}.$$

Построим аналогичные пространства $H_{s,\rho}(\Gamma)$ вектор-функций, заданных на Γ, совпадающие как множества со стандартными пространствами Соболева $H_s(\Gamma)$. При $s \geq 0$ нормы элементов $H_{s,\rho}(\Gamma)$ определим формулой

$$\|u\|^2_{s,\rho} = \|u\|^2_s + |\rho|^{2s}\|u\|'^2_0 ,$$

где $\|u\|'_s$ – нормы элементов u в пространствах $H_s(\Gamma)$. При $s<0$ $H_{s,\rho}(\Gamma)$ двойственны к $H_{-s,\rho}(\Gamma)$ относительно формы $\langle u,v\rangle_0=\langle u_i,v_i\rangle$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярное произведение в $L^2(\Gamma)$.

Пусть $\nu(x)\ (x\in\Gamma)$ – орт нормали к Γ, внешней относительно $\mathcal{R}^+$. Введем вектор граничных усилий в среде, вызванных смещением u, формулой

$$(T_\nu u)_i(x) = \sigma_{ij}(u)\nu_j(x) = a_{ijkh}(x)\partial_k u_h(x)\nu_j(x) .$$

Положив при $u\in H_{l+1}(\mathcal{R}^{\pm})$, $L_\rho u = q\in H_{l-1}(\mathcal{R}^{\pm})$, сформулируем цель работы. Она состоит в получении равномерных по параметру ρ оценок для u в пространствах $H_{l,\rho}(\mathcal{R}^{\pm})$, u и $T_\nu u$ в пространствах $H_{l-1/2,\rho}(\Gamma)$, $H_{l-3/2,\rho}(\Gamma)$ соответственно через нормы q и граничных данных соответствующих краевых задач. Эти оценки являются важнейшим звеном доказательств разрешимости смешанных динамических задач теории упругости, нестационарных граничных уравнений, возникающих при их решении запаздывающими потенциалами. Результаты, относящиеся к скалярному случаю, изложены в [4, 5], где приведена обширная библиография по этим вопросам. Случай систем, возникающих после применения преобразования Лапласа к строго гиперболическим по И.Г.Петровскому систем дифференциальных уравнений, рассмотрен в [6]. Отметим, что наша система не входит в этот класс. В [7] результаты [6] обобщены на случай систем первого порядка. Решение поставленной задачи начнем с рассмотрения случая $\mathcal{R}^+ = R^n_+ = \{x\in R^n, x_n>0\}$, опуская при этом индекс R^n_+ в обозначениях соответствующих соболевых норм.

<u>Теорема 1</u>. Пусть $u\in H_{l+1}(R^n_+)\ (l>1)$. Существуют положительные постоянные c_l, σ_l такие, что при $Re\,\rho=\sigma\geq\sigma_l$ справедливы неравенства

$$\|T_\nu u\|'^2_{l-\frac{3}{2},\rho} \leq c_l\left(\|u\|'^2_{l-\frac{1}{2},\rho} + |\rho|^{-1}\|q\|^2_{l-1,\rho}\right); \qquad (3)$$

$$\|u\|^2_{l,\rho} \leq c_l\sigma^{-1}\left(|\rho|\,\|u\|'^2_{l-\frac{1}{2},\rho} + \|q\|^2_{l-1,\rho}\right). \qquad (4)$$

<u>Доказательство</u>. Пусть $x'=(x_1,\dots,x_{n-1})$, так что $x=(x',x_n)$, $\xi'\in R^{n-1}$ – вектор двойственных к x' переменных. Введем при $\alpha\in R$

псевдодифференциальный оператор Λ_ρ^α, действующий по переменной x', символ которого равен $(|\xi'|+|\rho|)^\alpha$ [8]. Обозначим

$$v=\Lambda_\rho^{1-\frac{3}{2}}u=\left(\Lambda_\rho^{1-\frac{3}{2}}u_1,\dots,\Lambda_\rho^{1-\frac{3}{2}}u_n\right)\in H_{\frac{5}{2}}(R_+^n);$$

$$g=\Lambda_\rho^{1-\frac{3}{2}}q=\left(\Lambda_\rho^{1-\frac{3}{2}}q_1,\dots,\Lambda_\rho^{1-\frac{3}{2}}q_n\right)\in H_{\frac{1}{2}}(R_+^n).$$

Очевидно, v является решением уравнений

$$\rho^2 v_i-\partial_j b_{ijkh}\partial_k v_h=g_i,\quad b_{ijkh}=\Lambda_\rho^{1-\frac{3}{2}}a_{ijkh}\Lambda_\rho^{-1+\frac{3}{2}}. \tag{5}$$

Заметим, что

$$b_{ijkh}^{(s)}=\left[\partial_s,b_{ijkh}\right]=\Lambda_\rho^{1-\frac{3}{2}}a_{ijkh,s}\Lambda_\rho^{-1+\frac{3}{2}},$$

где через $[A,B]$ обозначен коммутатор операторов A,B, $a_{ijkh,s}(x)=$ $=\partial_s a_{ijkh}(x)=\partial_s d_{ijkh}(x)\in C_0^\infty(R^n)$. Положим $b_{ijkh}=a_{ijkh}+e_{ijkh}$.

$$e_{ijkh}=\Lambda_\rho^{1-\frac{3}{2}}\left[a_{ijkh},\Lambda_\rho^{-1+\frac{3}{2}}\right].$$

Обозначив через $T_\mu v$ вектор с компонентами $(T_\mu v)_i=-b_{inkh}\partial_k v_h$, умножим скалярно (5) на v_i и просуммируем по $i=1,\dots,n$. После интегрирования по частям получим

$$\rho^2\|v\|_0^2+\left(b_{ijkh}\partial_k v_h,\partial_j v_i\right)=(g,v)_0+\langle T_\mu v,v\rangle_0$$

или

$$\rho^2\|v\|_0^2+\left(a_{ijkh}\partial_k v_h,\partial_j v_i\right)=(g,v)_0+\langle T_\mu v,v\rangle_0-\left(e_{ijkh}\partial_k v_h,\partial_j v_i\right). \tag{6}$$

Отметим, что выражение

$$E(v)=\left(a_{ijkh}\partial_k v_h,\partial_j v_i\right)=\left(\sigma_{ij}(v),\varepsilon_{ij}(v)\right),$$

связанное с потенциальной энергией деформации среды, в силу неравенства Корна [1, 2] допускает оценку

$$E(v)\geq c_1\|v\|_1^2-c_0\|v\|_0^2 \tag{7}$$

с положительными постоянными c_0, c_1. Отделим в (6) вещественную и мнимую части:

$$(\sigma^2-\tau^2)\|v\|_0^2+(a_{ijkh}\partial_k v_h,\partial_j v_i)=Re\Big\{(g,v)_0+\langle T_\mu v,v\rangle_0-(e_{ijkh}\partial_k v_h,\partial_j v_i)\Big\};$$

$$2\sigma\tau\|v\|_0^2=Im\Big\{(g,v)_0+\langle T_\mu v,v\rangle_0-(e_{ijkh}\partial_k v_h,\partial_j v_i)\Big\}.$$

Отсюда следует, что

$$|\rho|^2\|v\|_0^2+(a_{ijkh}\partial_k v_h,\partial_j v_i)=\sigma^{-1}Re\Big\{\bar\rho\big[(g,v)_0+\langle T_\mu v,v\rangle_0-(e_{ijkh}\partial_k v_h,\partial_j v_i)\big]\Big\}.$$

Оценка (7) влечет неравенство

$$\|v\|_{1,\rho}^2\leq c\sigma^{-1}Re\Big\{\bar\rho\big[(g,v)_0+\langle T_\mu v,v\rangle_0-(e_{ijkh}\partial_k v_h,\partial_j v_i)\big]\Big\} \qquad (8)$$

с положительной постоянной c, справедливое при $\sigma>\sigma_0'>0$. Оценим последнее слагаемое в правой части (8). Обозначим временно $e_{ijkh}=e$, $d_{ijkh}=d$, $\partial_k v_h=w$. Получим

$$ew=\Lambda_\rho^{1-\frac{3}{2}}\big[d,\Lambda_\rho^{-1+\frac{3}{2}}\big]w.$$

Перейдем в этом равенстве к преобразованиям Фурье по переменной x':

$$(e\widetilde w)(\xi',x_n)=\int_{R^{n-1}}\widetilde d(\xi'-\eta',x_n)\frac{(|\xi'|+|\rho|)^{1-\frac{3}{2}}-(|\eta'|+|\rho|)^{1-\frac{3}{2}}}{(|\eta'|+|\rho|)^{1-\frac{3}{2}}}\widetilde w(\eta',x_n)\,d\eta'.$$

Условимся здесь и далее не различать постоянные, возникающие в разных оценках, обозначая их всегда буквой c:

$$|(e\widetilde w)(\xi',x_n)|\leq c\sum_{s=1}^{2l-3}|\rho|^{2l-3-s}\int_{R^{n-1}}|\widetilde d(\xi'-\eta',x_n)|\frac{\big||\xi'|^s-|\eta'|^s\big||\widetilde w(\eta',x_n)|}{(|\eta'|+|\rho|)^{2l-3}}d\eta'\leq$$

$$\leq c\sum_{s=1}^{2l-3}|\rho|^{2l-3-s}\int_{R^{n-1}}|\widetilde d(\xi'-\eta',x_n)|\frac{|\xi'-\eta'||Q_{s-1}(|\xi'|,|\eta'|)||\widetilde w(\eta',x_n)|}{(|\eta'|+|\rho|)^{2l-3}}d\eta',$$

где Q_{s-1} – однородный многочлен степени $s-1$. Функция $\widetilde d(\xi',x_n)$ при любом $N\in R$ допускает оценку

$$|\tilde{d}(\xi', x_n)| \leq c_N(x_n)(1+|\xi'|)^{-(N+2l-3)}$$

с ограниченной, финитной $c_N(x_n)$. Отсюда следует, что

$$|(e\tilde{w})(\xi', x_n)| \leq c\int_{R^{n-1}} c_N(x_n)|\tilde{w}(\eta', x_n)|(1+|\xi'-\eta'|)^{-N}(|\eta'|+|\rho|)^{-1}d\eta';$$

$$\|ew\|_0^2 \leq c\int_0^\infty dx_n \int_{R^{n-1}} d\xi' \left\{\int_{R^{n-1}} c_N(x_n)|\tilde{w}(\eta', x_n)|(1+|\xi'-\eta'|)^{-N}(|\eta'|+|\rho|)^{-1}d\eta'\right\}^2 \leq$$

$$\leq c\int_0^\infty dx_n \int_{R^{n-1}} d\xi'(|\xi'|+|\rho|)^{-2}|\tilde{w}(\xi', x_n)|^2 = c\|\Lambda_\rho^{-1}w\|_0^2 .$$

Итак,

$$\|e\partial_k v_h\|_0 \leq c\|v_h\|_0 \qquad (k=1,\dots,n-1);$$

$$\|e\partial_n v_h\|_0 \leq c|\rho|^{-1}\cdot\|v_h\|_1, \quad \|ev_h\|_0 \leq c|\rho|^{-1}\cdot\|v_h\|_0 \tag{9}$$

и

$$|(e_{ijkh}\partial_k v_h, \partial_j v_i)| \leq c|\rho|^{-1}\|v\|_1^2 .$$

Возвращаясь к (8), получаем

$$\|v\|_{1,\rho}^2 \leq c\sigma^{-1}\left\{\|g\|_0\|v\|_{1,\rho} + |\rho||\langle T_\mu v, v\rangle_0| + \|v\|_{1,\rho}^2\right\},$$

откуда при $\sigma > \sigma_0'' > 0$ получаем неравенство

$$\|v\|_{1,\rho}^2 \leq c\sigma^{-1}\left\{\|g\|_0^2 + |\rho|\,|\langle T_\mu v, v\rangle_0|\right\}. \tag{10}$$

Перейдем к доказательству неравенства (3)

$$\|T_\mu v\|_0^2 = \langle b_{inkh}\partial_k v_h, b_{injl}\partial_j v_l\rangle \leq c\left(\|v\|_{1,\rho}'^2 + \langle\partial_n v_i, \partial_n v_i\rangle\right).$$

В силу (2)

$$\langle\partial_n v_i, \partial_n v_i\rangle \leq c\langle a_{inkn}\partial_n v_i, \partial_n v_k\rangle .$$

Далее,

$$\langle a_{inkn}\partial_n v_i, \partial_n v_k\rangle = -(\partial_n a_{inkn}\partial_n v_i, \partial_n v_k) - (a_{inkn}\partial_n v_i, \partial_n^2 v_k) =$$

$$= -2\,\mathrm{Re}\left(\partial_n a_{inkn}\partial_n v_i,\ \partial_n v_k\right) + R(v),$$

где под $R(v)$ будем всегда понимать группу слагаемых, допускающую оценку

$$|R(v)| \leq c\, \|v\|^2_{1,\rho}\ .$$

Отметим, что

$$\partial_n b_{inkn}\partial_n v_i = \partial_n a_{inkn}\partial_n v_i + \partial_n\left[\Lambda_\rho^{1-\frac{3}{2}},\ a_{inkn}\right]\partial_n u_i\ .$$

Отсюда

$$\partial_n b_{inkn}\partial_n v_i = \partial_n a_{inkn}\partial_n v_i + \left[\Lambda_\rho^{1-\frac{3}{2}}, a_{inkn,n}\right]\partial_n u_i + \left[\Lambda_\rho^{1-\frac{3}{2}}, a_{inkn}\right]\partial_n^2 u_i\ .$$

Выразив $\partial_n^2 u_i\ (i = 1,\dots,n)$ с помощью уравнений

$$\rho^2 u_i - \partial_j a_{ijkh}\partial_k u_h = q_i$$

через $\rho^2 u_j, q_j$ и $\partial_j\partial_\alpha u_s\ (\alpha = 1,\dots,n-1)$ и повторив оценки, приведшие к (9), получим

$$\left\|\left[\Lambda_\rho^{1-\frac{3}{2}}, a_{inkn,n}\right]\partial_n u_i\right\|_0 + \left\|\left[\Lambda_\rho^{1-\frac{3}{2}}, a_{inkn}\right]\partial_n^2 u_i\right\|_0 \leq c\left(\|v\|_{1,\rho} + \|g\|_0\right).$$

Итак,

$$\|T_\mu v\|_0^{\prime 2} \leq c\left\{\|v\|^{\prime 2}_{1,\rho} - 2\,\mathrm{Re}\left(\partial_n b_{inkn}\partial_n v_i, \partial_n v_k\right) + R(v) + \|g\|_0^2\right\}.$$

В силу (5)

$$\partial_n b_{inkn}\partial_n v_i = \rho^2 v_k - g_k - \partial_\alpha b_{k\alpha\beta i}\partial_\beta v_i - \partial_\alpha b_{k\alpha ni}\partial_n v_i - \partial_n b_{kn\alpha i}\partial_\alpha v_i\ ,$$

откуда

$$-2\,\mathrm{Re}\left(\partial_n b_{inkn}\partial_n v_i, \partial_n v_k\right) = -2\,\mathrm{Re}\left(\rho^2 v_k - g_k - \partial_\alpha a_{k\alpha\beta i}\partial_\beta v_i - \right.$$

$$\left. - \partial_\alpha\left[a_{k\alpha ni} + a_{kn\alpha i}\right]\partial_n v_i, \partial_n v_k\right) + R(v) = 2(\tau^2 - \sigma^2)\,\mathrm{Re}\left(v_k, \partial_n v_k\right) +$$

$$+ 2\,\mathrm{Re}\left(g_k, \partial_n v_k\right) - 2\,\mathrm{Re}\left(a_{k\alpha\beta i}\partial_\beta v_i,\ \partial_n\partial_\alpha v_k\right) + R(v)\ .$$

С помощью интегрирования по частям получаем равенства

$$-2\,\mathrm{Re}\left(v_k,\ \partial_n v_k\right) = \|v\|_0^{\prime 2}\ ;$$

$$-2\,\mathrm{Re}\left(a_{k\alpha\beta i}\partial_\beta v_i,\ \partial_n\partial_\alpha v_k\right)=\left\langle a_{k\alpha\beta i}\partial_\beta v_i,\ \partial_\alpha v_k\right\rangle+R(v)\,.$$

Отсюда следует оценка

$$\|T_\mu v\|_0^{2}\le c\left\{\|v\|'^{2}_{1,\rho}+\|g\|_0^2+\|v\|^2_{1,\rho}\right\}.$$

Из (10) следует, что

$$\|T_\mu v\|_0'^{2}\le c\left\{\|v\|'^{2}_{1,\rho}+\|g\|_0^2+\|T_\mu v\|_0'\,\|v\|'_{1,\rho}\right\}$$

или

$$\|T_\mu v\|_0'^{2}\le c\left\{\|v\|'^{2}_{1,\rho}+\|g\|_0^2\right\}.$$

Возвращаясь к вектор-функциям $u, T_\nu u$, при $l\ge 1$ $\sigma\ge\sigma_l>0$ получаем

$$\|T_\nu u\|'^{2}_{l-\frac{3}{2},\rho}\le c_l\left\{\|u\|'^{2}_{l-\frac{1}{2},\rho}+|\rho|^{-1}\|q\|^2_{l-1,\rho}\right\}. \tag{11}$$

Доказательство (4) проводится по индукции. Рассуждая так же, как при выводе (10), получаем неравенство

$$\|u\|^2_{1,\rho}\le c\sigma^{-1}\left\{\|q\|_0^2+|\rho|\,|\langle T_\nu u,u\rangle_0|\right\}. \tag{12}$$

Оценка (3) дает

$$\|u\|^2_{1,\rho}\le c_1\sigma^{-1}\left\{|\rho|\,\|u\|'^{2}_{\frac{1}{2},\rho}+\|q\|_0^2\right\}.$$

Предположим, что (4) справедливо для номеров, не превосходящих l. Пусть $u\in H_{l+2}(R^n_+)$. Обозначим $\partial_k u=w_k$,

$$(L_\rho w_k)_i=\partial_k q+\partial_j a_{ijsh,k}\partial_s u_h\,.$$

Поэтому при $k=1,\dots,n-1$, $\sigma\ge\sigma_l$

$$\|w_k\|^2_{l,\rho}\le c_l\sigma^{-1}\left\{|\rho|\,\|w_k\|'^{2}_{l-\frac{1}{2},\rho}+\|\partial_k q\|^2_{l-1,\rho}+\|u\|^2_{l+1,\rho}\right\}\le$$

$$\le c_l\sigma^{-1}\left\{|\rho|\,\|u\|'^{2}_{l+\frac{1}{2},\rho}+\|q\|^2_{l,\rho}+\|u\|^2_{l+1,\rho}\right\}.$$

При $k=n$

$$\|w_n\|^2_{l,\rho}\le c_l\sigma^{-1}\left\{|\rho|\,\|\partial_n u\|'^{2}_{l-\frac{1}{2},\rho}+\|q\|^2_{l,\rho}+\|u\|^2_{l+1,\rho}\right\}.$$

Однако из равенства

$$a_{inhn}\partial_n u_h = -(T_\nu u)_i - a_{inh\alpha}\partial_\alpha u_h$$

и (3) следует, что

$$\|w_n\|^2_{l,\rho} \leq c_l \sigma^{-1}\left\{|\rho|\|u\|'^2_{l+\frac{1}{2},\rho} + \|q\|^2_{l,\rho} + \|u\|^2_{l+1,\rho}\right\}.$$

Заметив, что

$$\|u\|^2_{l+1,\rho} \leq c\left\{\sum_{k=1}^{n}\|w_k\|^2_{l,\rho} + |\rho|^2\|u\|^2_{l,\rho}\right\},$$

при $\sigma \geq \sigma_{l+1} > 0$ получим (4). Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $u \in H_{l+1}(R^n_+)$. Существуют положительные постоянные c_l, σ_l такие, что при $\sigma \geq \sigma_l$ справедливы неравенства

$$\|u\|'^2_{l-\frac{1}{2},\rho} \leq c_l \sigma^{-1}\left\{|\rho|^2\|T_\nu u\|^2_{l-\frac{3}{2},\rho} + \|q\|^2_{l-1,\rho}\right\}; \qquad (13)$$

$$\|u\|^2_{l,\rho} \leq c_l \sigma^{-1}\left\{|\rho|^2\|T_\nu u\|'^2_{l-\frac{1}{2},\rho} + \|q\|^2_{l-1,\rho}\right\}. \qquad (14)$$

Доказательство. Заметим, что (13) – следствие (14). Из (12) получим

$$\|u\|'^2_{\frac{1}{2},\rho} \leq c\|u\|^2_{1,\rho} \leq c\sigma^{-1}\left\{|\rho|^2\|T_\nu u\|'^2_{-\frac{1}{2},\rho} + \|u\|'^2_{\frac{1}{2},\rho} + \|q\|^2_0\right\},$$

что при $\sigma \geq \sigma_1 > 0$ дает

$$\|u\|^2_{1,\rho} \leq c\sigma^{-1}\left\{|\rho|^2\|T_\nu u\|'^2_{-\frac{1}{2},\rho} + \|q\|^2_0\right\}.$$

Предположим, что (14) справедливо для номеров, не превосходящих l. Снова введя вектор-функции $w_k = \partial_k u$, запишем оценку

$$\|w_k\|^2_{l,\rho} \leq c_l \sigma^{-1}\left\{|\rho|^2\|T_\nu w_k\|'^2_{l-\frac{1}{2},\rho} + \|q\|^2_{l,\rho} + \|u\|^2_{l+1,\rho}\right\}.$$

Если $k=1,\dots,n-1$, то

$$\|w_k\|^2_{l,\rho} \leq c_l \sigma^{-1}\left\{|\rho|^2\|T_\nu u\|'^2_{l-\frac{1}{2},\rho} + \|q\|^2_{l,\rho} + \|u\|^2_{l+1,\rho}\right\}.$$

Оценку для $\|w_n\|_{l,\rho}$ получим с помощью уравнения (1):

$$\|w_n\|^2_{l,\rho} \leq c\left\{|\rho|^2\|u\|^2_{l,\rho} + \sum_{\alpha=1}^{n-1}\|w_\alpha\|^2_{l,\rho} + \|q\|^2_{l-1,\rho}\right\} \leq$$

$$\leq c_l\sigma^{-1}\left\{|p|^2\|T_\nu u\|'^2_{l-\frac{1}{2},p}+\|q\|^2_{l,p}\right\}+c\sum_{\alpha=1}^{n-1}\|w_\alpha\|^2_{l,p}\leq$$

$$\leq c_l\sigma^{-1}\left\{|p|^2\|T_\nu u\|'^2_{l-\frac{1}{2},p}+\|q\|^2_{l,p}+\|u\|^2_{l+1,p}\right\}.$$

Итак,

$$\|u\|^2_{l+1,p}\leq|p|^2\|u\|^2_{l,p}+c\sum_{k=1}^{n}\|w_k\|^2_{l,p}\leq$$

$$\leq c\sigma^{-1}\left\{|p|^2\|T_\nu u\|'^2_{l-\frac{1}{2},p}+\|q\|^2_{l,p}+\|u\|^2_{l+1,p}\right\}.$$

Отсюда при $\sigma\geq\sigma_{l+1}>0$ получаем нужную оценку для номера $l+1$. Теорема доказана.

Рассмотрим случай произвольной области $\mathcal{R}$.

Лемма. Пусть $x_0\in\overline{\mathcal{R}^+}$. Найдется шар U с центром в точке x_0 такой, что для всех $u\in H_{l+1}(\mathcal{R}^+)(l\geq 1)$, $\operatorname{supp}u\subset U\cap\overline{\mathcal{R}^+}$ справедливы оценки

$$\|u\|^2_{l,p;\mathcal{R}^+}\leq c_l\sigma^{-1}\left(|p|\|u\|'^2_{l-\frac{1}{2},p}+\|q\|^2_{l-1,p;\mathcal{R}^+}\right);$$

$$\|u\|^2_{l,p;\mathcal{R}^+}\leq c_l\sigma^{-1}\left(|p|^2\|T_\nu u\|'^2_{l-\frac{3}{2},p}+\|q\|^2_{l-1,p;\mathcal{R}^+}\right); \tag{15}$$

$$\|T_\nu u\|'^2_{l-\frac{3}{2},p}\leq c_l\left(\|u\|'^2_{l-\frac{1}{2},p}+|p|^{-1}\|q\|^2_{l-1,p;\mathcal{R}^+}\right)(\sigma\geq\sigma_l'>0). \tag{16}$$

Доказательство. Если $x\in\mathcal{R}_0^+$, то при произвольном $U\subset\mathcal{R}^+$ нужные оценки уже получены. Пусть $x_0\in\Gamma$. Возьмем шар U столь малым, чтобы точки из $U\cap\overline{\mathcal{R}^+}$ параметризовались локальными координатами $y_1,\dots,y_{n-1}$ на Γ и координатой y_n, отсчитываемой от Γ вдоль внутренней нормали. В локальных координатах оператор L_p принимает вид $\hat{L}_p+P_1(\partial)$, где $P_1(\partial)$ – дифференциальный оператор первого порядка, а $\hat{L}_p$ – оператор рассмотренного выше класса. Оператор T_ν принимает вид $\hat{T}_\nu+P_0$, где P_0 – оператор нулевого порядка; $\hat{T}_\nu$ обладает расомотренной выше структурой. Обозначив $u(x)=v(y)$, $q(x)=g(y)$, для компонент $v(y)$ в локальных координатах получим

$$(\hat{L}_p v)_i=g_i-P_1(\partial)v\quad(y\in R^n_+).$$

Из теоремы 1 следует, что при $\sigma \geq \sigma_l > 0$

$$\|v\|^2_{l,p} \leq c_l \sigma^{-1}\left(|p|\|v\|'^2_{l-\frac{1}{2},p} + \|g\|^2_{l-1,p} + \|v\|^2_{l,p}\right),$$

а значит, при $\sigma \geq \sigma'_l > 0$

$$\|v\|^2_{l,p} \leq c_l \sigma^{-1}\left(|p|\|v\|'^2_{l-\frac{1}{2},p} + \|g\|^2_{l-1,p}\right). \qquad (17)$$

Такая же оценка верна после возвращения к исходным переменным.

Далее,

$$\|\hat{T}_\nu v\|'^2_{l-\frac{3}{2},p} \leq c_l\left(\|v\|'^2_{l-\frac{1}{2},p} + |p|^{-1}\|g\|^2_{l-1,p} + |p|^{-1}\|v\|^2_{l,p}\right),$$

значит, с учетом (17) записываем

$$\|\hat{T}_\nu v\|'^2_{l-\frac{3}{2},p} \leq c_l\left(\|v\|'^2_{l-\frac{1}{2},p} + |p|^{-1}\|g\|^2_{l-1,p}\right);$$

$$\|(\hat{T}_\nu + P_0) v\|'^2_{l-\frac{3}{2},p} \leq c_l\left(\|v\|'^2_{l-\frac{1}{2},p} + |p|^{-1}\|g\|^2_{l-1,p}\right).$$

Возвращаясь к исходным переменным, получаем (16). Наконец,

$$\|v\|^2_{l,p} \leq c_l \sigma^{-1}\left(|p|^2\|\hat{T}_\nu v\|'^2_{l-\frac{3}{2},p} + \|g\|^2_{l-1,p} + \|v\|^2_{l,p}\right) \leq$$

$$\leq c_l \sigma^{-1}\left(|p|^2\|(\hat{T}_\nu + P_0) v\|'^2_{l-\frac{3}{2},p} + \|g\|^2_{l-1,p} + \|v\|^2_{l,p}\right),$$

откуда следует (15). Лемма доказана.

