# Анализ в бесконечномерных пространствах и теория операторов

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР

# Анализ в БЕСКОНЕЧНО-МЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ и теория операторов

СБОРНИК
НАУЧНЫХ ТРУДОВ

КИЕВ НАУКОВА ДУМКА 1983

УДК 517.4+517.53+517.9

Анализ в бесконечномерных пространствах и теория операторов: Сб. науч. тр. / Ред. кол.: В.А.Марченко (отв. ред.) и др. – Киев: Наук. думка, 1983. – 152 с.

В сборнике представлены работы по теории функций и теории операторов в функциональных пространствах, в частности в пространствах с индефинитной метрикой, по эргодической теории и теории динамических систем, а также по математическим вопросам статистической гидромеханики и механики кристаллической решетки. Изучена интерполяционная задача Шура, граничная проблема Неванлинны – Пика в матричной постановке, исследованы пространства $J$-растягивающихся матриц-функций в круге и найдены неравенства типа Гарнака для них. Указан критерий разрешимости уравнений типа свертки. Исследована обратная задача рассеяния для уравнений Штурма – Лиувилля на оси с потенциалом, убывающим на одном конце, и найдено обобщение теоремы Хартмана о длине лакун в спектре таких операторов.

Для научных и инженерно-технических работников, занимающихся теорией функций, теорией операторов и их приложениями к математической физике.



Редакция информационной литературы

А $\frac{1702050000-654}{М221(04)-83}$ БЗ-10-10-83

СОДЕРЖАНИЕ

УДК 512

Г.Р.Белицкий

# НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ В ПРОСТРАНСТВЕ МАТРИЦ

В статье предлагается конструкция нормальной формы прямоугольных матриц относительно некоторого класса подгрупп группы двусторонних преобразований. К числу "допустимых" относятся стационарные подгруппы относительно подобия, поэтому общая конструкция дает, в частности, нормальные формы нескольких матриц относительно одновременного подобия и относительно одновременного двустороннего преобразования. Множество матриц, имеющих нормальную форму, конструктивно.

Пусть $K$ – поле; $char\ K=0$, $GL(n,K)$ – группа обратимых $n\times n$ – матриц над $K$; $\mathfrak{M}(n,m,K)$ – пространство всех $n\times m$ – матриц над $K$. Группа $\mathcal{G}_{er}(n,m,K)=GL(n,K)\times GL(m,K)$ действует на матрицы $A\in\mathfrak{M}(n,m,K)$ по формуле

$$g.A=TAS^{-1}\ (T\in GL(n,K),\ S\in GL(m,K)).$$

Положим $\mathcal{G}_e(n,m,K)=\{g=(T,S)|S=I\}$, $\mathcal{G}_r(n,m,K)=\{g=(T,S)|T=I\}$,

где $I$ – единичный оператор. Кроме того, пусть $\mathcal{G}_e(n,K)$ – "диагональ" группы $\mathcal{G}_{er}(n,m,K)$:

$$\mathcal{G}_c(n,K)=\{g=(T,S):T=S\in GL(n,K)\}.$$

Действия $\mathcal{G}_e$, $\mathcal{G}_r$, $\mathcal{G}_{er}$ и $\mathcal{G}_c$ играют в дальнейшем роль основных, из которых строятся более сложные действия.

Алгебра Ли $\mathcal{L}(n,m,K)$ группы $\mathcal{G}_{er}(n,m,K)$ состоит из пар квадратных матриц $(A,B)$ с коммутатором

$$[(A,B),(C,D)]=([A,C],[B,D]),$$

где $[A,C]$ – обычный коммутатор.

Обозначим через $\mathcal{Y}^0(n,m,K)\subset\mathcal{Y}_{er}(n,m,K)$ подгруппу верхнетреугольных преобразований с единичной диагональю. Алгебра Ли $\mathcal{L}^0(n,m,K)$ этой подгруппы состоит из подгруппы пар $(A,B)$ верхнетреугольных матриц с нулевой диагональю. Экспоненциальное отображение

$$exp(A,B)=(e^A,e^B)$$

для подгруппы $\mathcal{Y}^0(n,m,K)$ биективно и полиномиально.

Известно, что каждую матрицу $A\in\mathfrak{M}(n,m,K)$ некоторым преобразованием $g\in\mathcal{Y}_e(n,m,K)$ можно привести к нормальной форме:

$$g.A=\begin{pmatrix} 0\ldots 0 1 * \ldots * 0 * \ldots * \ldots \\ 0\ldots 0 0 0 \ldots 0 1 * \ldots * \ldots \\ 0\ldots 0 0 0 \ldots 0 0 0 \ldots 0 \ldots \end{pmatrix} \tag{I}$$

$$\underbrace{\ldots}_{r_0}\underbrace{\ldots}_{r_1}\underbrace{\ldots}_{r_2}\ldots\ ,$$

где $*$ – элемент поля $K$. Эти элементы и числа $r_0, r_1, r_2,\ldots$ однозначно определяются исходной матрицей $A$ и образуют полную систему инвариантов относительно группы левых преобразований. Стационарная группа нормальной формы (I) состоит из всех матриц $T\in GL(n,K)$ вида

$$T=\begin{pmatrix} I & B \\ 0 & Q \end{pmatrix},$$

где $I$ – единичная матрица, размер которой равен рангу $A$; $B$ – произвольная, а $Q$ – обратимая матрицы. Отметим, что здесь допускается значение $m=\infty$.

Аналогично каждую матрицу $A\in\mathfrak{M}(n,m,K)$ некоторым преобразованием $g\in\mathcal{Y}_r(n,m,K)$ можно привести к нормальной форме:

$$g.A=\begin{pmatrix} 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots\ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots\ldots & 0 & * \\ 0 & \ldots\ldots & 0 & * \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Стационарная группа матрицы (2) состоит из всех матриц $T\in GK(m,K)$ вида

$$T=\begin{pmatrix} Q & B \\ 0 & I \end{pmatrix},\ detQ\neq 0.$$

Здесь допускается значение $n=\infty$.

Каждую матрицу $A\in\mathfrak{M}(n,m,K)$ некоторым двусторонним преобразованием $g\in\mathcal{Y}_{er}(n,m,K)$ можно привести к виду

$$g.A=\begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Стационарная группа такой матрицы состоит из пар $(T,S)\in \mathcal{G}_{gr}(n,m,K)$ вида

$$T=\begin{pmatrix} P & B \\ 0 & Q_1 \end{pmatrix}, \qquad S=\begin{pmatrix} P & C \\ 0 & Q_1 \end{pmatrix},$$

где $P$, $Q_1$ и $Q_2$ обратимы.

Если поле $K$ алгебраически замкнуто, то некоторым преобразованием подобия каждую матрицу можно привести к нормальной форме Жордана. Для наших целей удобно несколько ее модифицировать. Проделаем это сначала для матрицы $A$ с одним собственным значением. Пусть $C_1,\ldots,C_S$ – ее жордановы клетки размерностей $d_1\geq d_2\geq\ldots d_S$. соответственно. Выберем новую нумерацию базисных векторов. Пусть первые $s$ элементов базиса образуют собственные векторы клеток $C_1,\ldots,C_S$, затем следуют присоединенные векторы первого порядка, второго и т.д. Запишем $A$ в новом базисе. Упорядочим наборы $\{d_1,\ldots,d_S\}$ характеризующие жорданову структуру матриц с одним собственным значением. Для матрицы с произвольным спектром упорядочим спектральные подпространства в соответствии с нумерацией этих наборов (при равных наборах – как-нибудь). Описанную модификацию жордановой формы назовем нормальной формой относительно подобия.

П р и м е р I. Пусть 4x4 – матрица $A$ имеет собственные числа $\lambda$, $\mu$, каждому из которых отвечает двумерная клетка Жордана. Тогда, если $\lambda\neq\mu$, то нормальная форма относительно подобия совпадает с жордановой формой. Если же $\lambda=\mu$, то нормальная форма относительно подобия имеет вид

$$A^0=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Пусть $N=\{n_1,\ldots,n_S\}$; $M=\{m_1,\ldots,m_t\}$ – два набора целых чисел $n_i, m_i\geq 1$. Каждую матрицу $B\in\mathfrak{M}(n,m,K)$. разобъем на блоки таким образом, чтобы блок $B_{11}$ находился на пересечении первых $n_1$ строк и первых $m_1$ столбцов; блок $B_{21}$ – на пересечении следующих $n_2$ строк и первых $m_1$ столбцов и т.д. Количество таких блоков составляет $st$. Введем следующую нумерацию блоков $B_{ij}$. Каждое целое число $q\leq st$ можно единственным образом представить в виде $q=js-i+1;\ 1\leq j\leq t;\ 1\leq i\leq s.$
Обозначим через $B^{(q)}$ блок $B_{ij}$.

Положим также

$$L_q=\{B/B^{(r)}=0(r<q)\},\ L^{(q)}=\{B/B^{(r)}=0\ (r\neq q)\}.$$

Допустим, что все подпространства $L_q$ инвариантны относительно действия в $\mathfrak{M}(n,m,K)$ некоторой подгруппы $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}_{er}(n,m,K)$.

Обозначим через

$$\rho^{(q)}: \mathfrak{M}(n,m,K) \to L^{(q)}$$

проектор вдоль суммы подпространств $L^{(r)}\ (r \neq q)$ и пусть $P_q = \sum_{r \neq q} \rho^{(r)}$.

Формула

$$\sigma_q(g,B) = P_q\, g.B \quad (B \in L_q,\ g \in \mathcal{G})$$

задает некоторое действие группы $\mathcal{G}$ в пространстве $L_q$. Подпространство $L^{(q)} \subset L_q$ инвариантно относительно действия $\sigma_q$. Сужение $\sigma_q$ на это подпространство обозначим через $\sigma^{(q)}$. Оно оставляет на месте нулевые блоки матрицы $B \in L^{(q)}$. Определим теперь "диагональное" действие группы $\mathcal{G}$ в $\mathfrak{M}(n,m,K)$, положив

$$\Delta(g,B) = \sum_{q=1}^{st} \sigma^{(q)}(g, \rho^{(q)}B)\ (g \in \mathcal{G},\ B \in \mathfrak{M}(n,m,K)).$$

Положим

$$\mathcal{G}^0 = \{h \in \mathcal{G} \cap \mathcal{G}^0(n,m,K) \mid \Delta(h,B) = B\ \ (B \in \mathfrak{M}(n,m,K))\}.$$

Тогда $\mathcal{G}^0 \subset \mathcal{G}$ – нормальний делитель и

$$\Delta(hg,B) = \Delta(gh,B) = \Delta(g,B)(g \in \mathcal{G},\ h \in \mathcal{G}^0,\ B \in \mathfrak{M}(n,\ m,\ K)).$$

Будем говорить, что замкнутая (в топологии Зарисского) подгруппа $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}_{er}(n,m,K)$ имеет тип $(N,M)$, если все подпространства $L_q\ (q=1,\dots,s.t)$ инвариантны относительно $\mathcal{G}$ и, кроме того, выполнены такие условия:

а) при каждом $q=1,\dots,st$ действие $\sigma^{(q)}$ на блоке $B^{(q)}$ либо является единичным, либо совпадает с одним из следующих действий: $\mathcal{G}_e(n_i,m_j,K)$, $\mathcal{G}_r(n_i,m_j,K)$, $\mathcal{G}_{er}(n_i,m_j,K)$, $\mathcal{G}_c(n_i,K)$ (при этом $m_j = n_i$);

в) для любого $g \in \mathcal{G}$ найдется такое $h \in \mathcal{G}^0$, что

$$\Delta(g,B) = hg.B \quad (B \in \mathfrak{M}(n,m,K))$$

Например, стационарная группа матрицы (I) относительно действия $\mathcal{G}_e(n,m,K)$ имеет тип

$$(N,M) = (\{p,\ n-p\},\ \{n-1\}),\ p = \mathrm{rang}\, A.$$

Стационарная группа матрицы (2) относительно действия $\mathcal{G}_r(n,m,K)$ имеет тип

$$(N,M) = (\{n\},\ \{m-p,\ p\}),\ p = \mathrm{rang}\, A.$$

Стационарная группа матрицы (3) имеет тип

$$(\{p,\ n-p\},\ \{p,\ m-p\}),\ p = \mathrm{rang}\, A.$$

Стационарная группа матрицы с одним собственным значением и жордановыми клетками размерностей $d_1 \geq \ldots \geq d_s$, приведенной к нормальной форме относительно подобия, имеет тип $(N, M)$, где

$$N = \{\underbrace{\rho_1, \ldots \rho_s; \ldots \rho_1 \ldots \rho_s;}_{d_s} \underbrace{\rho_1 \ldots \rho_{s-1}; \ldots \rho_1 \ldots \rho_{s-1}}_{d_{s-1} - d_s} \ldots$$

где $\rho_i$ – количество клеток размерности $d_i$.

Преобразование $h \in \mathcal{G}^0$, фигурирующее в условии ($b$), единственно для каждого $g \in \mathcal{G}$. При этом

$$\Delta(hg, B) = \Delta(g, B) = hg.B.$$

Множество всех элементов $\hat{g} \in \mathcal{G}$, для которых

$$\Delta(\hat{g}, B) = \hat{g}.B \quad (B \in \mathfrak{M}(n, m, K))$$

образует некоторую подгруппу $\hat{\mathcal{G}} \subset \mathcal{G}$. Группа $\mathcal{G}$ – полупрямое произведение подгрупп $\mathcal{G}^0$ и $\hat{\mathcal{G}}$.

Согласно условию $(\dot{a})$, в зависимости от характера действия множество всех номеров $\sigma^{(q)}$ разбивается на подмножества $\Gamma_0, \Gamma_e, \Gamma_r, \Gamma_{er}, \Gamma_c$. Блок $B^{(q)}$ матрицы $B$ назовем тривиальным, если

$$\sigma^{(q)}(g, \rho^{(q)}B) = \rho^{(q)}B \quad (g \in \mathcal{G}).$$

Иными словами, блок $B^{(q)}$ тривиален, если $q \in \Gamma_0$ или если $q \in \Gamma_e \cup \Gamma_r \cup \Gamma_{er}$; а $B^{(q)} = 0$, или, наконец, если $q \in \Gamma_0$, а $B^{(q)} = \lambda I$, $\lambda \in K$.

Если блоки $B^{(k)}$ $(k \leq q)$ тривиальны, то $P_q \Delta(g, B) = P_q B$. Тогда из условия $(b)$

$$P_q g.B = P_q h^{-1}.\Delta(g, B) = P_q h^{-1}B, \quad h \in \mathcal{G}^0. \tag{4}$$

При этом стационарная группа

$$\mathcal{G}_q(B) = \{g \in \mathcal{G} / P_q g.B = P_q B\}$$

имеет тот же тип $(N, M)$ и такие же множества $\Gamma_0, \Gamma_e, \Gamma_r, \Gamma_{er}, \Gamma_c$, как и у группы $\mathcal{G}$.

При фиксированном $B \in \mathfrak{M}(n, m, K)$ положим

$$\varphi_q(g) = P_q(g.B - B).$$

<u>Лемма I.</u> Если* $g \in \mathcal{G}_{q-1}(B)$, $h \in \mathcal{G}^0$, то

$$\varphi_q(hg) = \varphi_q(h) + \varphi_q(g).$$

---

* По определению $\mathcal{G}^0(B) = \mathcal{G}$ $(B \in \mathfrak{M}(n, m, K))$.

Доказательство. Имеем

$$\varphi_q(hg) = \varphi_q(h) + P_q(hg.B - h.B).$$

Поскольку $g \in \mathcal{G}_{q-1}(B)$, то $P_q(g.B - B) \in L^{(q)}$. Так как $h \in \mathcal{G}^0$, то

$$P_q h(g.B - B) = P_q(g.B - B) = \varphi_q(g).$$

Следовательно, $\varphi_q(hg) = \varphi_q(h) + \varphi_q(g)$. . Лемма доказана.

Следствие I. Сужение

$$\varphi_q : \mathcal{G}_{q-1}(B) \cap \mathcal{G}^0 \to L^{(q)}$$

является гомоморфизмом в аддитивную группу пространства $L^{(q)}$.

Отсюда вытекает, что множество

$$\mathcal{J}_q(B) = \varphi_q(\mathcal{G}_{q-1}(B) \cap \mathcal{G}^0)$$

является аддитивной подгруппой в $L^{(q)}$. На самом деле имеет место более точное утверждение, а именно: пусть $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{G}_{q-1}(B) \cap \mathcal{G}^0)$ – алгебра Ли группы $\mathcal{G}_{q-1}(B) \cap \mathcal{G}^0$.

Положим

$$f(\Lambda) = \varphi_q(\exp \Lambda).$$

Тогда $f : \mathcal{L} \to L^{(q)}$ – полиномиальное отображение. При этом, в силу следствия I,

$$f((\alpha + \beta)\Lambda) = f(\alpha\Lambda) + f(\beta\Lambda) \quad (\alpha, \beta \in K).$$

Отсюда вытекает, что $f$ – линейный оператор. Поэтому справедливо

Следствие 2. Множество $J_q(B)$ является подпространством пространства $L^{(q)}$.

Лемма 2. Если $h \in \mathcal{G}^0$, то $J_q(h.B) = J_q(B)$. Если $P_{q-1}B' = P_{q-1}B''$, то $J_q(B') = J_q(B'')$.

Доказательство. Достаточно проверить включение $J_q(h.B) \subset J_q(B)$. Пусть $V = P_q(Sh.B - h.B)$; $S \in \mathcal{G}_{q-1}(h.B) \cap \mathcal{G}^0$. Тогда $h^{-1}Sh \in \mathcal{G}_{q-1}(B) \cap \mathcal{G}^0$. Поэтому

$$V = P_q h(h^{-1}Sh.B - B) = P_q(h^{-1}Sh.B - B) \in \mathcal{J}_q(B).$$

Если $B' - B'' \in L^{(q)}$, то

$$P_q h.(B' - B'') = P_q(B' - B'') \quad (h \in \mathcal{G}^0).$$

Кроме того, $\mathcal{G}_{q-1}(B') = \mathcal{G}_{q-1}(B'')$. Следовательно,

$$P_q(h.B' - B') = P_q(hB'' - B'')(h \in \mathcal{G}_{q-1}(B') \cap \mathcal{G}^0).$$

Отсюда $J_q(B') = J_q(B'')$. Лемма доказана.

Допустим теперь, что все блоки $B^{(k)}$ $(k \le q-1)$ тривиальны. Тогда $P_{q-1}\hat{g}.B = P_{q-1}B$ $(\hat{g} \in \hat{\mathcal{G}})$. Поэтому в силу (4) и леммы 2 имеем цепочку равенств

$$J_q(B)=J_q(\overset{\wedge}{g}.B)=J_q(hg.B)=J_q(g.B).$$

Кроме того,

$$P_q(hg.B-g.B)=P_q g(g^{-1}hg.B-B)\quad (h\in \mathcal{G}_{q-1}(g.B)),$$

откуда

$$J_q(g.B)=\sigma^{(q)}(g,J_q(B))=J_q(B)$$

и мы получаем

<u>Следствие</u>. Если блоки $B^{(k)}$ $(k\le q-1)$ тривиальны, то подпространство $J_q(B)$ инвариантно относительно действия $\sigma^{(q)}$.

Таким образом, если блоки $B^{(k)}$ $(k\le q-1)$ тривиальны и $q\in\Gamma_{er}$, имеются только две возможности: либо $J_q(B)=\{0\}$, либо $J_q(B)=L^{(q)}$. Если $q\in\Gamma_c$, то имеются четыре возможности: либо $J_q(B)=\{0\}$, либо $J_q(B)=L^{(q)}$, или $J_q(B)$ совпадает с множеством тех матриц $V\in L^{(q)}$, у которых блок $V^{(q)}$ скалярен, либо, наконец, с множеством тех матриц, у которых блок $V^{(q)}$ имеет нулевой след.

Если $q\in\Gamma_e$, то запас инвариантных подпространств гораздо шире. Их можно "параметризовать" подпространствами $L\subset \mathfrak{M}(m_i,1,K)$.

Обозначим через $\mathfrak{M}_e(L)$ подмножество таких матриц $B\in L^{(q)}$ для которых

$$B^{(q)}X=0\quad (X\in L).$$

Подпространство $\mathfrak{M}_e(L)$ инвариантно относительно действия $\sigma^{(q)}$ при $q\in\Gamma_e$. Обратно, если $J$ – инвариантное подпространство, то $J=\mathfrak{M}_e(L)$, где

$$L=\{X\in\mathfrak{M}(m_i,1,K)/B^{(q)}X=0\quad (B\in J)\}.$$

Аналогично параметризуются подпространства, инвариантные относительно действия $\sigma^{(q)}$ при $q\in\Gamma_r$, а именно, подпространство $\mathfrak{M}_r(L)$ таких матриц $B\in L^{(q)}$, для которых

$$B^{(q)}X\subset L\quad (X\in\mathfrak{M}(m_i,1,K))$$

является инвариантным и обратно, всякое инвариантное подпространство имеет такой вид.

Будем считать, что при каждом $p=1,2\ldots$ зафиксировано некоторое отображение $\tau$ множества подпространств пространства столбцов $\mathfrak{M}(p,1,K)$ в себя, обладающее свойствами

$$L\cap\tau(L)=0,\ L+\tau(L)=\mathfrak{M}(p,1,K)\ (L\subset\mathfrak{M}(p,1,K)).$$

Пусть $q\in\Gamma_e$ и $J_q(B)=\mathfrak{M}_e(L)$. Положим $J_q^{\prime}(B)=\mathfrak{M}_e(\tau(L))$. Аналогично, если $q\in\Gamma_r$ и $J_q(B)=\mathfrak{M}_r(L)$, то положим

$J_q^1(B) = \mathfrak{M}_r(\tau(L))$. Если $q \in \Gamma_{er}$, то при $J_q(B) = \{0\}$ положим $J_q^{1r}(B) = L^{(q)}$, а при $J_q(B) = L^{(q)}$ положим $J_q(B) = \{0\}$. Наконец, пусть $q \in \Gamma_c$. Тогда при $J_q(B) = \{0\}$ положим $J_q^1(B) = L^{(q)}$, а при $J_q(B) = L^{(q)}$ положим $J_q^1(B) = \{0\}$.

Если

$$J_q(B) = \{V \in L^{(q)} \mid tr V^{(q)} = 0\},$$

то

$$J_q^1(B) = \{V \in L^{(q)} \mid V = \lambda I,\ \lambda \in K\}.$$

Если

$$J_q(B) = \{V \in L^{(q)} \mid V = \lambda I,\ \lambda \in K\},$$

то положим

$$J_q^1(B) = \{V \in L^{(q)} \mid tr V^{(q)} = 0\}.$$

Пусть блоки $B^{(k)}\ (k \leq q-1)$ тривиальны. Будем говорить, что проекция $P_q B$ имеет нормальную форму относительно $\mathcal{G}$, если при каждом $k = 1, 2, \dots, q$ проекция $P^{(k)} B$ принадлежит подпространству $J_k^1(B)$ и имеет нормальную форму относительно действия $\sigma^{(k)}$.

Положим $\nu(g) = max(\nu_c(\mathcal{G}), \nu_{er}(J-1)$, где*

$$\nu_c(\mathcal{G}) = \max_{q \in \Gamma_c} min(n_i, m_j), \quad \nu_{er}(\mathcal{G}) = \max_{q \in \Gamma_{er}} min(n_i, m_j).$$

Если $\nu(\mathcal{G}) \geq 2$, предположим, что поле $K$ алгебраически замкнуто.

Лемма 3. Пусть блоки $B^{(k)}\ (k \leq q-1)$ тривиальны. Существует преобразование $g \in \mathcal{G}$, приводящее проекцию $P_q B$ к нормальной форме. Если проекции $P_q B$ и $P_q B'$ имеют нормальную форму и лежат в одной $\mathcal{G}$ - орбите, то они могут различаться лишь порядком клеток с одинаковой жордановой структурой в блоке $B^{(q)}$ (если действие $\sigma^{(q)}$ совпадает с подобием).

Доказательство. Сначала нормализуем проекцию $P_q(B)$ относительно группы $\mathcal{G}^0$. Иными словами, найдем такое преобразование $h \in \mathcal{G}^0$, что

$$(h.B)^{(k)} \in J_k^1(B) \quad (k = 1, 2, \dots, q). \tag{5}$$

Поскольку $J_1^1(B) = L^{(1)}$, для $k = 1$ условие (5) выполнено при любом $h \in \mathcal{G}$. Пусть теперь $k = 2$. Заметим, что

$$L^{(2)} = J_2(B) \dotplus J_2^1(B). \tag{6}$$

---

* Мы считаем, что $\nu_c(\mathcal{G}) = 0$ (соответственно $\nu_{er}(\mathcal{G}) = 0$), если $\Gamma_c = \emptyset$ ($\Gamma_{er} = \emptyset$).

Пусть $\rho^{(2)}B = S+T$ , где $S \in J_2(B), T \in J_2^{\perp}(B)$ . Тогда

$$S = \rho_2(g_2 . B - B), \; g_2 \in \mathcal{G}_1(B) \cap \mathcal{G}^0.$$

Следовательно,

$$\rho^{(2)} g_2 . B = T + J_2^{\perp}(B).$$

При этом блок $T^{(2)} = (g_2 . B)^{(2)}$ остается тривиальным. В самом деле, по условию $\sigma^{(2)}(g, B) = \rho^{(2)}B \; (g \in \mathcal{G})$ , поэтому

$$-\sigma^{(2)}(g, B) = \sigma^{(2)}(g, S) + \sigma^{(2)}(g, T) = -\rho^{(2)}B \quad (g \in \mathcal{G}).$$

Поскольку подпространства $J_2(B)$ и $J_2^{\perp}(B)$ инвариантны относительно действия $\sigma^{(2)}$ , а (6) – разложение в прямую сумму, то

$$\sigma^{(2)}(g, S) = S^{(2)}, \quad \sigma^{(2)}(g, T) = T^{(2)} \quad (g \in \mathcal{G}).$$

Точно также найдется такое преобразование $g_3 \in \mathcal{G}_2(g_2 . B) \cap \mathcal{G}^0$, что $\rho_3 g_3 g_2 . B \in J_3^{\perp}(g_2 B) = J_3^{\perp}(B)$ и блок $(g_3 g_2 . B)^{(3)}$ тривиален. Продолжая этот процесс, найдем такое преобразование $h \in \mathcal{G}^0$ , что будут выполнены все включения (5), а блоки $(h . B)^{(k)} \; (k \le q-1)$ останутся тривиальными. Теперь действием $\sigma^{(q)}$ приведем блок $(h . B)^{(q)}$ к нормальной форме. Включение (5) при этом не нарушится и результирующее преобразование $g \in \mathcal{G}$ приведет проекцию $\rho_q B$ к нормальной форме.

Пусть теперь проекции $\rho_q B'$ и $\rho_q B$ имеют нормальную форму и $\rho_q B' = \rho_q g . B$ . Тогда

$$\rho_q B' = \rho_q g . B = \rho_q h \hat{g} . B, \quad h \in \mathcal{G}^0, \; \hat{g} \in \mathcal{G}.$$

При этом $\rho^{(k)} \hat{g} . B \in J_k^{\perp}(B) \quad (k = 1, 2, \ldots, q)$. Покажем сначала, что $\rho_k B' = \rho_k \hat{g} . B \quad (k \le q)$. При $k=1$ это очевидно. Если равенства $\rho_i B' = \rho_i \hat{g} . B \; (i \le k-1)$ уже доказаны, то

$$\mathcal{G}_{k-1}(B') = \mathcal{G}_{k-1}(B), \; J_k(B') = J_k(\hat{g} . B), \; J_k^{\perp}(B') = J_k^{\perp}(\hat{g} . B).$$

Поэтому

$$\rho_k(B' - \hat{g} . B) = \rho_k(h \hat{g} . B - \hat{g} . B) \in J_k(B') \cap J_k^{\perp}(B'),$$

откуда $\rho_k B' = \rho_k \hat{g} . B$. Итак, $\rho_q B' = \rho_q \hat{g} . B$. Отсюда $\rho_{q-1} B' = \rho_{q-1} \hat{g} . B = \rho_{q-1} B$, в силу тривиальности блоков $B^{(k)} \; (k \le q-1)$. Кроме того, блоки $\rho^{(q)} B' = \sigma^{(q)}(g, B)$ и $\rho^{(q)} B$ имеют нормальную форму относительно действия $\sigma^{(q)}$ , откуда следует второе утверждение леммы.

<u>Лемма 4</u>. Если блоки $B^{(k)} \; (k \le q-1)$ тривиальны, а проекция $\rho_q(B)$ имеет нормальную форму относительно $\mathcal{G}$ , то стационарная группа

$$\mathcal{G}_q(B) = \{ g \in \mathcal{G} \mid \rho_q g . B = \rho_q B \}$$

является полупрямым произведением подгрупп $\mathcal{G}_q^0(B) = \mathcal{G}_q(B) \cap \mathcal{G}^0$ и $\hat{\mathcal{G}}_q(B) = \mathcal{G}_q(B) \cap \hat{\mathcal{G}}$.

Доказательство. Очевидно, $\hat{\mathcal{G}}_q(B) \cap \mathcal{G}_q^0(B) = \{e\}$. Пусть $g \in \mathcal{G}_q(B)$ и $g = h\hat{g}$, $h \in \mathcal{G}^0$, $\hat{g} \in \hat{\mathcal{G}}$. Так как $P_q B$ имеет нормальную форму, то

$$P_q B = P_q h\hat{g} \cdot B = P_q \hat{g} B,$$

откуда $\hat{g} \in \mathcal{G}_q(B)$, а значит и $h \in \mathcal{G}_q(B)$. Следовательно,

$$g = h\hat{g}, \quad h \in \mathcal{G}_q^0(B), \quad \hat{g} \in \hat{\mathcal{G}}_q(B)$$

и такое разложение единственно. Лемма доказана.

Из леммы 4 и вида стационарных групп действий $\mathcal{G}_e, \mathcal{G}_r, \mathcal{G}_{er}, \mathcal{G}_c$ вытекает, что $\mathcal{G}_q(B)$ также имеет некоторый тип $(N', M')$, полностью определяющийся ее "диагональной" подгруппой $\hat{\mathcal{G}}_q(B)$.

Пусть теперь $C \in \mathfrak{M}(n, m, K)$ – произвольная матрица. Если блок $C^{(1)}$ тривиален, то, следуя лемме 3, найдем такое преобразование $g_2 \in \mathcal{G}$, что проекция $P_2 g_2 \cdot C$ будет иметь нормальную форму. Если и блок $(g_2 C)^{(2)}$ окажется тривиальным, найдется такое преобразование $g_3 \in \mathcal{G}$, что проекция $P_3 g_3 \cdot C$ будет иметь нормальную форму и так далее. В результате мы либо приведем к нормальной форме проекцию $P_{st} C = C$, либо при некотором $q < st$ блок $(g_q C)^{(q)}$ окажется нетривиальным.

В силу леммы 4 стационарная группа $\mathcal{G}_q(g_q \cdot C)$ также имеет некоторый тип $(N', M')$. Разбив матрицу $g_q \cdot C$ на блоки, отвечающие этому типу, мы можем продолжить приведение ее новых проекций к нормальной форме относительно группы $\mathcal{G}_q(g_q \cdot C)$. В конце концов мы приведем матрицу $C$ к нормальной форме относительно группы $\mathcal{G}$, структура которой определяется описанным процессом. Суммируя все изложенное, приходим к следующему результату.

<u>Теорема.</u> Каждую матрицу $C \in \mathfrak{M}(n, m, K)$ некоторым преобразованием $g \in \mathcal{G}$ можно привести к нормальной форме. Каждой матрице отвечает конечное число нормальных форм, лежащих с ней в одной $\mathcal{G}$ – орбите. Множество $\mathfrak{N}(\mathcal{G})$ всех матриц, имеющих нормальную форму относительно $\mathcal{G}$ конструктивно*.

Согласно лемме 3, неоднозначность нормальной формы может возникнуть лишь за счет выбора нумерации клеток, отвечающих собственным значениям с одинаковой жордановой структурой. Это замечание относит-

---

* Если только конструктивно (в очевидном смысле отображение) $T$, с помощью которого строятся дополнения $\hat{J}_q(B)$ при $q \in \Gamma_e \cup \Gamma_r$. Но $T$ всегда можно выбрать конструктивным (см. ниже).

ся к блокам $B^{(q)}$, для которых $q\in \Gamma_c$. Поэтому в одной орбите лежит конечное число матриц, имеющих нормальную форму. Если $\nu(C)<1$, то нормальная форма единственна, т.е. $\mathfrak{N}(\mathcal{Y})$ пересекает каждую орбиту в одной точке.

Приведем пример отображения $\tau$, обеспечивающее конструктивность $\mathfrak{N}(\mathcal{Y})$.

Пусть $e_1 \dots e_p \in \mathfrak{M}(p,1,K)$ – стандартный базис, $L\subset \mathfrak{M}(p,1,K)$ – некоторое подпространство, $\dim L = d$. Каждому базису $y_1\dots y_d\in L$ отвечает $p\times d$ – матрица $Y$, столбцы которой состоят из координат векторов $y_i$ в базисе $e_1 \dots e_p$. Если $y_1' \dots y_d' \in L$ – другой базис, то соответствующая матрица $Y'$ эквивалентна $Y$ относительно правых преобразований. Приведем $Y$ к нормальной форме (2) относитель. ɔ группы $\mathcal{Y}_r$. Пусть теперь $i_1$ – номер первой из строк матрицы (2), имеющих ненулевой элемент (=I) в $d$-м столбце; $i_2$ – номер первой из строк, имеющих ненулевой элемент в $d-1$-м столбце и т.д.; $i_d$ – номер первой из строк, имеющих ненулевой элемент в первом столбце. Положим

$$\tau(L) = Lin\{e_{j_1},\dots,e_{j_{p-d}}\},$$

где $j_1,\dots,j_{p-d}$ – набор номеров, дополнительный к $i_1,\dots,i_d$. Отображение $\tau$ удовлетворяет нужным условиям. Однако нормальная форма имеет более простой вид, если отображение $\tau$ определяется скалярным произведением в $\mathfrak{M}(n,m,K)$.

П р и м е р 2. Рассмотрим наибольшую подгруппу $\mathcal{Y}\subset \mathcal{Y}_e(n,m,K)$ типа $(\{n_1\dots n_s\},\{m\})$. Она состоит из всех обратимых блочно-треугольных матриц $T\subset GL(n,K)$, диагональные блоки которых имеют размеры $n_1\times n_1$, $n_2\times n_2$, и т.д. Если $A$ имеет нормальную форму относительно $\mathcal{Y}$, то

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_s \end{pmatrix},$$

где $A_i$ – блок размера $n_i\times m$ вида (I), причем

$$Ker\, A_i \supset \tau(Ker\, A_j) \quad (j\geq i+1,\ i=1,2,\dots,s).$$

Если $K$ – поле вещественных или комплексных чисел, то в пространстве столбцов можно ввести обычное эрмитово скалярное произведение. Если положить $\tau(L)=L^{\perp}$, то

$$\tau(Ker\, A_j) = Im\, A_j^{*}.$$

Поэтому условие нормальности для матрицы $A$ имеет вид

$$A_i A_j^{*} = 0 \quad (j\geq i+1,\ i=1,2,\dots,s).$$

Аналогично нормальная форма относительно наибольшей подгруппы $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}_r(n,m,K)$ типа $(\{n\},\{m_1,\ldots,m_s\})$ имеет вид

$$A=(A_1,\ldots,A_s),$$

где $A_i$ – блок размера $n\times m_i$ вида (2), причем

$$\operatorname{Im} A_j \subset \tau(\operatorname{Im} A_i) \quad (j>i+1,\ i=1,2,\ldots,s).$$

В терминах скалярного произведения это означает, что

$$A_i^* A_j = 0 \qquad (j>i+1).$$

Пример 3. Рассмотрим действие группы $GL(n,K)$ на пары $(A,B)$, $A\in\mathfrak{M}(n,m,K)$, $B\in\mathfrak{M}(p,n,K)$ по формуле

$$g.(A,B)=(TA,BT^{-1}) \quad (T\in GL(n,K)).$$

Приведем $A$ к нормальной форме (I). Тогда задача сведется к действию на $B$ соответствующей стационарной группы $\mathcal{G}$. Она состоит из преобразований $g\in\mathcal{G}_r(n,m,K)$ вида

$$g=\begin{pmatrix} I & V\\ 0 & Q\end{pmatrix}, \qquad \det Q\neq 0.$$

Эта группа, рассматриваемая уже как подгруппа $\mathcal{G}\subset\mathcal{G}_e(p,n,K)$, имеет тип $(\{p\},\{p,n-p\})$, где $p=\operatorname{rang} A$. Нормальная форма относительно действия такой группы имеет вид

$$B=(B_1,B_2),$$

где $B_1$ – любая $p\times p$ -матрица, а $B_2$ имеет вид (2), кроме того, $B_1^*B_2=0$.

В рассмотренных примерах $\nu(\mathcal{G})=0$, поэтому каждой матрице соответствует единственная нормальная форма.

Пример 4. Рассмотрим вопрос об одновременном подобии пар матриц $(A,B)$ размера $n\times m$. Приведем $A$ к нормальной форме $A^0$ некоторым преобразованием подобия $TAT^{-1}$. Тогда на преобразованную матрицу $TBT^{-1}$ действует стационарная группа матрицы $A^0$, имеющая некоторый тип $(N,M)$. Если $B^0$ – нормальная форма преобразованной матрицы, то $(A^0,B^0)$ – нормальная форма пары относительно подобия.

Например, пусть $A^0$ – 4 x 4 – матрица из примера I. Ее стационарная группа имеет тип $(\{2,2\},\{2,2\})$ и состоит из всех преобразований подобия вида

$$g=\begin{pmatrix} T & V\\ 0 & T\end{pmatrix},$$

где $T,V$ – квадратные матрицы второго порядка. Укажем те нормальные формы относительно $\mathcal{G}$, в которых все блоки (кроме возможно последнего) тривиальны:

$$1.\begin{pmatrix} 0 & \vdots & B^0 \\ \cdots & & \cdots \\ \lambda I & \vdots & \mu I \end{pmatrix} (\lambda \neq 0);\quad 2.\begin{pmatrix} \lambda I & \vdots & 0 \\ \cdots & & \cdots \\ 0 & \vdots & \mu I \end{pmatrix};\quad 3.\begin{pmatrix} \lambda I & \vdots & B^0 \\ \cdots & & \cdots \\ 0 & \vdots & \lambda I \end{pmatrix}.$$

Здесь все блоки двумерны и $B^0$ – имеет нормальную форму относительно подобия. Если какой-нибудь из блоков с меньшим номером нетривиален, то стационарная группа соответствующей проекции состоит из верхнетреугольных преобразований, поэтому последующие шаги заключаются в нормализации одномерных блоков.

УДК 548.571; 681.3

И.М.Гельфгат, Е.С.Сыркин

## ИССЛЕДОВАНИЕ СП ЕКТРА КОЛЕБАНИЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ДВУХАТОМНОГО СЛОИСТОГО КРИСТАЛЛА

Изучение поверхностных волн (ПВ) представляет интерес не только с физической точки зрения, но и ввиду их широкого использования для технических приложений. Благодаря своим специфическим свойствам ПВ (в частности рэлеевские) являются прекрасным инструментом исследования в физике тонких пленок, физике поверхности, а также используются при конструировании микроэлектронных устройств, применяемых для обработки информации /1/.

В многоатомных полуограниченных кристаллах /2/ кроме низкочастотных ПВ, переходящих в длинноволновом пределе в волны Рэлея, существуют еще и высокочастотные ПВ, частоты которых попадают в щель между акустической и оптической полосами колебаний. Целесообразно проследить за формированием спектра поверхностных волн (как низкочастотных, так и "щелевых") при наличии в кристалле сильной анизотропии, характерной для слоистых кристаллов, которые, как правило, бывают многоатомными. Аналогичные исследования для одноатомных слоистых кристаллов /3,4,5/ показали, что при учете слоистости поверхностные волны существенно модифицируются.

<u>Метод рассмотрения и некоторые общие свойства колебаний полубесконечного кристалла.</u> Метод микроскопического рассмотрения волн в полубесконечных кристаллах, являющийся некоторым обобщением хорошо известного метода рассмотрения ПВ /6/.

Рассмотрим полубесконечный кристалл, содержащий $l$ атомов в элементарной ячейке. Будем считать, что два вектора элементарных трансляций $a_1$, $a_2$ выбраны в плоскости поверхности. Уравнения движения атомов кристалла в гармоническом приближении имеют вид /7/

$$m_\rho(n)\ddot{u}_i^\rho(n,t) = -\sum_{n'} \Phi_{ik}^{\rho\rho'}(n,n')u_k^{\rho'}(n',t). \qquad (I)$$

Здесь $\rho, \rho'$ = I,2 ..., $l$ нумеруют атомы в элементарной ячейке; целочисленный индекс $n$ нумерует сами ячейки $(r_n = n_i a_i)$; $u^\rho(n,t)$ – зависящее от времени смещение атома из положения равновесия; $\Phi_{ik}^{\rho\rho'}(n,n')$ – силовая матрица кристалла; $i, k$ – координатные индексы; по $k, \rho'$ подразумевается суммирование.

В двумерно – периодической структуре, какой является кристалл с идеальной поверхностью, можно считать $m_\rho(n) = m_\rho(n_3)$ (зависимость от $n_3$ учитывает возможность существования примесных слоев), $\hat{\Phi}(n,n') = \hat{\Phi}(n_3,n_3'; n_1-n_1', n_2-n_2')$.

Отметим, что путем соответствующего увеличения размеров элементарной ячейки можно рассмотреть и периодически реконструированные поверхности.

В двумерно-периодической структуре можно искать решение уравнений движения в виде

$$u^\rho(n,t) = u^\rho(n_3)l^{i(q_\alpha n_\alpha - \omega t)}, \qquad (2)$$

где $q_\alpha$ – компоненты безразмерного волнового вектора вдоль $a_1, a_2$; $\alpha$ = I,2.

С учетом (2) уравнения (I) принимают вид

$$m_\rho(n_3)\omega^2 u_i^\rho(n_3) = \sum_{n_3'} \Phi_{ik}^{\rho\rho'}(n_3,n_3';q)u_k^{\rho'}(n_3'), \qquad (3)$$

где $\Phi_{ik}^{\rho\rho'}(n_3,n_3';q) = \sum_{n_{1,2}} \Phi_{ik}^{\rho\rho'}(n_3,n_3';n_1,n_2)l^{-iq_\alpha n_\alpha}$ – "приведенная" динамическая матрица. Будем вместо $n_3$ писать просто $n$ ; для заполненных кристаллических слоев принимаем $n \geqslant 0$ , тогда $\hat{\Phi}(n,n') = 0$ , если хотя бы один из аргументов отрицателен.

В подобных расчетах считаем радиус межатомного взаимодействия конечным. Поэтому $\hat{\Phi}(n,n') = 0$ при $|n-n'| > S$ ( $S$ – число ближайших взаимодействующих слоев атомов). В идеальном неограниченном кристалле $\hat{\Phi}(n,n') = \hat{\Phi}_0(n-n')$. При наличии поверхности динамическая матрица искажается. Будем называть слой $n \geqslant 0$ дефектным, если хотя бы для одного слоя $n'$ $\hat{\Phi}(n,n') \neq \hat{\Phi}_0(n-n')$. В дальнейшем считаем число дефектных слоев конечным и равным $N$ (очевидно, $N \geqslant S$ ). Вне дефектной области считаем $m_\rho(n) \equiv m_\rho$ , т.е. эта область включает и все массовые дефекты.

Выделим также $S$ промежуточных слоев, непосредственно следующих за дефектными и связанных с ними прямым взаимодействием. Далее следуют внутренние слои кристалла.

Величины $u_i^\rho(n)$ при фиксированном $n$ можно рассматривать как компоненты $3l$ – мерного вектора $U(n)$ . Тогда уравнения (3) являются линейными уравнениями в конечных разностях порядка $2S$, задающими векторную последовательность $\{U(n)\}$ ($n = 0, 1, 2 \ldots$). Начиная с уравнения движения слоя $N$, эти уравнения имеют постоянные матричные коэффициенты. Элементарное обобщение на случай векторных последовательностей результатов теории уравнений в конечных разностях[8] приводит к следующим выводам: последовательность $\{U(n)\}$, начиная с $n = N$, представляется суммой геометрических прогрессий

$$U(n) = \sum_{j=1}^{6Sl} V_j W_j^n, \tag{4}$$

где $W_j$ и $V_j$ определяются из уравнений

$$m_p \omega^2 V_i^p = \sum_{n=-S}^{S} \varphi_{(0)ik}^{pp'}(n,q) W^n V_k^{p'}. \tag{5}$$

Таким образом, $W_j$ являются решениями уравнения

$$|m_p \omega^2 \delta_{ik} \delta_{pp'} - \sum_{n=-S}^{S} \varphi_{(0)ik}^{pp'}(n,q) W^n| = 0, \tag{6}$$

которое сводится к алгебраическому уравнению степени $6lS$. Следовательно, в рассматриваемом (довольно общем) случае колебания кристалла вне дефектной области $0 \le n < N$ содержат не более $6lS$ экспоненциально изменяющихся слагаемых (парциальных волн). Внутри же дефектной области значения $U(n)$ могут существенно отличаться от величин, заданных формулами (4).

Подчеркнем, что проведенное выше рассмотрение включает колебания как дискретного, так и непрерывного спектра.

Уравнения движения атомов дефектной и промежуточной областей (уравнения (3) при $0 \le n \le N+S-1$) играют роль граничных условий и служат для определения соотношений между величинами $V_j$ и амплитудами колебаний атомов дефектных слоев. При рассмотрении ПВ граничные условия служат также для определения закона дисперсии.

Пользуясь общими свойствами силовой матрицы [9], можно показать: наряду с любым решением $W_j$ уравнения (6) решением будет также величина $(\bar{W}_j)^{-1}$. Если же поверхность параллельна плоскости симметрии кристалла, то решением является и обратная величина $W_j^{-1}$.

Рассмотрим подробнее отдельно колебания, принадлежащие непрерывному и дискретному спектрам.

## Непрерывный спектр

Очевидно, в этом случае по крайней мере часть значений $W_j$ лежит на единичной окружности в комплексной плоскости, т.е. $W_j = e^{i\varphi_j}$. Для этих значений $(\bar{W}_j)^{-1} = W_j$. Будем для простоты считать, что поверхность параллельна плоскости симметрии кристалла. Тогда все корни уравнения (6) можно разбить на $3Sl$ пар взаимно обратных корней. При $|W_j| = 1$ соответствующие слагаемые (4) представляют собой падающую на поверхность и зеркально отраженную волны (для падающей волны $\psi_j < 0$).

Если рассматривать задачу о падении на поверхность объемной волны, для которой $u(n) \sim exp(-i\psi_n)$, то следует отобрать из всех корней $W_j$, соответствующих данной частоте, следующие: корни, удовлетворяющие условию $|W_j| < 1$ (обратные им корни должны быть отброшены, поскольку приводят к неограниченно нарастающим на бесконечности решениям). Эти корни описывают возбуждение поверхностных волн (аналогично возбуждению неоднородных волн при отражении от поверхности в теории упругости [10]); корни вида $exp(i\psi_j)$, для которых $\psi_j > 0$. Последнее условие означает отбор отраженных (а не падающих) от поверхности волн. При $\psi_j = \psi$ получаем зеркально отраженную волну; остальные корни этого вида описывают трансформированные отраженные волны.

Таким образом, общее число образовавшихся при отражении объемных и поверхностных волн может составлять максимально $3Sl$. Для простых кристаллов с близкодействием ( $l = S = 1$ ) это число равно трем, что соответствует результату теории упругости для анизотропной среды при падении акустической волны на поверхность под произвольным углом. В общем случае $(l, S > 1)$ остальные отраженные волны могут быстро убывать при удалении от поверхности. Легко показать, что граничных условий как раз достаточно для определения амплитуд всех отраженных волн, если известна амплитуда падающей волны. На линиях симметрии двумерной зоны Бриллюэна число возникающих при отражении волн, естественно, уменьшается (так, для сдвиговых волн оно уменьшается втрое).

## Дискретный спектр

Очевидно, для ПВ $|W_j| \neq 1$. В сумме (4) остается $3Sl$ слагаемых, соответствующих $|W_j| < 1$.

Граничные условия (уравнения движения дефектных и промежуточных слоев) представляют собой систему $3l(N+S)_\rho$ линейных однородных уравнений относительно амплитуд $V_j$ и $u_i^\rho(n)$ $(n = 0, 1, \ldots, N-1)$. Заметим, что число неизвестных равно числу уравнений. Приравнивая нулю определитель этой системы, получаем уравнение, определяющее закон дисперсии ПВ. Как правило, такая процедура оказывается намного проще вычислений с помощью функций Грина и позволяет довести до конца (аналитически или численно) рассмотрение широкого круга конкретных задач. Математически задача сводится к алгебраическим уравнениям и не требует интегрирования по непрерывному спектру.

Изучение спектра колебаний конкретной модели слоистого кристалла. Рассмотрим тетрагональный кристалл, содержащий два атома в элементарной ячейке: атомы одного типа расположены в вершинах ячеек, другого – в центрах ячеек. Фактически такая структура представляет собой "вытянутый" в направлении оси $Z$ (направление слабой связи) структуру типа $CsCl$. Отметим, что в таком кристалле чередуются атомные плоскости типа $\{001\}$, содержащие только один тип атомов.

Обозначим массы этих атомов через $m$ и $M$ соответственно; будем учитывать центральное взаимодействие между ближайшими атомами одной подрешетки и ближайшими атомами разных подрешеток. Для простоты будем считать, что взаимодействие внутри каждой из подрешеток описывается одной и той же силовой постоянной $\varphi$. Взаимодействие атомов разных типов описывается матрицей $\Phi_{ik}(r) = -\gamma\varphi \frac{r_i r_k}{a^2}$, где $r = (\pm\frac{a}{2}, \pm\frac{a}{2}, \pm\frac{\varepsilon a}{2})$ – соединяющий взаимодействующие атомы вектор; $a$ – сторона двумерной квадратной ячейки в плоскости (001), величина $\varepsilon = a_3/a$ характеризует растяжение решетки в направлении $Z$; $\gamma$ – безразмерный параметр (для слоистых кристаллов $\gamma \ll 1$).

Для нахождения непрерывного спектра, соответствующего объемным колебаниям, положим $u_i^\rho(n) = u_i^\rho \exp(iq_j n_j)$. Меняя $q_3$ при фиксированных $q_1, q_2$, получаем полосы непрерывного спектра. На рис. I и 2 приведены непрерывные спектры соответственно сдвиговых и вертикально поляризованных колебаний при $q_2 = 0$ ($q_1 \equiv q$), т.е. для линии симметрии двумерной зоны Бриллюэна.

Для чисто сдвиговой поляризации уравнения движения после подстановки $u^\rho(n,t) = u^\rho e^{i(qn-\omega t)}$ запишутся следующим образом:

$$\begin{gathered}
\lambda u(n) = 8\gamma u(n) - 4\gamma\cos\frac{q}{2}[u(n+1)+u(n-1)], \quad n = 2,4,6,\ldots \\
M/m\,\lambda u(n) = 4\gamma u(n) - 8\gamma\cos q/2[u(n+1)+u(n-1)], \quad n = 1,3,5,\ldots \\
\lambda u(0) = 4\gamma[u(0) - \cos q/2\, u(1)], \quad \text{где} \\
\lambda = m\omega^2/\varphi; \quad m(2k) = m; \quad m(2k+1) = M.
\end{gathered} \tag{7}$$

Нетрудно показать, что решение уравнений (7) имеют вид

$$u\binom{2n}{2n+1} = W^n \binom{u_0}{u_1}. \tag{8}$$

Для квадратов частот колебаний поверхностной волны $\lambda_s$ получаем уравнение

$$\lambda_s^2 - 4\gamma\lambda_s\left(1+2\frac{m}{M} - \frac{m}{M}\cos^2\frac{q}{2}\right) + 32\gamma^2\frac{m}{M}\sin^2\frac{q}{2} = 0, \tag{9}$$

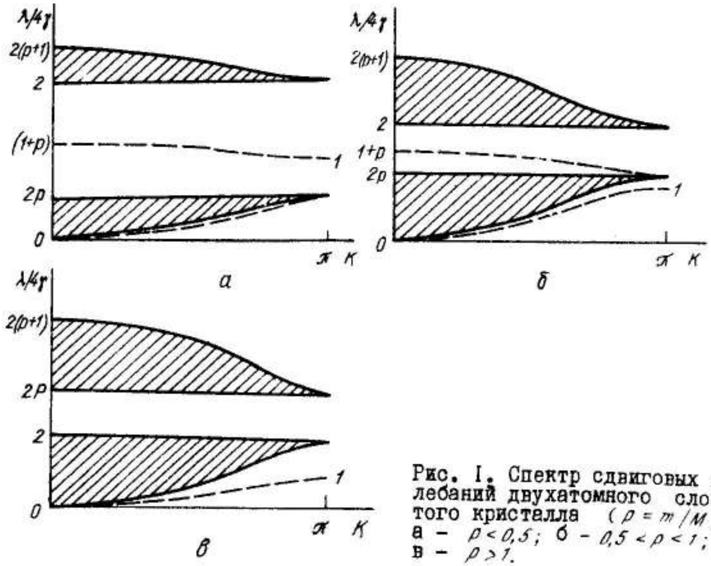


Рис. I. Спектр сдвиговых колебаний двухатомного слоистого кристалла ($\rho = m/M$): а – $\rho < 0{,}5$; б – $0{,}5 < \rho < 1$; в – $\rho > 1$.

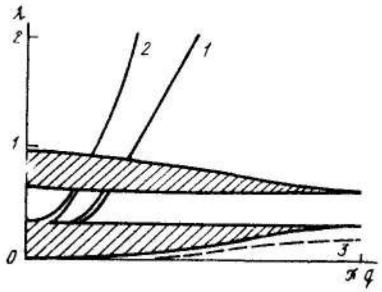

Рис. 2. Низкочастотная часть спектра вертикально поляризованных колебаний кристалла при $\gamma = 0{,}01$; $\rho = 2$; $\varepsilon = 2$: I, 2 – объемные ветви продольных колебаний; 3 – медленная ПВ.

а для коэффициента затухания

$$W = 1 - \lambda_s / 4\gamma . \tag{10}$$

(Необходимым условием существования ПВ является условие $|W| < 1$).

На рис. I штриховой линией приведены дисперсионные кривые ПВ на линии ( $q, 0$ ) двумерной зоны Бриллюэна. Вид ПВ существенно зависит от соотношения между массами. Так, щелевое поверхностное состояние существует только, когда поверхностный слой состоит из атомов меньшей массы. При $m/M = 1$ полученные ПВ соответствуют поверхностным волнам для одноатомного объемно центрированного кристалла. Отметим, что, как и в работе [5], характер убывания амплитуды число сдвиговых ПВ от параметра слоистости не зависит; сильная анизотропия существенно влияет на скорость этих волн. При $q \to 0$ рассматриваемые волны представляют собой глубоко проникающие на глубину порядка $a/q^2$ нерелеевские ПВ [11,12]. Согласно результатам, описанным выше, число экспоненциально убывающих компонент в формуле (8) могло быть равным двум ( $s=1,\ l=2$ ). Нетрудно показать, что для данной модели уменьшение их числа есть следствие отмеченной выше особенности в структуре решетки: каждый из атомных слоев (001) содержит лишь один тип атомов.

Соответствующее уменьшение числа компонент имеет место и для вертикально поляризованных колебаний.

Перейдем к рассмотрению вертикально поляризованных колебаний. Отметим, что спектр объемных колебаний (см. рис. 2) имеет несколько необычный вид: наряду с двумя низкочастотными полосами сплошного спектра имеются две очень узкие полосы (кривые 1 и 2) с сильной зависимостью $\lambda(q)$. Можно показать, что низкочастотные широкие полосы соответствуют преимущественно нормальной к поверхности поляризации ( $Z$ - зоны), а узкие - продольной поляризации (X-зоны). На рис. 2 приведена только представляющая наибольший интерес низкочастотная часть спектра.

С учетом структуры рассматриваемой модели вертикально поляризованные ПВ представлены в виде

$$\begin{pmatrix} u_x(2n) \\ u_z(2n) \\ u_x(2n+1) \\ u_z(2n+1) \end{pmatrix} = \sum_{j=1,2} A_j W_j^n \begin{pmatrix} V_{1j} \\ V_{2j} \\ V_{3j} \\ V_{4j} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Тогда для определения вида слагаемых в формуле (11) получаем уравнение

$$\begin{pmatrix} 2+8\gamma-2\cos q-\lambda & 0 & -4\gamma\cos\frac{q}{2}(1+W^{-1}) & 4i\varepsilon\gamma\sin\frac{q}{2}(W^{-1}-1) \\ 0 & 8\gamma\varepsilon^2-\lambda & 4i\varepsilon\gamma\sin\frac{q}{2}(W^{-1}-1) & -4\gamma\cos\frac{q}{2}\varepsilon^2(1+W^{-1}) \\ 4\gamma\cos\frac{q}{2}(1+W) & 4i\varepsilon\gamma\sin\frac{q}{2}(1-W) & 2+8\gamma-2\cos q-\frac{M}{m}\lambda & 0 \\ 4i\varepsilon\gamma\sin\frac{q}{2}(1-W) & -4\gamma\varepsilon^2\cos\frac{q}{2}(1+W) & 0 & 8\gamma\varepsilon^2-\frac{M}{m}\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix} = 0. \tag{12}$$

Частота ПВ и соотношение между $A_1, A_2$ определяются из следующих граничных условий:

$$\begin{cases} (2+4\gamma-2\cos q-\lambda)u_x(0)-4\gamma\cos\frac{q}{2}u_x(1)-4i\varepsilon\gamma\sin\frac{q}{2}u_z(1)=0 \\ (4\gamma\varepsilon^2-\lambda)u_z(0)-4i\varepsilon\gamma\sin\frac{q}{2}u_x(1)-4\gamma\varepsilon^2\cos\frac{q}{2}u_z(1)=0. \end{cases} \qquad (13)$$

Приведем некоторые результаты анализа уравнений (12) и (13). В центре зоны Бриллюэна $(q=0)$ при выходе на поверхность слоя легких атомов $(m<M)$ существуют, кроме рассмотренных выше сдвиговых, продольные ПВ с $\lambda_s=4\gamma(1+m/M)$ и нормальные к поверхности ПВ с $\lambda_s=4\gamma\varepsilon^2(1+m/M)$. Для всех этих ПВ $W=-\frac{m}{M}$. При $m>M$ ПВ в центре зоны Бриллюэна отсутствуют.