<u>Теорема 3</u>. Пусть $u \in H_{l+1}(\mathcal{R}^\pm)(l \geq 1)$. Существуют положительные постоянные c_l, σ^*_l такие, что при $\sigma \geq \sigma^*_l > 0$

$$\|u\|^2_{l,p;\mathcal{R}^\pm} \leq c_l \sigma^{-1}\left(|p|\|u\|'^2_{l-\frac{1}{2},p} + \|g\|^2_{l-1,p;\mathcal{R}^\pm}\right);$$

$$\|u\|^2_{l,p;\mathcal{R}^\pm} \leq c_l \sigma^{-1}\left(|p|^2\|T_\nu u\|'^2_{l-\frac{3}{2},p} + \|g\|^2_{l-1,p;\mathcal{R}^\pm}\right); \qquad (18)$$

$$\|T_\nu u\|'^2_{l-\frac{3}{2},p} \leq c_l\left(\|u\|'^2_{l-\frac{1}{2},p} + |p|^{-1}\|g\|^2_{l-1,p;\mathcal{R}^\pm}\right);$$

$$\|u\|'^2_{l-\frac{1}{2},p} \leq c_l \sigma^{-1}\left(|p|^2\|T_\nu u\|'^2_{l-\frac{3}{2},p} + \|q\|^2_{l-1,p;\mathcal{R}^\pm}\right). \qquad (19)$$

Доказательство. Очевидно, что (19) – следствие (18). Покроем $\overline{\mathfrak{R}^+}$ конечным числом шаров U_s ($s=1,\dots,N$), описанных в лемме, и введем соответствующее разбиение единицы $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^N$:

$$u(x)=\sum_{s=1}^N \varphi_s(x)u(x)=\sum_{s=1}^N u_s(x) \quad (x\in\overline{\mathfrak{R}^+}).$$

Вектор-функции $u_s(x)$ ($s=1,\dots,N$) удовлетворяют уравнениям

$$(L_\rho u_s)_i=(\varphi_s q)_i+(Q_{s1}(\partial)u)_i\ ,$$

где Q_{s1} ($s=1,\dots,N$) – дифференциальные операторы первого порядка. Отсюда следует, что

$$\|u_s\|^2_{l,\rho;\mathfrak{R}^+}\leqslant c\sigma^{-1}\Big(|\rho|\|u_s\|'^2_{l-\frac{1}{2},\rho}+\|q\|^2_{l-l,\rho;\mathfrak{R}^+}+\|u\|^2_{l,\rho;\mathfrak{R}^+}\Big),$$

при $\sigma\geqslant\sigma_1^*>0$

$$\|u\|^2_{l,\rho;\mathfrak{R}^+}\leqslant\sum_{s=1}^N\|u_s\|^2_{l,\rho;\mathfrak{R}^+}\leqslant c\sigma^{-1}\Big(|\rho|\sum_{s=1}^N\|u\|'^2_{l-\frac{1}{2},\rho}+\|q\|^2_{l-l,\rho;\mathfrak{R}^+}\Big)\leqslant$$

$$\leqslant c\sigma^{-1}\Big(|\rho|\|u\|'^2_{l-\frac{1}{2},\rho}+\|q\|^2_{l-l,\rho;\mathfrak{R}^+}\Big).$$

Аналогичное рассуждение дает (18):

$$\|T_\partial u\|'^2_{l-\frac{s}{2},\rho}\leqslant c\sum_{s=1}^N\Big(\|u_s\|'^2_{l-\frac{1}{2},\rho}+|\rho|^{-1}\|q\|^2_{l-l,\rho;\mathfrak{R}^+}+|\rho|^{-1}\|u\|^2_{l,\rho;\mathfrak{R}^+}\Big)\leqslant$$

$$\leqslant c\Big(\|u\|'^2_{l-\frac{1}{2},\rho}+|\rho|^{-1}\|q\|^2_{l-l,\rho;\mathfrak{R}^+}\Big).$$

Рассмотрим случай области $\mathfrak{R}^-$. Пусть $G\subset\overline{\mathfrak{R}^+}$ – шар большого радиуса. Введем функции $\psi_i(x)$ ($i=1,2$), $\psi_1+\psi_2=1$, $\psi_1\in C_0^\infty(G)$, $\psi_1=1$ в окрестности $\overline{\mathfrak{R}^+}$. Представим u в виде $u=u_1+u_2$, где $u_i=\psi_i u$ ($i=1,2$). Для вектор-функции u_1, повторив проведенные ранее оценки, получим

$$\|u_1\|^2_{l,\rho;\mathfrak{R}^-}\leqslant c_1\sigma^{-1}\Big(|\rho|\|u\|'^2_{l-\frac{1}{2},\rho}+\|q\|^2_{l-l,\rho;\mathfrak{R}^-}+\|u\|^2_{l,\rho;\mathfrak{R}^-}\Big).$$

Оценки

$$\|u_2\|^2_{l,p;\mathscr{R}^-} \leq c\sigma^{-1}\left(\|q\|^2_{l-1,p;\mathscr{R}^-} + \|u\|^2_{l,p;\mathscr{R}^-}\right)$$

доказываются так же, как (12). Отсюда

$$\|u\|^2_{l,p;\mathscr{R}^-} \leq \|u_1\|^2_{l,p;\mathscr{R}^-} + \|u_1\|^2_{l,p;\mathscr{R}^-} \leq c_l\sigma^{-1}\left(|p|\|u\|'^2_{l-\frac{1}{2},p} + \|q\|^2_{l-1,p;\mathscr{R}^-} + \|u\|^2_{l,p;\mathscr{R}^-}\right).$$

Следовательно, при $\sigma > \sigma_l^* > 0$

$$\|u\|^2_{l,p;\mathscr{R}^-} \leq c_l\sigma^{-1}\left(|p|\|u\|'^2_{l-\frac{1}{2},p} + \|q\|^2_{l-1,p;\mathscr{R}^-}\right).$$

Аналогичные рассуждения доказывают (18). Наконец,

$$\|T_\nu u\|'^2_{l-\frac{3}{2},p} = \|T_\nu u_1\|'^2_{l-\frac{3}{2},p} \leq c_l\left(\|u\|'^2_{l-\frac{1}{2},p} + |p|^{-1}\|q\|^2_{l-1,p;\mathscr{R}^-} + |p|^{-1}\|u\|^2_{l,p;\mathscr{R}^-}\right),$$

а значит,

$$\|T_\nu u\|'^2_{l-\frac{3}{2},p} \leq c_l\left(\|u\|'^2_{l-\frac{1}{2},p} + |p|^{-1}\|q\|^2_{l-1,p;\mathscr{R}^-}\right).$$

Теорема доказана.

1. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. - М.: Наука, 1980. - 384 с.
2. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. - М.: Мир, 1974. - 160 с.
3. Агранович М.С., Вишик М.И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи мат. наук. - 1964.- 19, вып. 3. - С. 53-161.
4. Иврий В.Я. Линейные гиперболические уравнения // Итоги науки и техники / ВИНИТИ; 1988. - 33. - С. 157-247.
5. Волевич Л.Р., Гиндикин С.Г. Метод энергетических оценок в смешанной задаче // Успехи мат. наук. - 1980. - 35, вып. 5. - С.53-120.
6. Агранович М.С. Граничные задачи для систем с параметром // Мат. сб. - 1971. - 84, вып. 1. - С. 27-65.
7. Агранович М.С. Одна теорема о матрице, зависящей от параметров, и ее приложения к гиперболическим системам // Функцион. анализ и его прил. - 1972. - 6, вып. 2. - С. 1-11.
8. Эскин Г.И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1973. - 232 с.

УДК 517.9:550.837

Д.Г.Шепельский

ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ТИПА ДИРАКА СО "СШИВКОЙ"

Рассмотрена обратная спектральная задача для одного матричного дифференциального оператора на полуоси с дополнительными условиями "сшивки" во внутренней точке. Приведена характеризация данных обратной задачи. Полученные результаты используются для решения обратной задачи магнитотеллурического зондирования.

1. Рассмотрим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений на полуоси $[0,\infty[$ с условиями "сшивки" в точке $a\in[0,\infty[$, имеющую в матричной форме следующий вид:

$$Ly = B\frac{dy}{dx} + Q(x)y = \lambda I y,\quad x\in[0,a[\,\cup\,]a,\infty[,\quad y(x,\lambda)=\begin{pmatrix} y_1(x,\lambda)\\ y_2(x,\lambda)\end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$\begin{cases} y_1(a-0,\lambda) = y_1(a+0,\lambda)\\ y_2(a-0,\lambda) = A y_2(a+0,\lambda)\end{cases},\quad 0<A<\infty, \quad (2)$$

где $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $\quad I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\quad Q(x)=\begin{pmatrix}-\psi(x) & \varphi(x)\\ 0 & 0\end{pmatrix}$,

функции $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ действительные, непрерывно дифференцируемые на интервалах $[0,a]$ и $[a,\infty[$ (последнее условие гладкости, удобное технически, может быть ослаблено). Оператор L, порожденный соотношениями (1), (2) и граничным условием $y_2(0)=0$, является симметрическим в пространстве $L^2(0,\infty;\rho(x))$ вектор-функций с весом $\rho(x)$ $\left(\text{где } \frac{d\rho}{dx}=\exp\left\{\int_0^x\varphi(t)\,dt\right\}\rho_0(x),\quad \rho_0(x)=\begin{cases}1, & 0<x<a\\ A, & x>a\end{cases}\right)$.

Обозначим через $\varphi(x,\lambda)$ решение системы (1), (2), удовлетворяющее граничным условиям $\varphi_1(0,\lambda)=1$, $\varphi_2(0,\lambda)=0$.

<u>Утверждение 1</u>. Существует неубывающая функция $\rho(\lambda)$ $(-\infty<\lambda<\infty)$ такая, что для каждой действительной вектор-функции $f(x)$, принадлежащей пространству $L^2(0,\infty;\rho(x))$ (т.е. $\int_0^\infty (f_1^2(x)+f_2^2(x))\,d\rho(x)<\infty$) существует предел по норме пространства $L^2(-\infty,\infty;\rho(\lambda))$

$$F(\lambda)=\lim_{N\to\infty}\int_0^N (f_1(x)\varphi_1(x,\lambda)+f_2(x)\varphi_2(x,\lambda))\,d\rho(x)$$

и выполняется равенство Парсеваля $\int_0^\infty (f_1^2(x)+f_2^2(x))\,d\rho(x)=\int_{-\infty}^{\infty}F^2(\lambda)\,d\rho(\lambda)$.

Обозначим через $\theta(x,\lambda)$ решение системы (1), (2), удовлетворяющее граничным условиям $\theta_1(0,\lambda)=0$, $\theta_2(0,\lambda)=1$.

ISBN 5-12-002791-1. Динамические системы и комплексный анализ. Киев, 1992

Утверждение 2. Для каждого недействительного λ существует решение системы (1), (2) $\psi(x,\lambda)=\theta(x,\lambda)+m(\lambda)\varphi(x,\lambda)$, принадлежащее пространству $L^2(0,\infty;\beta(x))$. Функция Вейля $m(\lambda)$ аналитична как в верхней, так и в нижней полуплоскости. Справедливы формулы связи $\rho(\lambda)$ и $m(\lambda)$:

$$m(z)-m(z_0)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{z-\lambda}-\frac{1}{z_0-\lambda}\right)d\rho(\lambda),\ \rho(\mu)-\rho(\lambda)=\frac{1}{\pi}\lim_{\delta\to 0}\int_{\lambda}^{\mu}Im\left[m(u+i\delta)\right]du\ . \quad (3)$$

Обратная задача для оператора L заключается в восстановлении функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и величин a, A по его спектральной функции $\rho(\lambda)$.

2. Рассмотрим операторы преобразования. Обозначим через $\varphi^i(x,\lambda)(i=1,2)$ решения двух систем вида (1), (2), соответствующих $Q^i(x)$, $a^1=a^2=a$, A^i.

Утверждение 3. Справедливо следующее представление:

$$\varphi_1^1(x,\lambda)=\varphi_1^2(x,\lambda)+\lambda\int_0^x\left(H_1(x,t)\varphi_1^2(t,\lambda)+H_2(x,t)\varphi_2^2(t,\lambda)\right)dt.$$

Ядра $H_{1,2}(x,t)$ терпят разрывы типа скачка вдоль отрезков характеристик $x\pm t=2na$, $n=1,2,\ldots$, лежащих в области $\Delta=\{(x,t): x\geq t\geq 0\}$. Эти разрывы отсутствуют в двух случаях:

1) при $A^1=A^2=A$, $\sin\left(\frac{1}{2}\int_0^a(\psi_1(t)-\psi_2(t))dt\right)=0$; при этом

$H_1(a,a)=0$; 2) при $A=A^1=\frac{1}{A^2}$, $\cos\left(\frac{1}{2}\int_0^a(\psi_1(t)-\psi_2(t))dt\right)=0$;

при этом $1-H_2(a,a)=0$. В этих случаях при интегрировании по частям операторы преобразования (в матричной форме) будут выглядеть следующим образом:

$$\varphi^1(x,\lambda)=R^{21}(x)\varphi^2(x,\lambda)+\int_0^x K^{21}(x,t)\varphi^2(t,\lambda)dt\ , \quad (4)$$

где

$$R^{21}(x)=\begin{pmatrix} 1-H_2(x,x) & H_1(x,x) \\ -H_1(x,x) & 1-H_2(x,x)\end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$K^{21}(x,t)=\begin{pmatrix} H_{2t}(x,t)-H_1(x,t)\psi_2(t) & -H_{1t}(x,t)+H_1(x,t)\psi_2(t) \\ -H_{1x}(x,t) & -H_{2x}(x,t)\end{pmatrix}. \quad (6)$$

При этом скалярные функции $H_{1,2}(x,t)$ удовлетворяют следующим условиям в области Δ, определяющим их однозначно:

$$\begin{cases} H_2(x,0)=0, \\ H_{1t}(x,0)-H_1(x,0)\varphi_2(0)=0, \quad H_1(0,0)=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_1(a-0,t)=H_1(a+0,t), \\ H_2(a-0,t)=H_2(a+0,t), \end{cases} \qquad \begin{cases} H_{1x}(a-0,t)=A^1 H_{1x}(a+0,t), \\ H_{2x}(a-0,t)=A^1 H_{2x}(a+0,t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_1(x,a+0)=A^2 H_1(x,a-0), \\ H_2(x,a+0)=H_2(x,a-0), \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} H_{1t}(x,a-0)-H_{1t}(x,a+0)=H_1(x,a-0)[\varphi_2(a-0)-A^2\varphi_2(a+0)], \\ A^2 H_{2t}(x,a-0)-H_{2t}(x,a+0)=A^2 H_2(x,a-0)[\psi_2(a-0)-\psi_2(a+0)], \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_1(x,x)=\alpha(x)\exp\left\{\frac{1}{2}\int\limits_0^x(\varphi_2-\varphi_1)dt\right\}\cdot\sin\left\{\frac{1}{2}\int\limits_0^x(\psi_2-\psi_1)dt\right\}, \\ 1-H_2(x,x)=\alpha(x)\cdot\exp\left\{\frac{1}{2}\int\limits_0^x(\varphi_2-\varphi_1)dt\right\}\cdot\cos\left\{\frac{1}{2}\int\limits_0^x(\psi_2-\psi_1)dt\right\}, \end{cases}$$

где $\alpha(x)\equiv 1$ в случае 1) и $\alpha(x)=\begin{cases} 1, & 0\le x< a \\ A^2, & x>a \end{cases}$ в случае 2);

функции $H_{1,2}(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируемы в каждой области Δ_n, на которые область Δ разбивается прямыми $x=a$; $t=a$; $x-t=2na$ и лучами $x+t=2na$, $t\le a$ $(n=1,2,\dots)$ и удовлетворяют там системе уравнений

$$\begin{cases} H_{1xx}-(H_{1t}-H_1\varphi_2)_t+H_{1x}\varphi_1(x)+(H_{2t}-H_1\psi_2(t))\psi_1(x)-(H_{2t}-H_1\psi_2(t))\psi_2(t)=0, \\ H_{2xx}-(H_{2t}-H_1\psi_2)_t+H_{2x}\varphi_1(x)-(H_{1t}-H_1\varphi_2(t))\psi_1(x)+(H_{2t}-H_1\psi_2(t))\varphi_2(t)=0. \end{cases}$$

Доказательства этих утверждений проводятся по схеме, аналогичной [1, 2].

Возьмем произвольный оператор L вида (1), (2). Пусть константа c такая, что $\sin\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^a(\psi(t)-c)dt\right)=0$ (т.е. $c=\frac{1}{a}\int\limits_0^a\psi(t)dt+\frac{2\pi n}{a}$). Рассмотрим в качестве невозмущенного оператор L^0, у которого $\varphi^0(x)=0$, $\psi^0(x)=c$, $a^0=a$, $A^0=A$. Рассуждения, основанные на существовании операторов преобразования и тауберовой теореме Марченко [3], приводят аналогично [2, 4] к следующей асимптотической формуле при $|\lambda|\to\infty$:

$$\rho(\lambda)-\rho_0(\lambda)=-\frac{1}{2\pi}(\psi(0)-c)\ln|\lambda|+const+o(1),$$

где $\rho_0(\lambda)$ - спектральная функция описанного выше невозмущенного оператора, которая может быть выписана явно и в свою очередь имеет асимптотику

$$\rho_0(\lambda)=\frac{1}{\pi a}\operatorname{arctg}\left(\frac{tg\left[a\left(\lambda+\frac{c}{2}\right)\right]}{A}\right)-\frac{c}{2\pi}\ln|\lambda|+const+o(1).$$

Таким образом, приходим к следующей асимптотической формуле для спектральной функции $\rho(\lambda)$ оператора L:

$$\rho(\lambda)=\left\{\frac{1}{\pi a}\operatorname{arctg}\left(\frac{tg\left[a\left(\lambda+\frac{c}{2}\right)\right]}{A}\right)\right\}-\frac{1}{2\pi}\psi(0)\ln|\lambda|+const+o(1).$$

Исходя из вида члена асимптотики, заключенного в фигурные скобки и представляющего собой сумму $\frac{\lambda}{\pi}$ и периодической функции с периодом $\frac{\pi}{a}$, амплитудой $\frac{4}{\pi a}\operatorname{arctg}\left|\frac{1-A}{2\sqrt{A}}\right|$ и сдвигом фазы $\frac{c}{2}$, по заданной спектральной функции $\rho(\lambda)$ можно определить величину a однозначно, а для величин A и c имеются два варианта:

1) $A^{01}=A,\quad c^{01}=c+\frac{2\pi n}{a}$;

2) $A^{02}=\frac{1}{A}, c^{02}=c^{01}+\frac{\pi}{a}$ (т.к. замена A на $\frac{1}{A}$ эквивалентна сдвигу фазы периодической части асимптотики на $\frac{\pi}{2a}$).

Определив таким образом невозмущенный оператор L_a^0, получим, что либо 1) $\sin\left(\frac{1}{2}\int_0^a(\psi(t)-c^{01})dt\right)=0$, $A^{01}=A$, либо 2) $\cos\left(\frac{1}{2}\int_0^a(\psi(t)-c^{02})dt\right)=0$, $A^{02}=\frac{1}{A}$. В обоих случаях, как отмечалось выше, справедливы операторы преобразования $L^0\mapsto L$ и $L\mapsto L^0$ вида (4):

$$\varphi^1(x,\lambda)=R^{01}(x)\varphi^0(x,\lambda)+\int_0^x K^{01}(x,t)\varphi^0(t,\lambda)dt,$$

$$\varphi^0(x,\lambda)=R^{10}(x)\varphi^1(x,\lambda)+\int_0^x K^{10}(x,t)\varphi^1(x,\lambda)dt. \qquad (8)$$

Здесь $\varphi^0(x,\lambda)$ - решение соответствующей невозмущенной задачи:

$$\varphi^0(x,\lambda)=\left\{\begin{array}{ll}\begin{pmatrix}\cos\xi x\\ \frac{\xi}{\lambda}\sin\xi x\end{pmatrix}, & 0<x<a;\\[2ex] \begin{pmatrix}\frac{A^0+1}{2A^0}\cos\xi x+\frac{A^0-1}{2A^0}\cos\xi(x-2a)\\ \frac{\xi}{\lambda}\left(\frac{A^0+1}{2A^0}\sin\xi x+\frac{A^0-1}{2A^0}\sin\xi(x-2a)\right)\end{pmatrix}, & x>a\end{array}\right\}, \qquad (9)$$

где $\xi(\lambda)=\sqrt{\lambda^2+\lambda c^0}$.

3. Приведем интегральные уравнения обратной задачи. Опираясь на равенство Парсеваля и на выражения для операторов преобразования $\varphi^0 \mapsto \varphi$ и $\varphi \mapsto \varphi^0$: $\varphi = (R^{01}I + K^{01})\varphi^0$, $\varphi^0 = (R^{10}I + K^{10})\varphi$, следуя выводу интегрального уравнения обратной задачи, приведенному в [2, 4], получаем тождество

$$R^{01}(x)F(x,y) + K^{01}(x,y) + \int_0^x K^{01}(x,t)F(t,y)dt = 0 . \qquad (10)$$

Здесь

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^0(x,\lambda)\varphi^{0T}(y,\lambda)d\big(\rho(\lambda) - \rho_0(\lambda)\big)\rho_0(y) \qquad (11)$$

(индекс $(\cdot)^T$ обозначает транспонирование матрицы; $F(x,y)$ - матрица 2x2). Рассматривая поэлементно матричное тождество (10) и учитывая выражения его матричных элементов через две скалярные функции $H_1(x,t)$ и $H_2(x,t)$ (5), (6), приходим к системе двух интегральных уравнений относительно ядер $H_{1,2}(x,t)$:

$$H_1(x,y) + \int_0^x H_1(x,t)F_{11}(t,y)dt + \int_0^x H_2(x,t)F_{21}(x,t)dt = G_1(x,y),$$

$$H_2(x,y) + \int_0^x H_1(x,t)F_{12}(t,y)dt + \int_0^x H_2(x,t)F_{22}(t,y)dt = G_2(x,y), \qquad (12)$$

где

$$G_1(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \varphi_1^0(x,\lambda)\varphi_1^0(y,\lambda)}{\lambda} d\big(\rho(\lambda) - \rho_0(\lambda)\big)\rho_0(y),$$

$$G_2(x,y) = -\int_0^y \big[F_{11}(x,\xi) + c^0 G_1(x,\xi)\big]d\xi .$$

Рассматривая уравнения (10), (12) как уравнения типа Вольтерра относительно функции $F(x,y)$, учитывая гладкость функций $H_{1,2}(x,y)$ в областях Δ_n и скачки их производных вдоль описанных выше отрезков характеристик, лежащих в области Δ (например, при

$$(2n-1)a \le x \le 2na \qquad [H_x](x, 2na-x) = [H_t](x, 2na-x) = \left(\frac{1-A^0}{1+A^0}\right)^{n-1} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_a^x \varphi(\xi)d\xi\right\} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{1}{2}\int_a^x (\psi(\xi)-c^0)d\xi\right) & -\sin\left(\frac{1}{2}\int_a^x (\psi(\xi)-c^0)d\xi\right) \\ \sin\left(\frac{1}{2}\int_a^x (\psi(\xi)-c^0)d\xi\right) & \cos\left(\frac{1}{2}\int_a^x (\psi(\xi)-c^0)d\xi\right) \end{pmatrix}\times$$

$\times \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$, где $H = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0_1 \\ 2 \end{pmatrix} = [H_t](x, 2a-x)\Big|_{x=0}$; здесь введено обозначение $[f](x,t) \equiv f(x+0,t) - f(x-0,t)$; аналогичные формулы справедливы и для остальных отрезков характеристик), получаем необходимые условия на гладкость и скачки матрицы $F(x,t)$, построенной по спектральной функции $\rho(\lambda)$. С учетом выражений (9) и (11) для $F(x,t)$ эти условия эквивалентны следующим:

(А). Существуют пределы $\varkappa_{c,s}(x) = \lim\limits_{N\to\infty} \int\limits_{-N}^{N} \{\cos\lambda x, \sin\lambda x\} d(\rho(\lambda) - \rho_0(\lambda))$.

Функции $\varkappa_{c,s}(x)$ имеют на интервалах $[2na, 2(n+1)a]$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ ту же гладкость, что и функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ (в частности, непрерывно дифференцируемы), и удовлетворяют условию согласования скачков:

$$\varkappa_{c,s}(2na+0) - \varkappa_{c,s}(2na-0) = n\left(\frac{1-A^0}{1+A^0}\right)^{n-1}\{\varkappa_{c,s}(2a+0) - \varkappa_{c,s}(2a-0)\}.$$

4. Рассмотрим обратную задачу по спектральной функции. Предположим, что задана некоторая неубывающая функция $\rho(\lambda)$, удовлетворяющая условию (А), в котором $\rho_0(\lambda)$ - функция, построенная по асимптотике $\rho(\lambda)$ описанным выше образом (напомним, имеются два варианта ее построения, не считая варианты, отличающиеся сдвигом константы c на $\frac{2\pi n}{a}$). Построим по $\rho(\lambda)$ матрицу $F(x,y)$. Разрешимость полученной системы двух интегральных уравнений обратной задачи (12) доказывается аналогично [3, 4]. При этом для ее решений необходимо должен реализоваться один из двух вариантов (условие (B)):

либо 1) $H_1(a,a) = 0$, и тогда $A = A^0$;

либо 2) $1 - H_2(a,a) = 0$, и тогда $A = \frac{1}{A^0}$

(это условие можно сформулировать иначе: $H_1(a,a) = 0$ либо для некоторого выбранного варианта $\{c^0, A^0\}$, либо для варианта $\{c^0 + \frac{\pi}{a}, \frac{1}{A^0}\}$). Исходя из формул (7) находим функции

$$\varphi(x) = 2\frac{\frac{dH_2(x,x)}{dx}(1 - H_2(x,x)) - \frac{dH_1(x,x)}{dx}H_1(x,x)}{(1 - H_2(x,x))^2 + (H_1(x,x))^2} =$$

$$= -2\frac{d}{dx}\ln|1 - H_2(x,x) + iH_1(x,x)| ,$$

$$\psi(x) = c - 2\frac{\frac{dH_2(x,x)}{dx}H_1(x,x) + \frac{dH_1(x,x)}{dx}(1 - H_2(x,x))}{(1 - H_2(x,x))^2 + (H_1(x,x))^2} =$$

$$= c - 2\frac{d}{dx}\arg\left[1 - H_2(x,x) + iH_1(x,x)\right] \qquad (13)$$

в первом варианте и с соответствующими изменениями – во втором.

Можно показать, что полученные решения $H_{1,2}(x,t)$ удовлетворяют условиям, сформулированным в утверждении 3, и тем самым вектор-функция $\varphi(x,\lambda)$, определяемая формулами

$$\varphi_1(x,\lambda) = \varphi_1^0(x,\lambda) + \lambda\int_0^x \left(H_1(x,t)\varphi_1^0(t,\lambda) + H_2(x,t)\varphi_2^0(t,\lambda)\right)dt,$$

$\varphi_2(x,\lambda) = -\frac{1}{\lambda}\frac{d\varphi_1(x,\lambda)}{dx}$, удовлетворяет системе (1), (2). Можно также убедиться в том, что исходная функция $\rho(\lambda)$ действительно является спектральной функцией восстановленного оператора L.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Для того чтобы неубывающая функция $\rho(\lambda)$ была спектральной функцией оператора L (1), (2) с непрерывно дифференцируемыми на интервалах $[0,a]$ и $[a,\infty[$ функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $\rho(\lambda)$ удовлетворяла условию (A) и для решения построенной по ней системы интегральных уравнений (12) выполнялось условие (B).

Аналогичная теорема справедлива и в случае наличия более чем одного условия "сшивки" типа (2) (с соответствующим видоизменением условий (A) и (B)).

5. Рассмотрим восстановление параметров среды по результатам магнитотеллурического зондирования. С обратной задачей для оператора L (1), (2) связаны некоторые одномерные задачи магнитотеллурического зондирования (параметры среды предполагаются зависящими только от одной переменной – глубины [1]).

Предположим, что возбуждающая H-волна распространяется вдоль поверхности Земли в направлении оси y; соответствующая компонента электромагнитного поля $E_z(x,y,\omega)$ (x – глубина) имеет вид $E_z(x,y,\omega) = e(x,\omega)\cdot exp\{-i\varkappa(\omega)y\}$, где $\varkappa(\omega)$ – закон дисперсии вида $\varkappa(\omega) = \sqrt{b\omega^2 + id\omega}$, $b>0$, $d<0$. В частности, такой закон дисперсии включает в себя случай распространения волн с постоянной горизонтальной скоростью V_r без затухания: $d=0$, $\varkappa = \sqrt{b}\omega$, $V_r = \frac{1}{b}$.

Из уравнений Максвелла в пренебрежении токами смещения получаем уравнение ($\mu(x)$ – магнитная проницаемость среды; $\sigma(x)$ – проводимость)

$$\mu(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\mu(x)}\frac{de}{dx}\right) - i\omega\mu(x)\sigma(x)e - \varkappa^2(\omega)e = 0. \qquad (14)$$

Пусть $\mu(x)$ – кусочно-непрерывная функция с одним разрывом в точке $x=a$: $\mu(a+0) = \mu(a-0)A$. Условия непрерывности горизонтальных компонент поля E_z и $H_y = i\frac{1}{\mu(x)\omega}\frac{dE_z}{dx}$ приводят к условиям "сшивки"

$$e(a+0,\omega) = e(a-0,\omega),\ \frac{de}{dx}(a+0,\omega)A = \frac{de}{dx}(a-0,\omega). \quad (15)$$

Вводя обозначения $\lambda = -i\sqrt{\delta}\omega,\ \varphi(x) = -\frac{\mu'(x)}{\mu(x)},\ \psi(x) = \frac{\mu(x)\sigma(x)+d}{\sqrt{\delta}}$, приходим к уравнению (при $x \in [0,a[\ \cup\ ]a,\infty[$)

$$\frac{d^2e}{dx^2} + \varphi(x)\frac{de}{dx} + \lambda\psi(x)e + \lambda^2 e = 0. \quad (16)$$

Затухание поля при $x \to +\infty$ выразим в условии

$$\int_0^\infty \left(|e|^2 + \left|\frac{de}{dx}\right|^2\right)\frac{1}{\mu(x)}dx < \infty. \quad (17)$$

Обратная задача заключается в восстановлении функций $\sigma(x)$ и $\mu(x)$ по импедансу $Z(\omega)$, измеренному на поверхности $x=0$:

$$Z(\omega) = \frac{E_z}{H_y}\Bigg|_{x=0} = -i\mu(0)\omega\frac{e(0,\omega)}{\frac{de}{dx}(0,\omega)}. \quad (18)$$

Обозначив $y_1(x,\lambda) = e(x,\omega),\ y_2(x,\lambda) = -\frac{1}{\lambda}\frac{dy_1}{dx}(x,\lambda)$ из (15), (16) получаем, что вектор-функция $y(x,\lambda) = \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda) \\ y_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$ удовлетворяет системе (1), (2). Как следует из (17), импеданс $Z(\omega)$ связан с решением Вейля системы (1), (2) $\Psi(x,\lambda)$ следующим образом:

$$Z(\omega) = -i\mu(0)\omega\frac{e(0,\omega)}{\frac{de}{dx}(0,\omega)} = -\frac{\mu(0)}{\sqrt{e}}\frac{\Psi_1(0,\lambda)}{\Psi_2(0,\lambda)}.$$

Из краевых условий для функций $\Phi(x,\lambda)$ и $\Theta(x,\lambda)$ следует, что $m(\lambda) = \frac{\Psi_1(0,\lambda)}{\Psi_2(0,\lambda)}$. Таким образом,

$$m(\lambda) = m(-i\sqrt{\delta}\omega) = -\frac{\sqrt{\delta}}{\mu(0)}Z(\omega). \quad (19)$$

Исходя из формулы (19) по заданному импедансу $Z(\omega)$ $(\omega>0)$ находится функция $m(\lambda)$ $(\lambda \in -i[0,\infty[)$. Спектральная функция $\rho(\lambda)$ однозначно связана с $m(\lambda)$ формулами (3). Учитывая формулы (13), искомые функции $\mu(x)$ и $\sigma(x)$ выражаем через решение уравнений обратной задачи (12):

$$\frac{\mu(x)}{\mu(0)} = \beta_0(x)\left[(1 - H_2(x,x))^2 + (H_1(x,x))^2\right],$$

$$\sigma(x) = \frac{\psi(x)\sqrt{\delta} - d}{\mu(0)\beta_0(x)\left[(1-H_2(x,x))^2 + (H_1(x,x))^2\right]}.$$

На основании теоремы 1 получаем следующую.

Теорема 2. Для того чтобы функция $Z(\omega)$ являлась импедансом задачи (14), (15), (17), (18), в которой $\mu(x)$ - положительная кусочно-непрерывная функция с одной точкой разрыва $x=a$, вне которой она дважды непрерывно дифференцируема, $\sigma(x)$ - непрерывно дифференцируемая на интервалах $[0,a[$ и $[a,\infty[$ функция, необходимо и достаточно, чтобы построенная по $Z(\omega)$ согласно равенствам (3), (19) неубывающая функция $\rho(\lambda)$ удовлетворяла условиям теоремы 1.