При $m/M>0{,}5$ ниже непрерывного спектра существует медленная ПВ (см. рис. 2). Предельное значение частоты $\lambda_s$ этой волны при $q\to\pi$ равно $4\gamma\varepsilon^2$ ; показатель затухания $W=-\gamma$ , причем $|u(1)/u(0)|=\gamma\varepsilon$. Существует также высокочастотная ПВ в коротковолновой области с частотой, лежащей несколько ниже объемной полосы I. Эта ПВ, естественно, не может быть показана.

Таким образом, приведенный спектр вертикально поляризованных колебаний может существенно измениться в зависимости от значений $\varepsilon$, $m/M$, например появиться вторая щель в непрерывном спектре, а также новые ветви ПВ.


1. Дрансфельд К., Зальцман Е. - В кн.: Физическая акустика. М.: Мир, 1974, Т 7, с. 250-310.
2. Лифшиц И.М., Розенцвейг Л.Н. Динамика кристаллической решетки, заполняющей полупространство. Журн. эксперим. и теорет. физики, 1948, 18; № 11, с. 1012-1021.
3. Гельфгат И.М., Сыркин Е.С. Поверхностные волны в слоистом кристалле. - Физика низ. температур, 1978, 4, № 5, с. 672-674.
4. Канер Э.А., Чеботарев Л.В. Медленные поверхностные волны в сильно анизотропном кристалле. - Физика твердого тела, 1978, 20, № 8, с. 2532-2533.
5. Сыркин Е.С., Гельфгат И.М. Спектр колебаний полуограниченного слоистого кристалла. - Физика низ. температур, 1979, 5, № 2, с. 181-185.
6. Gazis D., Herman R., Wallis R.F. Surface Elastic Waves in Cubic Crystals.-Phys.Rev.,1960, 119, N 2, p. 533-544.
7. Марадудин А.А. Дефекты и колебательный спектр кристаллов. - М.: Мир. 1968. - 432 с.
8. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. - М. : Наука, 1967. - 375 с.
9. Косевич А.М. Основы механики кристаллической решетки. - М.: Наука, 1972. - 280 с.
10. Федоров Ф.И. Теория упругих волн в кристаллах. - М.: Наука, 1965. - 223 с.
11. Alldredge G.P. Shear-Horisontal Surface Waves on the (001) Face of Cubic Crystals.-Phys,Lett.,A, 1972, 41, N3, p. 281-282.

12. Гельфгат И.М. Новый тип длинноволновых поверхностных колебаний кристаллов. - Физика твердого тела, 1977, 19, № 6, с.1711-1714.

13. Гельфгат И.М., Сыркин Е.С. К теории поверхностных спиновых волн в гейзенберговских ферромагнетиках. - Физика низ. температур, 1977, 3, № 7, с. 899-905.

УДК 517.547

Л.Б.Голинский

## О ПРОБЛЕМЕ НЕВАНЛИННЫ - ПИКА В ОБОБЩЕННОМ КЛАССЕ ШУРА АНАЛИТИЧЕСКИХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

1. Аналитические в единичном круге $m \times m$ матрицы-функции $S(z)$ такие, что $I - S(z)S^*(z) \geq 0$ (или, что то же самое, $I - S^*(z)S(z) \geq 0$) образуют класс Шура. Для функций этого класса справедливо неравенство Шварца - Пика в каждой из двух эквивалентных форм:

$$\left\{ \frac{I - S(\xi_i)S^*(\xi_k)}{1 - \xi_i \bar{\xi}_k} \right\}_{i,k=1}^{p} \geq 0, \qquad \left\{ \frac{I - S^*(\xi_i)S(\xi_k)}{1 - \bar{\xi}_i \xi_k} \right\}_{i,k=1}^{p} \geq 0,$$

где $p$ - произвольное натуральное число; $\xi_1, \ldots, \xi_p$ - произвольные точки единичного круга. Проблема Неванлинны - Пика в классе Шура состоит в отыскании функций $f(z)$, принимающих в заданных точках $z_1, \ldots, z_n$ зааанные значения $m \times m$ матрицы $w_1, \ldots, w_n$. Критерий разрешимости проблемы хорошо известен:

$$A_n = \left\{ \frac{I - w_i w_k^*}{1 - z_i \bar{z}_k} \right\}_{i,k=1}^{n} \geq 0. \tag{1}$$

В случае, когда $A_n > 0$, множество решений задачи бесконечно и параметризуется посредством дробно-линейного преобразования

$$f(z) = (a_{11}(z)S(z) + a_{12}(z))(a_{21}(z)S(z) + a_{22}(z))^{-1}, \tag{2}$$

матрица коэффициентов которого (резольвентная матрица) определяется по интерполяционным данным, а параметр $S(z)$ - произвольная функция класса Шура. Одним из существенных достижений В.П.Потапова и В.П.Ковалишиной [1] явилась формула для резольвентной матрицы, представленная в виде

$$\mathfrak{A}_n(z) = \begin{bmatrix} a_{11}(z) & a_{12}(z) \\ a_{21}(z) & a_{22}(z) \end{bmatrix} = I + (1-z) \left[ \frac{\begin{bmatrix} I \\ w_1^* \end{bmatrix}}{1 - \bar{z}_n z} \cdots \frac{\begin{bmatrix} I \\ w_n^* \end{bmatrix}}{1 - \bar{z}_n z} \right] A_n^{-1} \begin{bmatrix} \frac{[-I, w_1]}{1 - z_1} \\ \vdots \\ \frac{[-I, w_n]}{1 - z_n} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Аналогичную интерполяционную задачу в более общем (скалярном) классе функций, допускающих внутри единичного круга не более $\varkappa$ полюсов и не превосходящих по модулю единицы на окружности, рассмотрел Н.И.Ахиезер еще в 1931 г. [2]. Функции этого класса допускают представление $f(z)=S(z)b^{-1}(z)$, где $|S(z)|\le 1, |z|<1$, а $b(z)$ – конечное произведение Бляшке. Позднее эта задача была полностью решена в [3]. Как установили М.Г.Крейн и Г.Лангер [4], класс функций, рассмотренный Н.И.Ахиезером (и даже аналогичный класс матриц-функций), совпадает с обобщенным классом Шура $S_\varkappa^{(m)}$.

<u>Определение</u>. Мероморфная в круге $|z|<1$ $m\times m$ матрица-функция $f(z)$ принадлежит классу $S_\varkappa^{(m)}$, если каковы бы ни были натуральное $p$ и точки голоморфности $\xi_1,\dots,\xi_p$ эрмитова (блок – ) матрица

$$\left\{\frac{I-f^*(\xi_i)f(\xi_k)}{1-\bar{\xi}_i\xi_k}\right\}_{i,k=1}^{p}$$

имеет не более $\varkappa$ отрицательных собственных значений (отрицательных квадратов). Из неравенств Шварца – Пика $S_0^{(m)}$ – обычный класс Шура.

<u>Теорема</u> (Крейн – Лангер). Для того, чтобы мероморфная в $|z|<1$ функция $f(z)$ принадлежала $S_\varkappa^{(m)}$, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление

$$f(z)=S(z)B^{-1}(z), \tag{4}$$

где $S(z)$ принадлежит $S_0^{(m)}$, а $B(z)$ – конечное произведение Бляшка – Потапова

$$B(z)=\prod_{k=1}^{r}B_{\lambda_k}(z)=\prod_{k=1}^{r}\{I-(1-\frac{|\lambda_k|}{\lambda_k}\ \frac{\lambda_k-z}{1-\bar{\lambda}_k z})P_k\} \tag{5}$$

$$|\lambda_k|<1,\ P_k=P_k^2=P_k^*,$$

причем порядок произведения (5) $\operatorname{ord} B \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{r}\dim P_k\le\varkappa$.

Рассмотрим проблему Неванлинны – Пика в классе функций $S_\varkappa^{(m)}$ и покажем, что в случае невырожденности матрицы $A_n$ (1) множество ее решений бесконечно и задается посредством дробно-линейного преобразования (2) с резольвентной матрицей (3). На параметр $\mathcal{E}(z)$ в случае $\varkappa>0$ накладываются некоторые ограничения. Отметим, что вид формулы не зависит от того, рассматриваем ли мы задачу в классе Шура или в обобщенном классе Шура $S_\varkappa^{(m)}$.

Число отрицательных квадратов эрмитовой матрицы $M$ обозначим через $\nu(M)$. Исходным для нас будет следующее неравенство:

$$\nu(M)\le\varkappa, \tag{6}$$

$$M=\left[\begin{array}{cc|cc}
\dfrac{I-f^*(\xi_1)f(\xi_1)}{1-\bar\xi_1\xi_1} & \dfrac{I-f^*(\xi_1)f(\xi_p)}{1-\bar\xi_1\xi_p} & \dfrac{f^*(\xi_1)-f^*(\xi_{p+1})}{\bar\xi_1-\bar\xi_{p+1}} & \dfrac{f^*(\xi_1)-f^*(\xi_{p+n})}{\bar\xi_1-\bar\xi_{p+n}} \\
\vdots & & \vdots & \\
\dfrac{I-f^*(\xi_p)f(\xi_1)}{1-\bar\xi_p\xi_1} & \dfrac{I-f^*(\xi_p)f(\xi_p)}{1-\bar\xi_p\xi_p} & \dfrac{f^*(\xi_p)-f^*(\xi_{p+1})}{\bar\xi_p-\bar\xi_{p+1}} & \dfrac{f^*(\xi_p)-f^*(\xi_{p+n})}{\bar\xi_p-\bar\xi_{p+n}} \\
\hline
 & & \dfrac{I-f(\xi_{p+1})f^*(\xi_{p+1})}{1-\xi_{p+1}\bar\xi_{p+1}} & \dfrac{I-f(\xi_{p+1})f^*(\xi_{p+n})}{1-\xi_{p+1}\bar\xi_{p+n}} \\
 & * & \vdots & \vdots \\
 & & \dfrac{I-f(\xi_{p+n})f^*(\xi_{p+1})}{1-\xi_{p+n}\bar\xi_{p+1}} & \dfrac{I-f(\xi_{p+n})f^*(\xi_{p+n})}{1-\xi_{p+n}\bar\xi_{p+n}}
\end{array}\right],$$

где $f(z)\in S_{\varkappa}^{(m)}$; $p$ и $h$ – натуральные числа; $\xi_1,\dots,\xi_{p+n}$ – точки голоморфности $f(z)$. Из этого неравенства следует, что для $f(z)$ класса $S_{\varkappa}^{(m)}$

$$\nu\left\{\frac{I-f(\xi_i)f^*(\xi_k)}{1-\xi_i\bar\xi_k}\right\}_{i,k=1}^{p}\le\varkappa \tag{7}$$

(на самом деле (7) эквивалентно определению класса $S_{\varkappa}^{(m)}$ ). Новое теоретико-функциональное доказательство теоремы Крейна – Лангера и вывод из нее неравенства (6) будет приведен в другом месте.

2. Сформулируем проблему Неванлинны – Пика (Н. – П.) в классе $S_{\varkappa}^{(m)}$. Даны точки $z_1,\dots,z_n$ $(|z_k|<1, 1\le k\le n)$– узлы интерполяции, а $m\times m$ матрицы $w_1,\dots,w_n$ – значения интерполяции. Описать множество функций $f(z)\in S_{\varkappa}^{(m)}$ таких, что $f(z)$ голоморфна в точках $z_k, 1\le k\le n$ и

$$f(z_k)=w_k,\quad k=1,2,\dots,n\ . \tag{8}$$

Будем в дальнейшем предполагать, что информационный блок

$$A_n=\left\{\frac{I-w_iw_k^*}{1-z_i\bar z_k}\right\}_{i,k=1}^{n}$$

невырожден. Если $\nu(A_n)=\nu$ , то проблема Н. – П. разрешима в классах $S_{\varkappa}^{(m)}$, $\varkappa\ge\nu$. Основным результатом работы является следующая

<u>Теорема</u>. Множество всех решений проблемы Н. – П. в классе $S_{\nu+r}^{(m)}$, $r\ge 0$ задается дробно-линейным преобразованием

$$f(z)=(a_{11}(z)\varepsilon(z)+a_{12}(z))(a_{21}(z)\varepsilon(z)+a_{22}(z))^{-1}, \tag{9}$$

резольвентная матрица которого имеет вид (3); $\varepsilon(z)$ – произвольная функция из $S_r^{(m)}$ , лишь бы только

$$\det\{a_{21}(z_k)\varepsilon(z_k)+a_{22}(z_k)\}\ne 0,\ k=1,2,\dots,n. \tag{10}$$

При подсчете числа отрицательных квадратов матрицы используем следующий алгебраический факт.

Лемма I. Пусть эрмитова матрица $A$ разбита на блоки

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ b^* & c \end{bmatrix},$$

где $a$ и $c$ – квадратные матрицы (возможно различных порядков) и $c$ невырождена. Тогда

$$\nu(A)=\nu(c)+\nu(a-bc^{-1}b^*). \tag{II}$$

Доказательство. Приведем матрицу $A$ треугольным преобразованием к блочно-диагональному виду:

$$A=\begin{bmatrix} I & bc^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a-bc^{-1}b^* & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ c^{-1}b^* & I \end{bmatrix}.$$

Соотношение (II) теперь очевидно.

Основным для резольвентной матрицы $\mathfrak{A}_n(z)$ (3) являются следующие непосредственно проверяемые соотношения:

$$\mathfrak{A}_n(z)j\mathfrak{A}_n^*(\xi)-j=(1-z\bar{\xi})\begin{bmatrix}\dfrac{\begin{bmatrix} I \\ w_1^* \end{bmatrix}}{1-\bar{z}_1 z}\cdots\dfrac{\begin{bmatrix} I \\ w_n^* \end{bmatrix}}{1-\bar{z}_n z}\end{bmatrix} A_n^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{[I,w_1]}{1-z_1\bar{\xi}} \\ \vdots \\ \dfrac{[I,w_n]}{1-z_n\bar{\xi}}\end{bmatrix} \tag{I2}$$

$$j=\begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

откуда следует, что $\mathfrak{A}_n(e^{i\theta})j$ – унитарна, значит по принципу симметрии

$$\mathfrak{A}_n^{-1}(z)=\begin{bmatrix} b_{11}(z) & b_{12}(z) \\ b_{21}(z) & b_{22}(z)\end{bmatrix}=I-(1-z)\begin{bmatrix}\dfrac{\begin{bmatrix} I \\ w_1^* \end{bmatrix}}{1-\bar{z}_1}\cdots\dfrac{\begin{bmatrix} I \\ w_n^* \end{bmatrix}}{1-\bar{z}_n}\end{bmatrix} A_n^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{[-I,w_1]}{z-z_1} \\ \vdots \\ \dfrac{[-I,w_n]}{z-z_n}\end{bmatrix}, \tag{I3}$$

$$\mathfrak{A}_n^{-1*}(\xi)j\mathfrak{A}_n^{-1}(z)-j=(\bar{\xi}z-1)\begin{bmatrix}\dfrac{\begin{bmatrix} -I \\ w_1^* \end{bmatrix}}{\bar{\xi}-\bar{z}_1}\cdots\dfrac{\begin{bmatrix} -I \\ w_n^* \end{bmatrix}}{\bar{\xi}-\bar{z}_n}\end{bmatrix} A_n^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{[-I,w_1]}{z-z_1} \\ \vdots \\ \dfrac{[-I,w_n]}{z-z_n}\end{bmatrix}. \tag{I4}$$

Доказательство теоремы. Пусть $\|.\|$ обозначает, как обычно, операторную норму матрицы. В силу представления (4) произвольной функции $f(z)$ класса $S_{\varkappa}^{(m)}$ $\|f(z)\|$ ограничена в окрестности точки $z=1$. Тогда из (I3) легко следует, что $\lim\limits_{z\to 1,\,|z|<1}\{b_{21}(z)f(z)+b_{22}(z)\}=I$ и значит $\det\{b_{21}(z)f(z)+b_{22}(z)\}\neq 0,\ |z|<1$. В таком случае имеет смысл дробно-линейное преобразование

$$\varepsilon(z)=(b_{11}(z)f(z)+b_{12}(z))(b_{21}(z)f(z)+b_{22}(z))^{-1}. \qquad (15)$$

Предположим, что $f(z)$ принадлежит $S^{(m)}_{\nu+r}$, $r\geq 0$ и решает проблему Н. – П. Используя (14), нетрудно убедиться, что

$$\frac{I-\varepsilon^*(\xi_i)\varepsilon(\xi_k)}{1-\bar\xi_i\xi_k}=(f^*(\xi_i)b^*_{21}(\xi_i)+b_{22}(\xi_i))^{-1}\Big\{\frac{I-f^*(\xi_i)f(\xi_k)}{1-\bar\xi_i\xi_k}-\Big[\frac{f^*(\xi_i)-w_1^*}{\bar\xi_i-\bar z_1},\dots,\times$$

$$\times\frac{f^*(\xi_i)-w_n^*}{\bar\xi_i-\bar z_n}\Big]A_n^{-1}\begin{bmatrix}\frac{f(\xi_k)-w_1}{\xi_k-z_1}\\ \vdots\\ \frac{f(\xi_k)-w_n}{\xi_k-z_n}\end{bmatrix}\Big\}(b_{21}(\xi_k)f(\xi_k)+b_{22}(\xi_k))^{-1},$$

откуда

$$\nu\Big\{\frac{I-\varepsilon^*(\xi_i)\varepsilon(\xi_k)}{1-\bar\xi_i\xi_k}\Big\}^{p}_{i,k=1}=\nu\Big\{\frac{I-f^*(\xi_i)f(\xi_k)}{1-\bar\xi_i\xi_k}-\Big[\frac{f^*(\xi_i)-w_1^*}{\bar\xi_i-\bar z_1}\cdots\frac{f^*(\xi_i)-w_n^*}{\bar\xi_i-\bar z_n}\Big]A_n^{-1}\begin{bmatrix}\frac{f(\xi_k)-w_1}{\xi_k-z_1}\\ \vdots\\ \frac{f(\xi_k)-w_n}{\xi_k-z_n}\end{bmatrix}\Big\}^{p}_{1}.$$

Применяя лемму I к матрице $M$ (6), в которой $\xi_{p+i}=z_i$, $f(\xi_{p+i})=W_i$, $1\leq i\leq n$, получим, что $\varepsilon(z)$ принадлежит $S^{(m)}_r$. Таким образом, всякое решение проблемы Н. – П. $f(z)$ класса $S^{(m)}_{\nu+r}$ имеет вид (9), $\varepsilon(z)$ – некоторая функция класса $S^{(m)}_r$.

Обратно, пусть в (9) $\varepsilon(z)\in S^{(m)}_n$. Если $f(z)=u(z)v^{-1}(z)$, то

$$\frac{I-f^*(\xi_i)f(\xi_k)}{1-\bar\xi_i\xi_k}=v^{-1*}(\xi_i)\frac{I-\varepsilon^*(\xi_i)\varepsilon(\xi_k)}{1-\bar\xi_i\xi_k}v^{-1}(\xi_k)+v^{-1*}(\xi_i)[\varepsilon^*(\xi_i),I]\frac{\mathfrak{A}^*_n(\xi_i)j\mathfrak{A}_n(\xi_k)-j}{1-\bar\xi_i\xi_k}\begin{bmatrix}\varepsilon(\xi_k)\\ I\end{bmatrix}\times$$
$$\times v^{-1}(\xi_k). \qquad (16)$$

Из (12) следует, что $\nu\Big\{\frac{\mathfrak{A}_n(\xi_i)j\mathfrak{A}^*_n(\xi_k)-j}{1-\bar\xi_i\xi_k}\Big\}^{p}_{1}\leq\nu$.

Рассмотрим стандартное преобразование

$$X(z)=(Q\mathfrak{A}_n(z)+P)(P\mathfrak{A}_n(z)+Q)^{-1}=(\mathfrak{A}_n(z)P-Q)^{-1}(-\mathfrak{A}_n(z)Q+P),$$
$$P=\begin{bmatrix}0&0\\0&I_m\end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix}I_m&0\\0&0\end{bmatrix};\quad P+Q=I_{2m},\ P-Q=j, \qquad (17)$$

существование которого очевидно следует из (3) и (17).

Поскольку

$$I-X(\xi_i)X^*(\xi_k)=(\mathfrak{A}_n(\xi_i)P-Q)^{-1}\{\mathfrak{A}_n(\xi_i)j\mathfrak{A}_n(\xi_k)-j\}(P\mathfrak{A}^*_n(\xi_k)-Q)^{-1},$$
$$I-X^*(\xi_i)X(\xi_k)=(\mathfrak{A}^*_n(\xi_i)P+Q)^{-1}\{\mathfrak{A}^*_n(\xi_i)j\mathfrak{A}_n(\xi_k)-j\}(P\mathfrak{A}_n(\xi_k)+Q)^{-1},$$

то на основании сделанного ранее замечания

$$\nu\Big\{\frac{\mathfrak{A}^*_n(\xi_i)j\mathfrak{A}_n(\xi_k)-j}{1-\bar\xi_i\xi_k}\Big\}^{p}_{i,k=1}\leq\nu.$$

Из (16) заключаем, что $f(z) \in S_{\nu+r}^{(m)}$, т.е. дробно-линейное преобразование (9) переводит $S_n^{(m)}$ в $S_{\nu+r}^{(m)}$.

Проверка интерполяционных условий (8) представляет собой непосредственный подсчет. Пусть $A_n^{-1} = \{u_{ik}\}_{i,k=1}^{w}$. Тогда

$$\left[\frac{I}{1-z_1\bar{z}_1} \cdots \frac{I}{1-z_1\bar{z}_n}\right]\begin{bmatrix} u_{11} \\ \vdots \\ u_{n1}\end{bmatrix} - w_1\left[\frac{w_1^*}{1-z_1\bar{z}_1} \cdots \frac{w_n^*}{1-z_1\bar{z}_n}\right]\begin{bmatrix} u_{11} \\ \\ u_{n1}\end{bmatrix} = I_m ;$$

$$\left[\frac{I}{1-z_1\bar{z}_1} \cdots \frac{I}{1-z_1\bar{z}_n}\right]\begin{bmatrix} u_{1i} \\ \\ u_{ni}\end{bmatrix} - w_1\left[\frac{w_1^*}{1-z_1\bar{z}_1} \cdots \frac{w_n^*}{1-z_1\bar{z}_n}\right]\begin{bmatrix} u_{1i} \\ \\ u_{ni}\end{bmatrix} = 0, \quad i=2,\dots,n;$$

$$a_{11}(z_1) = I + (1+z_1)\left[\frac{I}{1-z_1\bar{z}_1} \cdots \frac{I}{1-z_1\bar{z}_n}\right] A_n^{-1}\begin{bmatrix} \frac{-I}{1-z_1} \\ \\ \frac{-I}{1-z_n}\end{bmatrix} = I + (-1)\left[\frac{I}{1-z_1\bar{z}_1} \cdots \frac{I}{1-z_1\bar{z}_n}\right]\begin{bmatrix} u_{11} \\ \\ u_{n1}\end{bmatrix} + \sum_{i=2}^{n}\left[\frac{I}{1-z_1\bar{z}_1} \cdots\right.$$

$$\left.\cdots\frac{I}{1-z_1\bar{z}_n}\right]\begin{bmatrix} u_{1i} \\ \\ u_{ni}\end{bmatrix}\frac{1-z_1}{1-z_i} = -w_1\left[\frac{w_1^*}{1-z_1\bar{z}_1} \cdots \frac{w_n^*}{1-z_1\bar{z}_n}\right]\begin{bmatrix} u_{11} \\ \\ u_{n1}\end{bmatrix} - w_1\sum_{i=2}^{n}\left[\frac{w_1^*}{1-z_1\bar{z}_1} \cdots \frac{w_n^*}{1-z_1\bar{z}_n}\right]\begin{bmatrix} u_{1i} \\ \\ u_{ni}\end{bmatrix}\frac{1-z_1}{1-z_i} = -w_1 \times$$

$$\times\left[\frac{w_1^*}{1-z_1\bar{z}_1} \cdots \frac{w_n^*}{1-z_1\bar{z}_n}\right] A_n^{-1}\begin{bmatrix} \frac{1-z_1}{1-z_1} I \\ \vdots \\ \frac{1-z_1}{1-z_n} I\end{bmatrix};$$

$$a_{12}(z_1) = (1-z_1)\left[\frac{I}{1-z_1\bar{z}_1} \cdots \frac{I}{1-z_1\bar{z}_n}\right] A_n^{-1}\begin{bmatrix} \frac{w_1}{1-z_1} \\ \vdots \\ \frac{w_n}{1-z_n}\end{bmatrix} = \left[\frac{I}{1-z_1\bar{z}_1} \cdots \frac{I}{1-z_1\bar{z}_n}\right]\begin{bmatrix} u_{11} \\ \vdots \\ u_{n1}\end{bmatrix} w_1 +$$

$$+\sum_{i=2}^{n}\left[\frac{I}{1-z_1\bar{z}_1} \cdots \frac{I}{1-z_1\bar{z}_n}\right]\begin{bmatrix} u_{1i} \\ \vdots \\ u_{ni}\end{bmatrix}\frac{(1-z_1)w_i}{1-z_i} = w_1 + w_1\left[\frac{w_1^*}{1-z_1\bar{z}_1} \cdots \frac{w_n^*}{1-z_1\bar{z}_n}\right] A_n^{-1}\begin{bmatrix} \frac{w_1(1-z_1)}{1-z_1} \\ \\ \frac{w_n(1-z_1)}{1-z_n}\end{bmatrix}.$$

$$a_{21}(z_1) = -\left[\frac{w_1^*}{1-z_1\bar{z}_1} \cdots \frac{w_n^*}{1-z_1\bar{z}_n}\right] A_n^{-1}\begin{bmatrix} \frac{1-z_1}{1-z_1} I \\ \vdots \\ \frac{1-z_1}{1-z_n} I\end{bmatrix}; \quad a_{22}(z_1) = I + \left[\frac{w_1^*}{1-z_1 z_1} \cdots \frac{w_n^*}{1-z_1 z_n}\right] A_n^{-1}\begin{bmatrix} \frac{w_1(1-z_1)}{1-z_1} \\ \vdots \\ \frac{w_n(1-z_1)}{1-z_n}\end{bmatrix}.$$

Из полученных выражений очевидно следует, что

$$f(z_1)=(a_{11}(z_1)\varepsilon(z_1)+a_{12}(z_1))(a_{21}(z_1)\varepsilon(z_1)+a_{22}(z_1))^{-1}=w_1,$$

если только $\det\{a_{21}(z_1)\varepsilon(z_1)+a_{22}(z_1)\}\neq 0$. Аналогично проверяются остальные условия (8). Итак, выполнение условий (10) обеспечивает (8).

Исследование особых значений параметра $\varepsilon(z)$, для которых (10) нарушается при некотором $k$, требует дополнительных рассмотрений, связанных с уточнением числа нулей функции $\det\{a_{21}(z)\varepsilon(z)+a_{22}(z)\}$ в единичном круге.

3. При $n=1$ резольвентная матрица (3), так называемый двучленный множитель, параметризованный интерполяционными данными $z_0 w_0$:

$$b_0(z)=\begin{bmatrix}\alpha_{11}(z) & \alpha_{12}(z)\\ \alpha_{21}(z) & \alpha_{22}(z)\end{bmatrix}=I_{2m}+(1+b_0(z))P_0;\ b_0(z)=\frac{1-\bar z_0}{1-z_0}\cdot\frac{z_0-z}{1-\bar z_0 z}, \qquad (18)$$

а

$$P_0=\begin{bmatrix}I_m\\ w_0^*\end{bmatrix}(I_m-w_0w_0^*)^{-1}[-I_m,w_0],\ P_0^2=-P_0,\ P_0j=jP_0^*. \qquad (19)$$

Обозначим через $N[\delta(z)]$ число нулей функции $\det\delta(z)$ в единичном круге.

Лемма 2. $N[\alpha_{22}(z)]=\nu\{I-w_0w_0^*\}$.

Доказательство. Используя очевидное равенство $I+w_0^*(I-w_0w_0^*)^{-1}w_0=(I-w_0^*w_0)^{-1}$, из (18) находим

$$\alpha_{22}(z)=I+(1+b_0(z))w_0^*(I-w_0w_0^*)^{-1}w_0=(I-w_0^*w_0)^{-1}(I+b_0(z)w_0^*w_0),$$

$$\det\alpha_{22}(z)=\det(I-w_0^*w_0)^{-1}\det(I+b_0(z)w_0^*w_0).$$

Если $\mu_1\le\mu_2\le\ldots\le\mu_{\nu_0}<0<\mu_{\nu_0+1}\le\ldots\le\mu_m\le 1$ – собственные значения матрицы $I-w_0^*w_0$ (или, что то же самое – матрицы $I-w_0w_0^*$), то

$$\det(I+b_0(z)w_0^*w_0)=\prod_{i=1}^{m}(1+(1-\mu_i)b_0(z)),$$

откуда

$$N[\alpha_{22}(z)]=\nu_0=\nu\{I-w_0w_0^*\}.$$

Лемма 3. Пусть

$$A_k(z)=\begin{bmatrix}\alpha_k(z) & \beta_k(z)\\ \gamma_k(z) & \delta_k(z)\end{bmatrix},\quad k=1,2\ -$$

голоморфные в замкнутом единичном круге матрицы-функции, $j$-унитарные на окружности:

$$A_k^*(\xi)jA_k(\xi)-j=A_k(\xi)jA_k^*(\xi)-j=0;\ |\xi|=1,\ k=1,2. \qquad (20)$$

Если

$$A(z)=\begin{bmatrix}\alpha(z) & \beta(z)\\ \gamma(z) & \delta(z)\end{bmatrix}=A_1(z)A_2(z), \tag{21}$$

то

$$N[\delta(z)]=N[\delta_1(z)]+N[\delta_2(z)].$$

Доказательство. Из (20) непосредственно следует, что

$$\delta_1(\xi)\delta_1^*(\xi)-\gamma_1(\xi)\gamma_1^*(\xi)=I;\ \delta_2^*(\xi)\delta_2(\xi)-\beta_2^*(\xi)\beta_2(\xi)=I.$$

Поэтому матрицы $\delta_1(\xi)$ и $\delta_2(\xi)$ невырождены и

$$I-\delta_1^{-1}(\xi)\gamma_1(\xi)\gamma_1^*(\xi)\delta_1^{-1*}(\xi)=\delta_1^{-1}(\xi)\delta_1^{-1*}(\xi);\ I-\delta_2^{-1*}(\xi)\beta_2(\xi)\delta_2^{-1}(\xi)=\delta_2^{-1*}(\xi)\delta_2^{-1}(\xi).$$

Из последних равенств заключаем, что

$$\|\delta_1^{-1}(\xi)\gamma_1(\xi)\|^2\le 1-\|\delta_1(\xi)\|^{-2}<1-h_1,\ \|\beta_2(\xi)\delta_2^{-1}(\xi)\|^2\le 1-\|\delta_2(\xi)\|^{-2}<1-h_2;\ h_i>0,\ i=1,2. \tag{22}$$

Если

$$\delta(z)=\delta_1(z)\delta_2(z)+\gamma_1(z)\beta_2(z)=\{\delta_1(z)+\gamma_1(z)\beta_2(z)\delta_2^{-1}(z)\}\delta_2(z),$$

то

$$N[\delta(z)]=N[\delta_1(z)+\gamma_1(z)\beta_2(z)\delta_2^{-1}(z)]+N[\delta_2(z)]. \tag{23}$$

Поскольку в силу (22) $\|\delta_1^{-1}(\xi)\gamma_1(\xi)\beta_2(\xi)\delta_2^{-1}(\xi)\|<1$, то на основании матричного аналога теоремы Руше [5]

$$N[\delta(z)]=N[\delta_1(z)]+N[\delta_2(z)],$$

что и доказывает равенство (21).

Лемма 4. Если $\mathfrak{A}_n(z)=\begin{bmatrix}a_{11}(z) & a_{12}(z)\\ a_{21}(z) & a_{22}(z)\end{bmatrix}$ резольвентная матрица (3), то

$$N[a_{22}(z)]=\nu(A_n)=\nu. \tag{24}$$

Доказательство. Предположим, что

$$\det A_{n-1}\ne 0,\quad A_{n-1}=\left\{\frac{I-w_i w_k^*}{1-z_i\bar z_k}\right\}_{i,k=1}^{n-1}. \tag{25}$$

Тогда можно построить матрицы-функции $\mathfrak{A}_{n-1}(z)$ и $\mathfrak{A}_n(z)=\mathfrak{A}_{n-1}^{-1}(z)\mathfrak{A}_n(z)$. Из (3) и (13)

$$b_n(z)=I-(1-z)\left[\frac{\begin{bmatrix}I\\ w_1^*\end{bmatrix}}{1-\bar z_1}\cdots\frac{\begin{bmatrix}I\\ w_{n-1}^*\end{bmatrix}}{1-\bar z_{n-1}}\right]A_{n-1}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{[-I,w_1]}{z-z_1}\\ \frac{[-I,w_{n-1}]}{z-z_{n-1}}\end{bmatrix}+$$

$$+(1-z)^2\left[\frac{\begin{bmatrix}I\\ w_1^*\end{bmatrix}}{1-\bar z_1 z}\cdots\frac{\begin{bmatrix}I\\ w_n^*\end{bmatrix}}{1-\bar z_n z}\right]A_n^{-1}\begin{bmatrix}\frac{[-I,w_1]}{1-z_1}\\ \vdots\\ \frac{[-I,w_n]}{1-z_n}\end{bmatrix}-(1-z)^2\left[\frac{\begin{bmatrix}I\\ w_1^*\end{bmatrix}}{1-\bar z_1}\cdots\frac{\begin{bmatrix}I\\ w_{n-1}^*\end{bmatrix}}{1-z_{n-1}}\right]A_{n-1}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{[-I,w_1]}{z-z_1}\\ \frac{[-I,w_{n-1}]}{z-z_{n-1}}\end{bmatrix}\times$$

$$\times \left[ \frac{\begin{bmatrix} I \\ w_1^* \end{bmatrix}}{1-\bar z_1 z} \cdots \frac{\begin{bmatrix} I \\ w_n^* \end{bmatrix}}{1-\bar z_n z} \right] A_n^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{[-I, w_1]}{1-z_1} \\ \\ \dfrac{[-I, w_n]}{z-z_n} \end{bmatrix}$$

Информационные блоки $A_n$ и $A_{n-1}$ связаны очевидными соотношениями

$$A_n = \begin{bmatrix} A_{n-1} & B_{n-1} \\ B_{n-1}^* & \dfrac{I-w_n w_n^*}{1-z_n \bar z_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ B_{n-1}^* A_{n-1}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A_{n-1}^{-1} B_{n-1} \\ 0 & I \end{bmatrix}; \; d_n = \frac{I-w_n w_n^*}{1-z_n \bar z_n} - B_{n-1} A_n^{-1} B_{n-1}^*; \qquad (26)$$

$$A_{n-1}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{n-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A_{n-1}^{-1} B_{n-1} \\ I \end{bmatrix} d_n [-B_{n-1}^* A_{n-1}^{-1}, I] = \begin{bmatrix} A_{n-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + D_n \,. \qquad (27)$$

Из последнего соотношения следует:

$$\left[ \frac{\begin{bmatrix} I \\ w_1^* \end{bmatrix}}{1-\bar z_1} \cdots \frac{\begin{bmatrix} I \\ w_{n-1}^* \end{bmatrix}}{1-\bar z_{n-1}} \right] A_{n-1}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{[-I, w_1]}{z-z_1} \\ \dfrac{[-I, w_{n-1}]}{z-z_{n-1}} \end{bmatrix} = \left[ \frac{\begin{bmatrix} I \\ w_1^* \end{bmatrix}}{1-\bar z_1} \cdots \frac{\begin{bmatrix} I \\ w_n^* \end{bmatrix}}{1-\bar z_n} \right] \{A_n^{-1} - D_n\} \begin{bmatrix} \dfrac{[-I, w_1]}{z-z_1} \\ \dfrac{[-I, w_n]}{z-z_n} \end{bmatrix} .$$

Непосредственно проверяется следующее тождество:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{[-I, w_1]}{z-z_1} \\ \dfrac{[-I, w_n]}{z-z_n} \end{bmatrix} \left[ \frac{\begin{bmatrix} I \\ w_1^* \end{bmatrix}}{1-\bar z_1 z} \cdots \frac{\begin{bmatrix} I \\ w_n^* \end{bmatrix}}{1-\bar z_n z} \right] = X_1 (Z A_n Z^* - A_n) X_2 = -\frac{1}{z} A_n X_2 - X_1 A_n + \frac{1}{z} A_n,$$

где

$$X_1 = \mathrm{Diag}\left\{\frac{I_m}{z-z_k}\right\}_{k=1}^n; \quad X_2 = \mathrm{Diag}\left\{\frac{I_m}{1-\bar z_k z}\right\}_{k=1}^n; \quad Z = \mathrm{Diag}\{z_k I_m\}_{k=1}^n \quad -$$

диагональные блок-матрицы порядка $nm$. Ряд тождественных преобразований приводит к следующему выражению для $b_n(z)$:

$$b_n(z) = I + \frac{(1-z)(1-\bar z_n)}{1-\bar z_n z} \left[ \frac{\begin{bmatrix} I \\ w_1^* \end{bmatrix}}{1-\bar z_1} \cdots \frac{\begin{bmatrix} I \\ w_n^* \end{bmatrix}}{1-\bar z_n} \right] D_n \begin{bmatrix} \dfrac{[-I, w_1]}{1-z_1} \\ \dfrac{[-I, w_n]}{1-z_n} \end{bmatrix}$$

или, обозначая

$$u = \left[ \frac{I}{1-\bar z_1} \cdots \frac{I}{1-\bar z_n} \right] \begin{bmatrix} -A_{n-1}^{-1} B_{n-1} \\ I \end{bmatrix}; \quad v = \left[ \frac{w_1^*}{1-\bar z_1} \cdots \frac{w_n^*}{1-\bar z_n} \right] \begin{bmatrix} -A_{n-1}^{-1} B_{n-1} \\ I \end{bmatrix}, \quad U_n = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} d_n^{-1} [-u^*; v^*],$$

окончательно получим

$$b_n(z) = I + \frac{(1-z)(1-\bar z_n)}{1-\bar z_n z} U_n .$$

Используя (26), нетрудно убедиться, что

$$u^*u - v^*v = \lambda_n d_n;\ \lambda_n = |1-z_n|^{-2}(1-|z_n|^2). \tag{28}$$

Отсюда $U_n^2 = -\lambda U_n$; если положить $\rho_n = \lambda_n^{-1} U_n$, то $\rho_n^2 = -\rho_n$. Таким образом,

$$b_n(z) = I + \frac{(1-z)(1-|z_n|^2)}{(1-\bar z_n z)(1-z_n)}\rho_n;\ \rho_n^2 = -\rho_n,\ \rho_n j = j\rho_n^*.$$

Далее согласно (28) $u$ – неособенная матрица и $I - u^{*-1}v^*vu = \lambda_n u^{*-1} d_n u^{-1}$. Обозначая $w_0 = u^{*-1}v^*$, получаем

$$\rho_n = \begin{bmatrix} I \\ w_0^* \end{bmatrix} \lambda_n^{-1} u d_n^{-1} u^* [-I, w_0] = \begin{bmatrix} I \\ w_0^* \end{bmatrix} (I - w_0 w_0^*)^{-1} [-I, w_0].$$

Следовательно, $b_n(z)$ – двучленный множитель вида (18), (19). Заметим, что $\nu\{I - w_0 w_0^*\} = \nu\{d_n\}$ и, как следует из равенства (26),

$$\nu\{A_n\} = \nu\{A_{n-1}\} + \nu\{d_n\}.$$

Проводя индукцию по $n$ и учитывая леммы 2 и 3, установим справедливость (24). От предположения (25) избавляемся путем введения малых "возмущений" $w_k(\varepsilon)$, $1 \le k \le n-1$ таких, что $w_k(0) = w_k$, $1 \le k \le n-1$ и при $\varepsilon \ne 0$ $\det A_i \ne 0$, $i = n-1, n$. Справедливость (24) следует теперь из известной теоремы Гурвица [6]. Лемма доказана.

Исследуем теперь особые значения параметра $\varepsilon(z)$ и тем самым завершим доказательство теоремы. Пусть $\varepsilon_0(z) \in S_0^{(m)}$ и $f(z) = (a_{11}(z)\varepsilon_0(z) + a_{12}(z)) \times (a_{21}(z)\varepsilon_0(z) + a_{22}(z))^{-1}$. Используя теорему Руше и лемму 4, нетрудно убедиться, что

$$N\{a_{21}(z)\varepsilon_0(z) + a_{22}(z)\} = \nu. \tag{29}$$

Предположим, что

$$\det\{a_{21}(z_1)\varepsilon_0(z_1) + a_{22}(z_1)\} = 0. \tag{30}$$

Поскольку $f(z) \in S_\nu^{(m)}$, то по теореме Крейна – Лангера $f(z) = S(z)B^{-1}(z)$; $S(z) \in S_0^{(m)}$ и $\operatorname{ord} B \le \nu$. Если предположить, что $f(z)$ голоморфна в точках $z_k$, $1 \le k \le n$ и решает проблему Н. – П., то из (29) и (30) следует, что $f(z) = S_0(z)B_0^{-1}(z)$, $S_0(z) \in S_0^{(m)}$ и $\operatorname{ord} B_0 < \nu$. Следовательно, $f(z) \in S_\varkappa^{(m)}$, $\varkappa < \nu$, что противоречит условиям

$$f(z_k) = w_k,\ 1 \le k \le n;\ \nu(A_n) = \nu.$$

Случай $\varepsilon_0(z) \in S_r^{(m)}$, $r > 0$ легко получается индукцией по $r$. Следовательно, при описании совокупности всех решений проблемы Н. – П. параметры $\varepsilon(z)$, для которых нарушается хотя бы одно из условий (10), следует исключить. Теорема полностью доказана.

Таким образом, в работе [7] анонсированы результаты, дающие описание всех решений индефинитной $(A, C, G)$ – проблемы.

1. Ковалишина И.В., Потапов В.П. Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны - Пика. - Докл. АН АрмССР, 1974, 59, № 1, с. 17-21.
2. Ахиезер Н.И. Об одной минимум-проблеме теории функций и о числе корней алгебраического уравнения, которые лежат внутри единичного круга. - Изв. АН СССР, 1931, 9, с. 1169-1189.
3. Адамян В.М., Аров Д.З., Крейн М.Г. Аналитические свойства пар Шмидта ганкелева оператора и обобщенная задача Шура - Такаги. - Мат.сб., 1971, 86, № 1, с. 34-75.
4. Krein M.G., Langer H. Über die verallgemeinertum Resolventen und die charakteristische Funktion eines isometrischen Operators.- In: Colloq. math.Soc.J. Bolyai. 5. Hilbert space operators. Tiheny (Hungary), 1970, p. 353-399.
5. Гохберг И.Ц., Сигал Е.И. Операторное обобщение теоремы о логарифмическом вычете и теоремы Руше. - Мат. сб., 1971, 84, № 4, с. 607-629.
6. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. - М.: Наука, 1967. - т. 1. 486 с.
7. Нудельман А.А. Об одном обобщении классических интерполяционных задач. - Докл. АН СССР, 1981, 256, № 4, с. 790-793.

УДК 513.8

В.Я.Голодец, Р.А.Шиков

## К ВОПРОСУ О КОЦИКЛАХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПЛОТНЫМ ОБРАЗОМ

1. В работе [1] Макки вводит понятие образа коцикла эргодической динамической системы. Показано, что возникающая в этом случае конструкция является обобщением конструкции специального потока. В случае, когда динамическая система ( $X, \mu, G$ ) является образом коцикла динамической системы ( $Y, \nu, \mathbb{Z}$ ), Макки называет ее потоком Пуанкаре. В связи с обобщением известной теоремы Амброза о специальном представлении потока он ставит вопрос: для каких групп любое эргодическое действие изоморфно потоку Пуанкаре. В работах [2] и [3] было показано, что если локально-компактная, сепарабельная группа $G$ является образом для коцикла эргодического действия группы $\mathbb{Z}$, то любое ее эргодическое действие изоморфно потоку Пуанкаре. Также доказано, что образами являются все компактные группы, некоторые коммутативные группы (рангом $\leq 2$, $\mathbb{R}^n$ ), все связные нильпотентные группы Ли и все конечные произведения групп указанных типов.

В настоящей работе доказывается, что любая сепарабельная, локально-компактная, нильпотентная группа является образом некоторого коцикла любой свободной дискретной, эргодической аппроксимативно-конечной (а.к.) динамической системы, а также любого эргодического потока. Отсюда следует, что любое эргодическое действие сепарабельной, локально-компактной нильпотентной группы изоморфно потоку Пуанкаре.

Структура настоящей работы следующая: в п.2 даются необходимые предварительные сведения, в п. 3 доказывается, что любая сепарабельная, локально-компактная нильпотентная группа является образом некоторого коцикла любой а.к. динамической системы. Отметим, что не только доказывается существование коцикла, а дается конструктивный метод его получения. Показано, как из коциклов базисного автоморфизма можно получать коциклы специального потока. Доказывается, что любая нильпотентная сепарабельная, локально-компактная группа является образом коцикла любого эргодического потока.

2. Предварительные сведения. В дальнейшем $(X,\mu)$ означает пространство Лебега с конечной или $\sigma$-конечной непрерывной мерой [4]. Динамической системой называется тройка $(X,\mu,G)$, где $G$ – локально-компактная сепарабельная группа, действующая измеримым образом в пространстве $(X,\mu)$, оставляя меру $\mu$ квазиинвариантной. Действие будем предполагать правым.

Пусть $M$ – стандартная борелевская группа. Коциклом динамической системы $(X,\mu,G)$ со значениями в $M$ называется борелевская функция $\alpha(x,g): X\times G \to M$, обладающая следующими свойствами:

а) $\alpha(x,e)=e_1$, для почти всех (п.в) $x\in X$, где $e$ – единица группы $G$, а $e_1$ – единица группы $M$;

б) $\alpha(x,g_1g_2)=\alpha(x,g_1)\alpha(xg_1,g_2)$ $(g_1,g_2\in G)$ для п.в. $x\in X$.

Два коцикла $\alpha(x,g)$ и $\beta(x,g)$ называются когомологичными, если существует борелевская функция $f: X\to M$ такая, что для $\forall g\in G$

$$\alpha(x,g)=f(x)\beta(x,g)f(xg)^{-1} \text{ для п.в. } x\in X$$

Множество классов когомологичных коциклов обозначается через $H^1(M,G(X))$.

Пусть имеется динамическая система $(X,\mu,G)$ с эргодической мерой $\mu$, локально-компактная сепарабельная группа $H$ и коцикл

$$\alpha(x,g): X\times G \to H.$$

Построим действие группы $G\times H$ в пространстве $X\times H$ (с мерой равной произведению меры $\mu$ и меры Хаара $\mu_H$ на $H$ ( следующим образом:

$$(x,h)(g,k)=(xg,k^{-1}h\alpha(x,g)).$$

Как показано в работе [1], это действие оставляет меру $\mu\times\mu_H$ квазиинвариантной и является эргодическим. Если действие группы $G\times\{e\}$ – эргодическое, то группа $H$ называется образом коцикла $\alpha$. В противном случае рассмотрим разбиение пространства $(X\times H,\mu\times\mu_H)$ на траектории группы $G\times\{e\}$ и возьмем его измеримую оболочку [4] Поскольку группы $G\times\{e\}$ и $\{e\}\times H$ коммутируют между собой, а действие $G\times H$ в пространстве $(X\times H,\mu\times\mu_H)$ является эргодическим, то группа $H$ действует эргодически в фактор-пространстве по измеримой оболочке. Это действие группы $H$ называется образом коцикла $\alpha$. Как уже отмечалось выше в случае, когда $G=\mathbb{Z}$, образ коцикла $\alpha$ называется потоком Пуанкаре.

Следующие определения относятся к случаю, когда $G$ – счетная группа. Полной группой группы $G$ называется множество всех борелевских автоморфизмов $U$ пространства $(X,\mu)$ таких, что для почти каждого $x\in X$, $\exists g\in G$ такое, что $xU=xg$. Полная группа обозначается через $[G]$. Если $G=\mathbb{Z}$ и действие порождается автоморфизмом $T$, то полная группа обозначается через $[T]$. Две динамические системы $(X,\mu,G_1)$, $(Y,\nu,G_2)$ называются слабо эквивалентными, если существует изоморфизм $\varphi:(X,\mu)\to(Y,\nu)$ такой, что $\varphi G_1 x = G_2\varphi x$ для п.в. $x\in X$.

Динамическая система $(X,\mu,G)$ называется аппроксимативно-конечной, если она слабо эквивалентна динамической системе $(Y,\nu,\mathbb{Z})$.

3. <u>Коциклы аппроксимативно-конечных дискретных динамических систем.</u> Все динамические системы считаются аппроксимативно-конечными (это предполагает, что группа $G$ – счетная). Предполагаем также, что группа $G$ действует эргодически свободно, т.е. для п.в. $x\in X$ из того, что $xg=x$ для некоторого $g\in G$ следует, что $g=e$.

Рассмотрим динамическую систему $(X_0,\mu_0,\Gamma)$:

$$(X_0,\mu_0)=(Y,\nu)^{N},$$

где

$Y=\{0,1\}$, $\nu(0)=\frac{1}{2}$, $\nu(1)=\frac{1}{2}$, т.е. $X_0$ – множество всех последовательностей нулей и единиц, в котором борелевская структура задается цилиндрическими множествами

$$Z(a)=\{x\in X_0;\ a_n=x_n,\ 1\le n\le N\},\quad a\in\prod_{1\le n\le N}\{0,1\},$$

а мера $Z(a)$ равна $\frac{1}{2^N}$. $X_0$ можно рассматривать как группу относительно покомпонентного сложения по $mod\,2$, а $\mu_0$ является мерой Хаара на $X_0$. Группу $\Gamma$ определяем как множество всех последовательностей, содержащих конечное число единиц. Образующими для группы $\Gamma$ служат элементы $\delta_k$, в которых на $k$-том месте стоит единица, а все остальные члены последовательности нули. $\Gamma$ действует в $X_0$ сдвигами, сохраняя меру $\mu_0$ и ее действие является эргодическим и свободным. Динамическая система $(X_0,\mu_0,\Gamma)$ является аппроксимативно-конечной.

Пусть $A,B$ – борелевские множества в $X_0$, $\mu_0(A)>0$, $\mu_0(B)>0$. Изоморфизм $\gamma:A\to B$ называется $\Gamma$-изоморфизмом, если для почти каждого $x\in A$ существует $\delta\in\Gamma$ такой, что $x\gamma=x\delta$. Определим отображение

$$\delta(x,\gamma):A\to\Gamma\ :\ x\gamma=x\delta(x,\gamma)\quad \text{для п.в. } x\in A. \tag{I}$$

Легко проверить, что $\delta(x,\gamma)$ является коциклом, т.е., если $\gamma_1:A\to B$, $\gamma_2:B\to C$, то

$\delta(x,\gamma_1\gamma_2) = \delta(x,\gamma_1)\delta(x\gamma_1,\gamma_2)$ для п.в. $x\in A$.

Пусть $G$ – произвольная нильпотентная локально-компактная сепарабельная группа класса $n$. Это означает, что если $G_k$ – группа, порожденная элементами $ghg^{-1}h^{-1}$, где $g\in G$, $h\in G_k$, $=1,2\ldots,n$, $G_0=G$, то $G_n=\{e\}$. Как следует из теоремы 2 § I [5] произвольный коцикл динамической системы $(X_0,\mu_0,\Gamma)$ со значениями в $G$ задается формулой

$$C(x,\delta_k)=f_1^{-x_1}(x)f_2^{-x_2}(x)\ldots f_{k-1}^{-x_{k-1}}(x)f_k^{(-1)^{x_k}}(x)f_{k-1}^{x_{k-1}}(x\delta_k)\ldots f_1^{x_1}(x\delta_k), \quad (2)$$

где $f_k(x): X_0\to G$ – борелевская функция, инвариантная относительно $\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_k$. Пусть $H$ всюду плотная счетная подгруппа в $G$. Построим последовательность $h_1,h_2,\ldots$, в которой любой элемент группы $H$ встречается бесконечное число раз.

Положим

$$f_k(x)=h_k. \quad (3)$$

Докажем, что группа $G$ является образом коцикла $C(x,\delta)$, определяемого формулами (2) и (3).

Для $\Gamma$-изоморфизма $\gamma: A\to B$ определим отображение $\alpha(x,\gamma)=C(x,\delta(x,\gamma))$. Ясно, что $\alpha$ является коциклом. Через $L$ обозначим группу тех автоморфизмов $\gamma\in[\Gamma]$, для которых $\alpha(x,\gamma)=e$ для п.в. $x\in X_0$.

<u>Лемма 3.I</u>. Группа $L$ действует эргодически в пространстве $(X_0,\mu_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $B\subset X_0$, $\mu_0(B)>0$. Покажем, что для любого $h\in H$ существует $D\subset B$, $\mu_0(D)>0$ и $\Gamma$-изоморфизм $\gamma$, отображающий $D$ в $B$ такой, что $\alpha(x,\gamma)=h$.

Существует такое $N_1\in\mathbb{N}$ и $a'\in\prod\limits_{1\le n\le N_1}\{0,1\}$, что для множества $C_1=B\cap Z(a')$ имеет место неравенство

$$\mu_0(C_1)>\frac{3}{4}\mu_0(Z(a')). \quad (4)$$

Поскольку $h$ содержится бесконечное число раз в последовательности $h_1,h_2,\ldots$, то существует $M_1>N_1$, $M_1\in\mathbb{N}$ такое, что

$$C(x,\delta_{M_1})=f_1^{-x_1}(x)\ldots f_{M_1-1}^{-x_{M_1-1}}(x)h^{(-1)^{x_{M_1}}}f_{M_1-1}^{x_{M_1-1}}(x,\delta_{M_1})\ldots f_1^{x_1}(x\delta_{M_1}). \quad (5)$$

Поскольку $G$ – нильпотентная группа, то получаем

$$C(x,\delta_{M_1})=\beta_1(x_1,\ldots,x_{M_1})h^{(-1)^{x_{M_1}}}, \text{ где}$$
$$\beta_1(x_1,\ldots,x_{M_1})\in G_1\cap H=H_1.$$

Если положим

$C_1(0)=\{x/x\in C_1,\ x_{M_1}=0\}$ и $C_1(1)=\{x/x\in C_1, x_{M_1}=1\}$, то

$$\mu_0(C_1(0))>\frac{1}{4}\mu_0(Z(a')); \quad (6)$$

$$\mu_0(C_1(1)) > \frac{1}{4}\mu_0(Z(a'_1)). \tag{7}$$

Пусть $D'_1 = C_1(0) \cap C_1(1)\delta_{M_1}$. Для $\forall x \in D'_1$ имеем

$$C(x,\delta_{M_1}) = f_1^{-x_1}(x) \dots f_{M_1-N_1}^{-x_{M_1-1}}(x) f_{M_1}^{(-1)^{x_{M_1}}}(x) f_{M_1-1}^{x_{M_1-1}}(x\delta_{M_1}) \dots f_1^{x_1}(x\delta_{M_1}) = \beta_1(x_1,\dots,x_{M_1-1})h.$$

Для $x \in D'_1$ $x_1, x_2, \dots, x_{N_1}$ фиксированы. Существует такое цилиндрическое множество $Z(a)$, где $a_1 = a'_1, \dots, a_{N_1} = a'_{N_1}$ и $a_{N_1+1}, \dots, a_{M_1-1}$ фиксированные, что $\mu_0(D'_1 \cap Z(a)) > 0$.

Обозначим $D_1 = D'_1 \cap Z(a)$. Тогда $\delta_{M_1}$ отображает $D_1$ в $B$ и $C(x,\delta_{M_1}) = \beta_1 h$ для $\forall x \in D_1$, где $\beta_1 \in H_1$ и не зависит от $x$. Если $\gamma_1$ – сужение $\delta_{M_1}$ на $D_1$, то

$$\alpha(x,\gamma_1) = \beta_1 h, \text{ для п.в. } x \in D_1.$$

Точно так же можно найти $D_2 \subset D_1$, $\mu_0(D_2) > 0$ и $\Gamma$ – изоморфизм $\gamma_2$ из $D_2$ в $D_1$ такой, что $\alpha(x,\gamma_2) = \beta_2\beta_1^{-1}$ для п.в. $x \in D_2$, где $\beta_2 \in H_2 = G_2 \cap H$ и $\beta_2$ не зависит от $x$. Тогда $\gamma_2\gamma_1$ – $\Gamma$ -изоморфизм, отображающий $D_2$ в $B$ и

$$\alpha(x,\gamma_2\gamma_1) = \alpha(x,\gamma_2)\alpha(x\gamma_2,\gamma_1) = \beta_2 h \quad \text{для п.в. } x \in D_2.$$

Продолжая этот процесс, через конечное число шагов получим $D_n \subset B$, $\mu_0(D_n) > 0$ и $\Gamma$-изоморфизм $\gamma_n$ из $D_n$ в $B$ такой, что $\alpha(x,\gamma_n) = \beta_n h$, где $\beta_n \in H_n = G_n \cap H$, т.е. $\beta_n = e$.