Замечание. Как уже отмечалось в п. 1, условия гладкости искомых функций могут быть ослаблены (в частности, допускаются разрывы функции $\sigma(x)$; существенными являются разрывы функции $\mu(x)$, порождающие условия "сшивки").

1. Хруслов Е.Я., Левченко Е.П., Свищева Е.В. Обратная задача магнитотеллурического зондирования при горизонтальном распространении возбуждающих волн без дисперсии. - Харьков, 1985. - 28с.- (Препр. ФТИНТ АН УССР; 26-85).
2. Шепельский Д.Г. О восстановлении проводимости среды в классе разрывных и растущих функций. - Харьков, 1987. - 30 с. -(Препр. ФТИНТ АН УССР; 25-87).
3. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. - Киев: Наук. думка, 1977. - 332 с.
4. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака.- М.: Наука, 1988. - 432 с.

УДК 517.958

О.А.Анощенко

СУЩЕСТВОВАНИЕ В ЦЕЛОМ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СУСПЕНЗИИ

Исследована система уравнений в частных производных, описывающая движение мелких частиц в несжимаемой жидкости. Неизвестными функциями являются вектор скорости $u(x,t)$ и давление $p(x,t)$ в несущей жидкости, а также функция распределения частиц в фазовом пространстве $F(x,v,t)$. Система состоит из зацепленных уравнений Навье-Стокса и Лиувилля, одно из которых рассматривается в координатно-временном пространстве, а второе - в фазовом. Доказана глобальная разрешимость начально-краевой задачи для указанной системы.

1. Рассмотрим систему уравнений, описывающую движение суспензии мелких частиц в вязкой несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+(u\nabla_x)u-\nu\Delta u+\gamma\int\varphi(u(x,t)-v)\cdot F(x,v,t)\,dv-\nabla p=f(x,t)\,, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} u=0\,, \quad (2)$$

ISBN 5-12-002791-1. Динамические системы и комплексный анализ. Киев, 1992

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (v\nabla_x)F + \beta\, div_v\,[\varphi(u-v)F] = 0 . \qquad (3)$$

Здесь $x=(x_1, x_2, x_3)$ - точка трехмерного евклидова пространства R^3; $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$ - оператор градиента; $\Delta = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ - оператор Лапласа; $(u\nabla_x) = \sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$; $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ - вектор скорости несущей жидкости; $p(x,t)$ - давление; $v=(v_1, v_2, v_3)$ - вектор скорости частиц; $F(x,v,t)$ - функция распределения частиц в фазовом пространстве; вектор $f(x,t)$ - внешняя сила, действующая на несущую жидкость, и положительные коэффициенты λ, γ, β считаются заданными, а отображение $\varphi(y): R^3 \to R^3$ удовлетворяет следующим условиям: $\varphi(y) = \tilde{\varphi}(|y|)y$, где $\tilde{\varphi}(t)$ - неотрицательная, непрерывно дифференцируемая скалярная функция с ограниченной производной такая, что $C_1 t^{\alpha} \le \tilde{\varphi}(t) \le Ct^{\alpha}$, $t>0$, $\alpha\in[0,\frac{2}{15}]$, а $|div\,\varphi(y)| \le C$. Следовательно, $|\varphi(y)| \le C|y|^{1+\alpha}$,

$$|\nabla\varphi(y)| \le C|y|, \quad (\varphi(y), y) \ge C|y|^{2+\alpha}, \qquad (4)$$

где $(,)$ - евклидово скалярное произведение в R^3.

Рассмотрим в области $D_T = \Omega\times R^3\times[0,T]$ $(x\in\Omega\subset R^3, v\in R^3, t\in[0,T])$ начально-краевую задачу для системы (1)-(3), т.е. дополним ее условиями:

$$u(x,t)=0, \quad (x,t)\in\partial\Omega\times[0,T] \equiv S_T ; \qquad (5)$$

$$u(x,0) = u_0(x); \qquad (6)$$

$$F(x,v,0) = F_0(x,v); \qquad (7)$$

$$F(x,v,t)(v,n(x)) \ge 0, \quad (x,v,t)\in S_T\times R^3 . \qquad (8)$$

Здесь $n(x)$ - орт внешней нормали к $\partial\Omega$ в точке x.

Обозначим $\Omega\times R^3 \equiv D$, $\Omega\times[0,T] \equiv Q_T$. Предполагаем, что Ω - ограниченная выпуклая область трехмерного пространства R^3 с достаточно гладкой границей, а начальные функции $u_0(x)$, $F_0(x,v)$ такие, что $div\,u_0=0$, $x\in\Omega$, $u_0(x)=0$, $x\in\partial\Omega$, $F_0(x,v)$ финитна в D по переменной v и $F_0(x,v)=0$, $(x,v)\in\partial\Omega\times R^3$.

В работе [1] доказана однозначная разрешимость задачи ((1)-(3)), ((5)-(7)) в непрерывных по Гельдеру классах функций в предположении, что функция $F_0(x,v)$ финитна в D. В настоящей работе доказывается существование в целом обобщенного решения задачи ((1)-(3)), ((5)-(8)).

Введем следующие функциональные пространства: $I(\mathcal{R})$ и $I^1(\mathcal{R})$- замыкание в нормах $L_2(\mathcal{R})$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\mathcal{R})$ множества финитных в $\mathcal{R}$ бесконечно дифференцируемых соленоидальных вектор-функций; $L_{q,r}(Q_T)$, $q, r \geq 1$ – банахово пространство вектор-функций, имеющих конечную норму

$$\|u\|_{q,r,Q_T} = \left[\int_0^T \|u(t)\|^r_{q,\mathcal{R}} dt \right]^{\frac{1}{r}}.$$

В ряде случаев функции, зависящие от переменных $x \in \mathcal{R}$ и $t \in (0,T)$, рассматриваются как функции аргумента t со значениями в банаховом пространстве E, определенном на $\mathcal{R}$. Например, $L_q(0,T;E)$ – множество функций $f(t)$, заданных на $(0,T)$ и действующих в E с нормой

$$\|f\|_{L_q(0,T;E)} = \left(\int_0^T \|f\|^q dt \right)^{\frac{1}{q}},$$

где $\|\cdot\|$ – норма в пространстве E.

Определение. Пара функций $(u(x,t), F(x,v,t))$ называется обобщенным решением задачи ((1)-(3)), ((5)-(8)), если

$$u(t) \in L_\infty(0,T; I(\mathcal{R})) \cap L_2(0,T; I^1(\mathcal{R})), \qquad (9)$$

$F(x,v,t) \in L_\infty(D_T)$, равномерно по $t \in [0,T]$ $F(x,v,t) \in L_1(D)$, $F(x,v,t)$ слабо непрерывна по t в метрике $L_1(D)$ в точке $t=0$ и выполняются следующие интегральные соотношения:

$$\int_0^T \Big\{ \big(u, \varphi_t + (u\nabla_x)\varphi\big)_{2,\mathcal{R}} - \nu(u,\varphi)_{I^1(\mathcal{R})} +$$

$$+ \gamma \left(\int \varphi(u-v) F dv, \varphi \right)_{2,\mathcal{R}} + (f,\varphi)_{2,\mathcal{R}} \Big\} dt +$$

$$+ \big(u_0, \varphi(0)\big)_{2,\mathcal{R}} = 0; \qquad (10)$$

$$\int_0^T \big(F, \psi_t + (v\nabla_x)\psi + \beta\big(\varphi(u-v)\nabla_v\big)\psi\big)_{2,D} dt +$$

$$+ (F_0, \psi(0))_{2,D} \geq 0 \qquad (11)$$

при любых вектор-функциях Φ и функциях Ψ, удовлетворяющих условиям

$$\Phi(t)\in L_\infty\big(0,T;I(\mathcal{D})\big)\cap L_2\big(0,T;I^1(\mathcal{D})\big)\cap L_p\big(0,T;W_q^1(\mathcal{D})\big),$$

$$\frac{1}{p}+\frac{3}{2q}\leq 1,\ p\in[2;\infty),\ q\in\left[\frac{3}{2};\infty\right],$$

$$\Phi_t\in L_{q,p}(Q_T),\ \frac{1}{p}+\frac{3}{2q}\leq\frac{7}{4},\quad p\in[1;2],\ q\in\left[\frac{6}{5};2\right], \tag{12}$$

$\Psi(x,v,t)$ финитных в D_T по переменной v,

$$\nabla_x\Psi\in L_1(D_T),\quad \nabla_v\Psi\in L_\infty(D_T),\quad \Psi_t\in L_1(D_T),$$

$$\Psi(x,v,t)\geq 0,\quad (x,v,t)\in\partial\mathcal{D}\times R^3\times[0;T], \tag{13}$$

причем при $\Psi(x,v,t)=0,\ (x,v,t)\in\partial\mathcal{D}\times R^3\times[0,T]$ в (12) имеем равенство. Кроме того, $\Phi(T)=0,\ \Psi(T)=0$. Здесь

$$(f,g)_{2,\mathcal{D}}=\int_{\mathcal{D}}\sum_{i=1}^{3}f_i(x)g_i(x)\,dx;$$

$$(F,G)_{2,D}=\int_D F(x,v)G(x,v)\,dv\,dx.$$

Основным результатом данной работы является такая теорема.

Теорема. Пусть $f(x,t)\in L_{2,1}(Q_T),\ u_0(x)\in I(\mathcal{D}),\ F_0(x,v)$ финитна в D по переменной v, $F_0(x,v)=0,\ (x,v)\in\partial\mathcal{D}\times R^3$ и непрерывно дифференцируема в D. Тогда существует по крайней мере одно обобщенное решение задачи ((1)-(3)), ((5)-(8)).

Определенное выше обобщенное решение задачи ((1)-(3)), ((5)-(8)) соответствует в случае системы уравнений Навье-Стокса классу обобщенных решений, введенных Е.Хопфом. Как известно [2], оно оказывается достаточно широким для трехмерной задачи, и поэтому установить единственность решений начально-краевой задачи ((1)-(3)), ((5)-(8)) в классе (9) не удается.

2. Приведем схему доказательства теоремы. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial F}{\partial t}+(v\nabla_x)F+\beta\,\mathrm{div}_v\big[\varphi\big(u(x,t)-v\big)F\big]=0; \tag{14}$$

$$F(x,v,0)=F_0(x,v), \tag{15}$$

где $u(x,t)$, $\varphi(y)$ и $F_0(x,v)$ – заданные функции, определенные соответственно в $R^3_T = R^3 \times [0,T]$, R^3 и $R^3 \times R^3 = R^6$. 76

Определим вектор-функции $X(x,v,t,\tau)$ и $V(x,v,t,\tau)$ как решения системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{d\tau} = V, \qquad \frac{dV}{d\tau} = \beta\varphi\left(w(X,\tau) - V\right),$$

$$X\Big|_{\tau=t} = x, \quad V\Big|_{\tau=t} = v, \quad \tau \in [0,T]. \tag{16}$$

В дальнейшем вектор-функция $w(x,t)$ будет задана в Q_T, причем $\sup\limits_{Q_T} |\nabla w(x,t)| < \infty$, $w|_{S_T} = 0$, функция $F_0(x,v)$ финитна в $\mathcal{R} \times R^3$ по переменной v, $F_0(x,v) = 0$, $(x,v) \in \partial\mathcal{R} \times R^3$, а отображение $\varphi(y)$ удовлетворяет условиям (4). Продолжим функции $w(x,t)$ и $F_0(x,v)$ нулем на R^3_T и R^6 соответственно. При таком продолжении правая часть системы (16) удовлетворяет локально условию Липшица по переменным X, V в R^6_T, что обеспечивает локальную разрешимость системы (16).

Единственное решение задачи (14), (15) дается формулой

$$F(x,v,t) = \exp\left(\beta \int_0^t \sum_{i=1}^3 \frac{\partial\varphi_i(w(X,\tau) - V)}{\partial y_i} d\tau\right) \times$$

$$\times F_0\Big(X(x,v,t,0),\ V(x,v,t,0)\Big), \tag{17}$$

причем при наших предположениях относительно функций $F_0(x,v)$, $w(x,t)$ и отображения $\varphi(y)$ решение (17) будет финитным в D_T по переменной v, а выпуклость области $\mathcal{R}$ обеспечивает выполнение граничного условия (8) после сужения $F(x,v,t)$ на $\mathcal{R}$. Используя подход, развитый в [3], являющийся модификацией метода Галеркина, ищем приближенные решения (1), (2) в виде конечной суммы

$$u^n(x,t) = \sum_{l=1}^n c_{nl}(t)\psi^l(x), \tag{18}$$

где $c_{nl}(t) \in C^1(0,T)$ – неизвестные коэффициенты, а $\psi^l(x)$ $(l = 1,2,\ldots)$ ортонормированный в $L_2(\mathcal{R})$ базис, состоящий из собственных функций задачи:

$$\Delta\psi^l(x) - \nabla q^l = \mu_l \psi^l(x),$$

$$div\,\psi^l(x)=0,\quad x\in\mathcal{R},\quad \psi^l(x)=0,\quad x\in\partial\mathcal{R}.$$

Приближения $F^n(x,v,t)$ находим как решение задачи

$$\frac{\partial F^n}{\partial t}+(v\nabla_x)F^n+\beta\,div_v\left[\varphi(u^n-v)F^n\right]=0,\quad x\in\mathcal{R},$$

$$F^n\Big|_{t=0}=F_0(x,v),\quad F^n(x,v,t)(v,n(x))\geq 0,\quad x\in\partial\mathcal{R}. \tag{19}$$

Для определения коэффициентов $c_{nl}(t)$ в (18) потребуем, чтобы тождество (10) удовлетворялось для u^n и F^n на всех вектор-функциях $\Phi(x,t)=H(t)\psi^j(x)$, $j=1,2,\ldots,n$, где $H(t)\in C^1(0,T)$, $H(T)=0$. Это требование означает, что должны выполняться следующие соотношения:

$$\left(\frac{\partial u^n}{\partial t}+(u^n\nabla)u^n+\gamma\int\varphi(u^n-v)F^n dv,\ \psi^k\right)_{2,\mathcal{R}}+$$

$$+\nu\left(u^n,\psi^k\right)_{I^1(\mathcal{R})}=\left(f,\psi^k\right)_{2,\mathcal{R}},\ k=1,2,\ldots,n, \tag{20}$$

которые представляют собой систему дифференциально-функциональных уравнений

$$\frac{dc_{nk}}{dt}+\sum_{l,m=1}^{n}\beta_{lm}^{k}c_{nl}(t)c_{nm}(t)+\sum_{l=1}^{n}\varepsilon_l^k c_{nl}(t)\ +$$

$$+\gamma\left(\int\varphi\left(\sum_{l=1}^{n}c_{nl}(t)\psi^l(x)-v\right)F^n dv,\psi^k\right)_{2,\mathcal{R}}=f^k,\quad k=1,2,\ldots,n, \tag{21}$$

где

$$\beta_{lm}^k=\left(\left(\psi^l\nabla\right)\psi^m,\psi^k\right)_{2,\mathcal{R}};\ \varepsilon_l^k=\nu\left(\psi^l,\psi^k\right)_{I^1(\mathcal{R})};\ f^k=\left(f,\psi^k\right)_{2,\mathcal{R}}$$

Начальные данные для (21) полагаем равными

$$c_{nl}(0)=c_l,\ l=1,2,\ldots,n,$$

где c_l – коэффициенты разложения $u_0(x)$ по базису $\psi^l(x)$, т.е.

$$u_0(x)=\sum_{l=1}^{\infty}c_l\psi^l(x).$$

Лемма 1. Справедливы равномерные по n априорные оценки

$$\sup_{D_T} F^n(x,v,t) \le A ;$$

$$\int_D F^n(x,v,t)\,dv\,dx \le \int_D F_0(x,v)\,dv\,dx ;$$

$$\max_{0\le t\le T} \|u^n\|_{2,\Omega} + \max_{0\le t\le T} \int_D v^2 F^n dv\,dx + \int_0^T \|u^n(t)\|^2_{I^1(\Omega)} dt +$$

$$+ \int_0^T\int_D \big(\varphi(u^n - v),\, u^n - v\big) F^n dv\,dx\,dt \le A , \qquad (22)$$

где C зависит от u_0, F_0, f, γ, β, ν.

Применяя к (19), (21) метод последовательных приближений и используя оценки (22), доказываем существование приближенных решений u^n, F^n.

Априорные оценки (22) позволяют выделить подпоследовательности $\{u^n\}$, $\{F^n\}$ такие, что
$u^n \to u$ $*$-слабо в $L_\infty(0,T; I(\Omega))$ и слабо в $L_2(0,T; I^1(\Omega))$,
$F^n \to F$ $*$-слабо в $L_\infty(D_T)$ при $n \to \infty$.

Кроме того, справедлива следующая лемма.

Лемма 2. Из последовательности $\{F^n\}$ можно извлечь подпоследовательность, которая будет сходиться равномерно по $t \in (0;T]$ в слабой топологии $L_2(D)$ и $L_1(D)$.

Из свойств функций $F^n(x,v,t)$ и леммы 2 следует слабая непрерывность по t в метрике $L_1(D)$ в точке $t=0$ предельной функции $F(x,v,t)$.

Ввиду нелинейности задачи указанной информации недостаточно для осуществления предельного перехода в интегральных соотношениях типа (10), (11). Поэтому на следующем шаге доказывается компактность последовательности $\{u^n\}$ в $L_2(Q_T)$.

Лемма 3. Для галеркинских приближений $\{u^n\}$ справедлива оценка

$$\int_0^{T-\delta} \|u^n(t+\delta) - u^n(t)\|^2_{2,\Omega} dt \le C\delta^{\frac{1}{2}}$$

при $0<\delta<T$ с константой C, не зависящей от n и δ.

Как следствие лемм 1 и 3 имеем компактность последовательности $\{u^n\}$ в $L_2(Q_T)$ и в любом из пространств $L_{q,p}(Q_T)$ с $p\in[1;\infty)$, $q\in[2,6]$, если $\frac{1}{p}+\frac{3}{2q}>\frac{3}{4}$ (см. [2, 3]).

Используя свойство компактности $\{u^n\}$, можно осуществить предельный переход при $n\to\infty$ в интегральных соотношениях (10), (11). Умножая уравнение (20) на $H_j(t)$, суммируя по j и выполняя интегрирование по частям, получаем тождество (10) для u^n и F^n, справедливое для пробных функций $\varphi(x,t)$ вида

$$\varphi=\sum_{j=1}^{N}H_j(t)\psi^j(x),\quad H_j(t)\in C^1(0,T),\quad H_j(T)=0\ . \tag{23}$$

Можно показать, что пределы выделенных подпоследовательностей $\{u^n\}$, $\{F^n\}$ удовлетворяют тождеству (10) для таких φ. Множество гладких функций вида (23) плотно в пространстве функций со свойствами (12). Аналогично из уравнения (19), умножая на ψ и интегрируя, а затем переходя к пределу при $n\to\infty$, получаем, что соотношение (11) справедливо при всех тестовых функциях ψ со свойствами (13).

Теорема доказана.

1. Анощенко О.А. Существование и единственность классического решения системы уравнений движения суспензии / Харьк. ун-т. – Харьков, 1988. – 20 с. – Деп. в ВИНИТИ 28.02.89, № 1309-В89.
2. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемости жидкости. – М.: Наука, 1970. – 288 с.
3. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск: Наука, 1983. – 319с.

УДК 519.21

И.П.Ильинская

АРИФМЕТИКА ПОЛУГРУПП ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ, ПОРОЖДЕННЫХ ПОЛИНОМАМИ ЯКОБИ

Изучается арифметика мультипликативной полугруппы $J_{\alpha,\beta}$ последовательностей $t=\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$, представимых в виде

$$t_k=\int_0^{\pi/2}R_k^{(\alpha,\beta)}(\cos 2\varphi)M(d\varphi),$$

где $R_k^{(\alpha,\beta)}$ – полиномы Якоби, нормированные соотношением $R_k^{(\alpha,\beta)}(1)=1$; M – вероятностная мера на отрезке $[0,\pi/2]$. Основной результат статьи – описание класса $I_0(J_{\alpha,\beta})$ последовательностей из $J_{\alpha,\beta}$, не имеющих

ISBN 5-12-002791-1. Динамические системы и комплексный анализ. Киев, 1992

неразложимых делителей: $I_0(J_{\alpha,\beta}) = \{e\}$, где $e = \{1, 1, 1, \dots\}$.

Пусть $R_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ – полиномы Якоби [1, 2], нормированные соотношением $R_n^{(\alpha,\beta)}(1) = 1$. Считаем, что $\alpha \geq \beta > -1$, $\alpha \geq -1/2$. При этом

$$-1 < R_n^{(\alpha,\beta)}(x) < 1 \quad \text{при } -1 \leq x < 1, \text{ если } \alpha \neq \beta;$$
$$-1 < R_n^{(\alpha,\alpha)}(x) < 1 \quad \text{при } -1 < x < 1,\ \alpha > -1/2;\ R_n^{(\alpha,\alpha)}(-1) = (-1)^n. \tag{1}$$

Обозначим через $J_{\alpha,\beta}$ множество последовательностей $t = \{t_n\}_{n=0}^{\infty}$, $t_n \in R$, $t_0 = 1$, удовлетворяющих следующему условию: для любого конечного набора вещественных чисел a_n выполняется импликация

$$\min_{-1 \leq x \leq 1} \sum_n a_n R_n^{(\alpha,\beta)}(x) \geq 0 \Rightarrow \min_{-1 \leq x \leq 1} \sum_n a_n t_n R_n^{(\alpha,\beta)}(x) \geq 0 .$$

Очевидно, что множество $J_{\alpha,\beta}$ является топологической полугруппой относительно операции поэлементного умножения и топологии поэлементной сходимости. При $\alpha = \beta$ эту полугруппу ввел в рассмотрение Бохнер [3], а при произвольных α, β – Гаспер [4].

Положим

$$U = \{(\alpha,\beta) : \alpha \geq \beta > -1,\ \alpha + \beta \geq 0\} \cup \{(\alpha,\beta) : \alpha \geq \beta \geq -1/2\},$$
$$V = U \setminus \{(-1/2,\ -1/2)\}.$$

Следующая теорема дает общий вид элемента из $J_{\alpha,\beta}$ при $(\alpha,\beta) \in U$.

Теорема А [3, 4]. Последовательность t принадлежит $J_{\alpha,\beta}$ тогда и только тогда, когда

$$t_n = \int_0^{\pi/2} R_n^{(\alpha,\beta)}(\cos 2\varphi) M(d\varphi), \quad n = 0, 1, \dots, \tag{2}$$

где M – вероятностная мера на отрезке $[0, \pi/2]$. Представление единственно. При $\alpha = \beta > -1/2$ эта теорема доказана Бохнером [3], а в общем случае – Гаспером [4].

В дальнейшем будем считать, что $(\alpha,\beta) \in V$, т.е. исключим из рассмотрения случай полиномов Чебышева.

Арифметика полугрупп $J_{\alpha,\beta}$ при $\alpha = \beta > -1/2$ исследована достаточно полно (см. [3, 5, 6]). Данная работа посвящена изучению арифметики $J_{\alpha,\beta}$ при $\alpha \neq \beta$. Чтобы сформулировать основные результаты, введем некоторые определения.

Элемент $t = \{t_n\} \in J_{\alpha,\beta}$ назовем безгранично делимым б.д., если для каждого $m=2,3,\dots$ найдется элемент $t^{(m)}=\{t_n^{(m)}\}\in J_{\alpha,\beta}$ такой, что $t_n=[t_n^{(m)}]^m$ для всех n. Элемент $t^{(1)}\in J_{\alpha,\beta}$ назовем делителем элемента $t\in J_{\alpha,\beta}$, если найдется такой элемент $t^{(2)}\in J_{\alpha,\beta}$, что $t=t^{(1)}t^{(2)}$. Единичными элементами полугруппы $J_{\alpha,\beta}$ будем называть элементы $e_0=\{1\}_{n=0}^{\infty}$ и $u_0=\{(-1)^n\}_{n=0}^{\infty}$ в случае $\alpha=\beta$ и элемент e_0 в случае $\alpha\neq\beta$. Элемент $t\in J_{\alpha,\beta}$ назовем неразложимым, если он отличен от единичных и из равенства $t=t^{(1)}t^{(2)}$, где $t^{(1)},t^{(2)}\in J_{\alpha,\beta}$, следует, что один из элементов $t^{(1)},t^{(2)}$ является единичным.

Обозначим $I(J_{\alpha,\beta})$ – класс б.д. элементов полугруппы $J_{\alpha,\beta}$, $N(J_{\alpha,\beta})$ – класс неразложимых элементов, $I_0(J_{\alpha,\beta})$ – класс элементов, не имеющих неразложимых делителей.

Известны следующие результаты об арифметике полугрупп $J_{\alpha,\beta}$ при $\alpha=\beta>-1/2$. Лемперти [5], используя результат Бохнера [3], получил описание класса $I(J_{\alpha,\alpha})$; доказал для $J_{\alpha,\alpha}$ аналоги известных теорем А.Я.Хинчина об арифметике вероятностных распределений в R^n. В работе [6] получено следующее описание класса $I_0(J_{\alpha,\alpha})$.

<u>Теорема В</u> [6]

$$I_0(J_{\alpha,\alpha})=\left\{\left\{R_n^{(\alpha,\alpha)}(0)\right\}_{n=0}^{\infty};\ \left\{c+(-1)^n(1-c)\right\}_{n=0}^{\infty},\ 0\leq c\leq 1\right\}.$$

Отметим, что последовательности $\{R_n^{(\alpha,\alpha)}(0)\}$ соответствует в силу представления (2) мера M, сосредоточенная в точке $\pi/4$, а последовательности $\{c+(-1)^n(1-c)\}$ – мера, сосредоточенная на двухточечном множестве $\{0,\pi/2\}$.

Сформулируем результаты, полученные для полугрупп $J_{\alpha,\beta}$ при $\alpha\neq\beta$. Описание б.д. элементов дается следующей теоремой.

<u>Теорема 1</u>. Элемент t принадлежит классу $I(J_{\alpha,\beta})$, $\alpha\neq\beta$, тогда и только тогда, когда или $t=\{1,0,0,\dots\}$, или

$$t_n=\exp\left\{-\sigma n\left(n+\alpha+\beta+1\right)-\int\limits_{(0,\pi/2]}\frac{1-R_n^{(\alpha,\beta)}(\cos 2\varphi)}{1-\cos 2\varphi}\,G(d\varphi)\right\},\qquad(3)$$

где $n=0,1,2,\dots;\ \sigma\geq 0$; G – конечная мера на $(0,\pi/2]$. Представление единственно.

Теорема 1 получается из результата Гаспера [4] так же, как теорема Лемперти [5] об описании класса $I(J_{\alpha,\alpha})$ из соответствующего результата Бохнера [3]. Отметим, что теорема Лемперти о классе $I(J_{\alpha,\alpha})$ не является частным случаем теоремы 1 и формулируется несколько иначе.

Следующие две теоремы – аналоги теорем А.Я.Хинчина об арифметике вероятностных распределений в R^n.

Теорема 2. Пусть $t \in J_{\alpha,\beta}$, $\alpha \neq \beta$, $t \neq \{1,0,0,\dots\}$. Тогда t допускает представление

$$t = w_0 \prod_i t^{(i)},$$

где $w_0 \in I_0(J_{\alpha,\beta})$, $t^{(i)} \in N(J_{\alpha,\beta})$.

Теорема 3

$$I_0(J_{\alpha,\beta}) \subset I(J_{\alpha,\beta}), \quad \alpha \neq \beta.$$

Следует отметить, что условие $\alpha \neq \beta$ в теоремах 2 и 3 существенно. В случае $\alpha = \beta$ аналоги теорем А.Я.Хинчина, полученные Ламперти [5] (исправление неточности в формулировке см. в [6]), имеют несколько новый вид. Доказательства теорем 2 и 3 отличаются от доказательства этих теорем Ламперти лишь очевидными изменениями.

Описание класса $I_0(J_{\alpha,\beta})$ при $\alpha \neq \beta$ дается следующей теоремой.

Теорема 4

$$I_0(J_{\alpha,\beta}) = \{e_0\}, \quad \alpha \neq \beta.$$

Таким образом, класс $I_0(J_{\alpha,\beta})$ при $\alpha \neq \beta$ значительно уже класса $I_0(J_{\alpha,\alpha})$. Существенные отличия этого случая от $\alpha = \beta$ вызваны асимметрией полиномов Якоби при $\alpha \neq \beta$; это приводит ко многим изменениям как в формулировках результатов, так и в доказательствах.

Данная статья посвящена доказательству теоремы 4. В п. 1 сформулирован один результат Гаспера [4] о полиномах Якоби, который понадобится в дальнейшем и будет уточнен. Затем будет доказана теорема 4.

1. Приведем вспомогательные результаты о полиномах Якоби. Гаспер [4] доказал следующий результат, на котором основано доказательство теоремы А (приводим формулировку в удобной для нас форме).

Теорема С [4]. Для того чтобы выполнялось представление

$$R_n^{(\alpha,\beta)}(\cos 2\varphi) R_n^{(\alpha,\beta)}(\cos 2\psi) = \int_0^{\pi/2} R_n^{(\alpha,\beta)}(\cos 2\theta)\mu_{\varphi,\psi}(d\theta), \tag{4}$$

$$0 < \varphi, \quad \psi < \pi/2, \quad n = 0,1,2,\dots,$$

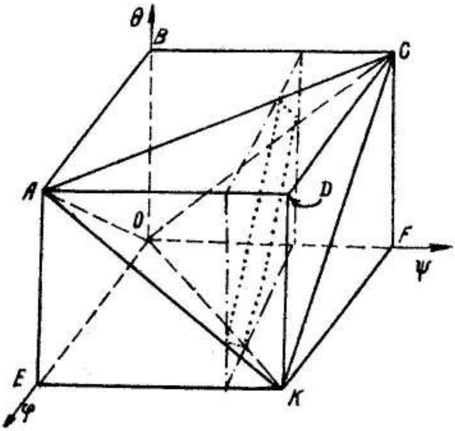
где $\mu_{\varphi,\psi}$ – вероятностная мера на $[0, \pi/2]$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $(\alpha,\beta) \in U$. Если $(\alpha,\beta) \in V$, то мера $\mu_{\varphi,\psi}$ абсолютно непрерывна и представление (4) записывается в виде

$$R_n^{(\alpha,\beta)}(\cos 2\varphi)\, R^{(\alpha,\beta)} \times$$

$$\times (\cos 2\psi) = \int_0^{\pi/2} R_n^{(\alpha,\beta)} \times$$

$$\times (\cos 2\theta)\, k(\varphi,\psi,\theta)\rho_0(\theta)d\theta,$$

$$0<\varphi, \quad \psi<\pi/2,$$



где $\rho_0(\theta)=2^{\alpha+\beta+2}(\sin\theta)^{2\alpha+1}(\cos\theta)^{2\beta+1}$, а ядро $k(\varphi,\psi,\theta)\geq 0$, $0<\varphi, \psi, \theta<\pi/2$, симметрично относительно φ, ψ, θ.