Пусть $E \subset X_0$, $0 < \mu_0(E) < 1$. Поскольку $\Gamma$ действует эргодически в $X_0$, то существуют множества $A \subset E$, $B \subset X_0 \setminus E$ $\mu_0(A) > 0$, $\mu_0(B) > 0$, $h \in H$ и $\Gamma$-изоморфизм $\gamma_1 : A \to B$ такие, что $\alpha(x,\gamma_1) = h$ для п.в. $x \in A$. Существует множество $D \subset B$, $\mu_0(D) > 0$ и $\Gamma$-изоморфизм $\gamma_2$ из $D$ в $B$ такой, что $\alpha(x,\gamma_2) = h^{-1}$ для п.в. $x \in D$.

Рассмотрим $\Gamma$-изоморфизм $\gamma_1\gamma_2$ из $\gamma_1^{-1}(D)$ в $B$. Очевидно, $\alpha(x,\gamma_1\gamma_2) = e$ для п.в. $x \in \gamma_1^{-1}(D)$, что доказывает эргодичность действия группы $L$.

Через $\tilde{\Gamma}$ обозначим действие группы $\Gamma$ в пространстве $X_0 \times Q$, определяемое коциклом $C(x,\delta)$. Соответственно через $[\Gamma]$ обозначим действие группы $[\Gamma]$ в $X_0 \times G$, определяемое коциклом $\alpha(x,\gamma)$. Очевидно, $[\tilde{\Gamma}] \subset [\tilde{\Gamma}]$. Для доказательства эргодичности действия достаточно доказать, что $[\tilde{\Gamma}]$ действует эргодически, а это в свою очередь сводится к проверке эргодичности действия $[\tilde{\Gamma}]$.

Как следствие из леммы 3.1 получаем:

<u>Лемма 3.2.</u> Любое инвариантное относительно $\tilde{L}$ множество положительной меры с точностью до множества меры нуль имеет вид $X_0 \times A$, где $A$ – борелевское подмножество группы $G$, положительной меры.

Известно, что если группа $G$ действует борелевски в пространстве Лебега $(X,\mu)$, $\mu(X) = \infty$, то ее правое регулярное представление в

$L^2(X)$ является непрерывным в сильной операторной топологии. Используя этот факт, легко доказать следующую лемму:

Лемма 3.3. Пусть локально-компактная сепарабельная группа $G$ действует эргодически в пространстве $(X,\mu)$ (мера $\mu$ $G$ – конечная и инвариантная), $H\subset G$ счетная всюду плотная подгруппа. Тогда действие $H$ в пространстве $(X,\mu)$ также является эргодическим.

Теорема 3.4. Любая нильпотентная сепарабельная локально-компактная группа является образом построенного нами коцикла $C(x,\delta)$ динамической системы $(X_0,\mu_0,\Gamma)$.

Доказательство. Правое регулярное действие группы $G$ на себя является эргодическим, а в силу леммы 3.3 действие группы $H$ сдвигами является также эргодическим. Пусть $B$ $[\tilde{\Gamma}]$ – инвариантное подмножество, $\mu(B)>0$. Поскольку $\tilde{L}\subset[\tilde{\Gamma}]$, то в силу леммы 3.2 оно имеет вид $X_0\times A$, где $\mu_G(A)>0$ ($\mu_G$ – мера Хаара на группе $G$). Очевидно, что коцикл $\alpha(x,\gamma): X_0\times[\Gamma]\to G$ принимает все значения $h\in H$. Это значит, что $A$ должно быть $\mathrm{mod}\, 0$ инвариантным относительно $H$. Тогда $\mu_G(G\setminus A)=0$, поэтому $\mu(X_0\times G\setminus B)=0$. Следовательно группа $[\tilde{\Gamma}]$ действует эргодически, т.е. $G$ является образом для коцикла $C(x,\delta)$.

Пусть теперь $(X,\mu,G)$ и $(Y,\nu,L)$ – слабо эквивалентные динамические системы. Тогда, для $\forall g\in G$ и п.в. $x\in X$ зададим отображение $l: X\times G\to L$ равенством

$$\varphi(xg)=\varphi(x)\,l(x,g),$$

где $\varphi$ определено в конце п. 2. Легко проверить, что $l(x,g)$ является коциклом динамической системы $(X,\mu,G)$. Любому коциклу $\alpha(y,l)$ динамической системы $(Y,\nu,L)$ сопоставим коцикл $(F\alpha)(x,g)=\alpha(\varphi(x),l(x,g))$ динамической системы $(X,\mu,G)$. Следующая лемма является очевидной.

Лемма 3.5. а) Отображение $F$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между коциклами динамических систем $(Y,\nu,L)$ и $(X,\mu,G)$. При этом соответствии когомологичные коциклы переходят в когомологичные.

б) Сепарабельная локально-компактная группа $H$ является образом коцикла $\alpha$ тогда и только тогда, когда она является образом коцикла $F\alpha$.

Рассмотрим динамическую систему $(X,\mu,\mathbb{Z})$, построенную по автоморфизму $T$. Легко увидеть, что $(X,\mu,\mathbb{Z})$ слабо эквивалентна группе автоморфизмов, которая строится следующим образом: берем автоморфизм $Q$, действующий в пространстве $(S,\nu)$, и автоморфизм $P$, действующий в пространстве $(Y,\tilde{\nu}),\ \tilde{\nu}(Y)=1$, сохраняя меру $\tilde{\nu}$ (конечно выбор автоморфизма $Q$ зависит от автоморфизма $T$). Потом строим динамическую систему ( $S\times Y,\ \nu\times\tilde{\nu},\ \mathbb{Z}^2$ ), где $\mathbb{Z}^2$ действует в $(S\times Y,\ \nu\times\tilde{\nu})$ следующим образом:

$$(s,y)(n,m)=(sQ^n, yP^m).$$

Доказательство этого факта не составляет труда. Для этого нужно рассмотреть случаи, когда $T$ имеет тип $II_1, II_\infty, III_1, III_\lambda, III_0$ и воспользоваться тем фактом, что две свободные, эргодические а.к. динамические системы одного и того же типа слабо эквивалентные (подробнее по этому вопросу см. [6]).

Пусть $\alpha(y,m): Y\times\mathbb{Z}\to H$ коцикл динамической системы $(Y,\tilde{\nu},\mathbb{Z})$, построенной по автоморфизму $P$.

Положим

$$\beta[(s,y),(n,m)]=\alpha(y,m).$$

Очевидно, $\beta$ является коциклом для динамической системы $(S\times Y,\nu\times\tilde{\nu},\mathbb{Z}^2)$.

<u>Лемма 3.6</u>. Если сепарабельная локально-компактная группа является образом для коцикла $\alpha$, то она является образом и для коцикла $\beta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение леммы сразу следует из того факта, что действие группы $\mathbb{Z}^2$ в пространстве $S\times Y\times H$, определяемое коциклом $\beta$, распадается в тензорное произведение двух независимых эргодических действий: автоморфизма $Q$ в $S$ и группы $\mathbb{Z}$ в $Y\times H$, определяемое коциклом $\alpha$.

Из лемм 3.5 и 3.6, а также из теоремы 3.4 получаем:

<u>Следствие 3.7</u>. Любая сепарабельная локально-компактная нильпотентная группа является образом некоторого коцикла любой свободной, эргодической, а.к. динамической системы.

<u>Следствие 3.8</u>. Любое эргодическое действие сепарабельной, локально-компактной, нильпотентной группы изоморфно потоку Пуанкаре.

4. <u>Коциклы эргодического потока</u>. Рассмотрим эргодический поток $(X,\nu,\mathbb{R})$. По известной теореме Амброза он всегда изоморфен специальному потоку, т.е. потоку, построенному следующим образом: пусть $(Y,\mu,\mathbb{Z})$ динамическая система, порожденная автоморфизмом $T$, и пусть $F(y): Y\to\mathbb{R}^+$ – борелевская функция такая, что $F(y)\geq\tau>0$ для $\forall y\in Y$. Положим

$$X=\{(y,u)/0\leq u<F(y)\}$$

и на $X$ определим борелевскую структуру и меру $\nu$ как сужение борелевской структуры и меры на произведении $Y\times\mathbb{R}^+$. Действие группы $\mathbb{R}$ на $(X,\nu)$ определяется формулами

$$
(y,u)t = \begin{cases} (y,u+t), & \text{если } -u \le t < -u+F(y), \\ (yT^n, u+t-\sum\limits_{k=0}^{n-1} F(yT^k)), & \text{если } -u+\sum\limits_{k=0}^{n-1} F(yT^k) \le t < -u+\sum\limits_{k=0}^{n} F(yT^k), \\ (yT^{-n}, u+t+\sum\limits_{k=1}^{n} F(yT^{-k})), & \text{если } -u-\sum\limits_{k=1}^{n} F(yT^{-k}) \le t < -u-\sum\limits_{k=1}^{n-1} F(yT^{-k}). \end{cases}
$$

Определим функцию $n_t(y,u): X \times \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ следующим образом:

$$
n_t(y,u) = \begin{cases} n, & \text{если } -u+\sum\limits_{k=0}^{n-1} F(yT^k) \le t < -u+\sum\limits_{k=0}^{n} F(yT^k), \\ 0, & \text{если } -u \le t < -u+F(y), \\ -n, & \text{если } -u-\sum\limits_{k=1}^{n} F(yT^{-k}) \le t < -u-\sum\limits_{k=1}^{n-1} F(yT^{-k}). \end{cases}
$$

Легко проверить, что $n_t(y,u)$ является борелевским коциклом. Надо отметить, что $n_t(y,u)$ является строгим коциклом, т.е. равенства $n_0(y,u)=0$ и $n_{t_1+t_2}(y,u) = n_{t_1}(y,u) + n_{t_2}[(y,u)t_1]$ выполняются для всех $(y,u) \in X$.

Пусть теперь $f(y,n): Y \times \mathbb{Z} \to M$ – коцикл динамической системы $(Y,\mu,\mathbb{Z})$ со значениями в борелевской группе $M$. Построим отображение

$$
\alpha[(y,u),t] = f(y, n_t(y,u)). \tag{1}
$$

<u>Теорема 4.1.</u> а) $\alpha[(y,u),t]$ является коциклом динамической системы $(X,\nu,\mathbb{R})$;

б) Если $\alpha_1[(y,u),t] = f_1(y, n_t(y,u))$ и $\alpha_2[(y,u),t] = f_2(y, n_t(y,u))$, то $\alpha_1$ и $\alpha_2$ когомологичны тогда и только тогда, когда $f_1$ и $f_2$ когомологичны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) То что $\alpha[(y,u),t]$ – борелевская функция и $\alpha[(y,u),0]=e$ для п.в. $(y,u) \in X$ является очевидным. Так как $\mathbb{Z}$ счетная, то существует множество $Y' \subset Y$ полной меры такое, что

$f(y,n+m) = f(y,n)f(yT^n,m)$, для $\forall y \in Y'$ и $\forall (n,m) \in \mathbb{Z}^2$.
Множество $X' = \{(y,u) / y \in Y', 0 \le u < F(y)\}$ имеет полную меру и для $\forall (y,u) \in X'$ и $\forall (t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2$ выполняется равенство

$$
\alpha[(y,u),t_1+t_2] = \alpha[(y,u),t_1]\alpha[(y,u)t_1,t_2];
$$

б) Пусть $f_1$ когомологичен $f_2$, т.е. существует борелевская функция $\psi: Y \to M$ такая, что для $\forall n \in \mathbb{Z}$ выполняется $f_2(y,n) = \psi(y)f_1(y,n)\psi(yT^n)^{-1}$, для п.в. $y \in Y$ (2). Опять можно выбрать множество $Y' \subset Y$ полной меры такое, что (2) выполняется для $\forall y\in Y'$ и $\forall n\in\mathbb{Z}$. Положим $\tilde\psi(y,u)=\psi(y)$. Это борелевская функция из $X$ в $M$ и, очевидно, для $\forall t\in\mathbb{R}$ и $\forall(y,u)\in X'$ имеем

$$\alpha_2[(y,u),t]=\tilde\psi(y,u)\alpha_1[(y,u),t]\tilde\psi[(y,u)t]^{-1};$$

т.е. коциклы $\alpha_1$ и $\alpha_2$ когомологичны.

Пусть $\alpha_1$ и $\alpha_2$ когомологичны, т.е. существует борелевская функция $\tilde\psi(y,u):X\to M$ такая, что для $\forall t\in\mathbb{R}$

$$\alpha_2[(y,u),t]=\tilde\psi(y,u)\alpha_1[(y,u),t]\tilde\psi[(y,u),t]^{-1} \text{ для, п.в. } (y,u)\in X. \quad (3)$$

Пусть $N\subset X\times\mathbb{R}$ множество тех $[(y,u),t]$, для которых (3) не выполняется. $N$ является борелевским и для $\forall t\in\mathbb{R}$ множество $N_t=\{(y,u)/[(y,u),t]\in N\}$ имеет меру нуль. Тогда по теореме Фубини для $\forall(y,u)\in X'$, где $X'$ множество полной меры, равенство (3) выполняется для п.в. $t\in\mathbb{R}$. Поскольку $F(y)\geq\tau>0$, то существует такое $0<u_0<\tau$, что множество $Y''=\{y/(y,u_0)\in X'\}$ является множеством полной меры в $Y$.

Рассмотрим множество $Y'=\{y\in Y''\!/ f_1(y,0)=f_2(y,0)=e\}$ и функцию $\psi(y)=\tilde\psi(y,u_0)$. $Y'$ является множеством полной меры, а $\psi(y)$ – борелевской функцией. Пусть $(y,u_0)\in X'$. Рассмотрим интервал $-u_0\leq t<-u_0+F(y)$. Для п.в. $t$ из этого интервала равенство (3) в точке $(y,u_0)$ выполняется:

$$\alpha_2[(y,u_0),t]=\tilde\psi(y,u_0)\alpha_1[(y,u_0),t]\tilde\psi[(y,u_0)t]^{-1}$$

для п.в. $t\in[-u_0,-u_0+F(y)]$. Но $\alpha_2[(y,u_0),t]=f_2(y,0)$ и $\alpha_1[(y,u_0),t]=f_1(y,0)$ и, следовательно, $\alpha_1[(y,u_0),t]=\alpha_2[(y,u_0),t]=e$ для п.в. $t\in[-u_0,-u_0+F(y)]$ или для $\forall y\in Y'$ имеем, что $\tilde\psi(y,u)=const$ для п.в. $u\in[0,F(y)]$ и эта константа равняется $\tilde\psi(y,u_0)$. Покажем, что для $\forall n\in\mathbb{Z}$:

$f_2(y,n)=\psi(y)f_1(y,n)\psi(yT^n)^{-1}$, для п.в. $y\in Y$.

Пусть $y\in Y'\cap T^{-n}Y'$ и для определенности предположим, что $n>0$. Тогда

$$\alpha_2[(y,u_0),t]=\tilde\psi(y,u_0)\alpha_1[(y,u_0),t]\tilde\psi[(y,u_0),t]^{-1},$$

для п.в. $t\in[-u_0+\sum_{k=0}^{n-1}F(yT^k),-u_0+\sum_{k=0}^{n}F(yT^k)]$. С другой стороны, так как $n_t(y,u_0)=n$ для любого $t$ из этого интервала и $(yT^n,u_0)\in X'$ (напомним, что $y\in Y'\cap T^{-n}Y'$), то для п.в. $t$ из этого интервала имеем $\tilde\psi[(y,u_0)t]=\tilde\psi(yT^n,u_0)$. Тогда существует $t$ из этого интервала такое, что

$$\alpha_2[(y,u_0),t]=\tilde\psi(y,u_0)\alpha_1[(y,u_0),t]\tilde\psi(yT^n,u_0)^{-1}.$$

Это означает, что для $y\in Y'\cap T^{-n}Y'$ имеет место равенство $f_2(y,n)=\psi(y)f_1(y,n)\psi(yT^n)^{-1}$. Поскольку $Y'\cap T^{-n}Y'$ – множество полной меры, получаем, что $f_1$ и $f_2$ когомологичны. Теорема доказана.

Лемма 4.2. Если $f(y,n)$ коцикл со значениями в сепарабельной локально-компактной группе $G$ и $\alpha[(y,u),t]=f(y,n_t(y,u))$, то группа $G$ является образом для коцикла $\alpha$ тогда и только тогда, когда она является образом для коцикла $f$.

Доказательство. Рассмотрим пространство $Y\times G$, в котором группа $\mathbb{Z}$ действует следующим образом: $(y,g)\tilde{T}^n=(yT^n, gf(y,T^n))$. Пусть $p: Y\times G\to Y$ – проекция. По функции $F_c p: Y\times G\to \mathbb{R}^+$ и по автоморфизму $\tilde{T}$ построим специальный поток $(\tilde{X},\tilde{\mu},\mathbb{R})$. С другой стороны, мы можем построить действие группы $\mathbb{R}$ в пространстве $X\times G$ с помощью коцикла $\alpha: [(y,u),g]t=[(y,u)t, g\alpha[(y,u),t]]$. Пространства $\tilde{X}$ и $X\times G$ изоморфные и изоморфизм задается отображением $\psi(y,gu)=(y,u,g)$. Нетрудно видеть, что действия группы $\mathbb{R}$ в пространствах $\tilde{X}$ и $X\times G$ также изоморфны. Это означает, что действие $\mathbb{R}$ в $X\times G$, определяемое коциклом $\alpha$, является эргодическим тогда и только тогда, когда действует эргодически автоморфизм $\tilde{T}$. Лемма доказана.

Следствие 4.3. Любая нильпотентная сепарабельная локально-компактная группа является образом некоторого коцикла любого эргодического потока.


1. Mackey G.W. Ergodic theory and virtual groups.-Math. Ann. 1966, 166, p. 187-207.
2. Zimmer R.I. Random walks on compact groups and the existense of cocycles.- Israel J. Math.1977, 26, p. 84-90.
3. Zimmer R.I. Cocycles and the structure of ergodic group action. Israel J.Math. 1977, 26, p. 214-220.
4. Рохлин В.А. Избранные вопросы метрической теории динамической систем, Успехи мат. наук. 1949, 4, № 2, с. 57-128.
5. Голодец В.Я. Описание представлений антикоммутационных соотношений, - Успехи мат. наук, 1969, 24, № 4, с. 3-64.
6. Krieger W. On Ergodic Flows and the Isomorphism of Factors.- Math.Ann. 1976, 223, p. 19-70.


УДК 517.9

Р.Н.Давыдов

## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ С ПОТЕНЦИАЛОМ, МЕДЛЕННО УБЫВАЮЩИМ НА ОДНОМ КОНЦЕ ОСИ

1. Обозначим через $\mathfrak{M}(a,b)$ $(-\infty\le a<b\le\infty)$ множество вещественных функций $f(x)$, удовлетворяющих при всех $l\ge 1$ условию

$$(1+|x|^l)|f(x)|^2\in L(a,b).$$

Рассмотрим уравнение Штурма – Лиувилля на оси:

$$L[y]=-y''(x)+q(x)y(x)=z^2y(x),\ -\infty<x<\infty \tag{1}$$

с потенциалом вида $q(x) = p(x) + p_n(x)$ $(n = 1, 2, 3 \dots)$,
где

$$p(x) \in \mathfrak{M}^2(-\infty, \infty), p_n(x) = \begin{cases} 0, & x > -1, \\ n(n+1)x^{-2}, & x \le -1. \end{cases} \tag{2}$$

Введем специальные решения $e^{\pm}(z,x)$ уравнения (1)), определяемые асимптотиками:

$$\lim_{x \to \infty} e^{+}(z,x)e^{-izx} = \lim_{x \to -\infty} e^{-}(z,x)e^{-izx} = 1 . \tag{3}$$

Эти решения допускают представления через операторы преобразования [1, 2]:

$$e^{+}(z,x) = e^{izx} + \int_x^{\infty} K^{+}(x,t)e^{izt}dt, \quad Im z \ge 0; \tag{4}$$

$$e^{-}(z,x) = \tilde{e}^{-}(z,x) + \int_{-\infty}^{x} K^{-}(x,t)\tilde{e}^{-}(z,t)dt, Im z \le 0. \tag{5}$$

Здесь $\tilde{e}^{\pm}(z,x)$ – решения уравнения (1) с $p(x) \equiv 0$, определяемые равенствами (3). Ядра операторов преобразования дифференцируемы по обеим переменным и при всех значениях параметра $x_1$

$$K^{+}(x_1, x_2) \in \mathfrak{M}^2(x_1, \infty), \frac{\partial}{\partial x_k} K^{+}(x_1, x_2) \in \mathfrak{M}^2(x_1, \infty);$$
$$K^{-}(x_1, x_2) \in \mathfrak{M}^2(-\infty, x_1), \partial/\partial x_k K^{-}(x_1, x_2) \in \mathfrak{M}^2(-\infty, x_1).$$

При всех $\lambda \ne 0$ пары функций $e^{+}(\lambda,x), e^{+}(-\lambda,x)$ и $e^{-}(\lambda,x)$, $e^{-}(-\lambda,x)$ образуют фундаментальные системы решений уравнения (1). Значит

$$e^{+}(\lambda,x) = a(\lambda)e^{-}(\lambda,x) + b(\lambda)e^{-}(-\lambda,x); \tag{6}$$

$$e^{-}(-\lambda,x) = a(\lambda)e^{+}(-\lambda,x) - b(-\lambda)e^{+}(\lambda,x); \tag{7}$$

$$2i\lambda a(\lambda) = W[e^{-}(-\lambda,x), e^{+}(\lambda,x)]; \tag{8}$$

$$2i\lambda b(\lambda) = W[e^{+}(\lambda,x), e^{-}(\lambda,x)]. \tag{9}$$

Здесь $W[f,g] = f'_x g - f g'_x$. Матрица $S(\lambda) = \| s_{ij}(\lambda) \|_{i,j=1,2}$,
где $s_{11}(\lambda) = s_{22}(\lambda) = a(\lambda)^{-1}$; $s_{12}(\lambda) = b(\lambda)a(\lambda)^{-1}$; $s_{21}(\lambda) = -b(-\lambda)a(\lambda)^{-1}$,
называется $S$ – матрицей уравнения (1).

Данная работа посвящена выводу необходимых и достаточных условий, которым должна удовлетворять матрица $S(\lambda)$, чтобы она была $S$-матрицей уравнения (1) с потенциалом вида (2).

Для простоты выкладок предполагаем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|^l)|p(x)|^2 dx < \infty$$

для всех $l$ = I, 2, 3, ..., поскольку можно было бы ограничиться некоторым конечным $l$.

Случай $n = 0$ был рассмотрен Л.Д.Фаддеевым /3, 4/ в предложении $(1+|x|)p(x)\in L(-\infty,\infty)$.

Предлагаемый метод может быть применен к исследованию обратной задачи рассеяния для уравнения (I) с потенциалом, медленно убывающим на обоих концах оси:

$$\int_{-\infty}^{-1}\left|q(x)-\frac{n(n+1)}{x^2}\right|^2|x|^l dx+\int_{-1}^{1}|q(x)|^2 dx+\int_{1}^{\infty}\left|q(x)-\frac{m(m+1)}{x^2}\right|^2|x|^l dx < \infty,$$

что будет сделано в следующей статье. Случай $n=m=$ I рассмотрен в предыдущей работе автора /5/.

2. Свойства $S$ -матрицы. В дальнейшем будем предполагать, что у оператора $L$ отсутствует дискретный спектр, что не ограничивает общности, так как произвольный случай может быть приведен к этому с помощью преобразований Крума /6/.

Лемма I. Функции $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ имеют вид

$$a(\lambda)=1+\sum_{k=1}^{n+1}\lambda^{-k}\left(\alpha_k+\int_0^{\infty}A_k(t)e^{i\lambda t}dt\right); \tag{10}$$

$$b(\lambda)=\sum_{k=2}^{n+1}\beta_k\lambda^{-k}+\sum_{k=1}^{n+1}\lambda^{-k}\int_{-\infty}^{\infty}B_k(t)e^{i\lambda t}dt\ , \tag{11}$$

где $A_k(t)\in\mathfrak{M}^2(0,\infty)$, $B_k(t)\in\mathfrak{M}^2(-\infty,\infty)$.

Утверждение леммы проверяется подстановкой представлений (4), (5) в равенства (8), (9). Функция $a(\lambda)$ допускает аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость, где она, в предположении отсутствия дискретного спектра у оператора $L$, не имеет нулей. Следовательно, функция $s_{11}(\lambda)$ тоже может быть продолжена аналитически в верхнюю полуплоскость, где она также нигде не обращается в нуль, причем $s_{11}(z)=1+O(z^{-1})$, когда $|z|\to\infty$.

Из определения функций $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ (6), (7) вытекает справедливость соотношений

$$\overline{a(\lambda)}=a(-\lambda),\ \overline{b(\lambda)}=b(-\lambda),\ 1=|a(\lambda)|^2-|b(\lambda)|^2, \tag{12}$$

значит $S$ -матрица унитарна, а $|s_{12}(\lambda)|=|s_{21}(\lambda)|<$I при всех $\lambda\neq 0$.

Остается пока неясным как ведет себя $S$ -матрица в нуле. Позже мы увидим насколько важно изучение этого вопроса, поскольку именно здесь определится характер зависимости $S$-матрицы от типа убывания потенциала (числа $n$ в формуле (2)).

При $x < -1$ функция $\tilde{e}^-(z,x)$ совпадает с функцией Ханкеля - Риккати первого рода $h_n(zx)$:

$$h_n(z)=\sqrt{\frac{\pi z}{2}}\, i^{n+1} H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(z)=e^{iz}\sum_{k=0}^{n}(-2iz)^{-k}\frac{(n+k)!}{k!(n-k)!}.$$

Лемма 2. В разложении целой функции $\theta_n(z)=z^n h_n(z)$ в ряд Тэйлора в окрестности нуля отсутствуют члены нечетного порядка до степени $2n-1$ включительно.

Доказательство проводится по индукции, основываясь на рекуррентной формуле

$$\theta_{n+1}(z)=i(2n+1)\theta_n(z)-iz\theta_n'(z).$$

В силу леммы I функции $a_1(\lambda)=2i\lambda^{n+1}a(\lambda)$ и $b_1(\lambda)=2i\lambda^{n+1}b(\lambda)$ бесконечно дифференцируемы. В дальнейшем рассмотрение иногда будет разветвляться на два варианта А) и Б) в зависимости от значения функции $a_1(\lambda)$ в нуле:

А) $a_1(0)\neq 0$; ; Б) $a_1(0)=0$.

Лемма 3. Элементы $S$-матрицы являются бесконечно дифференцируемыми функциями; функции $\lambda s_{12}^{(p)}(\lambda)$, $\lambda s_{21}^{(p)}(\lambda)$ ($p$ = 0, I, 2 ...) суммируемы с квадратами на оси. При $\lambda\to 0$

$$s_{12}(\lambda)=(-1)^{n+1}+\lambda^{2n}(\sigma_0^-+\sigma_1^-\lambda+\sigma_2^-\lambda^2+o(\lambda^2)), \qquad (13)$$

причем в случае А) $\sigma_0^-=0$, $\sigma_2^-\neq 0$;

$$s_{21}(0)=-1,\ s_{11}(\lambda)=\lambda^{n+1}(\sigma_1+o(1)),\ |\sigma_1|^2=(-1)^n 2\sigma_2^-; \qquad (14)$$

в случае Б) $\sigma_0^-\neq 0$;

$$s_{21}(0)=1,\ s_{11}(\lambda)=\lambda^n(\sigma_0+o(1)),\ |\sigma_0|^2=(-1)^n 2\sigma_0^-. \qquad (15)$$

Из условия $|a(\lambda)|\geq 1$ $(\lambda\neq 0)$ и леммы I сразу следует бесконечная дифференцируемость функций $s_{ij}(\lambda)$ всюду, за исключением точки $\lambda$ = 0. Кроме того, из представлений (10), (11) вытекает суммируемость с квадратом функций $\lambda s_{12}^{(p)}(\lambda)$ и $\lambda s_{21}^{(p)}(\lambda)$ на множестве $|\lambda|\geq a>0$.

Функция $e_1^-(z,x)=z^n e^-(z,x)$ аналитична в верхней полуплоскости, непрерывна вплоть до границы и в силу леммы 2 при всех $x<-1$

$$e_1^-(\lambda,x)=\sum_{k=0}^{n}e_{2k}(x)\lambda^{2k}+o(\lambda^{2n}),\ \lambda\to 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial x}e_1^-(\lambda,x)=\sum_{k=0}^{n}e_{2k}'(x)\lambda^{2k}+o(\lambda^{2n}),\ \lambda\to 0.$$

Отсюда

$$b_1(\lambda)=2i\lambda^{n+1}b(\lambda)=(-1)^{n+1}a_1(\lambda)+o(\lambda^{2n}),\ \lambda\to 0. \qquad (16)$$

Если $a_1(0)\neq 0$ , то $a_1(\lambda)^{-1}\in C^\infty$, $s_{11}(\lambda)=2i\lambda^{n+1}a_1(\lambda)^{-1}\in C^\infty$, $s_{12}(\lambda)=b_1(\lambda)a_1(\lambda)^{-1}\in C^\infty$ и при $\lambda\to 0$ выполняются асимптотические равенства (13), (14). Если же $a_1(0)=0$ , то

$$W[e_1^-(0,x),\ e^+(0,x)] = 0,$$

т.е. линейно зависимы решения $e_1^-(0,x)$, $e^+(0,x)$ уравнения $L[y]=0$. Эти решения имеют такие асимптотики:

$$e^+(0,x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 1, \quad e_1^-(0,x) \underset{x\to-\infty}{\sim} cx^{-n}.$$

Следовательно, решение того же уравнения $\dot{e}^+(0,x) = \frac{\partial}{\partial\lambda} e^+(\lambda,x)\Big|_{\lambda=0}$ линейно независимо с решением $e_1^-(0,x)$, поскольку при $x\to+\infty$ $\dot{e}^+(0,x) = ix(1+o(1))$. Значит

$$\dot{a}_1(0) = \frac{d}{d\lambda} a_1(\lambda)\Big|_{\lambda=0},$$

т.е. функция $[\lambda^n a(\lambda)]^{-1}$ всюду бесконечно дифференцируема.

Справедливость асимптотик (13), (15) и дифференцируемость $S$-матрицы вытекает теперь из равенства (16).

Таким образом, $S$-матрица уравнения (1) с вещественным потенциалом вида (2) должна обладать следующими свойствами:

I. Матрица $S(\lambda)$ унитарна $(S^*(\lambda)S(\lambda)=E)$;

$$s_{11}(\lambda) = s_{22}(\lambda); \quad \overline{s_{ij}(\lambda)} = s_{ij}(-\lambda).$$

II. Элементы матрицы $S(\lambda)$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями.

III. Функции $\lambda s_{12}^{(p)}(\lambda)$; $\lambda s_{21}^{(p)}(\lambda)$ при всех $p = 0, 1, 2 \ldots$ суммируемы с квадратами на оси. При $\lambda\neq 0$ $|s_{12}(\lambda)| = |s_{21}(\lambda)| < 1$.

IV. Функция $s_{11}(\lambda)$ продолжается аналитически в верхнюю полуплоскость, где она нигде не обращается в нуль*, при $|z|\to\infty$

$$s_{11}(z) = 1 + O(z^{-1}); \quad Im\, z \geq 0.$$

V. При $\lambda\to 0$

$$s_{12}(\lambda) = (-1)^{n+1} + \lambda^{2n}(\sigma_0^- + \sigma_1^-\lambda + \sigma_2^-\lambda^2 + o(\lambda^2)),$$

где

$$|\sigma_0^-| + |\sigma_2^-| \neq 0.$$

3. Интегральные уравнения для ядер операторов преобразования $K^+(x,y)$, $K^-(x,y)$. Обозначим через $\tilde{s}_{ij}(\lambda)$ элементы $S$-матрицы, а через $\tilde{e}^{\pm}(\lambda,x)$ – специальные решения уравнения (1) с потенциалом $q(x) \equiv p_n(x)$. Эти функции выписываются конечно в явном виде. Предположим, что о матрице $S(\lambda)$ *a priori* известно, что она является $S$-матрицей некоторого уравнения (1) с потенциалом вида (2). Стандартными методами (см., например [3, 4]) можно показать, что ядра операторов преобразования (4) (5) $K^+(x,y)$, $K^-(x,y)$ удовлетворяют уравнениям Марченко соответственно

---

* Напомним, что мы рассматриваем операторы $L$, не имеющие дискретного спектра.

$$K^+(x,y)+R^+(x,y)+\int_x^\infty K^+(x,t)R^+(t+y)dt=0,\ x<y; \qquad (17)$$

$$K^-(x,y)+R^-(x,y)+\int_{-\infty}^x K^-(x,t)R^-(t,y)dt=0,\ x>y, \qquad (18)$$

где

$$R^+(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty s_{21}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda; \qquad (19)$$

$$R^-(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty [s_{12}(\lambda)-\tilde{s}_{12}(\lambda)]\,\hat{e}^-(-\lambda,x)\,\hat{e}^-(-\lambda,y)\,d\lambda. \qquad (20)$$

Уравнение (17) хорошо изучено в [3,4]. После аналогичных исследований приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. Если бесконечно дифференцируемая на оси функция $r^+(\lambda)$ обладает следующими свойствами:

а) $r^+(\lambda)=r^+(-\lambda)$;

б) $|r^+(\lambda)|<1 \quad (\lambda\neq 0)$;

в) функции $\lambda\frac{d^p}{d\lambda^p}r^+(\lambda)$ при всех $p$ суммируемы с квадратами на оси, то уравнение (17), где

$$R^+(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty r^+(\lambda)\,e^{i\lambda x}d\lambda$$

имеет единственное вещественное решение $K^+(x,y)\in\mathfrak{M}(x,\infty)$.
Функция

$$e^+(\lambda,x)=e^{i\lambda x}+\int_x^\infty K^+(x,t)\,e^{i\lambda t}dt$$

удовлетворяет уравнению

$$-y''(x)+q^+(x)y(x)=\lambda^2y(x),\ -\infty<x<\infty,$$

где при всех $a>-\infty$

$$q^+(x)=-2\frac{d}{dx}K^+(x,x)\in\mathfrak{M}^\rho(a,\infty).$$

Таким образом, по известному элементу $s_{21}(\lambda)$ $S$-матрицы (правому коэффициенту отражения) задачи (1), (2) можно восстановить, решая уравнение (17), потенциал $q(x)$. Однако, если о функции $s_{21}(\lambda)$, удовлетворяющей условиям леммы 4, не известно наверное, что она является правым коэффициентом отражения задачи (1), (2), то сделать какие-нибудь выводы о поведении потенциала $q^+(x)$ при $x\to-\infty$, исследуя уравнение (17), представляется затруднительным. Поэтому мы и займемся исследованием уравнения (20).

Лемма 4. Если бесконечно дифференцируемая на оси функция обладает следующими свойствами:

а) $r^-(\lambda)=r^-(-\lambda)$;

б) функции $\lambda\frac{d^p}{d\lambda^p}r^-(\lambda)$ при всех $p$ суммируемы с квадратами на оси;

в) $\lim\limits_{\lambda\to 0} \lambda^{-2n+1}[r^-(\lambda)+(-1)^n]=0,$

то вещественная функция

$$R^-(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[r^-(\lambda)-\tilde{s}_{12}(\lambda)]\tilde{e}^-(-\lambda,y)\tilde{e}^-(-\lambda,x)d\lambda \tag{21}$$

при $x\le -1,\ y\le -1$ имеет вид

$$R^-(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} x^{-l}y^{-k}R_{kl}(x+y), \tag{22}$$

причем функции $R_{kl}(t)$ абсолютно непрерывны и

$$R_{kl}(t)\in \mathfrak{M}^2(-\infty,\infty),\ R_{kl}'(t)\in \mathfrak{M}^2(-\infty,\infty).$$

Утверждение леммы нетрудно проверить, подставляя в (21) явное выражение функции $\tilde{e}^-(\lambda,x)$:

$$\tilde{e}^-(\lambda,x)=\begin{cases} h_n(\lambda x), & x\le -1,\\ \dfrac{e^{-i\lambda(x+1)}}{2}[h_n(\lambda)-ih_n'(\lambda)]+\\ +\dfrac{e^{i\lambda(x+1)}}{2}[h_n(\lambda)+ih_n'(\lambda)], & x>-1\end{cases} \tag{23}$$

и используя лемму 2.

Теорема 2. Пусть функция $r^-(\lambda)$ удовлетворяет условиям леммы 4. Тогда существует такое $x_0<0$, что для всех $x<x_0$ уравнение (18), в котором функция $R^-(x,y)$ определена по формуле (21), имеет единственное вещественное решение $K^-(x,y)\in \mathfrak{M}^2(-\infty,x)$ а функция

$$e^-(\lambda,x)=\tilde{e}^-(\lambda,x)+\int\limits_{-\infty}^{x}K^-(x,t)\tilde{e}^-(\lambda,t)dt$$

удовлетворяет уравнению

$$-y''(x)+q^-(x)y(x)=\lambda^2y(x),\quad x<x_0,$$

где $q^-(x)=p(x)+p_n(x)$, причем $p(x)=2\frac{d}{dx}K^-(x,x)\in\mathfrak{M}^2(-\infty,x_0)$.

Из дальнейшего изложения станет ясно, что нет необходимости исследовать уравнение (18) при всех $x$, поэтому мы ограничились интервалом $(-\infty,x_0)$. Это ограничение значительно упрощает рассмотрение, так как семейство операторов $\Phi_x$, где

$$\Phi_x[f]=\int\limits_{-\infty}^{x}R^-(t,y)f(t)dt,$$

равномерно по $x\le x_0$ убывает по норме, когда $x_0\to-\infty$ как в пространстве $L^2(-\infty,x_0)$, так и в пространстве $L^1(-\infty,x_0)$. Поэтому оператор $I+\Phi_x$ обратим начиная с некоторого $x_0$.

Далее доказательство проводится, в общем, традиционно (см., например [2], § 5, с. 212–224) и использует оценки

$$|R^-(x_1,x_2)| \le \tau_1(x_1+x_2),\ \left|\frac{\partial}{\partial x_k} R^-(x_1,x_2)\right| \le \tau_2(x_1+x_2),$$

где $\tau_1(t) \in \mathfrak{M}^2(-\infty,x_0)$, $\tau_2(t) \in \mathfrak{M}^2(-\infty,x_0)$. Эти неравенства являются прямым следствием формулы (22).

4. Обратная задача. Предположим теперь, что нам задана матрица $S(\lambda)$, причем функции $s_{12}(\lambda)$ и $s_{21}(\lambda)$ удовлетворяют условиям соответственно теоремы I и теоремы 2. Совершенно очевидно, что этих условий недостаточно для того, чтобы матрица $S(\lambda)$ была $S$-матрицей некоторого уравнения (I), (2). Как мы видели в п. 2 элементы $S$-матрицы должны быть специальным образом согласованы между собой (условия I-У). Возникает вопрос, достаточно ли этих условий ?

Теорема 3. Для того, чтобы матрица $S(\lambda)$ была бы $S$-матрицей некоторого уравнения (I) с вещественным потенциалом вида (2), необходимо и достаточно выполнения условий I – У.

Замечание. Связь между элементами $S$-матрицы вообще такова, что вся матрица определяется заданием одного из коэффициентов отражения $s_{12}(\lambda)$ или $s_{21}(\lambda)$. Поэтому теорему 3 можно было бы сформулировать в виде условий, например, на $s_{12}(\lambda)$, как это сделано в аналогичной теореме в [4]. Однако приведенная формулировка представляется нам более наглядной.

Для доказательства теоремы, решая уравнения (I7) и (I8), в которых функции $R^+(x)$ и $R^-(x,y)$ определены по формулам соответственно (I9) и (20), найдем ядра операторов преобразования $K^+(x,y)$ и $K^-(x,y)$, а затем и решения $e^+(\lambda,x)$ и $e^-(\lambda,x)$. Отметим, что функция $e^+(\lambda,x)$ и потенциал $q^+(x) = -2\frac{d}{dx}K^+(x,x)$ определены при всех $x$, а функция $e^-(\lambda,x)$ и потенциал $q^-(x)$ только при $x<x_0$. Поставленная задача была бы решена, если бы мы установили, что условия I – У обеспечивают при $x<x_0$ выполнение равенств

$$s_{12}(\lambda)e^-(-\lambda,x) + e^-(\lambda,x) = s_{11}(\lambda)e^+(\lambda,x); \tag{24}$$

$$s_{21}(\lambda)e^+(\lambda,x) + e^+(-\lambda,x) = s_{11}(\lambda)e^-(-\lambda,x), \tag{25}$$

откуда сразу следует, что $q^+(x) = q^-(x)$ при $x<x_0$, т.е. $q^+(x)$ имеет вид (2), а равенства (24), (25) представляют собой формулы рассеяния для уравнения Штурма-Лиувилля с потенциалом $q(x) = q^+(x)$.

Прежде чем непосредственно приступить к реализации изложенной схемы, установим один факт, который понадобится нам в дальнейшем.

Лемма 5. Если $f(x) \in \mathfrak{M}^2(-\infty,\infty)$ и имеет вид*

$$f(x) = \underset{N\to\infty}{l.i.m.}\ \frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N} F(\lambda)\tilde{e}^-(-\lambda,x)\tilde{s}_{11}(\lambda)\,d\lambda, \tag{26}$$

---

* Выражение в правой части равенства (26) имеет смысл для любых $F(\lambda) \in L^2(-\infty,\infty)$.

то
$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\tilde{e}^{+}(\lambda,x)\,dx.$$

Доказательство. Обозначим

$$u^{-}(\lambda,f)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\tilde{e}^{-}(-\lambda,x)s_{11}(\lambda)dx; \qquad u^{+}(\lambda,f)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\tilde{e}^{+}(\lambda,x)\,dx.$$

Интегралы в последних двух равенствах сходятся абсолютно для каждой $f(x)\in\mathfrak{M}^2(-\infty,\infty)$ и функции $u^{\pm}(\lambda,f)$ принадлежат $L^2(-\infty,\infty)$.

Действуя аналогично [4], можно показать, что для всех $f(x)\in\mathfrak{M}^2(-\infty,\infty)$ справедлива формула обращения

$$f(x)=\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N} u^{+}(\lambda,f)\tilde{e}^{-}(-\lambda,x)\tilde{s}_{11}(\lambda)d\lambda. \tag{27}$$

Вычитая из (26) (27) и обозначая $G(\lambda)=F(\lambda)-u^{+}(\lambda,f)$, находим, что

$$\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{-N}^{N} G(\lambda)\tilde{e}^{-}(-\lambda,x)\tilde{s}_{11}(\lambda)d\lambda=0. \tag{28}$$

Умножая (28) на произвольную финитную функцию $h(x)$ ($h(x)=0$, когда $|x|>A$), и интегрируя по $x$, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(\lambda)u^{-}(\lambda,h)d\lambda=0.$$

Покажем, что множество функций $u^{-}(\lambda,h)$, построенных по финитным $h(x)$, плотно в $L^2(-\infty,\infty)$. В самом деле

$$u^{-}(\lambda,h)=\int_{-A}^{A} h(x)[\tilde{s}_{21}(\lambda)\tilde{e}^{+}(\lambda,x)+\tilde{e}^{+}(-\lambda,x)]dx=\int_{-A}^{\infty} h^{*}(x)[e^{-i\lambda x}+$$

$$+\tilde{s}_{21}(\lambda)e^{i\lambda x}]dx=\tilde{h}^{*}(-\lambda)+\tilde{s}_{21}(\lambda)h^{*}(\lambda),$$

где
$$h^{*}(x)=\int_{-A}^{x}\tilde{K}^{+}(t,x)h(t)dt+h(x).$$

Множество всех функций вида $h^{*}(x)$ плотно в $L^2(-\infty,\infty)$. Пусть $f(x)=0$, при $x<-A$, $f(x)\in L^2(-A,\infty)$.

Рассмотрим уравнение
$$f(x)=h(x)+\int_{-A}^{\infty}\tilde{K}^{+}(t,x)h(t)dt$$
в пространстве $L^2(-A,\infty)$. Оно имеет единственное решение $h(x)\in L^2(-A,\infty)$. Выберем последовательность финитных функций $\{h_k(x)\}_1^{\infty}$, аппроксимирующую $h(x)$. Последовательность $\{h_k^{*}(x)\}_1^{\infty}$ аппроксимирует функцию $f(x)$, а поскольку $A$ – произвольное число, то отсюда следует, что такими функциями можно аппроксимировать любую $f(x)\in L^2(-\infty,\infty)$.

Далее, множество преобразований Фурье всех функций из плотного множества тоже плотно. Наконец, несложно убедиться, что любую функцию $H_0(\lambda)$ равную нулю в некоторой окрестности точки $\lambda=0$, можно представить в виде $H_0(\lambda)=F(\lambda)\tilde{s}_{21}(\lambda)+F(-\lambda)$, положив

$$F(\lambda)=|\tilde{s}_{11}(\lambda)|^{-2}[H_0(-\lambda)-\tilde{s}_{21}(-\lambda)H_0(\lambda)].$$

Таким образом, множество функций $u^-(\lambda,h)$ плотно в $L^2(-\infty,\infty)$, следовательно $G(\lambda)=0$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь функцию

$$F^-(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[s_{12}(\lambda)-\tilde{s}_{12}(\lambda)-\frac{\sigma_0^- \lambda^{2n}}{(1-i\lambda)^{2n+2}}]\tilde{e}^-(-\lambda,x)\tilde{e}^-(-\lambda,y)d\lambda .$$

Подставляя в это определение явное выражение функции $\tilde{e}^-(-\lambda,x)$ (23), найдем, что $F^-(x,y)=R^-(x,y)$ при $x\le -1$ и $y\le -1$, поскольку в этом случае

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda^{2n}}{(1-i\lambda)^{2n+2}}\tilde{e}^-(-\lambda,x)\tilde{e}^-(-\lambda,y)d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{x,y}(\lambda)e^{-i\lambda(x+y)}d\lambda, \tag{29}$$

где функция $\varphi_{x,y}(\lambda)$ регулярна в верхней полуплоскости, непрерывна на вещественной оси и $\varphi_{x,y}(z)=O(|z|^{-2})$, когда $|z|\to\infty$. Следовательно, интеграл в правой части (26) по лемме Жордана равен нулю.

Если же $x\le -1$, $y>-1$, то функцию $F^-(x,y)$ можно представить в виде

$$F^-(x,y)=\sum_{k=0}^{n}x^{-k}\int_{-\infty}^{\infty}[r_{1k}(\lambda)e^{-i\lambda(x+y)}+r_{2k}e^{-i\lambda(x+y)}]d\lambda,$$

где $r_{ik}(\lambda)$ – бесконечно дифференцируемые функции, причем $\lambda r_{ik}^{(p)}(\lambda)\in L^2(-\infty,\infty)$ при всех $p$.

Значит, при всех значениях параметра $x\le -1$ $F^-(x,y)\in\mathfrak{M}^2(-\infty,\infty)$, следовательно и функция

$$\Psi^-(x,y)=F^-(x,y)+\int_{-\infty}^{x}K^-(x,t)F^-(t,y)dt$$

тоже принадлежит множеству.

В силу леммы 5

$$\underset{N\to\infty}{l.i.m.}\int_{-N}^{N}F^-(x,y)\tilde{e}^+(\lambda,y)dy=\tilde{s}_{11}(\lambda)^{-1}[s_{12}(\lambda)-\tilde{s}_{12}(\lambda)-\frac{\sigma_0^-\lambda^{2n}}{(1-i\lambda)^{2n+2}}]\tilde{e}^-(-\lambda,x).$$

Поэтому

$$\underset{N\to\infty}{l.i.m.}\int_{-N}^{N}\Psi^-(x,y)\tilde{e}^+(\lambda,y)dy=\tilde{s}_{11}(\lambda)^{-1}[s_{12}(\lambda)-\tilde{s}_{12}(\lambda)-\frac{\sigma_0^-\lambda^{2n}}{(1-i\lambda)^{2n+2}}][\tilde{e}^-(-\lambda,x)+\int_{-\infty}^{x}K^-(x,t)\times$$

$$\times\tilde{e}^-(-\lambda,t)dt]=\tilde{s}_{11}(\lambda)^{-1}[s_{12}(\lambda)-\tilde{s}_{12}(\lambda)-\frac{\sigma_0^-\lambda^{2n}}{(1-i\lambda)^{2n+2}}]e^-(-\lambda,x) .$$

С другой стороны, $\Psi^-(x,y)=-K^-(x,y)$ при $y<x<x_0$, значит

$$\underset{N\to\infty}{l.i.m.}\int_{-N}^{N}\Psi^-(x,y)\tilde{e}^+(\lambda,y)dy=\underset{N\to\infty}{l.i.m.}\{\int_{x}^{N}\Psi^-(x,y)\tilde{e}^+(\lambda,y)dy-$$

$$-\int_{-N}^{x} K^-(x,y)\tilde{s}_{11}(\lambda)^{-1}[\tilde{e}^-(\lambda,y)+\tilde{s}_{12}(\lambda)\tilde{e}^-(-\lambda,y)dy\}=$$

$$=\underset{N\to\infty}{l.i.m.}\int_{x}^{N}\psi^-(x,y)\tilde{e}^+(\lambda,y)dy+\tilde{e}^+(\lambda,x)-\tilde{s}_{11}(\lambda)^{-1}[e^-(\lambda,x)+\tilde{s}_{12}(\lambda)e^-(-\lambda,x)].$$

Приравнивая правые части последних двух равенств, получим

$$s_{12}(\lambda)e^-(-\lambda,x)+e^-(\lambda,x)=s_{11}(\lambda)f^+(\lambda,x), \tag{30}$$

где

$$f^+(\lambda,x)=\frac{\sigma_0^-\lambda^{2n}}{(1-i\lambda)^{2n+2}s_{11}(\lambda)}e^-(-\lambda,x)+$$

$$+\frac{\tilde{s}_{11}(\lambda)}{s_{11}(\lambda)}[\tilde{e}^+(\lambda,x)+\underset{N\to\infty}{l.i.m.}\int_{x}^{N}\psi^-(x,y)\tilde{e}^+(\lambda,y)\,dy]. \tag{31}$$

Проводя аналогичные рассмотрения для правой полуоси, найдем, что

$$s_{21}(\lambda)e^+(\lambda,x)+e^+(-\lambda,x)=s_{11}(\lambda)f^-(-\lambda,x), \tag{32}$$

где

$$f^-(-\lambda,x)=s_{11}(\lambda)^{-1}[e^{-i\lambda x}+\underset{N\to\infty}{l.i.m.}\int_{-N}^{x}\psi^+(x,y)e^{-i\lambda y}dy], \tag{33}$$

а функция $\psi^+(x,y)\in L^2(-\infty,\infty)$ по переменной $y$ при всех значениях параметра $x$.

Функции $f^+(\lambda,x), f^-(-\lambda,x)$ в силу определений (31), (33) и формул (30), (32) продолжаются аналитически в верхнюю полуплоскость, где они обладают следующими свойствами:

$$\overline{f^+(z,x)}=f^+(-\bar{z},x),\quad \overline{f^-(-z,x)}=f^-(\bar{z},x), \tag{34}$$

$$W[e^+(z,x),f^-(-z,x)]=W[f^+(z,x),e^-(-z,x)]=2izs_{11}(z)^{-1};$$

$$\lim_{|z|\to\infty}e^{izx}f^-(-z,x)=\lim_{|z|\to\infty}e^{-izx}f^+(z,x)=1. \tag{35}$$

Подставим в (30) $\lambda_1=-\lambda$. Рассматривая полученное равенство совместно с (30) как систему уравнений относительно $e^-(\pm\lambda,x)$, найдем

$$s_{11}(\lambda)e^-(-\lambda,x)=f^+(-\lambda,x)+s_{21}(\lambda)f^+(\lambda,x). \tag{36}$$

Исключая теперь из (32) и (36) функцию $s_{21}(\lambda)$, получим равенство

$$s_{11}(\lambda)[f^-(-\lambda,x)f^+(\lambda,x)-e^-(-\lambda,x)e^+(\lambda,x)]=$$

$$= e^+(-\lambda,x)f^+(\lambda,x) - f^+(-\lambda,x)e^+(\lambda,x). \tag{37}$$

Обозначим через $g(z)$ аналитическую в верхней полуплоскости функцию

$$g(z) = s_{11}(z)[f^-(-z,x)f^+(z,x) - e^-(-z,x)e^+(z,x)].$$

Из равенства (37) следует, что на вещественной оси $-g(\lambda) = g(-\lambda)$, поэтому ее можно продолжить до функции $g_1(z)$ аналитической во всей плоскости (за исключением точки $z=0$, где она может иметь полюс), положив

$$g_1(z) = \begin{cases} g(z), & Im\, z \geq 0; \\ -g(-z), & Im\, z < 0. \end{cases}$$

Однако, в силу условия У и формул (31), (33) функции $f^+(z,x)$ и $s_{11}(z)f^-(-z,x)$ непрерывны вплоть до вещественной прямой (напомним, что в случае А) $\sigma_0^- = 0$ ), также как и функции $e^+(z,x)\, s_{11}(z)e^-(-z,x)$. Поэтому $g_1(z)$ имеет устранимую особенность в точке $z=0$, а поскольку в силу равенств (35), $\lim\limits_{|z|\to\infty} g(z)=0$, то по теореме Лиувилля $g_1(z)\equiv 0$. Следовательно,

$$e^+(-\lambda,x)f^+(\lambda,x) \equiv f^+(-\lambda,x)e^+(\lambda,x). \tag{38}$$

Рассмотрим теперь аналитическую в верхней полуплоскости функцию $h(z)=f^+(z,x)[e^+(z,x)]^{-1}$. Учитывая равенство (38), ее можно продолжить четным образом в нижнюю полуплоскость до функции $h_1(z)$, аналитической во всей плоскости за исключением быть может точек, в которых $e^+(z,x)=0$. Предположим вначале, что $z\neq 0,\ Im\, z > 0$ и $e^+(z,x)=0$. Из определения функции $g(z)$ следует, что $f^-(-z,x)f^+(z,x)=0$, но в силу (34) $f^-(-z,x) \neq 0$. Значит $f^+(z,x)=0$, а поскольку нули $e^+(z,x)$ – простые, то для всех точек $x<x_0$ (кроме может быть одной, в которой $e^+(0,x)=0$ ) функция $h_1(x)$ – целая. Учитывая (35), находим, что $h_1(z)\to 1$, когда $|z|\to\infty$, значит $h(z)\equiv 1$, т.е. $f^+(z,x)=e^+(z,x)$. По непрерывности последнее равенство распространяется на все $x$. Тем самым доказана справедливость формул рассеяния (24), (25) и завершено доказательство теоремы 3.

1. Левин Б.Я. Преобразования типа Фурье и Лапласа с помощью решений дифференциального уравнения второго порядка. – Докл. АН СССР, 1956, 106, № 2, с. 187-190.
2. Сохин А.С. Обратная задача рассеяния для уравнения с особенностью. – Математическая физика и функциональный анализ, Харьков: ФТИНТ АН УССР, 1971, вып. 2, с. 182-235.

3. Фаддеев Л.Д.Обратная задача квантовой теории рассеяния. II. – В кн.: Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ, 1974, т. 3. с. 93–180.
4. Марченко В.А. Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1977. – 230 с.
5. Давыдов Р.Н. $S$-матрица уравнения Штурма – Лиувилля с медленно убывающим потенциалом. – В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков: Вища школа, 1982, вып. 38, с. 107 – 120.
6. Crum M.M. Associated Sturm-Liouville Systems.The Quarterly Journal of Mathematics - Oxford(2),1955,6, n 2, p. 121-128.

УДК 517.54

В.К.Дубовой

# ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ЭЛЕМЕНТАРНОГО КРАТНОГО МНОЖИТЕЛЯ НЕПОЛНОГО РАНГА

В подходе, предложенном В.П.Потаповым к исследованию интерполяционных задач типа проблемы моментов, особую роль играют $J$-растягивающие элементарные множители /1– 3/. Впервые структура этих множителей была изучена в работах /4, 5/.

Напомним, что аналитическая матрица-функция $B(\xi)$ порядка $N$, имеющая в расширенной комплексной плоскости единственный полюс произвольной кратности, называется $J$-растягивающим в единичном круге $J$-элементарным кратным множителем, если она – $J$-растягивающая внутри круга и $J$-унитарна на его границе;

$$B(\xi)JB^*(\xi)-J\geq 0, \quad |\xi|<1;$$
$$B(\xi)JB^*(\xi)-J=0, \quad |\xi|=1$$

или в равной степени

$$B^*(\xi)JB(\xi)-J\geq 0, \quad |\xi|<1;$$
$$B^*(\xi)JB(\xi)-J=0, \quad |\xi|=1.$$

Здесь $J$ – постоянная, эрмитовая и инволютивная матрица порядка $N$: $J^*=J$, $J^2=I$.