Гаспер [4] подробно исследовал поведение ядра $k(\varphi, \psi, \theta)$, в частности, показал, что функция $k(\varphi, \psi, \theta)$, определенная в открытом кубе $K=\{(\varphi, \psi, \theta): 0<\varphi, \psi, \theta<\pi/2\}$, строго положительна и непрерывна в следующих двух областях (рисунок):

$K_1=\{(\varphi,\psi,\theta)\in K: \theta>|\varphi-\psi|$ при всех φ, ψ; $\theta<\varphi+\psi$ при $\varphi+\psi\leq\pi/2$, $\theta<\pi-\varphi-\psi$ при $\varphi+\psi\geq\pi/2\}$ (внутренность тетраэдра $ACKO$);

$$K_2=\{(\varphi,\psi,\theta)\in K: \varphi+\psi+\theta>\pi\}$$

(внутренность пирамиды $ACKD$), а внутри пирамид $ABCO$, $AOKE$, $OCKF$ равна нулю.

Необходимо следующим образом уточнить результаты Гаспера: 1) выяснить, каковы предельные значения функции k на грани АСК изнутри K_1 и изнутри K_2 и каковы предельные значения k на гранях АСД, АДК, ДСК, точнее, при каких условиях на параметры α, β эти предельные значения положительны, а при каких равны нулю; 2) показать, что при $\alpha\neq\beta$ формула (5) остается справедливой, если одна или обе переменные φ, ψ равны $\pi/2$.

Обозначим

$$W=\{(\alpha,\beta): \alpha+\beta=0,\ 1/2<\alpha<1\};$$

$$X=\left\{(\varphi,\psi,\theta)\in K:\ \varphi+\psi+\theta=\pi\right\},$$
$$Z=\left\{(\varphi,\psi,\theta)\in K:\varphi,\psi\in\left(0,\pi/2\right],\ \theta=\pi/2,\ \varphi+\psi>\pi/2\right\}$$

(на рисунке X - это грань АСК без границы, Z получается из замкнутой грани АСД выбрасыванием отрезка АС). Докажем следующие леммы.

Лемма 1. Если $\alpha\neq\beta$, $(\alpha,\beta)\notin W$, то предельные значения ядра k на множестве X изнутри K_1 строго положительны, а если $(\alpha,\beta)\in W$ - то равны нулю.

Лемма 2. Если $(\alpha,\beta)\notin W$, $\alpha\neq\beta$, то предельные значения ядра k на множестве X изнутри K_2 строго положительны, а если $(\alpha,\beta)\in W$, то равны нулю.

Лемма 3. Пусть $\alpha\neq\beta$. Предельные значения ядра k на множестве Z строго положительны и конечны.

Так как функция $k(\varphi,\psi,\theta)$ симметрична относительно φ,ψ,θ, то утверждение, аналогичное лемме 3, верно и для граней АДК и ДСК.

Лемма 4. Если $\alpha\neq\beta$, то формула (5) остается справедливой и при $\varphi=\pi/2$, $0<\psi\leq\pi/2$, если считать значения функции k при φ или $\psi=\pi/2$ равными ее предельным значениям при φ или $\psi\to\pi/2$.

Замечание. Если $\alpha=\beta$, то при $\varphi=\pi/2$, $0<\psi<\pi/2$ остается справедливой формула (4), причем мера $\mu_{\pi/2,\psi}$ сосредоточена в точке $\pi-\psi$. При $\varphi=0$, $0<\psi<\pi/2$ формула (4) верна с мерой $\mu_{0,\psi}$, сосредоточенной в точке ψ при любых α,β.

При доказательстве лемм будем использовать полученное Гаспером [4] выражение функции k через гипергеометрическую функцию

$$F(u,v,w,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(u)_n(v)_n}{(w)_n\,n!}\,z^n\ , \tag{6}$$

где $(u)_0=1$, $(u)_n=u(u+1)\ldots(u+n-1)$, $n\geq 1$.
Обозначим

$$a=\sin\varphi\sin\psi,\quad b=\cos\varphi\cos\psi,\ c=\cos\theta,\ D=(b^2+c^2-a^2)/2bc.$$

В [4] показано, что

$$k(\varphi,\psi,\theta)=\frac{a^{-2\alpha}(1-c^2)^{-\alpha}(bc)^{\alpha-\beta-1}(1-D)^{\alpha-1/2}}{2^{\beta+5/2}B(\alpha+1/2,\ 1/2)}\ \times$$

$$\times\ F(1/2+\beta,\ 1/2-\beta,\ \alpha+1/2,\ (1-D)/2),\ (\varphi,\psi,\theta)\in K_1; \tag{7}$$

$$k(\varphi,\psi,\theta)=\frac{a^{-2\alpha}(1-c^2)^{-\alpha}(a^2-b^2-c^2)^{\alpha-\beta-1}}{2^{\alpha+\beta+1}B(\alpha-\beta,\beta+1)}\times$$

$$\times F((\beta-\alpha+1)/2,\ (\beta-\alpha+2)/2,\ \beta+1,D^{-2}),\ (\varphi,\psi,\theta)\in K_2\ . \tag{8}$$

Доказательство леммы 1. Так как $\varphi,\psi,\theta\in(0,\pi/2)$, то $0<a,b,c<1$. На множестве X выполняется равенство $D=-1$. Следовательно, на X обращаться в нуль в формуле (7) может разве лишь функция F. Исследуем эту функцию. Гипергеометрический ряд $F(u,v,w,1)$ сходится, если $u+v-w<0$, и расходится, если $u+v-w\geq 0$ [2]. Поэтому если $\alpha>1/2$, гипергеометрический ряд в (7) на X сходится, а если $\alpha\leq 1/2$, то расходится, за исключением того случая, когда он является конечной суммой. Последнее возможно лишь при $1/2\pm\beta=0,-1,-2,\ldots$ или, так как $(\alpha,\beta)\in V$, то при $\beta=\pm 1/2$. Но при таких β функция F в (7) равна 1. Следовательно, $F>0$ при $\alpha\leq 1/2$. Пусть $\alpha>1/2$. Тогда [2]

$$F(1/2+\beta,\ 1/2-\beta,\alpha+1/2,1)=\frac{\Gamma(\alpha+1/2)\,\Gamma(\alpha-1/2)}{\Gamma(\alpha-\beta)\,\Gamma(\alpha+\beta)}>0\ ,$$

если $\alpha>1/2,\alpha>\beta,\alpha+\beta>0$. Таким образом, случай $(\alpha,\beta)\notin W$ рассмотрен. Пусть $(\alpha,\beta)\in W$. Поскольку $F(u,v,v,x)=(1-x)^{-u}$, то $F\left(\frac{1}{2}+\beta,\frac{1}{2}-\beta,\alpha+\frac{1}{2},1\right)=0$. Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2 основано на представлении (8). Поскольку $a^2-b^2-c^2>0$ на X, то обращаться в нуль в (8) может лишь функция F. Ее исследование и доказательство леммы 2 проводятся так же, как в лемме 1.

Доказательство леммы 3. Легко видеть, что на множестве Z выполняется неравенство $a^2-b^2-c^2>0$, предельные значения D равны ∞ и, следовательно, предельные значения F из (8) равны 1. Отсюда следует утверждение леммы.

Доказательство леммы 4. Найдем $k(\pi/2,\psi,\theta)=\lim\limits_{\varphi\to\pi/2}k(\varphi,\psi,\theta)$. Если $\theta<\pi/2-\psi$, то $k(\pi/2,\psi,\theta)=0$, поскольку $k(\varphi,\psi,\theta)=0$ внутри пирамиды АОКЕ. Пусть $\theta>\pi/2-\psi$. Используем для $k(\varphi,\psi,\theta)$ представление (8). Ясно, что $D\to\infty$ при $\varphi\to\pi/2$, следовательно, F в формуле (8) стремится к 1. Поэтому при $\theta>\pi/2-\psi$

$$k(\pi/2,\psi,\theta)=\frac{(\sin^2\psi-\cos^2\theta)^{\alpha-\beta-1}(\sin\psi\sin\theta)^{-2\alpha}}{2^{\alpha+\beta+1}B(\alpha-\beta,\beta+1)}\ .$$

Элементарные вычисления показывают, что

$$\int_0^{\pi/2} k(\pi/2,\ \psi,\ \theta)\rho_0(\theta)d\theta = 1 \tag{9}$$

Покажем, что в равенстве (5) можно перейти к пределу под знаком интеграла при $\varphi\to\pi/2$. Функция $k(\varphi,\psi,\theta)$ непрерывна на $\bar{K}_2\setminus\bar{X}$, где черта означает замыкание (см. лемму 3). Зафиксируем $\psi\in(0,\pi/2)$ (см. сечение куба K плоскостью $\psi=const$ на рисунке). Имеем

$$\forall\sigma>0,\ \exists c_{\sigma,\psi}>0,\quad \forall\varphi\in[\pi/2-\sigma/2,\ \pi/2],$$

$$\forall\theta\in[\pi/2-\psi+\sigma,\ \pi/2]:\ k(\varphi,\psi,\theta)\leqslant c_{\sigma,\psi}.$$

Поэтому подынтегральная функция в (5) имеет суммируемую мажоранту в промежутке $\theta\in[\pi/2-\psi+\sigma,\pi/2]$. Поскольку $k(\varphi,\psi,\theta)=0$ при $\theta<\pi/2-\psi-\sigma$, $\varphi\geqslant\pi/2-\sigma/2$, то интеграл в (5) можно представить в виде суммы двух интегралов $(\pi/2-\sigma/2\leqslant\varphi<\pi/2)$:

$$I_1=\int_{\pi/2-\psi-\sigma}^{\pi/2-\psi+\sigma},\qquad I_2=\int_{\pi/2-\psi+\sigma}^{\pi/2}.$$

В I_1 можно перейти к пределу под знаком интеграла по некоторой подпоследовательности $\varphi_j\to\pi/2$ в силу теорем Хелли, а в I_2 – вследствие наличия суммируемой мажоранты. Поэтому

$$R_n^{(\alpha,\beta)}(-1)R_n^{(\alpha,\beta)}(\cos 2\psi)=\int_{\pi/2-\psi-\sigma}^{\pi/2-\psi+\sigma}R_n^{(\alpha,\beta)}(\cos 2\theta)F(d\theta)+$$

$$+\int_{\pi/2-\psi+\sigma}^{\pi/2}R_n^{(\alpha,\beta)}(\cos 2\theta)k(\pi/2,\psi,\theta)\rho_0(\theta)d\theta,$$

где $F(\theta)$ – некоторая неубывающая функция. В последнем равенстве перейдем к пределу при $\sigma\to+0$. Получим

$$R_n^{(\alpha,\beta)}(-1)R_n^{(\alpha,\beta)}(\cos 2\psi)=R_n^{(\alpha,\beta)}(\cos 2(\pi/2-\psi))\left[F(\pi/2-\psi+0)-F(\pi/2-\psi-0)\right]+$$

$$+\int_{\pi/2-\psi}^{\pi/2} R_n^{(\alpha,\beta)}(\cos 2\theta)k(\pi/2,\psi,\theta)\rho_0(\theta)d\theta .$$

Полагая здесь $n=0$ и используя формулу (9) и тот факт, что $k(\pi/2, \psi,\theta)=0$ при $\theta<\pi/2-\psi$, находим $F(\pi/2-\psi+0)-F(\pi/2-\psi-0)=0$. Следовательно,

$$R_n^{(\alpha,\beta)}(-1)R_n^{(\alpha,\beta)}(\cos 2\psi)=\int_0^{\pi/2} R_n^{(\alpha,\beta)}(\cos 2\theta)k(\pi/2,\psi,\theta)\rho_0(\theta)d\theta \qquad (10)$$

при $\psi\in(0,\pi/2)$. Таким образом, лемма доказана для случая $\varphi=\pi/2$, $0<\psi<\pi/2$. Чтобы рассмотреть случай $\varphi=\psi=\pi/2$, нужно в (10) перейти к пределу при $\psi\to\pi/2$, что делается аналогично. Лемма 4 доказана.

Используя явный вид функций k, ρ_0 и числа $R_n^{(\alpha,\beta)}(-1)$ (см. [2]), легко получаем следующее следствие.

<u>Следствие</u>. Если $-1\le x<1$, $(\alpha,\beta)\in V$, $\alpha\ne\beta$, то справедливо представление

$$R_n^{(\alpha,\beta)}(x)=(-1)^n\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta)}(1-x)^{-\alpha}\int_{-1}^{-x} R_n^{(\alpha,\beta)}(y)\frac{(1+y)^{\beta}}{(-x-y)^{1-\alpha+\beta}}dy .$$

Отметим еще одно свойство функции k, которое будет использоваться в дальнейшем. Полагая в (5) $n=0$, получаем

$$\int_0^{\pi/2} k(\varphi,\psi,\theta)\rho_0(\theta)d\theta=1. \qquad (11)$$

2. Дадим описание класса $I_0(J_{\alpha,\beta})$ при $\alpha\ne\beta$. Доказательство теоремы 4 основано на том же методе, что и доказательство теоремы В [6]. Отличия в доказательствах и в формулировке результата связаны с асимметрией полиномов Якоби при $\alpha\ne\beta$, что приводит к тому, что по-разному ведет себя функция $k(\varphi,\psi,\theta)$: она положительна при $\alpha\ne\beta$ на $K_1\cup K_2$, а при $\alpha=\beta$ – только на K_1 (это следствие известной формулы Гегенбауэра [2]).

<u>Доказательство теоремы 4.</u> Пусть $t\in I(J_{\alpha,\beta})$, $t\ne\{1,0,0,\dots\}$. Тогда элемент t представим формулой (3). Для доказательства теоремы достаточно доказать следующие два предложения.

Предложение 1. Если в (3) $\sigma=0$, $G((0,\pi/2])>0$, то $t\notin I_0(J_{\alpha,\beta})$.

Предложение 2. Если в (3) $\sigma>0$, $G((0,\pi/2])=0$, то $t\notin I_0(J_{\alpha,\beta})$.

Заметим, что если в (3) $\sigma=0$, $G((0,\pi/2])=0$, то $t=e_0$. Из (1) следует, что $-1<t_n\leq 1$ $(\forall t\in J_{\alpha,\beta}, \alpha\neq\beta)$. Поэтому единственным делителем элемента e_0 является e_0. Следовательно, $e_0\in I_0(J_{\alpha,\beta})$. Таким образом, из предложений 1, 2, учитывая теорему 3, действительно получаем теорему 4.

Отметим, что с помощью равенства (2) каждому заряду M на отрезке $[0,\pi/2]$ можно поставить в соответствие последовательность $\{t_n\}$. Обозначим ее $t(M)=\{t_n(M)\}$. Это соответствие инъективно. На множестве зарядов введем операцию композиции с помощью равенства

$$M=M_1\circ M_2 \Longleftrightarrow t_n(M)=t_n(M_1)\,t_n(M_2) \qquad \forall n .$$

Доказательство предложения 1. Здесь используются некоторые приемы работы И.В.Островского [7]. Так как $G((0,\pi/2])>0$, то существует точка $\xi\in(0,\pi/2]$ такая, что мера G любой ее окрестности положительна. Обозначим

$$\Lambda_{\xi,\delta}=\Lambda=\begin{cases}[\xi-\delta,\ \xi+\delta], & \xi\neq\pi/2,\\ [\pi/2-\delta,\ \pi/2], & \xi=\pi/2.\end{cases}$$

Считаем $\delta=\delta(\xi)>0$ столь малым, что $\Lambda\subset(0,\pi/2)$ при $\xi\neq\pi/2$. Имеем $G(\Lambda)>0$ при любом δ. Обозначим через $Q(d\varphi)$ сужение меры $G(d\varphi)/(1-\cos 2\varphi)$ на множество Λ, через $E(d\varphi)$ – сужение меры $\rho_0(\varphi)d\varphi$ на множество $[4\delta,\ 5\delta]$. Считаем, что $\delta<\xi/6$. Тогда носители мер Q и E не пересекаются. В ходе доказательства на число δ будут наложены и другие ограничения.

Обозначим через t' следующую последовательность:

$$t'_n=\exp\left\{\int_0^{\pi/2}\left[R_n^{(\alpha,\beta)}(\cos 2\varphi)-1\right](Q-\varepsilon E)(d\varphi)\right\},\quad \varepsilon>0 .$$

Для доказательства утверждения 1 достаточно установить, что $t'\in J_{\alpha,\beta}$ при некотором $\varepsilon>0$. Действительно, пусть $t'\in J_{\alpha,\beta}$. Тогда t' – делитель t. Но $t'\notin I(J_{\alpha,\beta})$, так как заряд $Q-\varepsilon E$ принимает и отрицательные значения, а единственность представления (3) сохраняется и для зарядов. Поэтому $t'\notin I_0(J_{\alpha,\beta})$ и, следовательно, $t\notin I_0(J_{\alpha,\beta})$.

Запишем t' в следующем виде:

$$t'_n = \int_0^{\pi/2} R_n^{(\alpha,\beta)}(\cos 2\varphi)\, H(d\varphi)\,,$$

где

$$H = e^{-d}\left[\chi + \sum_{n=1}^{\infty} (Q - \theta E)^{*n} / n!\right]\,,$$

$d = (Q-\theta E)([0,\pi/2])$, χ – вероятностная мера на $[0,\pi/2]$, сосредоточенная в нуле, т.е. такая, что $t(\chi) = e_0$. Чтобы доказать, что $t' \in J_{\alpha,\beta}$, следует показать, что H – мера.

Лемма 5. Если конечные меры M' и M'' на отрезке $[0,\pi/2]$ не имеют атомов в нуле, то мера $M = M' \circ M''$ абсолютно непрерывна относительно меры $\rho_0(\theta)d\theta$ и ее плотность (относительно $\rho_0(\theta)d\theta$) выражается формулой

$$p(\theta) = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} k(\varphi, \psi, \theta)\, M'(d\varphi)\, M''(d\psi)\,. \tag{12}$$

Утверждение леммы легко получается, если в равенстве $t_n(M) = t_n(M')t_n(M'')$ воспользоваться представлением (2) для $t_n(M'), t_n(M'')$, а затем перейти от произведения двух интегралов к двойному интегралу и с учетом того, что меры M', M'' не имеют атомов в нуле, применить формулу (5), справедливую, как следует из теоремы С и леммы 4, при $\varphi, \psi \in (0,\pi/2]$.

В дальнейшем все плотности будут пониматься как плотности относительно меры $\rho_0(\theta)d\theta$.

Лемма 6. Для любой конечной меры P на $[0,\pi/2]$, не имеющей атома в нуле, плотность $q(\theta)$ меры $P \circ E$ ограничена.

Используя лемму 5, определение меры E, равенство (11) и симметрию функции k относительно своих переменных, получаем утверждение леммы:

$$q(\theta) = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} k(\varphi, \psi, \theta)\, P(d\varphi)\, E(d\psi) \leq$$

$$\leq \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} k(\varphi,\psi,\theta)\, P(d\varphi)\, \rho_0(\psi)\, d\psi = P([0,\pi/2])\,.$$

Далее доказательство предложения 1 будет проводиться отдельно для следующих трех случаев: 1) $(\alpha,\beta) \notin W$; 2) $(\alpha,\beta) \in W$, мера G не сосредоточена в точке $\pi/3$; 3) $(\alpha,\beta)\in W$, мера G сосредоточена в точке $\pi/3$.

<u>Случай 1</u>. В этом случае в силу лемм 1, 2 предельные значения k на X изнутри K_1 и изнутри K_2 положительны. Считаем, что функция k доопределена на X своими предельными значениями изнутри K_1.

<u>Лемма 7</u>. При достаточно малом $\varepsilon=\varepsilon(\delta,\xi)>0$ заряд $-\varepsilon E+(Q-\varepsilon E)^{*2}/2$ является мерой.

<u>Доказательство леммы 7</u>. Обозначим через $p_2(\theta)$ плотность меры $Q^{2\circ}$. По лемме 5

$$p_2(\theta)=\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{\pi/2}k(\varphi,\psi,\theta)\,Q(d\varphi)\,Q(d\psi)\,. \tag{13}$$

Оценим $p_2(\theta)$ снизу. Для этого получим оценку снизу ядра k при $\varphi,\psi\in\Lambda$. Поскольку $k>0$ на K_1, K_2, W, то $k(\varphi,\psi,\theta)>0$, если $0<\varphi,\psi\leq\pi/2$, $|\varphi-\psi|<\theta<\varphi+\psi$ при $\varphi+\psi\leq\pi/2$ и $|\varphi-\psi|<\theta\leq\pi/2$ при $\varphi+\psi>\pi/2$. Поэтому для любого $\tau>0$ найдется $c=c(\tau)>0$ такое, что $k(\varphi,\psi,\theta)\geq c$, если

$$0<\varphi,\psi\leq\pi/2,\quad |\varphi-\psi|+\tau\leq\theta\leq\begin{cases}\varphi+\psi-\tau, & \varphi+\psi\leq\pi/2+\tau,\\ \pi/2, & \varphi+\psi\geq\pi/2+\tau.\end{cases} \tag{14}$$

Отметим, что если $\varphi,\psi\in\Lambda$, то $\max|\varphi-\psi|\leq2\delta$, $\min(\varphi+\psi)=2\xi-2\delta$, а также $\varphi+\psi\leq\pi/2+2\delta$ при $\xi\leq\pi/4$ и $\varphi+\psi\geq2\xi-2\delta>\pi/2+2\delta$ при $\xi>\pi/4$ (для выполнения последнего неравенства считаем, что $4\delta<2\xi-\pi/2$). Поэтому, полагая в (14) $\tau=2\delta$, находим, что $k(\varphi,\psi,\theta)\geq c$, если $\varphi,\psi\in\Lambda$, $\theta\in T_{\xi,\delta}=T$, где

$$T=\begin{cases}[4\delta,\ 2\xi-4\delta], & \xi\leq\pi/4,\\ [4\delta,\ \pi/2], & \xi>\pi/4.\end{cases}$$

Из (13) и полученной оценки ядра k находим

$$p_2(\theta)\geq c_1\,,\quad \theta\in T \tag{15}$$

(здесь и далее через c_i обозначены величины, зависящие разве лишь от δ и ξ).

Обозначим через $q_1(\theta)$ плотность меры $Q\circ E$. По лемме 5

$$q_1(\theta)=\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{\pi/2}k(\varphi,\psi,\theta)\,Q(d\varphi)\,E(d\psi)\,.$$

Выясним, при каких θ будет $q_1(\theta)=0$. Обозначим

$$S_{\varphi,\psi}=\begin{cases}[|\varphi-\psi|,\ \varphi+\psi], & \varphi+\psi<\pi/2,\\ [|\varphi-\psi|,\ \pi/2], & \varphi+\psi>\pi/2.\end{cases} \tag{16}$$

Известно, что

$$k(\varphi,\psi,\theta)=0,\quad \theta\notin S_{\varphi,\psi}. \tag{17}$$

Пусть $\varphi\in A$, $\psi\in[4\delta,5\delta]$. Тогда $\min|\varphi-\psi|=\xi-6\delta$, $\max(\varphi+\psi)<\xi+6\delta$. Кроме того, если $\xi<\pi/2$, то $\varphi+\psi<\xi+6\delta<\pi/2$ при малых δ. Поэтому $k(\varphi,\psi,\theta)=0$ при указанных φ,ψ и $\theta\notin L_{\xi,\delta}=L$, где

$$L=\begin{cases}[\xi-6\delta,\ \xi+6\delta], & \xi\neq\pi/2,\\ [\pi/2-6\delta,\ \pi/2], & \xi=\pi/2.\end{cases}$$

Следовательно, $q_1(\theta)=0$, если $\theta\notin L$.

Легко видеть, что $T\supset L$, если δ достаточно мало. Кроме того, $q_1(\theta)<c_2$ в силу леммы 6. Следовательно, $p_2(\theta)-2\varepsilon q_1(\theta)>c_1-2\varepsilon c_2>0$, если $\theta\in T$, а ε достаточно мало, и $p_2(\theta)-2\varepsilon q_1(\theta)=p_2(\theta)>0$, если $\theta\notin T$. Поэтому заряд $Q^{2\circ}-2\varepsilon Q\circ E$ является мерой при малых $\varepsilon>0$. Заметим, что $T\supset \operatorname{supp} E=[4\delta,5\delta]$. Поэтому $-\varepsilon E+(Q-\varepsilon E)^{2\circ}/2$ – мера при малых ε. Лемма 7 доказана.

<u>Лемма 8</u>. При достаточно малом $\varepsilon>0$ заряд $(Q-\varepsilon E)^{3\circ}$ является мерой.

<u>Доказательство леммы 8</u>. Поскольку

$$(Q-\varepsilon E)^{3\circ}=[Q\circ(Q-6\varepsilon Q\circ E)]/2+(Q^{3\circ}-2\varepsilon^3E^{3\circ})/2+3\varepsilon^2Q\circ E^{2\circ},$$

а при доказательстве леммы 7 было установлено, что заряд $Q^{2\circ}-2\varepsilon Q\circ E$ является мерой при малых ε, то достаточно показать, что $Q^{3\circ}-2\varepsilon^3E^{3\circ}$ – мера при малых ε.

Обозначим через $q_2(\theta)$ плотность меры $E^{3\circ}$. Из (12) и (17) следует, что $\operatorname{supp} E^{3\circ}\subset[0,15\delta]$ при малых δ, так как $\operatorname{supp} E=[4\delta,5\delta]$. Поэтому достаточно доказать, что плотность $p_3(\theta)$ меры $Q^{3\circ}$ удовлетворяет неравенству

$$p_3(\theta)\geq c_3,\qquad \theta\in[0,15\delta].$$

Записывая $p_3(\theta)$ с помощью формулы (12) и используя (15), находим

$$p_3(\theta)=\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}k(\varphi,\psi,\theta)p_2(\varphi)p_0(\varphi)\,d\varphi\,Q(d\psi)\geq$$

$$\geqslant c_1 \int_0^{\pi/2} \left[\int k(\varphi, \psi, \theta) p_0(\varphi) d\varphi \right] Q(d\psi) . \qquad (18)$$

Нетрудно проверить, что если $\psi \in \Lambda$, $\theta \in [0, 15\delta]$, то $T \supset S_{\psi,\theta}$ при малых δ ($S_{\psi,\theta}$ определено в (16)). Поэтому, учитывая (11) и (17), получаем оценку

$$p_3(\theta) \geqslant c_1 \int_0^{\pi/2} \left[\int_{S_{\psi,\theta}} k(\varphi, \psi, \theta) p_0(\varphi) d\varphi \right] Q(d\psi) =$$

$$= c_1 Q\left([0, \pi/2] \right) = c_3 , \quad \theta \in [0, 15\delta] .$$

Завершение доказательства такое же, как в лемме 7.

Поскольку любое натуральное $n > 3$ представимо в виде $n = 2l + 3m$, где l, m - натуральные числа, то из лемм 7, 8 следует, что при некотором достаточно малом $\varepsilon > 0$ все заряды $(Q - \varepsilon E)^{n^\circ}$, $n > 3$ являются мерами. Следовательно, H - мера. Предложение 1 в случае 1 доказано.

Случай 2. В этом случае, согласно леммам 1, 2, предельные значения ядра k на X изнутри K_1 и изнутри K_2 равны нулю. Кроме того, поскольку мера G не сосредоточена в точке $\pi/3$, то можем считать, что выбранное ранее число ξ не равно $\pi/3$. Укажем на изменения в доказательстве, которые возникают в связи с этим. Доказательство леммы 8 в этом случае проводится аналогично, но вместо неравенства (15) получаем, что $p_2(\theta) \geqslant c_4$, если $\theta \in \tilde{T}_{\xi,\delta} = \tilde{T}$, где

$$\tilde{T} = \begin{cases} [4\delta, \ 2\xi - 4\delta], & \xi \leqslant \pi/4 , \\ [4\delta, \ \pi - 2\xi - 4\delta] \cup [\pi - 2\xi + 4\delta, \ \pi/2], & \xi > \pi/4 . \end{cases}$$

Равенство $q_1(\theta) = 0$ сохраняется при $\theta \notin L$. Поэтому остается проверить, что $\tilde{T} \supset L$ при малых δ. Это легко получается, если учесть, что $\xi \neq \pi/3$, и рассмотреть отдельно такие случаи: $\xi \leqslant \pi/4$, $\pi/4 < \xi < \pi/3$, $\pi/3 < \xi < \pi/2$, $\xi = \pi/2$.

Случай 3. Как и в случае 2, предельные значения ядра k на X изнутри K_1 и K_2 равны нулю, но теперь мера G сосредоточена в точке $\pi/3$.

Обозначим через $p_n(\theta)$ плотность меры Q^{n° и изучим поведение $p_n(\theta)$ при разных $n \geqslant 2$. Из (13) находим, что $p_2(\theta) = hk(\pi/3, \pi/3, \theta)$, где $h = Q(\{\pi/3\})$. Из свойств ядра k вытекает, что $p_2(\theta) > 0$, если $\theta \in (0, \pi/3) \cup (\pi/3, \pi/2]$, $p_2(\pi/3) = 0$.