Нас будет интересовать тот случай, когда в зависимости от ситуации полюс матрицы находится в точках $\xi=0$ или $\xi=\infty$. В дальнейшем $J$-элементарный кратный множитель нормируется к $I$ в точке $\xi=1$, т.е. $B(1)=I$

Заметим, что интерполяционная задача Шура приводит, например, к матрицам $J$ вида*

---

* Как и обычно единичную матрицу порядка $q$ будем обозначать $I_q$. Если порядок единичной матрицы не вызывает сомнений, индекс $q$ будем опускать даже в том случае, если в выражение входят единичные матрицы разных порядков.

$$j=\begin{bmatrix} -I_q & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}, \quad \tilde{j}=\begin{bmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix},$$

при этом представляет интерес изучение структуры $j$-элементарного множителя $B(\xi)$ с полюсом в точке $\xi=0$

$$B(\xi)=d_0+\frac{d_1}{\xi}+\ldots+\frac{d_{n+1}}{\xi^{n+1}} \qquad (1)$$

и $\tilde{j}$ элементарного кратного множителя $\tilde{B}(\xi)$ с полюсом в точке $\xi=\infty$

$$\tilde{B}(\xi)=\tilde{d}_0+\tilde{d}_1\xi+\ldots+\tilde{d}_{n+1}\xi^{n+1}. \qquad (2)$$

Из определения $J$-элементарности легко следует

$$\operatorname{rang} d_{n+1}\le p, \quad \operatorname{rang}\tilde{d}_{n+1}\le p.$$

Если в этих неравенствах имеет место знак равенства, то $B(\xi)$ и $\tilde{B}(\xi)$ называют множителями полного ранга. В работах [6], [7] дана параметризация элементарных кратных множителей $B(\xi)$ и $\tilde{B}(\xi)$ полного ранга, что позволяет установить адекватность невырожденной задачи Шура заданию этих множителей. Соответствующую теорему о параметризации для $B(\xi)$ можно сформулировать следующим образом.

Теорема. Пусть квадратная матрица $V_{p,n}$ порядка $(n+1)p$ имеет вид

$$V_{p,n}=\begin{bmatrix} 0 & & & \\ I_p & 0 & & \\ & I_p & \ddots & \\ & & \ddots & \\ & & I_p & 0 \end{bmatrix}. \qquad (3)$$

Для того, чтобы матрица-функция

$$B(\xi)=d_0+\frac{d_1}{\xi}+\ldots+\frac{d_{n+1}}{\xi^{n+1}}$$

была $j$-элементарным кратным множителем полного ранга, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление

$$B(\xi)=I+\frac{1-\xi}{\xi}j\begin{bmatrix} \Lambda_{q,n}(1) & 0 \\ 0 & \Lambda_{p,n}(1) \end{bmatrix} H \begin{bmatrix} \Lambda^*_{q,n}(\frac{1}{\xi}) & 0 \\ 0 & \Lambda^*_{p,n}(\frac{1}{\xi}) \end{bmatrix}, \qquad (4)$$

где

$$\Lambda_{p,n}(\xi)=[I_p, \xi I_p, \ldots, \xi^n I_p], \qquad (5)$$

$$H = \begin{bmatrix} C^* \\ I \end{bmatrix} (I - CC^*)^{-1} [C, I], \tag{6}$$

а матрица $C$, имеющая $(n+1)p$ строк и $(n+1)q$ столбцов, удовлетворяла условиям

$$CV_{q,n} = V_{p,n} C, \tag{7}$$

$$I - CC^* > 0. \tag{8}$$

При этом матрица $C$ определяется по $B(\xi)$ однозначно.

Отметим, что условие (7) эквивалентно тому, что $C$ допускает блочное представление

$$C = \begin{bmatrix} C_0 & & & \\ C_1 & C_0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots \\ C_n & C_{n-1} & \dots & C_0 \end{bmatrix},$$

где все матрицы $C_0, C_1, \dots, C_n$ имеют $p$ строк и $q$ столбцов.

Связь функций класса Шура с характеристическими функциями операторов сжатия в гильбертовом пространстве естественным образом приводит к необходимости исследования вырожденных задач Шура, решение которых связано с параметризацией элементарных кратных множителей $B(\xi)$ и $\tilde{B}(\xi)$ неполного ранга. Именно этой параметризации и посвящена данная работа. Приведем основной результат работы для множителя $B(\xi)$.

Теорема I. Для того, чтобы матрица-функция

$$B(\xi) = d_0 + \frac{d_1}{\xi} + \dots + \frac{d_{n+1}}{\xi^{n+1}}$$

была $j$-элементарным кратным множителем необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление

$$B(\xi) = I + \frac{1-\xi}{\xi} j \begin{bmatrix} \Lambda_{q,n}(1) & 0 \\ 0 & \Lambda_{p,n}(1) \end{bmatrix} H \begin{bmatrix} \Lambda^*_{q,n}(\frac{1}{\xi}) & 0 \\ 0 & \Lambda^*_{p,n}(\frac{1}{\xi}) \end{bmatrix}, \tag{9}$$

где $\Lambda_{p,n}(\xi)$ имеет вид (5)

$$H = \begin{bmatrix} C^* \\ P \end{bmatrix} (P - CC^*)^{-1} [C, P], \tag{10}$$

$C$ и $P$ – матрицы*, удовлетворяющие условиям

$$P^* = P, \quad P^2 = P; \tag{11}$$

$$V^*_{p,n} P = P V^*_{p,n} P; \tag{12}$$

$$C V_{q,n} = P V_{p,n} C; \tag{13}$$

$$P - CC^* \geq 0, \quad rang(P - CC^*) = rang\, P, \tag{14}$$

а матрица $V_{p,n}$ имеет вид (3). При этом матрицы $C$ и $P$ определяются по $B(\xi)$ однозначно.

Поскольку матрица $P-CC^*$ вообще говоря вырожденная, следует уточнить, что понимается под символом $(P-CC^*)^{-1}$. Для этого удобно отождествить расматриваемые матрицы с соответствующими им операторами, вводя в рассмотрение канонический базис $e_k = (\delta_{jk})^r_{j=1}$, $k = 1, 2, \ldots, r$, где $\delta_{jk}$ – известный символ Кронекера, а $r$ выбирается каждый раз в соответствии с порядком рассматриваемой матрицы. Обозначим через $\Delta_W$ и $Ker\, W$ соответственно образ и ядро преобразования $W$. Тогда в силу (14) оператор $P-CC^*$, суженный н свой образ, – невырожден. Обозначив это сужение через $K$, будем понимать под символом $(P-CC^*)^{-1}$ оператор, действующий по правилу

$$(P-CC^*)^{-1} f = \begin{cases} K^{-1} f, & f \in \Delta_{(P-CC^*)}, \\ 0, & f \in Ker(P-CC^*). \end{cases} \tag{15}$$

В силу принятой выше договоренности об отождествлении матриц и операторов в каноническом базисе можно говорить и о матрице $(P-CC^*)^{-1}$.

Остановимся на изменениях в теореме о параметризации, связанных с переходом к элементарному кратному множителю неполного ранга. Прежде всего обратим внимание на появление оператора $P$ в выражении для $H$ (сравните (6) с (10)). Из (11) следует, что $P$ – ортопроектор, при этом условие (12) означает, что допустимыми являются только ортопроекторы на коинвариантные подпространства оператора $V_{p,n}$. Очевидно, условия (13) и (14) являются обобщением (7) и (8). Заметим, что случай полного ранга характеризуется тем, что $P = I_{(n+1)p}$. В этом случае условия (11) и (12) выполняются автоматически, а (13) и (14) переходят соответственно в (7) и (8). Доказательству теоремы 1 посвящен п.1.

---

* Как и в предыдущей теореме $C$ – матрица с $(n+1)p$ строками и $(n+1)q$ столбцами; $P$ – квадратная матрица порядка $(n+1)p$.

Сформулируем основную теорему о параметризации для множителя $\tilde{B}(\xi)$.

<u>Теорема 2.</u> Для того, чтобы матрица-функция

$$\tilde{B}(\xi)=\tilde{d}_0+\tilde{d}_1\xi+\ldots+\tilde{d}_{n+1}\xi^{n+1}$$

была $\tilde{j}$-элементарным кратным множителем необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление

$$\tilde{B}(\xi)=I+(1-\xi)\begin{bmatrix}\Lambda_{p,n}(\xi) & 0\\ 0 & \Lambda_{q,n}(\xi)\end{bmatrix}\tilde{H}\begin{bmatrix}\Lambda^*_{p,n}(1) & 0\\ 0 & \Lambda^*_{q,n}(1)\end{bmatrix}\tilde{j}, \tag{16}$$

где $\Lambda_{p,n}(\xi)$ имеет вид (5)

$$\tilde{H}=\begin{bmatrix}P\\ C^*\end{bmatrix}(P-CC^*)^{-1}[P,C], \tag{17}$$

а матрицы $C$ и $P$ удовлетворяют условиям (11) – (14). При этом $C$ и $P$ определяются по $B(\xi)$ однозначно.

Здесь, как и ранее, случай полного ранга характеризуется условием $P=I_{(n+1)p}$. Доказательство теоремы 2 приведено в п. 2.

Наконец, заметим, что И.П. Федчиной изучались произведения двучленных $J$-растягивающих множителей неполного ранга, возникающие в касательной проблеме Неванлинны – Пика [8] – [10].

1. Пусть $B(\xi)$ – $j$-элементарный кратный множитель вида (1). Условие нормировки $B(1)=I$ позволяет записать $B(\xi)$ в виде

$$B(\xi)=I+\frac{1-\xi}{\xi}\Lambda_{p+q,n}(1)D\Lambda^*_{p+q,n}\left(\frac{1}{\xi}\right), \tag{18}$$

где

$$D=\begin{bmatrix}d_1 & d_2 & \ldots & d_n & d_{n+1}\\ d_2 & d_3 & \ldots & d_{n+1} & \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \\ & & & & \\ d_{n+1} & & & 0 & \end{bmatrix}, \tag{19}$$

а $\Lambda_{p,n}(\xi)$ определяется равенством (5).

Как известно из работы [6] $B(\xi)$ удовлетворяет основному матричному неравенству отщепления

$$
\begin{bmatrix} DJD^* & \frac{1}{\xi} D\Lambda^*_{p+q,n}\left(\frac{1}{\xi}\right) \\ * & \dfrac{B^*(\xi)jB(\xi)-j}{1-|\xi|^2} \end{bmatrix} \geq 0 \tag{20}
$$

и дуальному неравенству отщепления

$$
\begin{bmatrix} D^*JD & \frac{1}{\xi} D^*\Lambda^*_{p+q,n}\left(\frac{1}{\xi}\right) \\ * & \dfrac{B(\xi)jB^*(\xi)-j}{1-|\xi|^2} \end{bmatrix} \geq 0 , \tag{21}
$$

где*

$$
J = \begin{bmatrix} j & & 0 \\ & j & \\ 0 & & \ddots j \end{bmatrix} .
$$

Решая неравенство (20) или (21), получим множитель, совпадающий с $B(\xi)$ [6]. Следуя работе [6], прежде чем решать эти неравенства, упростим их. Эти упрощения связаны с тем, что $-1$ и $1$, стоящие на главной диагонали матрицы $J$, удобно собрать в отдельные группы. Для этого введем в рассмотрение унитарную матрицу

$$
S = \begin{bmatrix}
I_q & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\
0 & 0 & 0 \ldots 0 & I_p & 0 \ldots 0 \\
0 & I_q & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\
0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & I_p \ldots 0 \\
0 & 0 & I_q \ldots 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 \ldots I_q & 0 & 0 \ldots 0 \\
0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \ldots I_p
\end{bmatrix}
$$

---

* В работе [6] неравенства, эквивалентные приводимым выше неравенствам (20) и (21), получены в ином виде и обозначены ($I$) и ($I'$). Эквивалентность неравенств (20), (21) и ($I$), ($I'$) следует из того, что они получаются друг из друга с помощью невырожденных преобразований.

Очевидно,

$$J_1 = S^* J S = \begin{bmatrix} -I_{(n+1)q} & 0 \\ 0 & I_{(n+1)p} \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Пусть $\Gamma = S^* D S$ , Тогда

$$\Gamma J_1 \Gamma^* = S^* D S J_1 S^* D^* S = S^* D J D^* S$$

и, учитывая вид главного блока неравенства (20), получаем

$$\Gamma J_1 \Gamma^* \geq 0 .$$

Повторяя теперь рассуждения, проведенные в работе [6 , с. 214], приходим к разложению

$$\Gamma J_1 \Gamma^* = \begin{bmatrix} I_{(n+1)q} & X_0^* \\ 0 & I_{(n+1)p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{(n+1)q} & 0 \\ X_0 & I_{(n+1)p} \end{bmatrix}, \tag{23}$$

при этом

$$rang\, D = rang\, \Gamma = rang\, \tilde{C}, \quad \tilde{C} > 0. \tag{24}$$

В соответствии с разложением (22) матрицы $J_1$ разложим на блоки матрицу $\Gamma$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix}. \tag{25}$$

Тогда (23) можно переписать в виде

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I_{(n+1)q} & 0 \\ 0 & I_{(n+1)p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^* & Z^* \\ Y^* & W^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0^* \tilde{C} X_0 & X_0^* \tilde{C} \\ \tilde{C} X_0 & \tilde{C} \end{bmatrix}.$$

Откуда следует

$$WW^* = ZZ^* + \tilde{C}. \tag{26}$$

Учитывая (24) и (25), из этого равенства получаем

$$rang\, W = rang\, \tilde{C} = rang\, D .$$

Тогда из (26), учитывая (24), имеем

$$\Delta_W = \Delta_{\tilde{C}} , \tag{27}$$

$$\Delta_Z \subset \Delta_W . \tag{28}$$

Обозначим через $P_L$ ортопроектор на подпространство $L$ . Введем в рассмотрение оператор $W_0 = W/\Delta_{W^*}$ . Очевидно, $W_0$ невырожден и отображает $\Delta_{W^*}$ на $\Delta_W$ . Пусть $W_1$ – какое-либо невырожденное преобразование $\operatorname{Ker} W$ на $\operatorname{Ker} W^*$, т.е. невырожденное преобразование соответствующих ортогональных дополнений к $\Delta_{W^*}$ и $\Delta_W$.

Положим

$$Q = W_0^{-1} P_{\Delta_W} + W_1^{-1} P_{\operatorname{Ker} W^*}.$$

Определим теперь матрицы $C$ и $P$, фигурирующие в условии теоремы I:

$$C = QZ, \quad P = P_{\Delta_{W^*}}. \tag{29}$$

Тогда условия (II) выполняются, поскольку $P$ – ортопроектор. Заметив, что $Q^{-1} P Q^{*-1} = WW^*$, из (26) находим

$$P - CC^* = P - QZZ^*Q^* = Q(Q^{-1}PQ^{*-1} - ZZ^*)Q^* = Q(WW^* - ZZ^*)Q^* = Q\tilde{C}Q^* .$$

Откуда, учитывая (24) и (27), получаем (I4).

В соответствии с разложением на блоки матрицы $j$ разложим на блоки матрицы $d_k$:

$$d_k = \begin{bmatrix} x_k & y_k \\ z_k & w_k \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Учитывая вид матриц $\mathcal{D}$ и $S$, получаем, что матрицы $X$, $Y$, $Z$, $W$ выражаются через матрицы $x_k, y_k, z_k, w_k$ точно также, как матрица $\mathcal{D}$ выражается в (I9) через матрицы $d_k$. Это эквивалентно тому, что

$$V_{q,n}^* X = XV_{q,n}, \quad V_{q,n}^* Y = YV_{p,n};$$

$$V_{p,n}^* Z = ZV_{q,n}, \quad V_{p,n}^* W = WV_{p,n}, \tag{30}$$

где $V_{p,n}$ определяется равенством (3). Из последнего равенства следует, в частности инвариантность $\Delta_{W^*}$ относительно $V_{p,n}^*$ что эквивалентно равенству (I2).

Докажем справедливость равенства (I3). Замечая, что

$$WQ = P_{\Delta_W}, \quad QW = P_{\Delta_{W^*}} = P, \tag{31}$$

имеем

$$QV_{p,n}^* P_{\Delta_W} = PV_{p,n} Q.$$

Отсюда, учитывая первое соотношение в (30) и (28), из цепочки равенств получаем (I3):

$$CV_{q,n} = QZV_{q,n} = QV_{p,n}^{*} Z = QV_{p,n}^{*} P_{d_W} Z = PV_{p,n} QZ = PV_{p,n} C.$$

Для доказательства необходимости условий теоремы I осталось доказать представление (9).

Пусть

$$R = \begin{bmatrix} I_{(n+1)q} & -YQ \\ 0 & Q \end{bmatrix}.$$

Умножая основное матричное неравенство отщепления (20) справа на невырожденную матрицу

$$T = \begin{bmatrix} SR^{*} & 0 \\ 0 & I_{p+q} \end{bmatrix},$$

а слева на $T^{*}$, получаем

$$\begin{bmatrix} RS^{*}DJD^{*}SR^{*} & \frac{1}{\xi} RS^{*}D\Lambda_{p+q,n}^{*}\left(\frac{1}{\xi}\right) \\ * & \dfrac{B^{*}(\xi)jB(\xi)-j}{1-|\xi|^{2}} \end{bmatrix} \geq 0. \tag{32}$$

Преобразуем блоки, входящие в это неравенство. Для этого заметим, что

$$RS^{*}DJD^{*}SR^{*} = R\Gamma J_{1}\Gamma^{*}R^{*}. \tag{33}$$

Из (29) и (31) имеем

$$R\Gamma = \begin{bmatrix} I_{(n+1)q} & -YQ \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X-YQZ & Y-YP \\ C & P \end{bmatrix}.$$

Обратим внимание на то, что включение (28) следует из $DJD^{*} \geq 0$.

Аналогично из неравенства $D^{*}JD \geq 0$, вытекающего из (21), получаем $d_{Y^{*}} \subset d_{W^{*}}$, т.е. $YP = Y$. Значит

$$R\Gamma = \begin{bmatrix} X-YQZ & 0 \\ C & P \end{bmatrix}.$$

Поскольку из (24) и (27) следует

$$rang\, R\Gamma = rang\, \Gamma = rang\, P,$$

то

$$R\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C & P \end{bmatrix}. \tag{34}$$

Поэтому, учитывая (33), приходим к равенству

$$RS^*DJD^*SR^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P-CC^* \end{bmatrix}.$$

Из (34) находим

$$RS^*D\Lambda^*_{p+q,n}\left(\frac{1}{\bar{\xi}}\right) = RS^*DSS^*\Lambda^*_{p+q,n}\left(\frac{1}{\bar{\xi}}\right) =$$

$$= R\Gamma S^*\Lambda^*_{p+q,n}\left(\frac{1}{\bar{\xi}}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C & P \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Lambda^*_{q,n}\left(\frac{1}{\bar{\xi}}\right) & 0 \\ 0 & \Lambda^*_{p,n}\left(\frac{1}{\bar{\xi}}\right) \end{bmatrix}.$$

Следовательно, неравенство (32) можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P-CC^* \end{bmatrix} & \frac{1}{\bar{\xi}}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C & P \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Lambda^*_{q,n}\left(\frac{1}{\bar{\xi}}\right) & 0 \\ 0 & \Lambda^*_{p,n}\left(\frac{1}{\bar{\xi}}\right) \end{bmatrix} \\ * & \dfrac{B^*(\xi)jB(\xi)-j}{1-|\xi|^2} \end{bmatrix} \geqslant 0. \tag{35}$$

Очевидно, в качестве решения уравнения

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P-CC^* \end{bmatrix} X_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C & P \end{bmatrix}$$

можно положить

$$X_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (P-CC^*)^{-1}C & (P-CC^*)^{-1} \end{bmatrix},$$

где оператор $(P-CC^*)^{-1}$ определен равенством (15). Решая теперь (35) стандартным методом /6/, получаем представление (9).

Таким образом, необходимость условий теоремы I доказана.

Пусть теперь $B(\xi)$ допускает представление (9). Из (II)-(I4) следует

$$H\begin{bmatrix}\Lambda^*_{q,n}(1) & 0\\ 0 & \Lambda^*_{p,n}(1)\end{bmatrix} j \begin{bmatrix}\Lambda_{q,n}(1) & 0\\ 0 & \Lambda_{p,n}(1)\end{bmatrix} H=$$

$$=H\begin{bmatrix}D_{q,n} & 0\\ 0 & D_{p,n}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}D^*_{q,n} & 0\\ 0 & D^*_{p,n}\end{bmatrix} H-H, \tag{36}$$

где

$$D_{p,n}=I+V_{p,n}+V^2_{p,n}+\ldots+V^n_{p,n}\ .$$

Отсюда находим, что $j$-форма $B(\xi)$ имеет вид

$$B^*(\xi)\,jB(\xi)-j=$$

$$=\frac{1-|\xi|^2}{|\xi|^2}\begin{bmatrix}\Lambda_{q,n}(\frac{1}{\bar\xi}) & 0\\ 0 & \Lambda_{p,n}(\frac{1}{\bar\xi})\end{bmatrix} H \begin{bmatrix}\Lambda^*_{q,n}(\frac{1}{\bar\xi}) & 0\\ 0 & \Lambda^*_{p,n}(\frac{1}{\bar\xi})\end{bmatrix}.$$

В силу (I4) $H\geq 0$ . Поэтому $B(\xi)$ – $j$-элементарный кратный множитель.

Единственность представления (9) доказывается обычным способом [6]. Теорема I полностью доказана.

Замечание I. Из (I2) следует, что подпространство $\Delta_p$ инвариантно относительно $V^*_{p,n}$. Учитывая структуру $V^*_{p,n}$, введем в рассмотрение подпространства

$$N_k=\{f\in\Delta_p,\ V^{*k}_{p,n}f=0\};\qquad k=0,1,2,\ldots,n+1,$$

и пусть $L_k=N_{k+1}\ominus N_k,\quad k=0,1,2,\ldots,n.$ Тогда $\Delta_p$ допускает разложение

$$\Delta_p=L_0\oplus L_1\oplus L_2\oplus\ldots\oplus L_n\ .$$

Покажем, что

$$\operatorname{rang} d_{n+1}=\dim L_n\ .$$

Для этого разобьем матрицы $P$ и $(P-CC^*)^{-1}$ на $p$-мерные блоки

$$P=(P_{jk})^n_{j,k=0};\quad (P-CC^*)^{-1}=(Q_{jk})^n_{j,k=0}\ . \tag{37}$$

Очевидно,

$$rang\, P_{kk} = dim\, L_k\,;\quad P_{k+1,k+1} \leq P_{kk}\,. \tag{38}$$

Учитывая (I4), находим

$$\Delta_{P_{kk}} = \Delta_{Q_{kk}}\,. \tag{39}$$

Из (38) и (39), в частности, следует

$$dim\, L_k = rang\, P_{kk} = rang\, Q_{kk}\,. \tag{40}$$

Сравнивая теперь представления (9) и (I8), получаем

$$\Lambda^{(1)}_{p+q,n}\, D\Lambda^{*}_{p+q,n}\left(\frac{1}{\bar{\xi}}\right) = j \begin{bmatrix} \Lambda^{(1)}_{q,n} & 0 \\ 0 & \Lambda^{(1)}_{p,n} \end{bmatrix} H \begin{bmatrix} \Lambda^{*}_{q,n}\left(\frac{1}{\bar{\xi}}\right) & 0 \\ 0 & \Lambda^{*}_{p,n}\left(\frac{1}{\bar{\xi}}\right) \end{bmatrix}. \tag{41}$$

Поскольку левую часть последнего равенства можно переписать в виде

$$\Lambda^{(1)}_{p+q,n}\, DSS^{*}\Lambda^{*}_{p+q,n}\left(\frac{1}{\bar{\xi}}\right) = \Lambda^{(1)}_{p+q,n}\, DS \begin{bmatrix} \Lambda^{*}_{q,n}\left(\frac{1}{\bar{\xi}}\right) & 0 \\ 0 & \Lambda^{*}_{p,n}\left(\frac{1}{\bar{\xi}}\right) \end{bmatrix},$$

то из (4I) следует

$$\Lambda_{p+q,n}(1)\, DS = j \begin{bmatrix} \Lambda_{q,n}(1) & 0 \\ 0 & \Lambda_{p,n}(1) \end{bmatrix} H.$$

Поэтому (36) можно записать в эквивалентной форме

$$S^{*}D^{*}\Lambda^{*}_{p+q,n}(1)\, j\, \Lambda_{p+q,n}(1)\, DS =$$

$$= H \begin{bmatrix} D_{q,n} & 0 \\ 0 & D_{p,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D^{*}_{q,n} & 0 \\ 0 & D^{*}_{p,n} \end{bmatrix} H - H. \tag{42}$$

Пусть $j = P_{+} - P_{-}$ , где

$$P_{+} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix};\quad P_{-} = \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Тогда, учитывая (37) и приравнивая в (42) нижние $p$-мерные блоки на главной диагонали, получаем

$$P_{+}\, d^{*}_{n+1}\, j d_{n+1}\, P_{+} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q_{nn} \end{bmatrix} \tag{43}$$

Расписывая (21) на блоки, находим что одним из главных блоков является матрица

$$\begin{bmatrix} d_{n+1}^* j d_{n+1} & \frac{1}{\xi} d_{n+1}^* \\ * & \frac{B(\xi) j B^*(\xi) - j}{1-|\xi|^2} \end{bmatrix} \geq 0.$$

Откуда следует

$$d_{n+1}^* j d_{n+1} \geq 0, \quad \operatorname{rang} d_{n+1}^* j d_{n+1} = \operatorname{rang} d_{n+1}^* . \tag{44}$$

Аналогично из (20) находим

$$d_{n+1} j d_{n+1}^* \geq 0, \quad \operatorname{rang} d_{n+1} j d_{n+1}^* = \operatorname{rang} d_{n+1} . \tag{45}$$

Из (44) и (45) заключаем, что $\Delta_{d_{n+1}^*}$ является положительным в $j$-метрике подпространством и

$$\operatorname{rang} P_+ d_{n+1}^* = \operatorname{rang} d_{n+1}^* , \tag{46}$$

$$\Delta_{P_+ d_{n+1}^*} = \Delta_{P_+ d_{n+1}^* j d_{n+1} P_+} . \tag{47}$$

Из (39), (40), (43), (46) и (47) окончательно находим

$$\Delta_{P_+ d_{n+1}^*} = \Delta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_{nn} \end{bmatrix} ;$$

$$\dim L_n = \dim \Delta_{P_{nn}} = \operatorname{rang} d_{n+1} .$$

Замечание 2. В случае $n=0$ $j$-элементарный кратный множитель является двучленным множителем

$$b(\xi) = I + \frac{1-\xi}{\xi} d,$$

допускающим параметризацию

$$b(\xi) = I + \frac{1-\xi}{\xi} j \begin{bmatrix} c^* \\ P \end{bmatrix} (P - cc^*)^{-1} [c, P],$$

где $p$-мерный ортопроектор $P$ и матрица $c$ определяются однозначно по $b(\xi)$ и удовлетворяют условиям*

$$P - cc^* \geq 0;$$

$$\operatorname{rang}(P - cc^*) = \operatorname{rang} P = \operatorname{rang} d.$$

2. Докажем теперь теорему 2. Начнем с необходимости. Пусть $\tilde{B}(\xi) - j$ - элементарный кратный множитель вида (2). Тогда

---

* Очевидно, $c$ - матрица с $p$ строками и $q$ столбцами. Далее, в соответствии с (3) $V_{0,0} = 0$, в этом случае условия (12) и (13) выполняются автоматически.

$\tilde{B}^*(\frac{1}{\xi})$ является $\tilde{j}$-элементарным кратным множителем с полюсом в точке $\xi=0$. Поэтому из теоремы I следует, что однозначно определяются ортопроектор $P$ и матрица $c$, удовлетворяющие условиям (II) - (I4), такие, что

$$\tilde{B}^*(\frac{1}{\xi})=I-\frac{1-\xi}{\xi}\tilde{j}\begin{bmatrix}\Lambda_{p,n}(1) & 0\\ 0 & \Lambda_{q,n}(1)\end{bmatrix}\tilde{H}\begin{bmatrix}\Lambda^*_{p,n}(\frac{1}{\xi}) & 0\\ 0 & \Lambda^*_{q,n}(\frac{1}{\xi})\end{bmatrix},$$

где $\tilde{H}$ имеет вид (I7). Отсюда находим, что $B(\xi)$ допускает представление (I6).

Обратно, если $\tilde{B}(\xi)$ допускает представление (I6), то можно показать, что $\tilde{J}$-форма $\tilde{B}(\xi)$ имеет вид

$$\tilde{B}(\xi)\tilde{j}\tilde{B}^*(\xi)-\tilde{j}=$$

$$=(1-|\xi|^2)\begin{bmatrix}\Lambda_{p,n}(\xi) & 0\\ 0 & \Lambda_{q,n}(\xi)\end{bmatrix}\tilde{H}\begin{bmatrix}\Lambda^*_{p,n}(\xi) & 0\\ 0 & \Lambda^*_{q,n}(\xi)\end{bmatrix}.$$

Откуда следует, что $\tilde{B}(\xi)$ — $\tilde{j}$-элементарный кратный множитель. Теорема 2 доказана.

Замечание I к теореме I справедливо и в этом случае.

Следствие. Для каждой двучленной $\tilde{j}$-элементарной матрицы-функции

$$\tilde{b}(\xi)=I+(1-\xi)\tilde{a}$$

однозначно определяются $p$-мерный ортопроектор $P$ и матрица $c$ с $p$ строками и $q$ столбцами, удовлетворяющие условиям

$$P-cc^*\geq 0;$$

$$rang\,(P-cc^*)=rang\,P=rang\,\tilde{a},$$

и такие, что $\tilde{b}(\xi)$ допускает представление

$$\tilde{b}(\xi)=I+(1-\xi)\begin{bmatrix}P\\ c^*\end{bmatrix}(P-cc^*)^{-1}[P,c]\tilde{j}.$$

Разложение элементарных кратных множителей на простейшие множители будет рассмотрено отдельно.