Из (18) получаем

$$\rho_3(\theta) = h\int_0^{\pi/2} k\left(\varphi, \pi/3, \theta\right) \rho_2(\varphi)\rho_0(\varphi)d\varphi . \tag{19}$$

Покажем, что для любого $\omega > 0$ найдется $c = c(\omega) > 0$ такое, что

$$\rho_3(\theta) \geqslant c, \quad \theta \in [\omega, \pi/2] . \tag{20}$$

Рассмотрим сечение куба K плоскостью $\psi = const$ (см. рисунок) и подынтегральную функцию в (19) как функцию переменных φ и θ в этом сечении. По свойствам k и ρ_2 подынтегральная функция положительна и непрерывна в областях $\{\psi = \pi/3\} \cap K_1$ и $\{\psi = \pi/3\} \cap (\bar{K}_2 \setminus \bar{X})$, за исключением пересечения этих областей с плоскостью $\varphi = \pi/3$, где она равна нулю. Отсюда, как нетрудно видеть, следует (20).

Рассмотрим плотность

$$\rho_4(\theta) = h\int_0^{\pi/2} k\left(\varphi, \pi/3, \theta\right) \rho_3(\varphi)\rho_0(\varphi)d\varphi . \tag{21}$$

Покажем, что

$$\rho_4(\theta) \geqslant c_5 > 0, \quad \theta \in [0, \pi/2] . \tag{22}$$

Аналогично (20) получаем, что $\rho_4(\theta)$ отделена от нуля вне любой окрестности нуля. Рассмотрим $\theta \in [0, \omega]$, где $\omega < \pi/6$. Поскольку $k(\varphi, \pi/3, \theta) = 0$ при $\varphi \notin [\pi/3 - \theta, \pi/3 + \theta]$, то из (21), учитывая (20) и (11), находим

$$\rho_4(\theta) \geqslant hc\int_{\pi/3-\theta}^{\pi/3+\theta} k\left(\varphi, \pi/3, \theta\right)\rho_0(\varphi)d\varphi - hc, \quad \theta \in [0, \omega] ,$$

чем (22) доказано.

Из равенства

$$\rho_n(\theta) = h\int_0^{\pi/2} k\left(\varphi, \pi/3, \theta\right)\rho_{n-1}(\varphi)\rho_0(\varphi)d\varphi ,$$

используя (22) и (11), получаем, что найдется $c_6 = c_6(n) > 0$ такое, что $\rho_n(\theta) \geqslant c_6$, $\theta \in [0, \pi/2]$, $n = 4, 5, \ldots$ Аналогично доказательству леммы 7 заключаем, что заряд $(Q - \varepsilon E)^{n\circ}$ является мерой при некотором достаточно малом $\varepsilon = \varepsilon(n)$, $n \geqslant 4$. Поскольку любое натуральное число $n \geqslant 12$ представимо в виде $n = 4l + 5m$, то для некоторого достаточно малого $\varepsilon > 0$ (не зависящего от n) все заряды $(Q - \varepsilon F)^{n\circ}$, $n \geqslant 4$ являются мерами. Для доказательства того, что H – мера, осталось проверить, что заряд

$$Q - \varepsilon E + (Q - \varepsilon E)^{2\circ}/2 + (Q - \varepsilon E)^{3\circ}/6 + (Q - \varepsilon E)^{4\circ}/24$$

является мерой при достаточно малых ε. Это следует из (22). Случай 3 рассмотрен. Предложение 1 доказано.

Доказательство предложения 2. Доказательство аналогично приведенному в [6] для случая $\alpha = \beta$. Обозначим $\varkappa'$ вероятностную меру на $[0, \pi/2]$ с плотностью $c(\alpha,\beta)\rho_0(\theta)$, где $c(\alpha,\beta) > 0$. Ясно, что $t(\varkappa') = \{1, 0, 0, \ldots\}$. Ранее было отмечено, что $t(\varkappa) = e_0$. Поэтому для любой вероятностной меры M на $[0, \pi/2]$ выполняются равенства $M \circ \varkappa' = \varkappa'$, $M \circ \varkappa = M$. Из этих равенств легко получаем, что M представима в виде

$$M = \frac{M - \varepsilon\varkappa'}{1 - \varepsilon} \circ \left[(1-\varepsilon)\varkappa + \varepsilon\varkappa'\right], \quad \varepsilon > 0 . \qquad (23)$$

Обозначим $\varkappa'' = (1-\varepsilon)\varkappa + \varepsilon\varkappa'$. Тогда $t(\varkappa'') = \{1, 1-\varepsilon, 1-\varepsilon, \ldots\} \in I(J_{\alpha,\beta})$. В силу предложения 1 $t(\varkappa'') \notin I_0(J_{\alpha,\beta})$. Поэтому для доказательства предложения 2 нужно применить (23) к мере M, соответствующей последовательности $\{exp[-\sigma n(n+\alpha+\beta+1)]\}$, и показать, что заряд $M - \varepsilon\varkappa'$ является мерой при некотором $\varepsilon > 0$.

Из свойств ортогональности полиномов Якоби следует, что мера M имеет плотность

$$\rho^{\sigma}_{\alpha,\beta}(\varphi) = \frac{2^{-\alpha-\beta-1}}{[\Gamma(\alpha+1)]^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,\Gamma(n+\beta+1)\exp\{\sigma n(n+\alpha+\beta+1)\}} R_n^{(\alpha,\beta)}(\cos 2\varphi). \qquad (24)$$

Достаточно показать, что $\min\limits_{0 \le \varphi \le \pi/2} \rho^{\sigma}_{\alpha,\beta}(\varphi) > 0$. Используя формулу дифференцирования для полиномов Якоби [2], с помощью элементарных вычислений находим

$$\frac{d}{d\varphi}\rho^{\sigma}_{\alpha,\beta}(\varphi) = -4(\alpha+1)e^{-2\sigma}\sin 2\varphi\,\rho^{\sigma}_{\alpha+1,\beta+1}(\varphi) .$$

Из определения множества V следует, что если $(\alpha,\beta) \in V$, то $(\alpha+1, \beta+1) \in V$. Поэтому $\rho^{\sigma}_{\alpha+1,\beta+1}(\varphi) \ge 0$. Следовательно, $\rho^{\sigma}_{\alpha,\beta}(\varphi)$ – невозрастающая функция переменной φ, и достаточно показать, что $\rho^{\sigma}_{\alpha,\beta}(\pi/2) > 0$. Нетрудно проверить, что

$$\frac{d}{d\sigma}\rho^{\sigma}_{\alpha,\beta}(\pi/2) = 4(\alpha+1)(\beta+1)e^{-2\sigma}\rho^{\sigma}_{\alpha+1,\beta+1}(\pi/2) \ge 0 .$$

Таким образом, $\rho^{\sigma}_{\alpha,\beta}(\pi/2)$ – неотрицательная и неубывающая функция от σ на полуоси $\sigma>0$. Из (24) вытекает, что она аналитична в области $Re\,\sigma>0$. Отсюда следует, что $\rho^{\sigma}_{\alpha,\beta}(\pi/2)>0$, $\sigma>0$. Утверждение 2, а значит, и теорема 4 доказаны.

Отметим, что из леммы 5 вытекает следующее достаточное условие неразложимости элементов $t(M)\in J_{\alpha,\beta}$ при $\alpha\neq\beta$: если мера M не сосредоточена в нуле и не имеет абсолютно непрерывной части, то элемент $t(M)$ неразложим. Из этого условия следует, что класс $N(J_{\alpha,\beta})$ плотный в $J_{\alpha,\beta}$.

1. Сеге Г. Ортогональные многочлены. – М.: Физматгиз, 1962. – 500с.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1973 –1974. – Т. 1. – 1973. – 296 с.; Т. 2. – 1974. – 296с.
3. Bochner S. Positive zonal functions on spheres // Proc. Nat. Acad. Sci. – 1954. – 40. – P. 1141-1147.
4. Gasper G. Banach algebras for Jacobi series and positivity of a kernel // Ann. Math. – 1972. – 95. – P. 261-280.
5. Lamperti J. The arithmetic of certain semigroups of positive operators // Proc. Camb. Phil. Soc. – 1968. – 64. – P.161-166.
6. Трухина И.П. Об одной проблеме, связанной с арифметикой вероятностных мер на сфере // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1979. – 87. – С. 143-158.
7. Островский И.В. Описание класса I_0 в одной специальной полугруппе вероятностных мер // Мат. физика и функцион. анализ. – 1973. – Вып. 4. – С. 3-12.

УДК 519.21

А.И.Ильинский

ОБ АРИФМЕТИКЕ ОБОБЩЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ Б.М.ЛЕВИТАНА

Изучена арифметика мультипликативной полугруппы обобщенных характеристических функций (о.х.ф.) Б.М.Левитана. Показано, что эта полугруппа является почти дельфийской; получен аналог формулы Леви-Хинчина, дающий общий вид безгранично делимых о.х.ф.; описан класс I_0 о.х.ф., не имеющих неразложимых делителей; показано, что класс неразложимых о.х.ф. является всюду плотным множеством типа G_δ.

1. В работе [3] указан класс абстрактных полугрупп, названных дельфийскими, для которых справедливы теоремы, аналогичные двум фундаментальным теоремам А.Я.Хинчина из арифметики вероятностных законов (см., например, [2]). Напомним некоторые определения, связанные с понятием дельфийской полугруппы.

Пусть G – коммутативная полугруппа с единицей e. Для полугрупповой операции будем использовать мультипликативную запись.

ISBN 5-12-002791-1. Динамические системы и комплексный анализ. Киев, 1992

Элемент g_1 называется делителем элемента g (пишем $g_1 | g$), если для некоторого $g_2 \in G$ выполняется равенство $g = g_1 g_2$. Введем обозначения:

$$N(G) = \left\{ g \in G \ : h | g \Rightarrow h = e \ \text{ или } \ h = g \right\},$$

$$I(G) = \left\{ g \in G \ : \forall n = 1, 2, \ldots, \exists h_n \in G, \ \ h_n^n = g \right\},$$

$$I_0(G) = \left\{ g \in G \ : h | g \Rightarrow h \notin N(G) \right\}.$$

Элементы класса $N(G)$ называются неразложимыми, а элементы класса $I(G)$ – безгранично делимыми.

Дельфийской полугруппой называется коммутативная топологическая отделимая полугруппа G с единицей e, если она наделена непрерывным гомоморфизмом Δ в аддитивную полугруппу вещественных неотрицательных чисел и выполняются следующие условия:

(A) $\Delta(g) = 0 \Leftrightarrow g = e$;

(B) множество делителей всякого элемента $g \in G$ компактно;

(C) если множество элементов $\{g_{kn}\}_{k=1, n=1}^{n \to \infty}$ такое, что $\lim_{n \to \infty} \max_{1 \le k \le n} \Delta(g_{kn}) = 0$ и предел $g = \lim_{n \to \infty} \prod_{k=1}^{n} g_{kn}$ существует, то он безгранично делим $(g \in I(G))$.

Аналоги теорем А.Я.Хинчина для дельфийских полугрупп, как показано в [3], имеют такой вид.

Теорема I. Для всякого элемента $g \in G$ справедливо представление (вообще говоря, не единственное) $g = g_0 \prod_{k \in A} g_k$, где $g_0 \in I_0(G)$, $g_k \in N(G)$, A – не более чем счетное множество, возможно, пустое.

Теорема II. $I_0(G) \subset I(G)$.

В работе [3] введено понятие почти дельфийской полугруппы, которое позволило включить в рамки абстрактной теории полугруппу вероятностных законов на R^n. Пусть G – полугруппа; H – ее подполугруппа. Подполугруппа H называется наследственной, если делители (в G) всех элементов из подполугруппы H лежат в H: $g \in H$, $g_1 \in G$, $g_1 | g \Rightarrow g_1 \in H$. Полугруппа G называется почти дельфийской, если она представляется в виде $G = \bigcup_{\tau} H_\tau$, где $\{H_\tau\}$ – некоторое семейство наследственных подполугрупп, каждая из которых является дельфийской. Легко убедиться в том, что теоремы I и II выполняются в почти дельфийских полугруппах [3].

Основными вопросами, возникающими при изучении конкретных дельфийских или почти дельфийских полугрупп, являются вопросы о характеристике классов $I(G), I_0(G), N(G)$. Изучение этих вопросов для факторполугруппы вероятностных законов в R^n с операцией композиции и топологией слабой сходимости по подполугруппе вырожденных законов составляет предмет арифметики вероятностных законов (см. [2, 8]). Другие важные примеры дельфийских и почти дельфийских полугрупп изучались в работах Д.Кендалла, Р.Давидсона, И.В.Островского, А.М.Улановского, И.П.Трухиной и др. (обзор и библиографию работ по этой тематике см. в [8]). В настоящей статье изучается арифметика мультипликативной полугруппы обобщенных характеристических функций Б.М.Левитана [1]. Результаты были анонсированы в статье [11], но доказательства их не публиковались. Поскольку эти результаты были цитированы и обсуждались в работах [9, 10], автор считает публикацию полных доказательств полезной.

2. Сформулируем основные результаты. Обозначим через $\varphi(x,\lambda)$ $(x\geq 0,\ \lambda\geq 0)$ решение задачи Коши

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\alpha(x)\frac{d\varphi}{dx}+\lambda^2\varphi=0,$$

$$\varphi(0,\lambda)=1,\quad \frac{d\varphi(0,\lambda)}{dx}=0\ , \tag{1}$$

где $\alpha(x)\in C^1[0,\infty)$, $\alpha(0)>0$ и функция $\rho(x)=(\alpha'(x)+\alpha^2(x)/2)/2$ не возрастает на полуоси $[0,\infty)$. Через L обозначим множество функций вида

$$\varkappa(\lambda;F)=\int_0^\infty\varphi(x,\lambda)F(dx), \tag{2}$$

где F - вероятностный закон на полуоси $[0,\infty)$. Ниже будет показано, что $|\varphi(x,\lambda)|\leq 1$ для всех $x\geq 0,\ \lambda\geq 0$. Поэтому интеграл в (2) существует и является непрерывной функцией λ. Функции вида (2) впервые рассматривались в работе Б.М.Левитана [1], который называет их обобщенными характеристическими функциями (о.х.ф.). В [1] показано, что L является полугруппой относительно операции поточечного умножения, т.е. для всяких законов F_1 и F_2 существует закон $F_3=F_1\circ F_2$ такой, что

$$\varkappa(\lambda;F_1)\varkappa(\lambda;F_2)=\varkappa(\lambda;F_3)\ (\lambda\geq 0)\ . \tag{3}$$

(Законы F_k сосредоточены на $[0,\infty)$; всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, речь будет идти только о таких законах.) Обобщенная композиция законов, сосредоточенных на полуоси $[0,\infty)$, обозначаемая знаком $\circ$, определяется с помощью оператора обобщенного сдвига (см. ниже). В полугруппе L имеется единичный элемент $e(\lambda)=\chi(\lambda;\varepsilon_0)\equiv 1$, где ε_0 – закон, сосредоточенный в точке 0. Коммутативная полугруппа L становится топологической отделимой полугруппой после наделения множества L топологией равномерной сходимости на каждом конечном отрезке, содержащемся в $[0,\infty)$.

Теорема 1. Полугруппа L является почти дельфийской.

В направлении описания классов $N(L)$, $I(L)$, $I_0(L)$ получены следующие результаты.

Теорема 2. Класс $N(L)$ является множеством типа G_δ, плотным в L.

Теорема 3. Класс $I(L)$ состоит из функций вида

$$\chi(\lambda)=\exp\left\{\int_0^\infty\left(\varphi(x,\lambda)-1\right)\frac{1+x^2}{x^2}S(dx)\right\}, \tag{4}$$

где S – произвольная вполне конечная мера на $[0,\infty)$. Представление безгранично делимой (б.д.) о.х.ф. в виде (4) единственно.

Подынтегральная функция в (4) при $x=0$ полагается равной $-\lambda^2/2$. При этом она становится непрерывной в нуле функцией по x при каждом $\lambda\geq 0$ в силу (1).

Формулу (4) можно рассматривать как аналог формулы Леви – Хинчина для б.д.о.х.ф. Отметим, что аналог формулы Колмогорова для б.д.о.х.ф. был получен в [1].

Теорема 4. Класс $I_0(L)$ состоит из функций вида

$$\chi_\sigma(\lambda)=\exp(-\sigma\lambda^2)\quad(\sigma\geq 0). \tag{5}$$

В представлении (4) этим функциям соответствует мера $S_\sigma=2\sigma\varepsilon_0$. При $\alpha(x)\equiv 0$ полугруппа L совпадает с мультипликативной полугруппой характеристических функций симметричных распределений на R. В этом случае теорема 4 (и это отмечено в [9]) теряет силу [2].

3. Приведем вспомогательные результаты. Для полноты изложения опишем определение o-композиции (см. [1]). Пусть $f\in C^2[0,\infty)$, $u(x,y;f)(x\geq y\geq 0)$ – решение краевой задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\alpha(y)\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$u(x,0)=f(x),\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=0 \tag{6}$$

в области $\{(x,y): x>y\geq 0\}$. Если положить $v=\vartheta(x)\vartheta(y)u$, где

$$\vartheta(x)=exp\left(\frac{1}{2}\int_0^x \alpha(t)\,dt\right), \tag{7}$$

то в силу (6) функция v в области $x\geq y>0$ будет решением следующей задачи [1]:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\rho(x)v = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\rho(y)v,$$

$$v(x,0)=\vartheta(x)f(x),\ \frac{\partial v(x,0)}{\partial y}=\frac{\alpha(0)}{2}\vartheta(x)f(x) \tag{8}$$

Решая (8) методом Римана [5], для $x>y\geq 0$ получаем

$$u(x,y;f)=\frac{\vartheta(x+y)f(x+y)+\vartheta(x-y)f(x-y)}{2\vartheta(x)\vartheta(y)}+$$

$$+\frac{1}{2\vartheta(x)\vartheta(y)}\int_{x-y}^{x+y} f(\xi)\vartheta(\xi)\left[\frac{\alpha(0)}{2}R(\xi,0)-R'_\eta(\xi,0)\right]d\xi=$$

$$=\int_0^\infty f(\xi)\sigma(x,y;d\xi), \tag{9}$$

где $R(\xi,\eta)=R(\xi,\eta;x,y)$ – решение краевой задачи

$$R''_{\xi\xi}-R''_{\eta\eta}+[\rho(\eta)-\rho(\xi)]R=0,$$

$$R=1 \text{ на } \Lambda=\{(\xi,\eta): \eta\geq 0,\ \eta-y=-|\xi-x|\} \tag{10}$$

в области $D(x,y)=\{(\xi,\eta)\ \eta\geq 0,\ \ \eta-y\leq-|\xi-x|\}$.

Лемма 1. Для всех $x\geq y\geq 0$

$$\frac{\alpha(0)}{2}R(\xi,0)-R'_\eta(\xi,0)\geq\frac{\alpha(0)}{2} \tag{11}$$

при $x-y\leq\xi\leq x+y$. (В [1] доказано, что $(\alpha(0)/2)R(\xi,0)-R'_\eta(\xi,0)\geq 0$ при условии $\alpha(0)\geq 0$.)

Доказательство. Полагая $\xi_1=\xi+\eta,\ \eta_1=\xi-\eta,\ r(\xi_1,\eta_1)=R\left(\frac{\xi_1+\eta_1}{2},\frac{\xi_1-\eta_1}{2}\right)$ и учитывая (10), для функции $r(\xi_1,\eta_1)$ получаем краевую задачу

$$r''_{\xi_1\eta_1}=s(\xi_1,\eta_1)r\ , \qquad (12)$$

$$r=1 \text{ на } \Lambda_1=\left\{(\xi_1,\eta_1):\ \xi_1=x+y,\ \ x-y\le\eta_1\le x+y\right\}\cup$$

$$\cup\left\{(\xi_1,\eta_1):\eta_1=x-y,\ \ x-y\le\xi_1\le x+y\right\}.$$

В области $D_1(x,y)=\{(\xi_1,\eta_1):\xi_1\ge\eta_1,\ \eta_1\ge x-y,\ \xi_1\le x+y\}$, где $s(\xi_1,\eta_1)=$ $=0{,}25\left[\beta\left((\xi_1+\eta_1)/2\right)-\beta\left((\xi_1-\eta_1)/2\right)\right]$. Нетрудно проверить [5], что функция $r(\xi_1,\eta_1)$ является решением интегрального уравнения

$$r(\xi_1,\eta_1)=1-\int_{\xi_1}^{x+y}dz\int_{x-y}^{\eta_1}s(z,w)r(z,w)dw, \qquad (13)$$

и, следовательно,

$$r(\xi_1,\eta_1)=\sum_{n=0}^{\infty}r_n(\xi_1,\eta_1)\ , \qquad (14)$$

где

$$r_0(\xi_1,\eta_1)\equiv 1\ ,$$

$$r_n(\xi_1,\eta_1)=-\int_{\xi_1}^{x+y}dz\int_{x-y}^{\eta_1}s(z,w)r_{n-1}(z,w)dw\ \ (n\ge1). \qquad (15)$$

Поскольку $\beta(x)$ не возрастает, то

$$s(\xi_1,\ \eta_1)\le 0\ \ \left((\xi_1,\eta_1)\in D_1(x,y)\right). \qquad (16)$$

Поэтому из (14), (15) вытекает, что $r(\xi_1,\eta_1)\ge1$ для всех $(\xi_1,\eta_1)\in$ $\in D_1$ и, значит, при $x-y\le\xi\le x+y$ выполняется $R(\xi,0)\ge1$.

Продифференцировав (13) сначала по ξ_1, а затем по η_1, получим

$$r'_{\xi_1}(\xi_1,\eta_1)=\int_{x-y}^{\eta_1} s(\xi_1,w)r(\xi_1,w)\,dw,$$

$$r'_{\eta_1}(\xi_1,\eta_1)=-\int_{\xi_1}^{x+y} s(x,\eta_1)r(x,\eta_1)\,dx\,.$$

Отсюда в силу (16) и неотрицательности функции $r(\xi_1,\eta_1)$ вытекает, что $r'_{\xi_1}(\xi_1,\eta_1)\le 0$, $r'_{\eta_1}(\xi_1,\eta_1)\ge 0$ в области D_1. Поэтому $-R'_\eta(\xi,0)=$ $=-r'_{\xi_1}(\xi,\xi)+r'_{\eta_1}(\xi,\xi)\ge 0$. Лемма доказана.

Таким образом, при всех $x\ge y\ge 0$ заряд $\sigma(x,y;d\xi)$ в (9) является мерой, которая сосредоточена на отрезке $[x-y,\ x+y]$, приписывает точкам $x-y$ и $x+y$ массы $\lambda(x-y)/(2\lambda(x)\lambda(y))$ и $\lambda(x+y)/(2\lambda(x)\lambda(y))$ соответственно, а на интервале $(x-y,x+y)$ абсолютно непрерывна, причем на всем этом интервале ее плотность ограничена снизу положительным числом. Полагая в (9) $f(x)\equiv 1$, получаем [1]

$$\sigma(x,y\ ;\ [0,\infty))=1\,.$$

В предположении, что $\sigma(x,y,B)=\sigma(y,x;B)$ для $y>x>0$, в работе [1] определена $\circ$-композиция законов F и G следующим образом:

$$(R^y\varepsilon_u)(B)\ =\sigma(u,\ y\ ;\ B)\ (u,y\ge 0)\,, \qquad (17)$$

$$(R^yF)(B)=\int_0^\infty(R^y\varepsilon_u)(B)F(du)=\int_0^\infty\sigma(u,y;B)F(du)\,, \qquad (18)$$

$$(F\circ G)(B)=\int_0^\infty(R^yF)(B)G(dy)\,. \qquad (19)$$

В частности, $(\varepsilon_a\circ\varepsilon_b)(B)\ =\sigma(a,\ b;\ B\ )$.

В работе [1] показано, что множество законов на полуоси $[0,\infty)$, наделенное $\circ$-композицией в качестве бинарной операции и топологией слабой сходимости, является коммутативной полугруппой, изоморфной и гомеоморфной при отображении

$$F\mapsto \varphi(\lambda\ ;\ F)=\int_0^\infty\varphi(x,\lambda)F(dx)$$

полугруппе L о.х.ф.

Приведенная ниже лемма позволяет при установлении некоторых фактов об о.х.ф. ссылаться на известные результаты из теории обычных х.ф. (функций вида $\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x}Q(dx)$, где Q - вероятностный закон на прямой).

Лемма 2. Для всех $y\geq 0,\ \lambda\geq 0$ справедливо представление

$$\varphi(y,\lambda)=\frac{1}{\nu(y)}\cos\lambda y+\frac{1}{2\nu(y)}\int_{-y}^{y}\cos\lambda\xi\, K(\xi,y)\,d\xi\ , \tag{20}$$

где $K(\xi,y)>0$ при $y>0$ и $|\xi|<y$, а функция ν определена в (7).

Следствие. Если о.х.ф. $\chi(\lambda)$ продолжить с полуоси $[0,\infty)$ четным образом на полуось $(-\infty,0)$, то полученная функция будет обычной х.ф. (некоторого симметричного закона).

Действительно, полагая в (20) $\lambda=0$ и учитывая (1), получаем

$$\frac{1}{\nu(y)}+\frac{1}{2\nu(y)}\int_{-y}^{y}K(\xi,y)\,d\xi\ =1. \tag{21}$$

Значит, при всяком фиксированном $y\geq 0$ функция $\varphi(y,\lambda)$, продолженная четным образом (как функция λ) на полуось $(-\infty,0)$, является обычной х.ф. В силу (2) отсюда вытекает утверждение следствия.

Доказательство леммы 2. Рассмотрим в области $-\infty<x<\infty,\ y\geq 0$ краевую задачу

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\alpha(y)\frac{\partial w}{\partial y}\ ,$$

$$w(x,0)=\cos\lambda x\ ,\quad \frac{\partial w(x,0)}{\partial y}=0 \tag{22}$$

(ср. [5]). Непосредственно проверяется, что решением задачи (22) является функция $w(x,y)=\cos\lambda x\ \varphi(y,\lambda)$. Решая (22) с помощью метода Римана и пользуясь единственностью решения, получаем

$$\cos\lambda x\cdot\varphi(y,\lambda)=\frac{\cos\lambda(x+y)+\cos\lambda(x-y)}{2\nu(y)}+$$

$$+\frac{1}{2\nu(y)}\int_{x-y}^{x+y}\cos\lambda\xi\left[\frac{\alpha(0)}{2}\rho(\xi,0;x,y)-\rho'_{\eta}(\xi,0;x,y)\right]d\xi\ , \tag{23}$$

где $\rho=\rho(\xi,\eta;x,y)$ – решение краевой задачи

$$\rho''_{\xi\xi}-\rho''_{\eta\eta}+\beta(\eta)\rho=0\ ,$$
$$\rho=1\ \text{ на }\ \Lambda$$

в области $D(x,y)$. Как показано в /1/, из условий монотонности убывания функции $\beta(\eta)$ и $\alpha(0)\geq 0$ вытекает, что $\beta(\eta)\geq 0$ для всех $\eta>0$. Поэтому так же, как в лемме 1, выводим, что

$$\frac{\alpha(0)}{2}\rho(\xi,0;x,y)-\rho'_\eta(\xi,0;x,y)\geq\frac{\alpha(0)}{2}>0$$

при $-\infty<x<\infty$, $y\geq 0$, $|\xi|\leq y$. Положив в (23) $x=0$, получим утверждение леммы 2.

Лемма 3. а) $|\varphi(x,\lambda)|\leq 1$ при $x\geq 0$, $\lambda\geq 0$;
б) $|\varphi(x,\lambda)|<1$ при $x>0$, $\lambda>0$;
в) $\varphi(x,\lambda)\to 0$ $(x\to\infty)$ при $\lambda>0$.

Утверждения а) и б) вытекают из леммы 2 (см. (20) и (21)). Утверждение в) доказано в /1/.

Понадобится также такой аналог теоремы непрерывности Леви, доказанный в /1/.

Лемма 4. Пусть последовательность о.х.ф. $\{\chi_n(\lambda)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится в каждой точке $\lambda\geq 0$ к функции $\chi(\lambda)$, непрерывной в нуле справа. Тогда $\chi(\lambda)$ также является о.х.ф.

4. Приведем доказательства основных результатов.

Доказательство теоремы 1. Для каждого $a>0$ класс $L_a=\{\chi\in L:\chi(\lambda)>0$ при $0\leq\lambda\leq a\}$ является наследственной подполугруппой полугруппы L. Докажем, что полугруппа L_a является дельфийской. Отсюда ввиду равенства $L=\bigcup_{m=1}^{\infty}L_{1/m}$ следует справедливость теоремы.

Отображение

$$L_a\ni\chi\xrightarrow{\Delta_a}-\ln\chi(a)$$

является непрерывным гомоморфизмом, действующим из L_a в аддитивную полугруппу неотрицательных вещественных чисел. Перейдем к проверке аксиом (A)-(C) дельфийской полугруппы.

(A) Пусть $\Delta_a\chi=0$, т.е. $\chi(a)=\chi(a;F)=1$. Тогда в силу леммы 3,б) $F=\varepsilon_0$, так что $\chi(\lambda)=e(\lambda)$.

(B) Пусть $\chi\in L_a$. В силу леммы 4 достаточно доказать, что множество всех делителей о.х.ф. $\chi(\lambda)$ является равностепенно непрерывным множеством функций. Пусть $\varkappa\,|\,\chi$. Поскольку $\chi(\lambda)>0$ при $0\leq\lambda\leq a$, то в силу леммы 3,а)

$$1-\varkappa(h)\leq 1-\chi(h)\quad(0\leq h\leq a). \tag{24}$$

В силу следствия из леммы 2 функция $\varkappa(\lambda)$ удовлетворяет неравенству Крейна

$$|\varkappa(\lambda+h)-\varkappa(\lambda)|\leq\sqrt{2}\,|1-\varkappa(h)|^{1/2}. \tag{25}$$

Из (24) и (25) вытекает требуемое.

(С) Пусть $x_{nk} \in L_a$ $(k=1,2,\dots,n;\ n=1,2,\dots)$,

$$\prod_{k=1}^{n} x_{nk} \to x \in L\ (n\to\infty)$$

и

$$\max_{1\le k\le n} \Delta_a x_{nk} \to 0\ (n\to\infty)\ . \tag{26}$$

Нужно показать, что $x\in I(L)$. Приведем доказательство только того, что выполнение (26) влечет выполнение условия

$$\forall\Lambda>0:\ \max_{1\le k\le n}(1-x_{nk}(\lambda))\to 0\quad (n\to 0) \tag{27}$$

равномерно по λ на отрезке $[0,\Lambda]$. Чтобы завершить проверку аксиомы (С), необходимо с учетом (27) дословно повторить рассуждения из [6].

Условие (26) означает, что

$$\max_{1\le k\le n}(1-x_{nk}(a))\to 0\quad(n\to\infty)\ . \tag{26'}$$

Пусть $x_{nk}(\lambda)=x(\lambda;F_{nk})$. Покажем, что для всякого $\varepsilon>0$ выполняется условие

$$\max_{1\le k\le n} F_{nk}([\varepsilon,\infty))\to 0\quad(n\to\infty). \tag{28}$$

Предположим, что (28) не верно. Тогда существуют положительные числа ε_0 и d_0, последовательности номеров $n_j\to\infty$ и i_j, $1\le i_j\le n_j$ такие, что

$$F_{n_j i_j}([\varepsilon_0,\infty))=d_j > d_0\ . \tag{29}$$

В силу леммы 3, б), в) $\max\limits_{x>\varepsilon_0}\varphi(x,a)=q<1$, поэтому, используя (29), для всех номеров j получаем

$$x(a;F_{n_j i_j})\le F_{n_j i_j}([0,\varepsilon_0))+qF_{n_j i_j}([\varepsilon_0,\infty))\le 1-d_0(1-q)\ .$$

Таким образом, $\overline{\lim\limits_{j\to\infty}}\,x(a,F_{n_j i_j})<1$, что противоречит условию (26').

Покажем, как из (28) вытекает (27). Из леммы 2 следует существование для заданных чисел $\varepsilon>0$ и $\Lambda>0$ такого числа $\delta>0$, что $1-\varphi(x,\lambda)\le\varepsilon$ при $0\le x\le\delta$ и $0\le\lambda\le\Lambda$. Значит, при $0\le\lambda\le\Lambda$

$$\max_{1\le k\le n}\left(1-\chi(\lambda;F_{nk})\right)\le\varepsilon+2\max_{1\le k\le n}F_{nk}\left([\vartheta,\infty)\right).$$

Отсюда и из (28) вытекает (27).

Доказательство теоремы 2. Для доказательства плотности класса $N(L)$ в L достаточно убедиться в том, что всякий дискретный закон (не равный $\mathcal{E}_0$) неразложим, т.е. не может быть представлен в виде o-композиции двух законов, отличных от $\mathcal{E}_0$. Последнее вытекает из того, что o-композиция всяких двух законов, отличных от $\mathcal{E}_0$, имеет абсолютно непрерывную составляющую в силу (18), (19) и леммы 1.

Докажем, что $N(L)$ является множеством типа G_δ в L. Обозначим через B_{pqr} (p,q,r – положительные рациональные числа) множество таких элементов $\chi\in L$, что $\chi(\lambda)\ge exp(-2r)$ при $0\le\lambda\le p$, которые могут быть разложены в произведение двух элементов $\chi^{(1)}$ и $\chi^{(2)}$ ($\chi=\chi^{(1)}\chi^{(2)}$), удовлетворяющих условию

$$q\le\Delta_p\chi^{(j)}\le r\quad(j=1,2). \tag{30}$$

Множество B_{pqr} замкнуто в L. Действительно, пусть $\chi_n\to\chi\in L\ (n\to\infty)$, $\chi_n\in B_{pqr}$ ($\chi_n=\chi_n^{(1)}\chi_n^{(2)}$) и выполняется (30) для $\chi_n^{(j)}$. Очевидно, $\chi\in L_p$. Поскольку для всех $\lambda>0$ и $0<h<p$

$$\left|\chi_n^{(j)}(\lambda+h)-\chi_n^{(j)}(\lambda)\right|\le\sqrt{2}\left(1-\chi_n^{(j)}(h)\right)^{1/2}\le\sqrt{2}\left(1-\chi_n(h)\right)^{1/2}$$

и $\chi_n\to\chi\ (n\to\infty)$ равномерно на каждом конечном отрезке, то множество функций $\{\chi_n^{(j)}(\lambda):j=1,2;\ n=1,2,\dots\}$ равностепенно непрерывно. Используя теорему Арцела – Асколи, получаем представление $\chi=\chi^{(1)}\chi^{(2)}$, где $\chi^{(j)}$ удовлетворяют условию (30) и $\chi(\lambda)\ge exp(-2r)$ при $0\le\lambda\le p$. Осталось отметить, что $L\setminus N(L)=\bigcup_{p,q,r}B_{pqr}$.

Доказательство теоремы 3. Докажем, что каждая функция $\chi(\lambda)$ вида (4) является б.д.о.х.ф. Очевидно, достаточно доказать, что она является о.х.ф. Пусть $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ – любая слабо сходящаяся в собственном смысле к G последовательность мер таких, что мера G_n сосредоточена на множестве точек вида k/n ($k=1,2,\dots,n^2$), а $\varkappa_n$ определяется по G_n с помощью (4). Поскольку при всех $\gamma\ge0$ и $x\ge0$ функция $exp\times$ $\times[\gamma(\varphi(x,\lambda)-1)]$ является о.х.ф., а множество L является полугруппой, то $\varkappa_n$ есть о.х.ф. По теореме Хелли $\varkappa_n(\lambda)\to\varkappa(\lambda)(n\to\infty)$ равномерно на каждом конечном отрезке. Поэтому в силу леммы 4 $\chi(\lambda)$ есть о.х.ф.

Докажем, что каждая б.д.о.х.ф. $\chi(\lambda)$ допускает представление (4). В силу следствия из леммы 2 $\chi(\lambda)\ne0$ при $\lambda>0$. Дальнейший ход рассуждений лишь в деталях отличается от того, с помощью которого получено представление Леви – Хинчина в [7].

По условию

$$\chi_n(\lambda) = \chi^{1/n}(\lambda) = \int_0^\infty \varphi(x,\lambda) F_n(dx),$$

где F_n – вероятностный закон на $[0,\infty)$. Так как $\chi(\lambda)\neq 0$, то $n(\chi_n(\lambda)-1) \to \ln\chi(\lambda)$ $(n\to\infty)$ равномерно на каждом конечном отрезке. Поэтому если положить $G_n(dx) = nx^2(1+x^2)^{-1}F_n(dx)$, то

$$\int_0^\infty (1-\varphi(x,\lambda))\frac{1+x^2}{x^2}G_n(dx) \longrightarrow -\ln\chi(\lambda) \ (n\to\infty) \quad (31)$$

равномерно на каждом конечном отрезке. Для получения (4) достаточно убедиться в том, что

а) существует $C>0$ такое, что $G_n([0,\infty))\le C$ для всех n;

б) $G_n([\tau,\infty)) \to 0$ $(\tau\to\infty)$ равномерно по $n=1,2,\ldots$

Действительно, выделив, пользуясь принципом компактности, из последовательности мер $\{G_n\}$ последовательность $\{G_{n_i}\}$, слабо сходящуюся в собственном смысле к мере G, и переходя в (31) с помощью теоремы Хелли к пределу под знаком интеграла по этой подпоследовательности, получаем (4).

а) Положим $A_n = G_n([0,c])$, $B_n = G_n((c,\infty))$ и докажем, что $A_n = O(1)$, $B_n = O(1)$ при $n\to\infty$.

Оценим сверху A_n. Так как $1-\varphi(x,\lambda)\ge 0$, то из (31) следует, что при всех достаточно больших n

$$-\ln\chi(1)+1 \ge \int_{[0,c]} (1-\varphi(x,1))\frac{1+x^2}{x^2}G_n(dx). \quad (32)$$

Пусть $x_0\in(0,c)$ такое, что $(1-\varphi(x,1))\frac{1+x^2}{x^2}\ge 1/4$ при $0\le x\le x_0$, а $b>0$ такое, что $1-\varphi(x,1)\ge b$ при $x_0\le x\le c$ (см. лемму 3, б)). Тогда

$$\int_{[0,c]} (1-\varphi(x,1))\frac{1+x^2}{x^2}G_n(dx) \ge \frac{1}{4}G_n([0,x_0)) + b\,\frac{1+c^2}{c^2}G_n([x_0,c]). \quad (33)$$

В силу (32) и (33) $A_n = O(1)$, $n\to\infty$.

Оценим сверху B_n. В силу леммы 3 в) и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла

$$\int_0^1 \varphi(x,\lambda)\,d\lambda \to 0 \ (x\to\infty).$$

Поэтому существует такое $c>0$, что при всех $x \geq c$ выполняется неравенство

$$\left| \int_0^1 \varphi(x,\lambda)d\lambda \right| \leq 1/2 . \qquad (34)$$

В силу (31) и неотрицательности функции $1-\varphi(x,\lambda)$

$$-\ln \chi(\lambda)+1 \geq \int_{(c,\infty)} (1-\varphi(x,\lambda))G_n(dx)$$

при $0 \leq \lambda \leq 1$ и всех достаточно больших n. Усредняя это неравенство по λ на отрезке $[0,1]$ и учитывая (34), при достаточно больших n получаем

$$-\int_0^1 \ln \chi(\lambda)d\lambda+1 \geq \int_{(c,\infty)} \left(1-\int_0^1 \varphi(x,\lambda)d\lambda\right)G_n(dx) \geq \frac{1}{2}B_n ,$$

т.е. $B_n = O(1)$, $n \to \infty$.

б) Пусть задано число $\varepsilon>0$. Найдем $\delta>0$ такое, что

$$\left|\delta^{-1}\int_0^\delta \ln \chi(\lambda)d\lambda\right| \leq \varepsilon . \qquad (35)$$

Рассуждая так же, как при получении (34), находим T такое, что при $x \geq T$

$$\left|\delta^{-1}\int_0^\delta \varphi(x,\lambda)d\lambda\right| \leq 1/2 . \qquad (36)$$

В силу (31) для всех τ и $0 \leq \lambda \leq \delta$

$$-\ln \chi(\lambda)+\varepsilon \geq \int_{[\tau,\infty)} (1-\varphi(x,\lambda))G_n(dx)$$

при достаточно больших n. Усреднив это неравенство по λ на отрезке $[0,\delta]$ и учтя (35), (36), получим $G_n([\tau,\infty)) \leq 4\varepsilon$ при $\tau \geq T$ и достаточно больших n. Увеличивая, если нужно, число T, получаем неравенство $G_n([\tau,\infty)) \leq 4\varepsilon$ при всех $n=1,2,\dots$ и $\tau \geq T$, что и требовалось доказать.

Единственность представления (4) следует из полноты системы функций $\{\varphi(x,\lambda):\lambda \geq 0\}$ в пространстве $C[a,b]$ при всех $0<a<b$.

Доказательство теоремы 4. Применим метод, использованный в [4]. Сначала докажем, что функции вида (5) принадлежат классу $I_0(L)$. Пусть $\chi_1,\chi_2 \in L$ и $\chi_1(\lambda)\chi_2(\lambda)=exp(-\sigma\lambda^2)$. Воспользовавшись следствием из леммы 2 и известной теоремой Крамера из арифметики вероятностных законов на прямой [2], отсюда получим $\chi_k(\lambda)=exp(-\sigma_k\lambda^2)$, где

$\sigma_k \geq 0$ и $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma$. Таким образом, среди делителей о.х.ф. вида (5) нет неразложимых.

Докажем, что функциями вида (5) исчерпывается весь класс $I_0(L)$. Так как $I_0(L) \subset I(L)$, то достаточно убедиться в том, что всякая б.д.о.х.ф., отличная от функции виде (5), имеет неразложимые делители. Легко видеть (см. теорему II и теорему 3), что последнее вытекает из следующего факта.

Теорема 5. Пусть H – ненулевая вполне конечная мера, сосредоточенная на отрезке $[a, b]$ $(a > 0)$; m – мера Лебега на отрезке $[\alpha, \beta]$ $(0 < \alpha < \beta < a)$. Тогда для всех достаточно малых положительных чисел δ функция

$$\varkappa(\lambda) = exp\left(\int_0^\infty (\varphi(x, \lambda) - 1)(H - \delta m)(dx) \right) \tag{37}$$

является о.х.ф.

Доказательство. Обозначая $Q_\delta = H - \delta m$, имеем

$$\varkappa(\lambda) = e^{-Q_\delta([0,\infty))} \int_0^\infty \varphi(x, \lambda) \left(\sum_{n=0}^\infty Q_\delta^{n\circ} / n! \right)(dx) .$$

Нужно показать, что при достаточно малых $\delta > 0$ заряд $\sum_{n=0}^\infty Q_\delta^{n\circ} / n!$ является мерой. Поскольку каждое натуральное число $n \geq 2$ представляется в виде $2l + 3m$, где l и m – неотрицательные целые числа, то достаточно доказать, что при малых $\delta > 0$ заряды а) $-\delta m + 0{,}5 Q_\delta^{2\circ}$, б) $Q_\delta^{3\circ}$ являются мерами. Сначала рассмотрим случай $H = \varepsilon_a$.

а) Поскольку $-\delta m + 0{,}5 Q_\delta^{2\circ} = 0{,}5 \varepsilon_a^{2\circ} - \delta \varepsilon_a \circ m - \delta m + 0{,}5 \delta^2 m^{2\circ}$, то достаточно показать, что заряд $0{,}5 \varepsilon_a^{2\circ} - \delta m - \delta \varepsilon_a \circ m$ является мерой. Из определения $\circ$-композиции и леммы 1 следует, что $\varepsilon_a^{2\circ} = \sigma(a, a; B)$ является выпуклой линейной комбинацией дискретной меры, сосредоточенной в точках 0 и $2a$, и абсолютно непрерывной меры, сосредоточенной на отрезке $[0, 2a]$, с плотностью $p_1(x) \geq c_1 > 0$ $(0 \leq x \leq 2a)$. Мера $\delta m \circ \varepsilon_a$ абсолютно непрерывна, сосредоточена на отрезке $[a - \beta, a + \beta] \subset (0, 2a)$, причем ее плотность p_2 удовлетворяет условию $sup\{p_2(x) : a - \beta \leq x \leq a + \beta\} = O(\delta)(\delta \to 0)$. Отсюда вытекает требуемое.

б) Достаточно доказать, что заряд $\varepsilon_a^{3\circ} - 3\delta \varepsilon_a^{2\circ} \circ m - \delta^3 m^{3\circ}$ является мерой. Мера

$$\varepsilon_a^{3\circ}(B) = \int_0^\infty (R^y \varepsilon_a)(B) \varepsilon_a^{2\circ}(dy) = \int_0^\infty \sigma(y, a; B) \varepsilon_a^{2\circ}(dy)$$

является выпуклой линейной комбинацией дискретной меры, сосредоточенной в точках a и $3a$, и абсолютно непрерывной меры с плотностью $p_3(x)\geq c_3>0$ $(0\leq x\leq 3a)$. Мера $3\delta m\circ\varepsilon_a^{2\circ}+\delta^3 m^{3\circ}$ абсолютно непрерывна на отрезке $[0,2a+\beta]\subset[0,3a]$, и ее плотность p_4 удовлетворяет условию $\sup\{p_4(x):0\leq x\leq 2a+\beta\}=O(\delta),\delta\to 0$. Отсюда вытекает требуемое.

Перейдем к общему случаю. Можно считать, что мера H не имеет дискретной составляющей и точка a является предельной для точек роста меры H. Выберем любую точку роста c меры $H(a<c<b)$, близкую к a, а именно удовлетворяющую условию $c\leq min(2a-\beta,\ a+\alpha)$.

а) Покажем что заряд $0{,}5H^{2\circ}-\delta m-\delta m\circ H$ является мерой при всех малых $\delta>0$. Из (17), (18) и леммы 1 вытекает, что для всех $y\in[a,a+(c-a)/2]$ мера $R^y H$ имеет абсолютно непрерывную составляющую, плотность которой на интервале $(c-a,2b-c+a)$ ограничена снизу числом $k_0(c)>0$, не зависящим от $y\in[a,a+(c-a)/2]$. В силу (19) мера $H^{2\circ}$ имеет абсолютно непрерывную составляющую, для плотности которой справедлива оценка

$$p_1(x)\geq k_1(c)>0\ \ (c-a<x<2b-c+a)\ . \tag{38}$$

Мера $\delta m\circ H+\delta m$ абсолютно непрерывна, сосредоточена на интервале $(a-\beta,a+\beta)\subset(c-a,2b-c+a)$, (последнее включение выполняется в силу выбора точки c) и ее плотность p_2 удовлетворяет условию $\sup\{p_2(x)\ a-\beta<a+\beta\}=O(\delta)$, $\delta\to 0$. Отсюда получаем требуемое.

б) Покажем, что заряд $H^{3\circ}-3\delta m\circ H^{2\circ}-\delta m^{3\circ}$ является мерой при достаточно малых $\delta>0$. В силу (38) мера $H^{3\circ}$ имеет абсолютно непрерывную составляющую с плотностью $p_3(x)\geq k_3(c)>0\ \ (0<x<3b-c+a)$. Мера $3\delta m\circ H^{2\circ}+\delta^3 m^{3\circ}$ абсолютно непрерывна, носитель ее содержится в $[0,2b+\beta]$, и плотность p_4 такая, что $\sup\{p_4(x):0<x<2b+\beta\}=O(\delta)$, $\delta\to 0$. Отсюда получаем требуемое.

Теорема 5, а значит, и теорема 4, доказаны.

1. Левитан Б.М. Об одном классе решений уравнения Колмогорова – Смолуховского // Вест. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астрон.– 1960. – № 7. – С. 81–115.
2. Линник Ю.В., Островский И.В. Разложения случайных величин и векторов. – М.: Наука, 1972. – 480 с.
3. Stochastic Analysis // Ed. D.G.Kendall, E.F.Harding. – London: Wiley, 1973. – 465 p.
4. Островский И.В. Описание класса I_0 в специальной полугруппе вероятностных мер // Докл. АН СССР. – 1973. – 209, № 4. – С. 788–791.
5. Марченко В.А. Спектральная теория операторов Штурма–Лиувилля. – Киев: Наук. думка, 1972. – 217 с.
6. Хинчин А.Я. Предельные законы для сумм независимых случайных величин. – М.; Л.: Гостехтеориздат. – 1938. – 144с.

7. Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. – М.: Гостехиздат, 1949. – 264 с.
8. Островский И.В. Арифметика вероятностных распределений // Теория вероятностей и ее применения. – 1986. – 31, вып. 1. – С.3-30.
9. Ruzsa I., Székely G. Algebraic probability theory. – London: Wiley, 1988. – 252 p.
10. Волькович В.Э. О квазирегулярных стохастических свертках // Проблемы устойчивости стохастических моделей: Тр. семинара. – М.: ВНИИСИ, 1987. – С. 19-32.
11. Ильинский А.И. Об арифметике обобщенных характеристических функций Б.М.Левитана // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1976. – 61. – С. 56-58.

УДК 519.2

А.Г.Чернявский

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ КЛАССУ I_0 МНОГОМЕРНОГО ВЕРОЯТНОСТНОГО ЗАКОНА С ГАУССОВОЙ КОМПОНЕНТОЙ

Получено необходимое условие принадлежности классу I_0 многомерного закона с невырожденной гауссовой компонентой и пуассоновым спектром, принадлежащим целочисленной n-мерной решетке, которое совпадает с полученным ранее автором достаточным условием.

Одна из основных проблем теории разложения вероятностных законов состоит в описании класса I_0 безгранично делимых (б.д.) законов, имеющих только б.д. компоненты. Имеется ряд как достаточных, так и необходимых условий принадлежности классу I_0 [1, 2]. В случае одномерных б.д. законов с гауссовой компонентой показано [1], что для принадлежности классу I_0 необходимо, чтобы пуассонов спектр закона был подмножеством множества $L=\{p_i\}_{-\infty}^{\infty} \cup \{r_i\}_{-\infty}^{\infty}$, где числа $p_i>0$, $r_i<0$ такие, что отношения p_{i+1}/p_i и r_{i+1}/r_i – натуральные числа больше единицы. В [3] указаны близкие к точным дополнительные условия убывания на бесконечности спектральной меры Леви б.д. вероятностного закона, при которых указанное необходимое условие является и достаточным условием принадлежности классу I_0. В [1] поставлена задача определения условий принадлежности классу I_0 для б.д. закона с гауссовой компонентой, пуассонов спектр которого принадлежит декартову произведению множеств L описанного выше вида. Достаточное условие принадлежности классу I_0 для таких законов было получено в [4]. Вопрос описания многомерных законов с гауссовой компонентой из класса I_0 пока остается открытым. В [5] указано

ISBN 5-12-002791-1. Динамические системы и комплексный анализ. Киев, 1992

достаточное условие принадлежности классу I_0 для законов с конечным пуассоновым спектром, принадлежащим целочисленной n-мерной решетке. В настоящей работе установлена необходимость полученного в [5] условия для принадлежности классу I_0.

Рассмотрим б.д. вероятностный закон P с характеристической функцией (х.ф.):

$$\varphi(P,t)=exp\left\{\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\left(e^{i(k_j,t)}-1\right)-(\gamma t,t)+i(\beta,t)\right\};\ t,\beta\in R^n,\ \lambda_j>0, \quad (1)$$

где γ - неотрицательная матрица. Пусть $D=\{k_j\}_1^p\subset Z^n$. Для любых $q\in Z^n$, $\theta\in R^n$ таких, что $(q,\theta)>0$, обозначим $A(q,\theta)=\{k_j\in D\setminus\{q\},\ (k_j,\theta)\geq(q,\theta)\}$. Для любого множества $A\subset Z^n$ через $M(A)$ обозначим наименьшую группу по сложению, содержащую A $(M(\varphi)=\varphi)$.

В [5] показано, что для принадлежности закона P классу I_0 достаточно, чтобы для любого $q\in Z^n$, $q\neq 0$ существовал вектор $\theta\in R^n$ такой, что

$$(q,\theta)>0,\ q\bar{\in} M(A(q,\theta)). \quad (2)$$

В настоящей работе при $\gamma>0$ установлена необходимость условия (2) для принадлежности закона P классу I_0.

<u>Теорема.</u> Пусть $\gamma>0$ и существует вектор $k_{p+1}\in Z^n\setminus\{0\}$ такой, что для любого вектора $\theta\in R^n$ такого, что $(k_{p+1},\theta)>0$, будет

$$k_{p+1}\in M(A(k_{p+1},\theta))=M(A(\theta)). \quad (3)$$

Тогда $P\bar{\in} I_0$.

Для доказательства теоремы достаточно проверить (см. [1]), что при условии (3) существует $\lambda_{p+1}<0$ такое, что функция*

$$\varphi_{\lambda_{p+1}}(t)=exp\left\{\sum_{j=1}^{p+1}\lambda_j\left(e^{i(k_j,t)}-1\right)-(\gamma t,t)\right\},\quad \lambda_{p+1}<0 \quad (4)$$

является х.ф. Доказательство последнего утверждения будем вести методом перевала. Для этого потребуется следующая лемма.

<u>Лемма</u>. Существует $\nu>0$ такое, что при всех $\lambda_{p+1}<0$, $|\lambda_{p+1}|\leq\nu$ уравнение

$$F(\sigma)\equiv\sum_{j=1}^{p+1}\lambda_j k_j e^{(k_j,\sigma)}+2\gamma\sigma=x \quad (5)$$

для любого $x\in R^n$ имеет решение $\sigma=\sigma(x)\in R^n$.

---

*Можно считать, что $k_{p+1}\bar{\in} D$, так как в противном случае можно из множества D исключить вектор, совпадающий с k_{p+1}, что не отразится на выполнении условия (3).

Доказательство леммы. Проверим при достаточно малом $\nu>0$ и $|\lambda_{p+1}|\leq\nu$ положительную определенность квадратичной формы

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial\sigma_j}z_i z_j=\sum_{l=1}^{p+1}\lambda_l e^{(k_l,\sigma)}\Big[\sum_{i,j=1}^{n}k_{li}k_{lj}z_i z_j\Big]+2(\gamma z,z)=$$

$$=\sum_{l=1}^{p+1}\lambda_l e^{(k_l,\sigma)}(k_l,z)^2+2(\gamma z,z),\quad \sigma\in R^n. \tag{6}$$

Пусть $(k_{p+1},\sigma)>0$. Тогда в силу (3) $k_{p+1}\in M(A)(\sigma))$,

$$(k_j,\sigma)\geq(k_{p+1},\sigma),\quad k_j\in A(\sigma). \tag{7}$$

Поскольку имеется конечное число различных множеств $A(\sigma)$, справедливо представление

$$k_{p+1}=\sum_{k_j\in A(\sigma)}l_j k_j,\quad l_j\in Z,\quad \sum_j|l_j|<c, \tag{8}$$

где c не зависит от σ. Из (7), (8) при достаточно малом $\nu>0$ получаем

$$(k_{p+1},z)^2=\Big(\sum_{k_j\in A(\sigma)}l_j(k_j,z)\Big)^2\leq c_1\sum_{k_j\in A(\sigma)}(k_j,z)^2,$$

$$\nu e^{(k_{p+1},\sigma)}(k_{p+1},z)^2\leq\sum_{j=1}^{p}\lambda_j e^{(k_j,\sigma)}(k_j,z)^2, \tag{9}$$

откуда вытекает положительная определенность формы (6). В случае $(k_{p+1},\sigma)\leq 0$ этот факт очевиден. Поэтому функция

$$f(\sigma)=\sum_{j=1}^{p+1}\lambda_j e^{(k_j,\sigma)}+(\gamma\sigma,\sigma)$$

является строго выпуклой при достаточно малом $\nu>0$, $|\lambda_{p+1}|\leq\nu$. Если $(k_{p+1},\sigma)>0$, то из (7) при достаточно малом $\nu>0$, $|\lambda_{p+1}|\leq\nu$ следует, что

$$\lim_{s\to\infty}[f(s\sigma)/s]=\infty. \tag{10}$$

Если $(k_{p+1},\sigma)\leq 0$, то соотношение (10), очевидно, выполнено при $\sigma\neq 0$. Из свойств градиентного отображения строго выпуклой функции [6] сразу получим утверждение леммы. Для установления того, что функция $\varphi(t)$ (4) является х.ф., нужно проверить, что при некотором $\lambda_{p+1}<0$

$$g(\lambda_{p+1},x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n}\varphi_{\lambda_{p+1}}(t)e^{-i(t,x)}dt\geq 0,\quad x\in R^n. \qquad (11)$$

Неравенство (11) будет выполнено, если показать, что для любых двух последовательностей $\lambda_{p+1,m}\uparrow 0$, $x_m\in R^n$ можно найти последовательность $m_i\uparrow\infty$ такую, что

$$g(\lambda_{p+1,m_i},x_{m_i})\geq 0,\qquad m_i\uparrow\infty. \qquad (12)$$

Действительно, если последнее утверждение установлено и (11) не верно ни при каком $\lambda_{p+1}<0$, то существуют последовательности $\lambda_{p+1,m}\uparrow 0$, $x_m\in R^n$ такие, что $g(\lambda_{p+1,m},x_m)<0$, $m=1,2,\ldots$, что, очевидно, приводит к противоречию.

Доказательство теоремы.

1. Пусть заданы произвольные последовательности $\lambda_{p+1,m}\uparrow 0$, $x_m\in R^n$ $(m=1,2,\ldots)$. Обозначим через M_∞ класс всевозможных бесконечных множеств натуральных чисел и покажем, что найдется множество $M\in M_\infty$ такое, что $g(\lambda_{p+1,m},x_m)\geq 0$, $m\in M$.

Согласно лемме, для некоторого множества $M_1\in M_\infty$ при всех $m\in M_1$ существуют векторы $\sigma_m\in R^n$ такие, что

$$\sum_{j=1}^{p}\lambda_j k_j e^{(k_j,\sigma_m)}+\lambda_{p+1,m}k_{p+1}e^{(k_{p+1},\sigma_m)}+2\gamma\sigma_m=x_m. \qquad (13)$$

В силу (11) и теоремы Коши

$$g(\lambda_{p+1,m},x_m)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n}\varphi_{\lambda_{p+1,m}}(t-i\sigma_m)e^{-i(t-i\sigma_m,x_m)}dt. \qquad (14)$$

Обозначим $\xi_{j,m}=(k_j,\sigma_m)$.

2. Пусть существует множество $M_2\in M_\infty$, $M_2\subset M_1$ такое, что при $m\in M_2$

$$\lim_{m\to\infty}\xi_{p+1,m}=\lim_{m\to\infty}(k_{p+1},\sigma_m)=+\infty,\quad \xi_{p+1,m}>0. \qquad (15)$$

В силу конечности множества J найдется множество $M_3\in M_\infty$, $M_3\subset M_2$, для которого при $m\in M_3$ множества $A(\sigma_m)$ все совпадают между собой, $A(\sigma_m)=E$. При этом

$$(k_j,\sigma_m)\geq(k_{p+1},\sigma_m),\quad k_j\in E,\quad k_{p+1}\in M(E). \qquad (16)$$

Для некоторого множества $M_4 \in M_\infty, M_4 \subset M_3$ при $m \in M_4$ будет $\lim_{m\to\infty} \xi_{jm} = \infty$, $j \in J_1$; $\xi_{jm} \le N < \infty, j \bar{\in} J_1$, N не зависит от $m \in M_4$. В силу (15), (16) $J_1 = \varnothing$, и после надлежащей перенумерации векторов можно считать, что*

$$(k_j, \sigma_m) \to \infty, \ 1 \le j \le p_1 \le p, \ (k_j, \sigma_m) < N < \infty, \ p_1 < j \le p. \qquad (17)$$

Пусть $L^+ = lin\{k_j\}_1^{p_1}, \ L^- = (L^+)^\perp, \ n^\pm = dim\, L^\pm$.

Найдется множество $M_5 \in M_\infty, M_5 \subset M_4$ такое, что после перенумерации векторов k_j для любого $m \in M_5$ будет

$$\begin{gathered}(k_1, \sigma_m) = \max_{1 \le i \le p_1} (k_i, \sigma_m)_1; \ (k_j, \sigma_m) = \max\{(k_i, \sigma_m), \\ k_i \bar{\in} H_{j-1} = lin\{k_1, \dots, k_{j-1}\}, \ 1 \le i \le p_1\}, \ 1 < j \le n^+.\end{gathered} \qquad (18)$$

Очевидно,

$$\xi_{1m} \ge \xi_{2m} \ge \dots \ge \xi_{n^+m}; \ rg\{k_i\}_1^j = j, \ j \le n^+; \ H_0 = \{0\} \subset H_1 \subset \dots \subset H_{n^+} = R^{n^+}. \qquad (19)$$

3. В силу (4), (14)

$$\begin{gathered}(2\pi)^n g(\lambda_{p+1,m}, x_m) = \exp[U_0(x_m)] \int_{R^n} \exp\{-2U_m(t) + iV_m(t) - \\ -(\gamma t, t) + \sum_{j=p_1+1}^{p} \lambda_j (e^{\xi_{jm} + i(k_j, t)} - 1)\} dt,\end{gathered} \qquad (20)$$

где

$$U_0(x_m) = \sum_{j=1}^{p_1} \lambda_j \left(e^{(k_j, \sigma_m)} - 1\right) + \lambda_{p+1,m}\left(e^{(k_j, \sigma_m)} - 1\right) + (\gamma\sigma_m, \sigma_m)\ (\sigma_m, x_m), \qquad (21)$$

$$U_m(t) = \sum_{j=1}^{p_1} \lambda_j e^{(k_j, \sigma_m)} \sin^2 \frac{(k_j, t)}{2} + \lambda_{p+1,m} e^{(k_{p+1}, \sigma_m)} \sin^2 \frac{(k_{p+1}, t)}{2}, \qquad (22)$$

---

*Предполагаем, что $p_1 < p$. В противном случае все рассуждения проводятся аналогично, но с существенными упрощениями.

$$V_m(t)=\sum_{j=1}^{p_1}\lambda_j e^{(k_j,\sigma_m)}\sin(k_j,t)+\lambda_{p+1,m}e^{(k_{p+1},\sigma_m)}\sin(k_{p+1},t)+(2\beta\sigma_m-x_m,t).$$

Как показано в [5], для некоторого множества $M_6\in M_\infty$, $M_6\subset M_5$ при $m\in M_6$

$$U_m(t)\geq\sum_{j=1}^{p_1}\frac{1}{2}\lambda_j e^{(k_j,\sigma_m)}\sin^2\frac{(k_j,t)}{2},\quad t\in R^n. \tag{23}$$

Для $A\subset R^n$ обозначим

$$I_m(A)=\int_A\Big|\exp\Big\{-2U_m(t)+iV_m(t)-(\beta t,t)+$$

$$+\sum_{j=p_1+1}^{p}\lambda_j\left(e^{\xi_{jm}+i(k_j,t)}-1\right)\Big\}\Big|dt. \tag{24}$$

Пусть

$$R_{m1}=\left\{t\in R^n,\ \lambda_1 e^{\xi_{1m}}\sin^2\frac{(k_1,t)}{2}>\exp\left(-\frac{1}{4}\xi_{1m}\right)\right\}. \tag{25}$$

Тогда из (19), (20), (23)-(25) для некоторого множества $M_7\in M_\infty$, $M_7\subset M_6$ при $m\in M_7$

$$I_m(R_{m1})\leq c_1\exp\left\{-e^{\xi_{1m}/4}\right\}=O(1)\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n^+}\xi_{jm}\right\},\quad m\to\infty. \tag{26}$$

Здесь и далее c_i – положительные числа, не зависящие от номера m. Если $n^+>1$, то через R_{mh} $(2\leq h\leq n^+)$ обозначим множество $t\in R^n$ таких, что

$$\lambda_j e^{\xi_{jm}}\sin^2\frac{(k_j,t)}{2}\leq e^{\xi_{jm}/4},\ j=1,\dots,h-1;\ \lambda_h e^{\xi_{hm}}\sin^2\frac{(k_h,t)}{2}>e^{\xi_{hm}/4}. \tag{27}$$

Тогда из (24), (23), (22) для некоторого множества $M_8\in M_\infty$, $M_8\subset M_7$ при $m\in M_8$ получим

$$I_m(R_{mh})\leq c\exp\left\{-e^{\xi_{hm}/4}\right\}\int_{R_{mh}}\exp\left\{-\sum_{j=1}^{h-1}\lambda_j e^{\xi_{jm}}\sin^2\frac{(k_j,t)}{2}-(\beta t,t)\right\}dt. \tag{28}$$

Из (27) следует, что

$$(k_j,t)=2\pi l_j+v_j,\ l_j\in Z,\ |v_j|\le c_1 e^{-3\xi_{jm}/8},\ j=1,\dots,h-1. \qquad (29)$$

Пусть $\{b_j^h\}_1^{h-1}$ – базис пространства H_{h-1}, биортогональный $\{k_j\}_1^{h-1}$; t_{h-1}^- – проекция вектора t на подпространство:

$$(H_{h-1})^{\perp},\quad F_{mh}=\left\{(v_1,\dots,v_{h-1}),\ |v_j|\le c_1 e^{-3\xi_{jm}/8}\right\}.$$

Тогда из (28), (29) для некоторого множества $M_9\in M_\infty$, $M_9\subset M_8$ при $m\in M_9$ получаем

$$t=\sum_{j=1}^{h-1}2\pi l_j b_j^h+\sum_{j=1}^{h-1}v_j b_j^h+t_{h-1}^-,\ l_j\in Z,\ (v_1,\dots,v_{h-1})\in F_{mh},\ t\in R_{mh}$$

$$\sin^2\frac{(k_j,t)}{2}=\sin^2\frac{v_j}{2}\ge c_2 v_j^2,\ j=1,\dots,h-1,\ t\in R_{mh};$$

$$I_m(R_{mh})\le c_3\exp\left\{-e^{\xi_{hm}/4}\right\}\int_{F_{mh}}\exp\left\{-c_4\sum_{j=1}^{h-1}e^{\xi_{jm}}v_j^2\right\}dv_1\dots dv_{h-1}\le$$

$$\le c_5\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{h-1}\xi_{jm}-e^{\xi_{hm}/4}\right\}=o(1)\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n^+}\xi_{jm}\right\},\quad m\to\infty. \quad (30)$$

Обозначим через $R_{mh}(n^+<h\le p_1)$ множество $t\in R^n$ таких, что

$$\lambda_j e^{\xi_{jm}}\sin^2\frac{(k_j,t)}{2}\le e^{\xi_{jm}/4},\ j=1,\dots,n^+,\ \lambda_h e^{\xi_{hm}}\sin^2\frac{(k_h,t)}{2}>e^{\xi_{hm}/4}. \quad (31)$$

Тогда, как и при выводе оценки (30), получим, что для некоторого множества $M_{10}\in M_\infty, M_{10}\subset M_9$ при $m\in M_{10}$

$$I_m(R_{mh})=o(1)\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n^+}\xi_{jm}\right\},\ m\uparrow\infty,\ n^+<h\le p_1. \quad (32)$$

Обозначим через R_m^* множество таких $t\in R^n$, что

$$\|t\|>\xi_{n+m},\ \lambda_j e^{\xi_{jm}}\sin^2\frac{(k_j,t)}{2}\le e^{\xi_{jm}/4},\ j=1,\dots,n^+,\ t\in R_m^*.$$

Тогда из очевидной оценки (c не зависит от m)

$$\exp\{-(\gamma t,t)\}\le\exp\{-c\xi_{n+m}^2\}\exp\{-c\|t\|^2\},\ t\in R_m^*,\ c>0.$$

и рассуждений, аналогичных использованным при выводе оценки (30), получим, что для некоторого множества $M_{11} \in M_\infty$, $M_{11} \subset M_{10}$ при $m \in M_{11}$

$$I_m(R_m^*) \leq c_6 exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n^+}\xi_{jm} - c\xi^2_{n+m}\right\} = o(1) exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n^+}\xi_{jm}\right\},\ m\to\infty. \quad (33)$$

Пусть R_m – множество $t \in R^n$ таких, что

$$\varkappa_j e^{\xi_{jm}} \sin^2\frac{(k_j,t)}{2} \leq e^{\xi_{jm}/4},\quad j=1,\dots,p_1;\ \|t\| \leq \xi_{n+m}. \quad (34)$$

Тогда

$$\bigcup_{h=1}^{p_1} R_{mh} \cup R_m^* \cup R_m = R^n,\quad m=1,2,\dots, \quad (35)$$

и в силу (26), (30), (31), (33)

$$I_m\left(\bigcup_{h=1}^{p_1} R_{mh} \cup R_m^*\right) = o(1) exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n^+}\xi_{jm}\right\},\quad m\to\infty,\ m\in M_{10}. \quad (36)$$

Обозначим $(A \subset R^n)$

$$J_m(A) = \int_A exp\left\{-2U_m(t) + iV_m(t) - (\gamma t,t) + \sum_{j=p_1+1}^{p}\varkappa_j\left(e^{\xi_{jm}+i(k_j,t)}-1\right)\right\}dt. \quad (37)$$

В силу (20), (24), (35) –(37) для завершения доказательства теоремы достаточно установить, что существует множество $M \in M_\infty$, $M \subset M_{11}$ такое, что с некоторой не зависящей от $m \in M$ константой $c_0 > 0$

$$J_m(R_m) \geq c_0 exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n^+}\xi_{jm}\right\},\quad m \in M. \quad (38)$$

4. Докажем (38). Найдется $M_{12} \in M_\infty$, $M_{12} \subset M_{11}$ такое, что если $m \in M_{12}$, $t \in R_m$, то в силу (16), (34)

$$(k_j,t) = 2\pi l_j + v_j,\ l_j \in Z,\ |v_j| \leq c\,exp\left(-\frac{3}{8}\xi_{jm}\right),\ j=1,\dots,p_1;\ (k_{p+1},t) = \quad (39)$$

$$= 2\pi l_{p+1} + v_{p+1},\ l_{p+1} \in Z,\ |v_{p+1}| \leq c_7 \max_{k_j \in E} exp\left(-\frac{3}{8}\xi_{jm}\right) \leq c_7 exp\left(-\frac{3}{8}\xi_{p+1,m}\right).$$

Пусть $\{\bar{k}_j\}_1^{n+}$ – базис группы $M(k_j)_1^{p_1}$; $\{\delta_j\}_1^{n+} \subset L^+$ – биортогональная система к $\{\bar{k}_j\}$, $t^\pm$ – ортогональные проекции вектора t на подпространства $L^\pm$. Из (39) вытекает, что

$$(\bar{k}_j, t) = 2\pi l_j' + \omega_j, \quad l_j' \in Z, \quad |\omega_j| \le c_2 \max_{1\le j\le p_1} \exp\left(-\tfrac{3}{8}\xi_{jm}\right);$$

$$t = \sum_{j=1}^{n^+} 2\pi l_j' b_j + \omega + t', \quad \omega \in L^+, \quad \|\omega\| \le c_3 \max_{1\le j\le p_1} \exp\left(-\tfrac{3}{8}\xi_{jm}\right). \tag{40}$$

Из (39), (40) при $m\in M_{12}$ и достаточно большом $t\in R_m$ имеем

$$(k_j, \omega) = v_j, \quad |v_j| \le c \exp\left(-\tfrac{3}{8}\xi_{jm}\right), \; j = 1,\dots,p_1, p+1. \tag{41}$$

Обозначим для $l\in Z^{n^+}$, $l = (l_1, \dots, l_{n^+})$

$$h_l = \sum_{j=1}^{n^+} 2\pi l_j b_j, \; (R_m^0)^+ = \left\{\omega\in L^+, |(k_j,\omega)| \le c\exp\left(-\tfrac{3}{8}\xi_{jm}\right), j = 1,\dots,p_1, p+1\right\},$$

$$R_m^l = \left\{h_l + (R_m^0)^+ + t^-, \; \|t^-\| \le \xi_{n^+m}\right\}, \quad R_m' = \bigcup_{\|l\|\le \xi_{n^+m}} R_m^l, \quad m\in M_{12}. \tag{42}$$

В силу ((39)–(42)) $R_m \subset R_m'$, $m\in M_{12}$ и в силу (35), (36)

$$J_m(R_m) = J_m(R_m') + O(1)\exp\left\{-\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n^+}\xi_{jm}\right\} = \sum_{l\in Z^{n^+}} J_m(R_m^l) + O(1)\exp\left\{-\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n^+}\xi_{jm}\right\} \tag{43}$$

Если $t\in R_m^l$, $\|l\|\le \xi_{n^+m}$, $m\in M_{12}$, $m\to\infty$, то в силу (42) $t = h_l + \omega + t^-$ и с учетом (13), (17) справедливы оценки

$$(\gamma t, t) = (\gamma(h_l + t^-), h_l + t^-) + O(1); \tag{44}$$

$$U_m(t) = \tfrac{1}{4}\left[\sum_{j=1}^{p_1}\lambda_j e^{\xi_{jm}}(k_j,\omega)^2 + \lambda_{p+1,m} e^{\xi_{p+1,m}}(k_{p+1},\omega)^2\right] + O(1) =$$

$$= \tfrac{1}{4}(Q_m\,\omega, \omega) + O(1); \tag{45}$$

$$V_m(t) = \sum_{j=1}^{p_1}\lambda_j e^{\xi_{jm}}(t_j,\omega) + \lambda_{p+1,m}e^{\xi_{p+1,m}}(k_{p+1},\omega) + (2\gamma\sigma_m -$$

$$- x_m, t) + o(1) = -\Big(\sum_{j=p_1+1}^{p} \lambda_j e^{\xi_{jm}} k_j, \omega\Big) + \big((2\gamma\sigma_m - x_m)^+, h_1\big) +$$

$$+ \big((2\gamma\sigma_m - x_m)^-, t^-\big) + o(1) = \big((2\gamma\sigma_m - x_m)^+, h_1\big) -$$

$$- \Big(\Big(\sum_{j=p_1+1}^{p} \lambda_j k_j e^{\xi_{jm}}\Big)^-, t^-\Big) + o(1), \qquad m \in M_{12}, \quad m \to \infty; \quad (46)$$

$$\sum_{j=p_1+1}^{p} \lambda_j \left(e^{\xi_{jm} + i(k_j, t)} - 1\right) = \sum_{j=p_1+1}^{p} \lambda_j \left(e^{\xi_{jm} + i(k_j, h_1 + t^-)} - 1\right) + o(1) \quad (47)$$

Повторяя рассуждения при выводе неравенства (9), получаем, что если $m \in M_{12}$ и достаточно велико, то

$$(Q_m \omega, \omega) \geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{p_1} \lambda_j e^{\xi_{jm}} (k_j, \omega)^2 . \qquad (48)$$

Из соотношений (37), ((43)-(48)) с помощью рассуждений, аналогичных использованным при выводе оценки (36), получим

$$J_m(R_m) = \int_{(R_m^0)^+} \exp\Big(-\frac{1}{2}(Q_m \omega, \omega)\Big) d\omega \sum_{l \in Z^{n+}} \int_{L^-} \exp\Big\{-\big(\gamma(h_1 + t^-), (h_1 + t^-)\big) +$$

$$+ \sum_{j=p_1+1}^{p} \lambda_j \left(e^{\xi_{jm} + i(k_j, h_1 + t^-)} - 1\right) + i\big((2\gamma\sigma_m - x_m)^+, h_1\big) - \qquad (49)$$

$$- i\Big(\Big(\sum_{j=p_1+1}^{p} \lambda_j k_j e^{\xi_{jm}}\Big)^-, t^-\Big)\Big\} dt^- + o(1) \exp\Big\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n^+} \xi_{jm}\Big\}, \quad m \to \infty.$$

Вводя новые переменные $\tau_{jm} = \sqrt{\lambda_j} \exp(\xi_{jm}/2)(k_j, \omega)$ и пользуясь соотношениями (18), (19), (42), рассуждая, как при выводе оценок (30), (31), получаем

$$\int_{(R_m^0)^+} \exp\Big(-\frac{1}{2}(Q_m \omega, \omega)\Big) d\omega = (c_1 + o(1)) \exp\Big\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n^+} \xi_{jm}\Big\}, \; c_1 > 0, \; \begin{matrix} m \to \infty, \\ m \in M_{12}. \end{matrix} \quad (50)$$

5. Для оценки суммы по l в правой части (49) преобразуем ее подобно [1]. Введем функции $(m \in M_{12})$

$$g_m^*(y) = \int_{R^n} \exp\left\{-(\gamma t,t) + \sum_{j=p_1+1}^{p} \lambda_j \left(e^{\tau_{jm} + i(k_j,t)} - 1\right) + \right.$$

$$\left. + i\left(y - \sum_{j=p_1+1}^{p} \lambda_j k_j^- e^{\tau_{jm}}, t\right)\right\} dt, \qquad (51)$$

$$\varphi_m(y) = \sum_{s\in Z^{n+}} g_m^*\left(y - \sum_{j=1}^{n^+} s_j \bar{k}_j\right), \quad y \in L^+ .$$

Функция $\varphi_m(y)$ является периодической и расскладывается в ряд Фурье

$$\varphi_m(y) = \sum_{l\in Z^{n+}} a_{ml} \exp\left[i\left(y, \sum_{j=1}^{n^+} 2\pi l_j b_j\right)\right]. \qquad (52)$$

Пусть d_0 - параллелепипед объемом V_0, образованный векторами $\{\bar{k}_j\}_1^{n+}$. Тогда

$$a_{ml} = V_0 \int_{d_0} \varphi_m(y) \exp\left[-i\left(y, \sum_{j=1}^{n^+} 2\pi l_j b_j\right)\right] dy = V_0 \sum_{s\in Z^{n+}} \int_{d_0} g_m^*\left(y - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{n^+} s_j \bar{k}_j\right) \exp\left[-i\left(y - \sum_{r=1}^{n^+} s_r \bar{k}_r, \ \sum_{j=1}^{n^+} 2\pi l_j b_j\right)\right] dy =$$

$$= V_0 \int_{L^+} g_m^*(y) \exp\left[-i\left(y, \sum_{j=1}^{n^+} 2\pi l_j b_j\right)\right] dy = (2\pi)^{n^+} V_0 \times \qquad (53)$$

$$\times \int_{L^-} \exp\left\{-\left(\gamma(h_l + t^-), (h_l + t^-)\right) + \sum_{j=p_1+1}^{p} \lambda_j \left(e^{\tau_{jm} + i(k_j, h_l + t^-)} - 1\right) - \right.$$

$$\left. - i\left(\sum_{j=p_1+1}^{p} \lambda_j \bar{k}_j e^{\tau_{jm}}, t^-\right)\right\} dt^- .$$

Подставив выражения (53) для a_{ml} в (52) и положив в (52) $y_m = (2\gamma\sigma_m - x_m)^+$, из (49) и (50) получим

$$J_m(R_m) = (c_2 + o(1)) \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{p^+} \tau_{jm}\right\} \varphi_m\left((2\gamma\sigma_m - x_m)^+\right), \ c_2 > 0. \qquad (54)$$

Покажем, что $\varphi_m(y) > c_3 > 0, \ y \in L^+$. Для этого положительную гауссову плотность обозначим

$$\exp[-(\gamma t,t)] = \int_{R^n} q_0(y)\exp[-i(y,t)]dy; \quad q_0(y)>0, \quad y\in R^n.$$

Очевидно, справедливо разложение в абсолютно сходящийся ряд

$$\exp\Big[\sum_{j=p_1+1}^{p}\lambda_j\Big(e^{\xi_{jm}+i(k_j,t)}-1\Big)\Big] = \sum_{\nu} q_{m\nu}e^{i(\nu,t)},$$

где ν пробегает всевозможные целочисленные неотрицательные комбинации векторов $\{k_j\}_{p_1+1}^{p}$; $q_{m\nu}\geq 0$, $q_{m0}\geq \exp\Big(-\sum_{j=p_1+1}^{p}\lambda_j\Big)>0$. Поэтому $(m\in M_{12})$

$$g_m^*(y) = (2\pi)^n\sum_{\nu} q_{m\nu}q_0\Big(y+\nu-\sum_{j=p_1+1}^{p}\lambda_j\bar{k}_je^{\xi_{jm}}\Big)\geq(2\pi)^n q_{m0}q_0\Big(y-\sum_{j=p_1+1}^{p}\lambda_j\bar{k}_je^{\xi_{jm}}\Big). \quad (55)$$

Поскольку в силу (17) векторы

$$\sum_{j=p_1+1}^{p}\lambda_j\bar{k}_j\exp(\xi_{jm})$$

при $m\in M_{12}$ принадлежат ограниченному множеству, а плотность $q_0(y)$ всюду положительна, из (55) получим, что $g_m^*(y)\geq c_3>0$ при $y\in 2\pi d_0$. Но тогда из (51) следует, что $\varphi_m(y)\geq c_5>0$, $y\in L^+$, и с учетом (54) получаем оценку (38).

6. Таким образом, с учетом изложенного установлено, что при выполнении условия (15) найдется такое множество $M\in M_\infty$, что $g(\lambda_{p+1,m}, x_m)>0$, $m\in M$. Покажем, что этот же факт имеет место, если условие (15) не выполнено, т.е. существует не зависящее от m число N_1 такое, что

$$(k_{p+1},\sigma_m)\leq N_1<\infty, \quad m\in M_1. \qquad (56)$$

В этом случае также справедливы соотношения* ((17)-(19)) и аналоги соотношений ((20)-(22)), (37):

$$(2\pi)^n g(\lambda_{p+1,m}, x_m) = \exp[\,\tilde{U}_0(x_m)\,]\;\tilde{J}_m(R^n), \qquad (57)$$

где для множества $A\subset R^n$

$$\tilde{J}_m(A) = \int_A \exp\Big\{-2\tilde{U}_m(t)+i\tilde{V}_m(t)-(\gamma t,t)+$$

---

*При этом возможно, что $J_1=\varPhi$, $L^+=\{0\}$. Тогда все рассуждения проводятся аналогично, но с существенными упрощениями.

$$+\sum_{j=p_1+1}^{p} \lambda_j\left(e^{\xi_{jm}+i(k_j,t)}-1\right)+\lambda_{p+1,m}\left(e^{\xi_{p+1,m}+i(k_{p+1},t)}-1\right)\Big\}dt;$$

$$\tilde{U}_0(x_m) = \sum_{j=1}^{p_1}\lambda_j\left(e^{(k_j,\sigma_m)}-1\right)+\left(\gamma\sigma_m-x_m,\sigma_m\right);$$

$$\tilde{U}_m(t) = \sum_{j=1}^{p_1}\lambda_j e^{(k_j,\sigma_m)}\sin^2\frac{(k_j,t)}{2};$$

$$\tilde{V}_m(t)=\sum_{j=1}^{p_1}\lambda_j e^{(k_j,\sigma_m)}\sin(k_j,t)+\left(2\gamma\sigma_m-x_m,t\right).$$

Повторяя приведенные выше рассуждения (которые в данном случае упрощаются), получаем множество $M_{13}\in M_\infty, M_{13}\subset M_{12}$ такое, что при $m\in M_{13}$

$$\mathcal{J}_m(R^n)=(c_4+O(1))\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n^+}\xi_{jm}\right\}\tilde{\Phi}_m\left(\left(2\gamma\sigma_m-x_m\right)^+\right),\ c_4>0, \quad (58)$$

где
$$\tilde{\Phi}_m(y)=\sum_{s\in Z^{n+}}\tilde{g}_m^*\left(y-\sum_{j=1}^{n^+}s_j\bar{k}_j\right),\quad y\in L^+;$$

$$\tilde{g}_m^*(y)=\int_{R^n}\exp\Big\{-(\gamma t,t)+\sum_{j=p_1+1}^{p}\lambda_j\left(e^{\xi_{jm}+i(k_j,t)}-1\right)+$$

$$+\lambda_{p+1,m}\left(e^{\xi_{p+1,m}+i(k_{p+1},t)}-1\right)+i\left(y-\sum_{j=p_1+1}^{p}\lambda_j k_j^- e^{\xi_{jm}}-\right.$$

$$\left.-\lambda_{p+1,m}k_{p+1}^- e^{\xi_{p+1,m}},\ t\right)\Big\}dt.$$

Повторяя рассуждение [1], с помощью соотношений (17), (56) получаем, что для любого $\varepsilon>0$ начиная с достаточно большого m

$$|\tilde{g}_m^*(y) - g_m^*(y)| \leq \varepsilon, \quad y \in R^n,$$

где функция $g_m^*(y)$ определена выражением (51). Поскольку, как показано выше, $g_m^*(y)>c_3>0$, $y\in 2\pi d_0$, $m\in M_{13}$, то для достаточно больших $m\in M_{13}$ имеем $\Phi_m((2_\ell \sigma_m - x_m)^+)\geq c_5>0$. Тогда из (57), (58) получаем множество $M\in M_\infty$ такое, что при $g(\lambda_{p+1,m}, x_m)\geq 0, m\in M$. Теорема доказана.

1. Линник Ю.В., Островский И.В. Разложения случайных величин и векторов. - М.: Наука, 1972. - 480 с.
2. Островский И.В. Арифметика вероятностных распределений // Теория вероятностей и ее применения. - 1986. - 31, вып. 1. - С. 3-30.
3. Чистяков Г.П. О факторизации вероятностных распределений класса L Ю.В.Линника. I. // Теория функций, функцион. анализ и их прил.- 1987. - Вып. 47. - С. 3-25.
4. Лившиц Л.З. Достаточные условия, при которых двумерный безгранично делимый закон имеет только безгранично делимые компоненты // Там же. - 1970. - Вып. 12. - С. 36-58.
5. Чернявский А.Г. О принадлежности классу I_0 многомерного вероятностного закона с гауссовой компонентой // Проблемы устойчивости стохастических моделей: Тр. Всесоюз. семинара. - Куйбышев: Изд-во Куйб. ун-та, 1987. - С. 145-153.
6. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. - М.: Мир, 1973. - 469 с.

УДК 519.2

С.С.Габриэлян

К ХАРАКТЕРИЗАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОШИ НА АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ

Описаны все локально компактные абелевы группы, на которых справедлив аналог теоремы Линника о характеризации распределения Коши одинаковой распределенностью одночлена и линейной статистики.

Как следует из одного результата Ю.В.Линника, на вещественной прямой справедлива следующая характеризация распределения Коши.

Теорема А [1]. Пусть $\xi_1,\dots,\xi_s$, $s\geq 2$ - независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением μ. Если линейные формы ξ_1 и $a_1\xi_1+\dots+a_s\xi_s$, где $\sum_1^s |a_i|=1$ и по крайней мере одна пара чисел $-\log|a_1|,\dots,-\log|a_s|$ несоизмерима, одинаково распределены, то μ - распределение Коши.

В настоящей работе полностью описаны те локально компактные абелевы группы, на которые может быть перенесена эта характеризация. Точная постановка задачи будет дана ниже.

ISBN 5-12-002791-1. Динамические системы и комплексный анализ. Киев, 1992

Пусть X – локально компактная сепарабельная абелева метрическая группа; $Y=X^*$ – ее группа характеров; (x, y) – значение характера $y\in Y$ на элементе $x\in X$. Если G – замкнутая подгруппа в X, то через $A(Y,G)$ обозначим ее аннулятор $A(Y,G)=\{y\in Y:(x,y)=1 \ \forall x\in G\}$.

Свертка двух распределений μ и ν, характеристическая функция распределения μ и распределения $\bar\mu$ определяются обычным образом:

$$(\mu*\nu)(E)=\int_X \mu(E-x)d\nu(x),\quad \hat\mu(y)=\int_X (x,y)d\mu(x),\quad \bar\mu(E)=\mu(-E).$$

Обозначим через $D(X)$ множество вырожденных распределений E_x, $x\in X$ на группе X, через $I(X)$ – множество всех сдвигов распределений Хаара m_K компактных подгрупп K группы X. Носитель распределения μ обозначим через $\sigma(\mu)$. Обозначим через R, Z, T и $Z(p)$ соответственно группы вещественных чисел, целых чисел, группу вращений окружности и группу корней степени p из единицы.

<u>Определение [2]</u>. Распределение μ на группе X называется распределением Коши, если его характеристическая функция $\hat\mu(y)$ представима в виде

$$\hat\mu(y)=(x,y)\exp\left\{-\sqrt{\varphi(y)}\right\}, \qquad (1)$$

где $x\in X$, а $\varphi(y)$ – непрерывная неотрицательная функция на Y, удовлетворяющая уравнению $\varphi(y_1+y_2)+\varphi(y_1-y_2)=2[\varphi(y_1)+\varphi(y_2)]$.

Распределение Коши называется симметричным, если в (1) $x=0$. Множество распределений Коши и симметричных распределений Коши на группе X обозначим через $K(X)$ и $K^s(X)$ соответственно. Как следует из свойств функции $\varphi(y)$ [3], если $\mu\in K^s(X)$, то $\sigma(\mu)$ совпадает с некоторой связной подгруппой группы X.

Пусть $n\in Z$. Рассмотрим гомоморфизм $f_n: X\to X$, определенный формулой $f_n(x)=nx$. Образ группы X при этом отображении обозначим через $X^{(n)}$.

Пусть $A=\{a_j\}_{j=0}^{s}$ – произвольное множество целых чисел. Обозначим через $K_A(X)$ класс распределений μ на группе X, обладающих следующим свойством: если ξ_j – независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в группе X и с распределением μ, то линейные формы $a_0\xi_1$ и $a_1\xi_1+\ldots+a_s\xi_s$ одинаково распределены.

Легко видеть, что $\mu\in K_A(X)$ тогда и только тогда, когда характеристическая функция $\hat\mu(y)$ удовлетворяет условию

$$\hat\mu(a_0y)=\prod_{j=1}^{s}\hat\mu(a_jy),\quad y\in Y. \qquad (2)$$

<u>Предложение 1 [2]</u>. Пусть K – компактная подгруппа группы X, $A=\{a_j\}_{j=0}^{s}$, $s\geq 2$ – множество целых чисел и числа $\{a_1,\ldots,a_s\}$ взаимно просты. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) $m_K \in K_A(X)$;

2) если $a_0 y \in A(Y,K)$, то $y \in A(Y,K)$;

3) $K^{(a_0)} = K$.

Множество целых чисел $A = \{a_j\}_{j=1}^{s}$ назовем допустимым для группы X, если при всех j выполнено условие $X^{(a_j)} \neq \{0\}$.

Обозначим через $\mathcal{R}(X)$ совокупность допустимых для группы X множеств $A = \{a_j\}_{j=0}^{s}$, $s \geq 2$ взаимно простых чисел, удовлетворяющих условию

$$a_0 = \sum_{i=1}^{s} |a_i|, \qquad (3)$$

где по крайней мере одна пара чисел $-\log\left|\frac{a_s}{a_0}\right|, \dots, -\log\left|\frac{a_s}{a_0}\right|$ несоизмерима.

Пусть $A \in \mathcal{R}(X)$. Из (2) и (3) следует, что $K^s(X) \subset K_A(X)$. Положим $I_A(X) = I(X) \cap K_A(X)$. Поскольку $K_A(X)$ – полугруппа относительно свертки, то

$$I_A(X) * K^s(X) \subset K_A(X). \qquad (4)$$

Цель настоящей работы состоит в полном описании групп X, для которых

$$I_A(X) * K^s(X) = K_A(X) \qquad (5)$$

при любом $A \in \mathcal{R}(X)$. Отметим, что выполнение равенства (5) для группы X означает, что любое распределение $\mu \in K_A(X)$ инвариантно относительно некоторой компактной подгруппы K, для которой $K^{(a_0)} = K$ и при естественном гомоморфизме $X \to X/K$ μ индуцирует на фактор-группе X/K распределение Коши.

<u>Теорема</u>. Для того чтобы на группе X выполнялось равенство (5) при любом $A \in \mathcal{R}(X)$, необходимо и достаточно, чтобы группа X удовлетворяла одному из условий:

1) группа X топологически изоморфна либо группе $R + D$, либо группе D, где D – дискретная группа без кручения;

2) $X^{(p)} = \{0\}$, где p – простое число.

В работе [2] дано полное описание групп X, для которых равенство (5) выполнено при некотором $A \in \mathcal{R}(X)$.

Отметим, что для групп X, удовлетворяющих условию 1), выполнено равенство $I(X) = D(X)$, и тогда, как легко видеть, $I_A(X) = D(X)$, если $a_0 = a_1 + \dots + a_s$, и $I_A(X) = \{E_0\}$, если $a_0 \neq a_1 + \dots + a_s$. Поэтому для таких групп равенство (5) равносильно тому, что для любого $A \in \mathcal{R}(X)$ либо $K(X) = K_A(X)$, либо $K^s(X) = K_A(X)$. Если группа X удовлетворяет условия 2), то X – вполне несвязная группа, поэтому $K^S(X)=\{E_0\}$. Тогда равенство (5) равносильно тому, что для любого $A\in \mathfrak{A}(X)$ имеем $I_A(X)=K_A(X)$.

Доказательство теоремы опирается на ряд лемм.

Лемма 1 [2]. Пусть X – дискретная группа без кручения, $A = \{a_j\}_{j=0}^{s}$, $s\geqslant 2$ – произвольное множество целых чисел, удовлетворяющих условию (3). Тогда $K_A(X)\subset D(X)$.

Лемма 2. Пусть G – замкнутая подгруппа группы X; μ – распределение на G. Тогда, если $\mu\notin I(G)*K(G)$, то $\mu\notin I(X)*K(X)$. Доказательство этой леммы опускаем ввиду его простоты.

Лемма 3. Пусть группа X такая, что $X^{(p)}\neq\{0\}$ и X содержит подгруппу G, $G\approx Z(p)$, где p – простое число. Тогда для некоторого $A\in\mathfrak{A}(X)$ включение (4) строгое.

Доказательство. Так как группа G дискретна, то $K(G)=D(G)$. Поэтому класс $I(G)*K(G)$ состоит лишь из вырожденных распределений и распределения m_G. Пусть μ_0 – невырожденное симметричное распределение на G, $\mu_0\neq m_G$. Тогда $\mu_0\notin I(G)*K(G)$ и по лемме 2 $\mu_0\notin I(X)*K(X)$.

Возможны два случая.

$$1.\ p\neq 2.\ \text{Положим}\quad a_0=\frac{p^2+p}{2}+1,\quad a_1=\frac{p^2-p}{2}+1,\quad a_2=p.$$

Легко проверить, что $A=\{a_j\}_{j=0}^{2}\in\mathfrak{A}(X)$. Очевидно, что $\hat{\mu}_0(y)$ удовлетворяет уравнению (2), поэтому $\mu_0\in K_A(X)$.

2. $p=2$. Положим $a_0=3$, $a_1=2$, $a_2=1$. Очевидно, $A=\{a_0,a_1,a_2\}\in\mathfrak{A}(X)$ и $\mu_0\in K_A(X)$. Лемма доказана.

Лемма 4 [2]. Пусть $A=\{a_j\}_{j=0}^{s}$, $s\geqslant 2$ – множество целых чисел и числа $\{a_1,\dots,a_s\}$ взаимно просты; K – компактная подгруппа группы X такая, что $K^{(a_0)}=K$, $\lambda\in K_A(X/K)$. Тогда функция

$$f(y)=\begin{cases}\hat{\lambda}(y), & \text{если}\quad y\in A(Y,K),\\ 0, & \text{если}\quad y\notin A(Y,K)\end{cases}$$

является характеристической функцией некоторого распределения $\mu\in K_A(X)$.

Пусть p – простое число. Обозначим через $Z(p^\infty)$ рассматриваемую в дискретной топологии мультипликативную группу корней из единицы, степени которых являются степенями числа p. Положим $\Delta_p = (Z(p^\infty))^*$.

Лемма 5. Пусть $X=\Delta_p$. Тогда для некоторого множества $A\in\mathfrak{A}(X)$ включение строгое.

Доказательство. Так как группа Δ_p вполне несвязна, то $K(X)=D(X)$. Вложим группу $Z(p)$ в $Z(p^\infty)\approx\Delta_p^*$ и положим $K=A(X,Z(p))$. Очевидно, что группа K компактна. Справедливы топологические изоморфизмы $X/K \approx \mathbb{Z}(p)$ и $(X/K)^* \approx \mathbb{Z}(p)$. Если $p>2$, то положим $a_0=\frac{p^2+p}{2}+1$, $a_1=\frac{p^2-p}{2}+1$, $a_2=p$, если $p=2$, то $a_0=3$, $a_1=2$, $a_2=1$. Рассмотрим на группе $\mathbb{Z}(p^\infty)$ функцию

$$f(y)=\begin{cases} \hat{\nu}(y), & y\in \mathbb{Z}(p), \\ 0, & y\notin \mathbb{Z}(p), \end{cases}$$

где ν - произвольное невырожденное симметричное распределение на группе $\mathbb{Z}(p)$, $\nu \neq m_{\mathbb{Z}(p)}$. Тогда, как легко видеть, $\nu\in K_A(X/K)$, $A=\{a_0,a_1,a_2\}$. Применив лемму 4, получим $f(y)=\hat{\mu}(y)$, где $\mu\in K_A(X)$. Поскольку X - группа без кручения, то $A\in \mathcal{R}(X)$. По построению $\mu\notin I(X)*N(X)$. Лемма доказана.

<u>Доказательство теоремы</u>. Необходимость. Пусть X содержит элемент x_0 порядка p, где p - простое число. Пусть $M(x_0)$ - подгруппа в X, порожденная элементом x_0. Тогда $M(x_0)\approx \mathbb{Z}(p)$ и из справедливости равенства (5) для любого $A\in \mathcal{R}(X)$ по лемме 3 следует, что $X^{(p)}=\{0\}$, т.е. группа X удовлетворяет условию 2.

Пусть X - группа без кручения. По структурной теореме каждая локально компактная абелева группа X топологически изоморфна группе $\mathbb{R}^n+G$, где $n\geq 0$, а группа G содержит компактную открытую подгруппу K [4]. Проверим, что $n=0$ или $n=1$ и $K=\{0\}$.

В рассматриваемом случае K - компактная группа без кручения. Значит [4], $K\approx(\Sigma_a)^{\gamma}_{p\in P}\oplus \Delta_p^{\gamma_p}$, где Σ_a - группа характеров рассматриваемой в дискретной топологии группы рациональных чисел; P - множество простых чисел, γ и γ_p - кардинальные числа. Отметим, что при любом простом p группа Δ_p топологически изоморфна некоторой подгруппе в Σ_a [4]. Если $K\neq\{0\}$, то группа K и, следовательно, группа X содержат подгруппу $G_1\approx\Delta_p$ при некотором простом p. Значит, по лемме 5 включение (4) строгое при некотором $A\in \mathcal{R}(X)$. Отсюда $K=\{0\}$. Если $n\geq 2$, то свертки двух распределений Коши в $\mathbb{R}^2$, с характеристическими функциями $\hat{\mu}_1(y)=e^{-\alpha|y_1|}$, $\hat{\mu}_2(y)=e^{-\beta|y_2|}$, где $\alpha,\beta>0$, $y=(y_1,y_2)\in \mathbb{R}^2$, $\mu=\mu_1*\mu_2\in K_A(X)$ для любого $A\in \mathcal{R}(X)$, но $\mu\notin I_A(X)*N^S(X)$. Следовательно, $n=1$ либо $n=0$.

<u>Достаточность</u>. Пусть группа X удовлетворяет условию 1. Считаем, что $X=\mathbb{R}^n+D$, $n=0,1$. Пусть $A\in \mathcal{R}(X)$ и $\mu\in K_A(X)$. Рассмотрим сужение характеристической функции $\hat{\mu}(y)$ на подгруппу $H=D^*\subset Y$. Это сужение является характеристической функцией некоторого распределения $\delta\in K_A(D)$. По лемме 1, $\delta=E_d$, $d\in D$, а значит, если рассмотреть распределение $\mu_1=\mu*E_d\in K_A(X)$, то $\hat{\mu}_1(y)\equiv 1$ на H, поэтому $G(\mu_1)\subset A(X,H)=\mathbb{R}^n$. Из теоремы А получаем, что $\mu_1\in K(X)$, а значит, $\mu\in K(X)$.

Предположим, что группа X удовлетворяет условию 2. Пусть $A=\{a_j\}_{j=0}^{s}\in \mathcal{R}(X)$ и $\mu\in K_A(X)$. Так как $K_A(X)$ - полугруппа, то $\nu=\mu*\bar{\mu}\in K_A(X)$.

Положим $E=\{y\in Y:\hat{\nu}(y)=1\}$. Тогда $\sigma(\nu)\subset A(X,E)=X_1$ и для группы X_1 также справедливо $X_1^{(p)}=\{0\}$. Распределение ν на группе X_1 обладает свойством

$$0\leq\hat{\nu}(h)<1,\quad h\in Y_1=X_1^*,\ h\neq 0. \tag{6}$$

Характеристическая функция $\hat{\nu}(h)$ удовлетворяет уравнению (2), из которого вытекает, что

$$\hat{\nu}(a_0^n h)=\prod_{p_1+\dots+p_s=n}\left[\hat{\nu}\left(a_1^{p_1}\dots a_s^{p_s}h\right)\right]^{C_{p_1\dots p_s}},\quad h\in Y_1, \tag{7}$$

где $C_{p_1\dots p_s}=(p_1+\dots+p_s)!/p_1!\dots p_s!$. Так как множество A допустимо, то все a_j не делятся на p. Поскольку все отличные от нуля элементы группы Y_1 также имеют порядок p, то при любом j непрерывный гомоморфизм $f_{a_j}:Y_1\to Y_1$ является топологическим изоморфизмом. Поэтому, в частности, Y_1 – группа с однозначным делением на a_0. Учитывая это, из (7) получаем

$$\hat{\nu}(h)=\prod_{p_1+\dots+p_s=n}\left[\hat{\nu}\left(a_1^{p_1}\dots a_s^{p_s}h/a_0^n\right)\right]^{C_{p_1\dots p_s}},\ h\in Y_1. \tag{8}$$

Зафиксируем $h\in Y_1, h\neq 0$ и рассмотрим $M(h)$ – подгруппу в Y_1, порожденную h, $M(h)\approx Z(p)$. Отметим, что при любых целых неотрицательных $p_1,\dots,p_s$ имеем $a_1^{p_1}\dots a_s^{p_s}h/a_0^n\in M(h)\setminus\{0\}$. Поэтому из (6) и (8) вытекает, что $\hat{\nu}(h)=0$ при $h\neq 0$. Значит, подгруппа X_1 компактна и $\nu=m_{X_1}$. Поскольку $\hat{\nu}(y)=|\mu(y)|^2$, то, очевидно, $\mu\in\Gamma_A(X)$, т.е. справедливо равенство (5). Теорема доказана.

1. Каган А.М., Линник Ю.В., Рао С.Р. Характеризационные задачи математической статистики. – М.: Наука, 1972. – 656 с.
2. Фельдман Г.М. Распределение Коши на абелевых группах и его характеризация // Докл. АН СССР. – 1989. – 309, № 1. – С. 46–49.
3. Сазонов В.В., Тутубалин В.Н. Распределение вероятностей на топологических группах // Теория вероятностей и ее применения. – 1966. – 11, вып. 1. – С. 3–55.
4. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. – М.: Наука, 1975. – 654 с.

УДК 519.46

С.И.Безуглый

Т-МНОЖЕСТВО ДЛЯ КОЦИКЛОВ

Введено и изучено понятие T-множества для пар (Γ,α) (обозначение $T(\Gamma,\alpha)$), где Γ - счетная эргодическая группа автоморфизмов пространства Лебега и α - коцикл на Γ со значениями в локально компактной сепарабельной коммутатичной группе G. Множество $T(\Gamma,\alpha)$ есть подгруппа группы характеров $\hat{G}$.

В работах [1-3] введено и изучено понятие слабой эквивалентности пар (Γ,α), где Γ - счетная эргодическая группа автоморфизмов пространства Лебега (X,μ) и α - коцикл на $X\times\Gamma$ со значениями в локально компактной сепарабельной (л.к.с.) коммутативной группе G. В настоящей работе с каждой такой парой (Γ,α) связывается подгруппа $T(\Gamma,\alpha)$ группы характеров группы G. Подгруппа $T(\Gamma,\alpha)$ инвариантна относительно слабой эквивалентности пар. Группа $T(\Gamma,\alpha)$ является обобщением хорошо известного понятия T- множества (см., например, [4, 5]) и совпадает с ним в случае, когда $G=R$ и $\alpha=\rho$, где ρ- коцикл Радона - Никодима группы Γ. В статье доказываются следующие результаты: 1) группа $T(\Gamma,\alpha)$ совпадает с точечным спектром $Sp(\{W\})$ ассоциированного с парой (Γ,α) действия $W=W_{(\Gamma,\alpha)}(G)$ группы G; 2) коцикл α есть кограница тогда и только тогда, когда $T(\Gamma,\alpha)=\hat{G}$, где $\hat{G}$- группа характеров группы G; 3) W есть транзитивное действие группы G на себе тогда и только тогда, когда $Sp(\{W\})=\hat{G}$ (см. примечание при корректуре). Будем использовать терминологию и результаты статей [1, 2, 4, 6]. Ниже будут даны также основные определения.

Через (X,μ) будет обозначать пространство Лебега с вероятностной мерой μ, через G - произвольную коммутативную л.к.с. группу, а через $\hat{G}$ - группу характеров G. Пусть Γ- счетная эргодическая группа несингулярных автоморфизмов (X,μ), действующая свободно (это условие не является ограничительным). Через $[\Gamma]$ будем обозначать полную группу автоморфизмов, порожденную Γ. Множество всех коциклов на $X\times\Gamma$ со значениями в G будем обозначать через $Z^1(X\times\Gamma,G)$. Ассоциированное с парой (Γ,α) действие группы G будем обозначать через $W_{(\Gamma,\alpha)}(G)$. Это действие есть аналог ассоциированного потока и совпадает с ним в случае $G=R$ и $\alpha=\rho$ [1, 4]. Всюду ниже T будет обозначать единичную окружность, а e - единицу группы (используем мультипликативную запись групповой операции).

Две пары $(\Gamma_i,\alpha_i), i=1,2,$ где $\Gamma_i\subset Aut(X_i,\mu_i)$ и $\alpha_i\in Z^1(X_i\times\Gamma_i, G)$, называются слабо эквивалентными, если существует изоморфизм θ.

ISBN 5-12-002791-1. Динамические системы и комплексный анализ. Киев, 1992

$X_1 \to X_2, \theta\circ\mu_1 \sim \mu_2$ такой, что $\theta[\Gamma_1]\theta^{-1} = [\Gamma_2]$, а коциклы $\theta^{-1}\circ\alpha_2(x_1,\gamma_1) = \alpha_2(\theta x_1, \theta\gamma_1\theta^{-1})$ и α_1 когомологичны.

Определение 1. Пусть $V: G \to Aut(X,\mu)$ – несингулярное действие группы G на (X,μ). Характер χ из $\hat{G}$ принадлежит точечному спектру $Sp(\{V\})$ действия V, если для любого $g\in G$ и п.в. $x\in X$

$$\chi(g) = f(V(g)x)f(x)^{-1}$$

для некоторой измеримой функции $f: X \to T$.

Легко проверить, что $Sp(\{V\})$ образует подгруппу в $\hat{G}$.

Определение 2. Характер χ из $\hat{G}$ назовем принадлежащим множеству $T(\Gamma,\alpha)$, где $\Gamma\subset Aut(X,\mu)$, $\alpha\in Z^1(X\times\Gamma, G)$, если существует измеримая функция $f: X\to T$ такая, что для всех $\gamma\in\Gamma$ и п.в. $x\in X$

$$\chi(\alpha(x,\gamma)) = f(\gamma x)f(x)^{-1}, \qquad (1)$$

т.е. коцикл $\chi(\alpha(x,\gamma))$ есть кограница.

Лемма 3. 1) Если пары (Γ_1,α_1) и (Γ_2,α_2) слабо эквивалентны, то $T(\Gamma_1,\alpha_1) = T(\Gamma_2,\alpha_2)$; 2) $T(\Gamma,\alpha)$ – подгруппа в $\hat{G}$; 3) $T(\Gamma,\alpha) = T([\Gamma],\alpha)$.

Доказательство. Поскольку утверждения 2) и 3) очевидны, то в доказательстве нуждается только 1). Пусть $\theta: X_1 \to X_2$ – такое взаимно однозначное отображение, что $\theta[\Gamma_1]\theta^{-1} = [\Gamma_2]$ и

$$\theta^{-1}\circ\alpha_2(x_1,\gamma_1) = \xi(\gamma_1 x_1)\alpha_1(x_1,\gamma_1)\xi(x_1)^{-1}, \quad (x_1,\gamma_1)\in X_1\times\Gamma_1, \qquad (2)$$

где $\xi: X_1 \to G$ – измеримая функция. Для $\chi\in T(\Gamma_1,\alpha_1)$ с учетом (2) и определения слабой эквивалентности пар имеем

$$\chi(\theta^{-1}\circ\alpha_2(x_1,\gamma_1)) = \chi(\alpha_2(\theta x, \theta\gamma_1\theta^{-1})) = \qquad (3)$$

$$= \chi(\xi(\gamma_1 x_1))\chi(\alpha_1(x_1,\gamma_1))\chi(\xi(x_1))^{-1}.$$

Положим $\theta x_1 = x_2$, $\theta\gamma_1\theta^{-1} = \gamma_2$. Тогда $\gamma_1 x_1 = \gamma_1\theta^{-1}x_2 = \theta^{-1}\gamma_2 x_2$. Поэтому из (1) и (3) получаем

$$\chi(\alpha_2(x_2,\gamma_2)) = \varphi(\gamma_2 x_2)\varphi(x_2)^{-1},$$

где $\varphi(x_2) = \chi(\xi(\theta^{-1}x_2))f(\theta^{-1}x_2)$, т.е. $\chi\in T(\Gamma_2,\alpha_2)$. Аналогично доказывается, что $T(\Gamma_2,\alpha_2)\subset T(\Gamma_1,\alpha_1)$.

Коцикл $\alpha\in Z^1(X\times\Gamma_1,G)$ называется коциклом с плотным образом в группе G, если ассоциированное действие $W_{(\Gamma,\alpha)}(G)$ тривиально. Другими словами, группа автоморфизмов $\Gamma(\alpha)\subset Aut(X\times G, \mu\times\lambda_G)$ (λ_G – мера Хаара), элементы которой действуют по формуле

$$\gamma(\alpha)(x, h) = (\gamma x, \alpha(x,\gamma)h), \quad \gamma\in\Gamma,$$

является эргодической.

Лемма 4. Если коцикл $\alpha\in Z^1(X\times\Gamma, G)$ имеет плотный образ в G, то $T(\Gamma,\alpha)=\{e\}$.

Доказательство. Из результатов [1] следует, что коцикл α когомологичен коциклу β, для которого группа автоморфизмов $\Gamma_\beta=\{\gamma\in[\Gamma]: \beta(x,\gamma)=e$ для п.в. $x\in X\}$ есть эргодическая. Пусть $\chi\in T(\Gamma,\alpha)=T(\Gamma,\beta)$, т.е. для некоторой измеримой функции $f: X\to T$

$$\chi(\beta(x,\gamma))=f(\gamma x)f(x)^{-1}.$$

Если $\gamma\in\Gamma_\beta$, то $f(\gamma x)=f(x)$ для п.в. $x\in X$. Эргодичность Γ_β влечет соотношение: $f(x)=const$ п.в. на X. Следовательно, для любого $\gamma\in\Gamma$ и п.в. $x\in X$

$$\chi(\beta(x,\gamma))=1.$$

Из того, что коцикл β плотен в G, следует, что для любого счетного плотного в G множества $\{g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots\}$ выполняется соотношение $\chi(g_n)=1$, $n\in N$. Непрерывность χ позволяет заключить, что χ есть тривиальный характер.

Теорема 5. Для произвольной пары (Γ,α) справедливо равенство

$$T(\Gamma,\alpha) = Sp\left(\{W_{(\Gamma,\alpha)}(G)\}\right).$$

Доказательство. Пусть $\chi\in T(\Gamma,\alpha)$. Тогда существует измеримая функция $f: X\to T$ такая, что

$$\chi(\alpha(x,\gamma)) = f(\gamma x)f(x)^{-1}, \quad \gamma\in\Gamma.$$

Положим $\varphi(x,g)=\chi(g)f(x)^{-1}$, $g\in G$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\varphi(x,gh) = \chi(gh)f(x)^{-1} = \chi(h)\varphi(x,g),\\
&\varphi(\gamma x, \alpha(x,\gamma)g) = \chi(\alpha(x,\gamma))\chi(g)f(\gamma x)^{-1} = \\
&= \chi(g)\chi(\alpha(x,\gamma))\chi(\alpha(x,\gamma))^{-1}f(x)^{-1} = \varphi(x,g).
\end{aligned} \tag{4}$$

Из $\Gamma(\alpha)$ – инвариантности функции $\varphi(x,g)$ и (4) следует, что проекция $\bar\varphi$ функции φ на $(X\times G)/\xi(\Gamma(\alpha))$ ($\xi(\Gamma(\alpha))$ – измеримая оболочка разбиения на траектории группы $\Gamma(\alpha)$) удовлетворяет соотношению

$$\bar\varphi(W_{(\Gamma,\alpha)}(h)\omega) = \chi(h)\bar\varphi(\omega), \quad h\in G,$$

где $\omega\in(X\times G)/\xi(\Gamma(\alpha))=\Omega$. Таким образом,

$$\chi(h) = \bar\varphi(W_{(\Gamma,\alpha)}(h)\omega)\bar\varphi(\omega)^{-1}, \quad h\in G, \tag{5}$$

т.е. $\chi\in Sp(\{W_{(\Gamma,\alpha)}(G)\})$. Наоборот, пусть $\chi\in Sp(\{W_{(\Gamma,\alpha)}(G)\})$, т.е. справедливо (5) для некоторой измеримой функции $\Phi: \mathfrak{R}\to T$. Это означает (см. [4]), что найдется $\Gamma(\alpha)$-инвариантная функция $\xi(x,g)$, которая удовлетворяет соотношению

$$\chi(h)=\xi(x,gh)\xi(x,g)^{-1}.$$

Положим $\xi(x,0)^{-1}=f(x)$. Следовательно,

$$\chi(\alpha(x,\gamma))\xi(\gamma x,0)=\chi(\alpha(x,\gamma))\xi(\gamma(\alpha)(x,\alpha(x,\gamma)^{-1})=\xi(x,0).$$

Поэтому $\chi(\alpha(x,\gamma))=f(\gamma x)f(x)^{-1}$, т.е. $\chi\in T(\Gamma,\alpha)$.

Теорема 6. Коцикл $\alpha\in Z^1(X\times\Gamma,G)$ есть кограница тогда и только тогда, когда $T(\Gamma,\alpha)=\hat{G}$.

Доказательство. Пусть α - кограница, т.е. $\alpha(x,\gamma)=c(\gamma x)c(x)^{-1}$ для некоторой измеримой функции $c: X\to G$. Тогда для любого характера $\chi\in\hat{G}$

$$\chi(\alpha(x,\gamma))=\chi(c(\gamma x))\chi(c(x))^{-1},$$

т.е. $\chi\in T(\Gamma,\alpha)$. Докажем обратное утверждение, основываясь на результатах работы [5]. Сначала покажем, что существует измеримая функция $\psi:\hat{G}\times X\to T$ такая, что

$$\psi(\chi,\gamma x)\psi(\chi,x)^{-1}=\chi(\alpha(x,\gamma)). \qquad (6)$$

Через $\mathfrak{R}$ обозначим множество всех измеримых отображений из X в T. Тогда $\mathfrak{R}$ - топологическая польская группа относительно $L^2(X,\mu)$-топологии. Поскольку Γ - эргодическая группа автоморфизмов, множество Γ-инвариантных функций из $\mathfrak{R}$ изоморфно T. Обозначим через $\hat{\mathfrak{R}}$ фактор-группу $\mathfrak{R}/T$ и пусть борелевое множество $M\subset\mathfrak{R}$ пересекает каждый класс смежности ровно в одной точке, т.е. проекция $\pi:\mathfrak{R}\to\hat{\mathfrak{R}}$, ограниченная на M, взаимно однозначно. На $\hat{\mathfrak{R}}$ естественным образом вводится σ-алгебра измеримых множеств, относительно которой $\pi/_M$ измеримо [5]. Для каждого $\chi\in\hat{G}$ определим множество $\mathfrak{R}_\chi\in\hat{\mathfrak{R}}$ как множество измеримых решений $\xi(x)$ уравнения

$$\xi(\gamma x)\xi(x)^{-1}=\chi(\alpha(x,\gamma)),\quad \gamma\in\Gamma \qquad (7)$$

($\mathfrak{R}_\chi$ не пусто в силу условия теоремы). Легко проверить, что отображение $\Phi:\chi\to\mathfrak{R}_\chi$ из $\hat{G}$ в $\hat{\mathfrak{R}}$ измеримо. Положим $\psi_\chi(\cdot)=\pi|_M^{-1}\mathfrak{R}_\chi$. Тогда для любого $E\subset X$

$$p_E\circ\pi|_M^{-1}\circ\Phi(\chi)=\int_E\psi_\chi(x)d\mu(x), \qquad (8)$$

где p_E - функция на M, определяемая по формуле

$$p_E(\xi(\cdot)) = \int_E \xi(x)\, d\mu(x).$$

Следовательно, (8) влечет измеримость функции $\psi(\chi,x)=\psi_\chi(x)$ (см. лемму 8 из [5]), которая удовлетворяет равенству (6).

Далее, из приведенных выше формул следует, что

$$\psi(\chi_1\chi_2, x) = \psi(\chi_1, x)\psi(\chi_2, x).$$

Таким образом, существует измеримая функция $f: X \to G$ такая, что

$$\psi(\chi, x) = \chi(f(x)).$$

Поскольку $\psi(\chi,x)\in R_\chi$ для п.в. $x\in X$, то из (7) имеем

$$f(\gamma x)f(x)^{-1} = \chi\alpha(x,\gamma).$$

<u>Теорема 7</u>. Пусть $V: G\to Aut(\mathcal{R},\nu)$ - произвольное действие группы G. Тогда $Sp(\{V\})=\hat{G}$, если V изоморфно транзитивному действию группы G сдвигами на себя.

<u>Доказательство</u>. Равенство $Sp(\{V\})=\hat{G}$ для транзитивного действия G на себя следует непосредственно из определения 1. Наоборот, пусть $Sp(\{V\})=\hat{G}$. Согласно теореме 5.II из [2], существует пара (Γ,α) такая, что действие $V(G)$ изоморфно действию $W_{(\Gamma,\alpha)}(G)$, ассоциированному с парой (Γ,α). В силу теоремы 5 получаем, что $T(\Gamma,\alpha)=\hat{G}$. Из теоремы 6 следует, что в этом случае коцикл α является кограницей, поэтому ассоциированное действие $W_{(\Gamma,\alpha)}(G)$ изоморфно действию G сдвигами на себя.

<u>Примечание при корректуре</u>. После написания этой работы автору стало известно, что теорема 6 была доказана ранее в работе C.C.Moore, K.Schmidt "Coboundaries and homomorphisms for non-singular actions and a problem of H.Helson", Proc.London Math. Soc., 1980, v.40, p. 443 - 475.

1. Безуглый С.И., Голодец В.Я. Слабая эквивалентность и структура коциклов эргодического автоморфизма. I. - Харьков, 1988. - 44 с. (Препр. / АН УССР ФТИНТ, 15-88).
2. Безуглый С.И., Голодец В.Я. Слабая эквивалентность и структура коциклов эргодического автоморфизма. II. - Харьков, 1988. - 34 с. - (Препр. / АН УССР ФТИНТ, 16-88).
3. Голодец В.Я., Синельщиков С.Д. Существование и единственность коциклов эргодического автоморфизма с плотными образами в аменабельных группах. - Харьков, 1983. - 21 с. - (Препр. / АН УССР. ФТИНТ, 19-83).
4. Hamachi T., Osikawa M. Ergodic groups of automorphisms and Krieger's theorems // Sem. Math. Sci. Keio Univ. - 1981. - N 3.- P. 1-113.
5. Hamachi T., Oka Yu., Osikawa M. A classification of ergodic non-singular transformation groups // Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.- 1974. - 28, N 2. - P. 113-133.
6. Schmidt K. Lectures on cocycles of ergodic transformation groups. - Warwick : Univ. Warwick press, 1976. - 232 p.

Научное издание

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

Сборник научных трудов

Художественный редактор Л.А.Комяхова
Технический редактор Н.И.Кудрик
Оператор В.А.Кирюхина
Корректор С.И.Колесник

Сдано в набор 25.09.91. Подп. в печ. 14.06.92. Формат 60x84/16.
Бумага офс. № 1. Офс. печ. Усл.печ.л.10,23.Усл.кр.-отт.10,46.
Уч.-изд.л. 7,54. Тираж 160 экз. Заказ 2-568.

Оригинал-макет подготовлен в издательстве "Наукова думка".
252601 Киев 4, ул. Репина, 3.
Киевская книжная типография научной книги. 252004 Киев 4,
ул. Репина, 4.