I. Ковалишина И.В., Потапов В.П. Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны - Пика. - Докл. АН АрмССР, 1974, 59, № I, с. I7 - 22.

2. Ковалишина И.В. $J$-растягивающие матрицы-функции в задаче Каратеодори. - Там же, № 3, с. I29-I35.

3. Ковалишина И.В. $J$-растягивающие матрицы-функции и проблема моментов. - Там же, 1975, 60, № I, с. 3-I0.

4. Потапов В.П. Общие теоремы о структуре и отщеплении элементарных множителей аналитических матриц-функций. – Там же, 1969, 48, № 5, с. 257-263.
5. Ковалишина И.В. Аддитивное разложение произвольной реактивной матрицы-функции. – Изв. АН АрмССР, 1971, 6, № 1, с. 43-60.
6. Галстян Л.А. Аналитические $J$-растягивающие матрицы-функции и проблема Шура. – Там же, 1977, 12, № 3, с. 204-228.
7. Дубовой В.К. Индефинитная метрика в интерполяционной задаче Шура для аналитических функций. I. – Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1982, № 37, с. 28-44.
8. Федчина И.П. Критерий разрешимости касательной проблемы Неванлинны – Пика. – Мат. исслед. 1972, 8, № 4, с. 213-227.
9. Федчина И.П. Описание решений касательной проблемы Неванлинны – Пика. – Докл. АН АрмССР, 1975, 60, № 1, с. 37-42.
10. Федчина И.П. Касательная проблема Неванлинны – Пика с кратными точками. – Докл. АН АрмССР, 1975, 61, № 4, с. 214-218.

УДК 517.535.4

А.Э.Еременко, М.Л.Содин

# О ПОВЕДЕНИИ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ НА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ ОКРУЖНОСТЕЙ

Пусть $f$ – целая функция. Предполагаем всегда, что $f(0)=1$, это не уменьшает общности в рассматриваемых вопросах. Обозначим через $B(r,f)$ максимум $\log|f(z)|$ при $|z|=r$. Для каждого $r>0$ рассмотрим $2\pi$-периодическую функцию $g(r,f,\theta)=B(r,f)^{-1}\log|f(re^{i\theta})|$. Эта функция обладает такими свойствами:

$$\max_{\theta\in[0,2\pi]} g(r,f,\theta)=1;\quad \int_0^{2\pi} g(r,f,\theta)\,d\theta \geq 0\ . \tag{1}$$

(Второе неравенство вытекает из формулы Иенсена).

Если функция $f$ удовлетворяет условию

$$B(r,f)=O(\log^2 r),\quad r\to\infty, \tag{2}$$

то, как доказал У.Хейман [1], выполняется соотношение

$$\log|f(z)| \sim B(|z|,f),\ r\to\infty,$$

когда $z\to\infty$ вне некоторого множества кругов такого, что сумма углов, под которыми эти круги видны из начала координат, конечна. Отсюда нетрудно получить, что для целых функций со свойством (2) справедливо $g(r,f,\theta)\to 1$ в метрике $L^1[0,2\pi]$ при $r\to\infty$.

Основной результат настоящей работы состоит в том, что, если условие (2) не выполнено, то о функции $g(r,f,\theta)$, как функции от $\theta$, по существу нельзя утверждать ничего, кроме (1).

Теорема 1. Пусть $(g_n)$ – произвольная последовательность непрерывных $2\pi$-периодических функций, таких, что

$$\max_{\theta\in[0,2\pi]} g_n(\theta)=1, \quad \int_0^{2\pi} g_n(\theta)\,d\theta > 0, \quad n\in \mathbb{N} \tag{3}$$

и пусть $\varphi(r)$ – произвольная функция на $[0,\infty)$, $\varphi(r)\uparrow\infty$ при $r\to\infty$. Существует целая функция $f$ со свойствами

$$B(r,f)=O(\varphi(r)\log^2 r), \quad r\to\infty, \tag{4}$$

$$\varliminf_{r\to\infty} \max_{\theta\in[0,2\pi]} |g(r,f,\theta)-g_n(\theta)|=0, \quad n\in\mathbb{N}. \tag{5}$$

Существует также целая функция $f$ наперед заданного порядка $\rho$, $0\le\rho\le\infty$ со свойством (5).

Теорема I выводится из следующего результата, доказательство которого использует идеи работы [2].

<u>Теорема 2.</u> Пусть заданы последовательность чисел $\eta_n\ge 1$ и последовательность полиномов $(P_n)$ со свойствами

$$P_n(0)=1, \quad P_n(z)\ne 0, \quad |z|<1. \tag{6}$$

Существует целая функция $f$, удовлетворяющая (4), и последовательности $(T_n)$, $T_n\uparrow\infty$, $(q_n)$, $q_n\uparrow\infty$ такие, что

$$\log|f(T_n z)|-q_n\log|P_n(z)|=o(q_n), \quad n\to\infty, \tag{7}$$

равномерно по $z$, $1\le|z|\le\eta_n$. Существует также целая функция $f$ со свойством (7) и имеющая наперед заданный порядок $\rho$, $0\le\rho\le\infty$.

Доказательство. Положим $x^{+}=\max(1,x)$. Построим функцию $f$ со свойствами (4) и (7). Не уменьшая общности, будем считать, что $\varphi(r)$ – непрерывно дифференцируемая возрастающая функция, $\varphi(r)=1$ при $r\in[0,e]$, $\varphi(r)\le(\log r)^{+}$, $\varphi'(r)\le 1/r$, $0<r<\infty$.

Существуют положительные постоянные $A_k$ такие, что при всех $r>0$ выполняется

$$B(r,P_k)\le A_k(\log r)^{+}, \quad k\in\mathbb{N}. \tag{8}$$

Построим последовательность действительных чисел $(T_n)$, $T_1\ge e$, $T_{n+1}\ge\eta_n T_n$, последовательность натуральных чисел $(q_n)$ и последовательность полиномов $(Q_n)$ со следующими свойствами:

$$\left|\log|Q_n(T_j z)|-q_j\log|P_j(z)|\right|\le 2^{-j}(1-2^{-n})q_j, \quad 1\le|z|\le\eta_j, \quad 1\le j\le n; \tag{9}$$

$$N(r,0,Q_n)\le\varphi(r)(\log r)^{+}, \quad r>0; \tag{10}$$

$$B(T_j,Q_n)\le(1-2^{-n})\varphi(T_j)\log^2 T_j, \quad 1\le j\le n. \tag{11}$$

Выберем $\tau_1$, $0<\tau_1<e^{-1}$ так, чтобы

$$B(\tau_1 r, P_1)\le \frac{1}{2}\varphi(r)(\log^2 r)^{\lambda}, \quad r\ge 0. \tag{12}$$

Положим $Q_1(z)=P_1(\tau_1 z)$, $q_1=1$, $T_1=\tau_1^{-1}$.
Полином $Q_1$ удовлетворяет (9)-(II). Предположим, что $T_1,\dots,T_{k-1}$; $q_1,\dots,q_{k-1}$; $Q_1,\dots,Q_{k-1}$ уже выбраны, причем выполняются условия (9)-(II). Выберем $T_k, q_k$ и $Q_k$. Пусть $B_{k-1}>1$ таково, что при всех $r>0$ выполняется

$$B(r, Q_{k-1})\le B_{k-1}(\log r)^{\lambda}. \tag{13}$$

Пусть $r_k$ настолько велико, что

$$(1-2^{-k})\varphi(r_k)\ge B_{k-1}(1+2^{k+4}A_k\log^{\lambda}\eta_k), \tag{14}$$

$$r_k\ge \eta_{k-1}T_{k-1}. \tag{15}$$

Выберем $T_k$ настолько большим, чтобы $(\tau_k^{-1}=T_k)$

$$T_k\ge r_k; \tag{16}$$

$$2^{k+3}B_{k-1}\log(\eta_k T_k)|\log P_k(\tau_k z)|\le 2^{-2k}, \quad |z|\le r_k; \tag{17}$$

$$|\log|Q_{k-1}(T_k z)||\le 2B_{k-1}(\log r)^{\lambda}, \quad |z|\ge 1, \ r=T_k|z|. \tag{18}$$

Условию (17) можно удовлетворить, поскольку при достаточно малом $\tau$ и $|z|\le r_k$ справедливо

$$|\log P_k(\tau z)|\log(\eta_k/\tau)\le 2|P_k(\tau z)-1|\log(\eta_k/\tau)\le 2(1+|P_k'(0)|)\times$$
$$\times r_k\tau\log(\eta_k/\tau)=o(1),\ \tau\to 0.$$

Теперь положим

$$q_k=[2^{k+3}B_{k-1}\log(\eta_k T_k)]; \tag{19}$$

$$Q_k(z)=Q_{k-1}(z)\{P_k(\tau_k z)\}^{q_k}. \tag{20}$$

Из (15), (16) следует, что $T_k\ge T_{k-1}\eta_{k-1}$. Покажем, что для $Q_k$ выполняются условия (9)-(II) с $n=k$.

Ввиду (9) с $n=k-1$, (20), (19), (17), (15)

$$|\log|Q_k(T_j z)|-q_j\log|P_j(z)||\le|\log|Q_{k-1}(T_j z)|-$$

$$-q_j\log|P_j(z)||+q_k|\log|P_k(T_j\tau_k z)||\le$$

$$\le 2^{-j}(1-2^{-k+1})+2^{-2k}\le 2^{-j}(1-2^{-k}),$$

$$1\le|z|\le\eta_j,\quad 1\le j\le k-1,$$

что дает (9) с $n=k,\ 1\le j\le n-1.$

Далее, в силу (20), (I8), (I9)

$$|\log|Q_k(T_k z)|-q_k\log|P_k(z)||=$$

$$=|\log|Q_{k-1}(T_k z)||\le 2^{-k-1}q_k,\quad 1\le|z|\le\eta_k,$$

что доказывает (9) при $n=k$, $j=k$. Из (6) следует, что полином $P_k(\tau_k z)\ne 0$ при $|z|\le T_k$. Поэтому при $r\le T_k$

$$N(r,0,Q_k)=N(r,0,Q_{k-1})\le\varphi(r)(\log^2 r)^{\Lambda}. \tag{2I}$$

При $r>T_k$ с помощью (I3), (8), (I9), (I4) получаем

$$B(r,Q_k)\le B_{k-1}\log r+q_k A_k\log(\tau_k r)\le B_{k-1}\log r+2^{k+3}A_k B_{k-1}\times$$

$$\times(\log r)\log(\eta_k T_k)\le B_{k-1}(1+2^{k+3}A_k\log\eta_k)\log r+$$

$$+2^{k+3}A_k B_{k-1}\log^2 r\le B_{k-1}(1+2^{k+4}A_k\log^{\Lambda}\eta_k)\log^2 r\le(1-2^{-k})\varphi(r)\log^2 r. \tag{22}$$

Из (2I), (22) и неравенства Иенсена следует, что (I0) выполняется при $n=k$. Кроме того, подставляя $r=T_k$ в (22), получим (II) при $n=j=k$. Если $1\le j\le k-1$, то из (II) с $n=k-1$, (I7), (I5) получаем

$$B(T_j,Q_k)\le B(T_j,Q_{k-1})+2^{k+3}B_{k-1}\log(\eta_k T_k)B(T_j\tau_k,P_k)\le(1-2^{-k+1})\times$$

$$\times\varphi(T_j)\log^2 T_j+2^{-2k}\le(1-2^{-k})\varphi(T_j)\log^2 T_j.$$

Это дает (II) с $j\le k-1,\ n=k.$

Таким образом, условия (9)-(II) выполнены.

В силу (I7) произведение $\prod\limits_{k\ge1}\{P_k(\tau_k z)\}^{q_k}$ сходится равномерно на каждом компакте, следовательно последовательность $(Q_n)$ сходится равномерно на каждом компакте к некоторой целой функции $f$.

Переходя в (9) к пределу при $n\to\infty$, получим (7).

Переходя к пределу в (I0) при $n\to\infty$ и используя теорему Гурвица, получаем

$$N(r,0,f)\le\varphi(r)(\log^2 r)^{\Lambda}\le(\log^3 r)^{\Lambda},\quad r>0. \tag{23}$$

Пусть $\pi$ – каноническое произведение Вейерштрасса рода $0$, построенное по нулям $f$. Из (23) следует, что $\pi$ имеет нулевой порядок. Из (II) следует, что

$$B(T_j, f) \le \varphi(T_j) \log^2 T_j \le \log^3 T_j .$$

Отсюда $f/\pi = const$, а поскольку $f(0) = \pi(0) = 1$, то $f = \pi$.

Тогда

$$B(r,f) \le \int_0^\infty \log(1+\frac{r}{t}) dn(t,0,f) \le r \int_r^\infty \frac{N(t,0,f)}{t^2} dt . \tag{24}$$

Поскольку $\varphi'(r) \le 1/r$, то при всех $r > r_0 > e$ функция $\varphi(r) r^{-1/2}$ убывает и из (23), (24) получаем

$$B(r,f) \le r \int_r^\infty \frac{\varphi(t)\log^2 t}{t^2} dt \le \varphi(r) r^{1/2} \int_r^\infty \frac{\log^2 t}{t^{3/2}} dt = 2(1+o(1))\varphi(r)\log^2 r, \; r \to \infty .$$

Чтобы построить функцию $f$ наперед заданного порядка $\rho$, удовлетворяющую (7), нужно в приведенном выше рассуждении сделать изменения, аналогичные проделанным в доказательстве теоремы 2 из [2]. Теорема 2 доказана.

Перейдем к теореме I.

Доказательство. Пусть $g$ – непрерывная $2\pi$-периодическая функция, $\int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta = a \ge 0$. Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует полином $P$ такой, что

$$P(0) = 1; \quad P(z) \ne 0; \quad |z| < 1; \tag{25}$$

$$|\log|P(2e^{i\theta})| - g(\theta)| < \varepsilon, \quad \theta \in [0, 2\pi] . \tag{26}$$

Выберем целое неотрицательное число $k$ и число $r_0$, $1 \le r_0 < 2$ так, чтобы выполнялось

$$k(\log 2 - \log r_0) = a . \tag{27}$$

Положим $Q(z) = r_0^{-k}(z + r_0)^k$, $Q(0) = 1$. Из (27) и формулы Иенсена получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|Q(2e^{i\theta})| d\theta = k \int_{r_0}^2 \frac{dt}{t} = a .$$

Функция $g_1(\theta) = g(\theta) - \log|Q(2e^{i\theta})|$ имеет нулевое среднее значение на $[0, 2\pi]$, поэтому существует гармонический полином $u(z)$ со свойствами

$$u(0) = 0; \quad \max_{\theta \in [0,2\pi]} |g_1(\theta) - u(2e^{i\theta})| < \varepsilon/2 . \tag{28}$$

Пусть $v(z)$ – сопряженный гармонический полином, $v(0) = 0$. Целая функция $R(z) = Q(z)\exp(u(z) + iv(z))$ имеет единственный нуль (кратности $k$ ) в точке $-r_0$ и в силу (28) удовлетворяет неравенству

$$\max_{\theta\in[0,2\pi]} |\log|R(2e^{i\theta})| - g(\theta)| < \varepsilon/2 .$$

Теперь в качестве $P$ можно взять достаточно длинный отрезок ряда Тейлора функции $R$ . В силу теоремы Гурвица (25) выполнено.

Теперь можно вывести теорему I из теоремы 2. Не уменьшая общность, будем считать, что каждая функция из последовательности $(g_n)$ встречается в этой последовательности бесконечное число раз. Выберем последовательность $(\varepsilon_n)$, $\varepsilon_n \downarrow 0$ и построим полиномы $P_n$ , удовлетворяющие (25) и, кроме того,

$$|\log|P_n(2e^{i\theta})| - g_n(\theta)| < \varepsilon_n, \ \theta\in[0,2\pi] . \tag{29}$$

По теореме 2 $(\eta_n = 2)$ получим целую функцию $f$ со свойствами (7), (4). Из (7), (29) следует (5). Теорема I доказана.

Приведем пример применения теоремы I. Положим для мероморфной функции $f$

$$m_p(r,f) = \{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\log^+|f(re^{i\theta})|)^p d\theta\}^{1/p} = \|\log^+|f(re^{i\theta})|\|_p, \ 0<p<\infty .$$

(Если $T(r,f)$ – неванлинновская характеристика, то для целой функции $f$ $T(r,f) = m_1(r,f)$). Неравенство Иенсена эквивалентно тому, что $m_1(r,f^{-1}) \le m_1(r,f)$.

А.Ф.Гришин в беседе с одним из авторов поставил вопрос: верно ли, что для целых функций порядка $\rho < \infty$ выполняется

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{m_p(r,f^{-1})}{m_p(r,f)} \le C(\rho,p) < \infty \ ? \tag{30}$$

Из теоремы I вытекает отрицательный ответ на этот вопрос при любом $\rho$, $0 \le \rho \le \infty$ и любом $p \ne 1$ . Достаточно выбрать последовательность $g_n$ в теореме I, чтобы

$$\|g_n^+\|_p = o(\|g_n^-\|_p), \ n\to\infty \ \ (a^- = (-a)^+) .$$

Однако если от целой функции потребовать некоторую регулярность роста, то величина в левой части (30) будет конечной при $p > 1$.

Рассмотрим целые функции со свойством

$$B(2r,f) = O(B(r,f)), \ r\to\infty . \tag{31}$$

Заметим, что из (2) следует (31). Достаточным для выполнения (31) является также следующее условие: существует уточненный порядок $\rho(r)$ такой, что функция $f$ имеет нормальный тип и нормальный нижний тип относительно $\rho(r)$.

Теорема 3. Если целая функция $f$ удовлетворяет условию (31), то для всех $p$, $q$, $0<q<\infty$, $1\le p<\infty$ выполняется

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{m_q(r,f^{-1})}{m_p(r,f)} < \infty . \tag{32}$$

Доказательство теоремы 3 опирается на соображения компактности для семейств субгармонических функций, аналогичные тем, которыми пользовались В.С.Азарин /3/, Дж.Андерсон и А.Бернштейн /4/.

Лемма I. Пусть $A$ – семейство функций субгармонических в $\mathbb{C}$, причем существует функция $A(r)$ такая, что для всякой функции $u\in A$ выполняется

$$u(0)=0,\ \sup_{u\in A}\int_0^{2\pi} u^+(re^{i\theta})\,d\theta \le A(r) . \tag{33}$$

Тогда существует функция $B_q(r)$ такая, что для любого $q$, $0<q<\infty$

$$\| u(re^{i\theta})\|_q \le B_q(r) . \tag{34}$$

Доказательство. Для функции $u\in A$ обозначим через $d\mu$ ассоциированную меру Рисса, положим $n(r)=\int_{|z|\le r} d\mu$. Из (33) и неравенства Иенсена вытекает, что $n(r)\le A_1(r)$, $r>0$. Здесь и далее через $A(r)$ с различными индексами обозначаются функции, зависящие только от семейства $A$. Воспользуемся формулой Пуассона – Иенсена в круге $C_{2r}=\{\xi : |\xi|<2r\}$:

$$u(re^{i\varphi})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(2re^{i\theta})\frac{3r^2}{5r^2-4r^2\cos(\theta-\varphi)}\,d\theta+\int_{C_{2r}}\log\left|\frac{2r(z-\xi)}{4r^2-z\bar\xi}\right| d\mu(\xi)=$$

$$=\frac{3}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(2re^{i\theta})\frac{d\theta}{5-4\cos(\theta-\varphi)}+\int_{C_{2r}}\log\frac{1}{\left|2r-\frac{z\bar\xi}{2r}\right|}\,d\mu(\xi)+\int_{C_{2r}}\log|z-\xi|\,d\mu(\xi)=u_1(z)+u_2(z)+u_3(z).$$

В силу (33) имеем

$$|u_1(re^{i\varphi})|\le A_2(r),\quad |u_2(re^{i\varphi})|\le n(2r)\quad (\log 3r)^{1} \le A_3(r) .$$

С помощью неравенства Гельдера получаем

$$\| u_3(re^{i\varphi})\|_q^q\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\int_{C_{2r}}|\log|re^{i\varphi}-\xi||\,d\mu(\xi)\Big)^q d\varphi\le[n(2r)]^{q-1}\frac{1}{2\pi}\int_{C_{2r}}d\mu(\xi)\int_0^{2\pi}\times$$

$$\times|\log|re^{i\varphi}-\xi||^q d\varphi\le[n(2r)]^{q-1}\int_{C_{2r}}d\mu(\xi)(C_1(\log^+r)^q+C_2)\le A_4(r).$$

Следовательно,

$$\| u(re^{i\theta})\|_q \le A_5(r),$$

что доказывает лемму.

Лемма 2. Пусть выполнены условия леммы I. Для любой последовательности $(u_n) \subset A$ найдется подпоследовательность $(u_{n_k})$ и субгармоническая функция $v$ такие, что при всех $r>0$ и $q$, $0<q<\infty$, выполняется

$$\| u_{n_k}(re^{i\theta}) - v(re^{i\theta}) \|_q \to 0, \; k \to \infty . \tag{35}$$

(При $q=1$ лемма 2 доказана в [4]).

Доказательство. Из результатов В.С.Азарина ([3], теоремы 2.7.I.I, 2.7.4.I) следует, что из последовательности $(u_n)$) можно извлечь подпоследовательность $(u_{n_k})$ такую, что при любом $r>0$ $u_{n_k}(re^{i\theta}) \to v(re^{i\theta}), k \to \infty$, по мере $d\theta$ на $[0,2\pi]$. Здесь $v$ – некоторая функция, субгармоническая в $\mathbb{C}$. В силу (34) интегралы

$$\int_0^{2\pi} | u_{n_k}(re^{i\theta}) - v(re^{i\theta}) |^{q+1} d\theta, \qquad k \in \mathbb{N}$$

равномерно ограничены. По теореме Валле – Пуссена ([6, с. 151]) и теореме Витали ([6, с. 144]) отсюда следует (35). Лемма 2 доказана.

Замечание I. Аналогичный результат справедлив для семейств функций вида $u = u_1 - u_2$, где $u_1, u_2$ – субгармонические в $\mathbb{C}$. В этом случае вместо (33) нужно требовать выполнения условий

$$\int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})| d\theta \le A(r), \quad 0 \le \int_0^{2\pi} u_2(re^{i\theta}) d\theta \le A(r)$$

(ср. с [4]).

Докажем теорему 3.

Доказательство. Воспользовавшись известной оценкой

$$m_1(r,f) \le B(r,f) \le 3m_1(2r,f),$$

получим из (31), что $m_1(2r,f) = O(m(r,f)), r \to \infty$.

Отсюда следует, что семейство субгармонических функций

$$u_t(z) = \frac{\log|f(tz)|}{m_1(t,f)}, \quad 0<t<\infty$$

удовлетворяет условию (33). Предположим, что $m_1(r_k,f) = o(m_q(r_k,f^{-1}))$, $k \to \infty$ для некоторой последовательности $r_k$. Тогда $\|u_{r_k}(e^{i\theta})\|_q \to \infty, k \to \infty$, что противоречит лемме 2. Таким образом, (32) доказано при $p=1$. Справедливость (32) при $p>1$ следует из неравенства Гельдера. Теорема 3 доказана.

Замечание 2. Положим для мероморфной функции $f$

$$\delta_p(f) = \varliminf_{r \to \infty} \frac{m_p(r,f)}{T(r,f)} ;$$

$$\Delta_\rho(f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\ \frac{m_\rho(r,f)}{T(r,f)}\ .$$

Пусть мероморфная функция $f$ удовлетворяет условию

$$T(2r,f)=O(T(r,f)),\ r\to\infty, \qquad (36)$$

которое аналогично (31). В этом случае $\Delta_\rho(f)<\infty$ , $0<\rho<\infty$. Кроме того, если $\delta_\rho(f)>0$ при некотором $\rho$ , то $\delta_\rho(f)>0$ при всех остальных $\rho$ , $0<\rho<\infty$. Эти факты доказываются таким же методом, как и теорема 3.

Известно, что без требования (36) эти результаты неверны. А.Ф.Гришин [7] построил пример мероморфной функции $f$ заданного порядка $\rho$ , $0<\rho<\infty$ такой, что $\delta_\rho(f)>0$ , $\rho\geq q$ и $\delta_\rho(f)=0$ , $\rho<q$, где $q$ – наперед заданное число.

Кроме того, если для целой функции $f$ не выполняется (30), то $\Delta_\rho(f^{-1})=\infty$.


1. Hayman W.K. Slowly growing integral and subharmonic functions.- Comment. Math. Helv., 1960, 34, N 3, p. 75-84.

2. Гольдберг А.А., Еременко А.Э. Об асимптотических кривых целых функций конечного порядка. - Мат. сб., 1979, 109, № 4, с.555-581.

3. Азарин В.С. Теория роста субгармонических функций. Текст лекций. - Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1978, - 72 с.

4. Anderson J.M., Baernstein A. The size of the set on which a meromorphic function is large.- Proc. London Math. Soc., 1978, 36, N 3, p. 518-539.

5. Левин Б.Я. Целые функции. - М.: Изд-во Моск.ун-та, 1971. - 115 с.

6. Натансон И.П. Теория функций вещественного переменного. - М.: Наука, 1974, - 480 с.

7. Гришин А.Ф. О сравнении дефектов $\delta_\rho(a)$. - Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1976, № 25, с. 56-66.



УДК 517.5



В.Э.Кацнельсон


## КРИТЕРИИ КОМПАКТНОСТИ СЕМЕЙСТВ $J$-РАСТЯГИВАЮЩИХ АНАЛИТИЧЕСКИХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

1. Эта статья по тематике относится к теории $J$-растягивающих аналитических матриц-функций или $J$-теории, основанной В.П.Потаповым. Объектами $J$-теории являются аналитические в круге или в полуплоскости матрицы-функции $W(z)$ , удовлетворяющие в области аналитичности неравенству

$$W(z)JW^*(z)-J\geq 0. \qquad (1)$$

Здесь $J$ – матрица такая, что

$$J = J^*, \; J^2 = I, \tag{2}$$

$I$ – единичная матрица.

Выражение $WJW^* - J$ – определяющая структура $J$-теории, называется $J$-формой матрицы $W$. Матрица $W$, $J$-форма которой эрмитово неотрицательна, называется $J$-растягивающей.

Всюду в этой работе под нормой матрицы $M$ понимается операторная норма в унитарном пространстве: $\|M\| = \sup fMf^*$, где $\sup$ берется по всем вектор-строкам $f$ таким, что $ff^* \leq 1$. Термин "аналитическая функция" употребляется исключительно в смысле "однозначная голоморфная".

В настоящей работе получены некоторые оценки для $J$-растягивающих аналитических матриц-функций $W(z)$. Эти оценки полезны при обосновании различных предельных переходов в $J$-теории. Они родственны неравенству Гарнака для положительной в круге $|\xi| < 1$ гармонической функции $h(\xi)$, в которой значение функции в любой точке $\xi$ единичного круга оценивается сверху через ее значение в некоторой точке

$$h(\xi) \leq C(\xi_0) h(\xi_0)(1+|\xi|)/(1-|\xi|), \qquad (|\xi| < 1),$$

где $C(\xi_0) = (1+|\xi_0|)/(1-|\xi_0|)$.

2. Пусть матрица $W$ удовлетворяет неравенству

$$WJW^* - J \geq 0, \tag{3}$$

где $J$ – матрица, удовлетворяющая (2).

Положим

$$P = \frac{1}{2}(I+J), \quad Q = \frac{1}{2}(I-J). \tag{4}$$

Имеем

$$P = P^*, \; Q = Q^*, \; P^2 = P, \; Q^2 = Q, \; PQ = QP = 0, \; P + Q = I. \tag{5}$$

Справедливо равенство

$$(WP+Q)(PW^*+Q) - (WQ+P)(QW^*+P) = WJW^* - J. \tag{6}$$

Матрица $WP+Q$ – невырождена. В самом деле, если $f$ – вектор-строка и $f(WP+Q) = 0$, то и $f(WP+Q)(PW^*+Q)f^* = 0$. Значит из (6) $f(WQ+P)(QW^*+P)f^* = f(WJW^*-J)f^*$.

Из последнего равенства и из неравенства $f(WJW^*-J)f^* \geq 0$ следует, что $f(WQ+P) = 0$. Из равенств $f(WP+Q) = 0$ и $f(WQ+P) = 0$ вытекает (в силу дизъюнктности ортопроекторов $P$ и $Q$), что $f = 0$.

Таким образом, если $WJW^* - J \geq 0$, то определена матрица $(WP+Q)^{-1}$, а значит и матрица

$$S = (WP+Q)^{-1}(WQ+P). \qquad (7)$$

При этом

$$I - SS^* = (WP+Q)^{-1}(WJW^* - J)(PW^* + Q)^{-1}$$

и значит, $I - SS^* \geq 0$ или $\|S\| \leq 1$. Справедливо равенство

$$W(PS-Q) = P - QS. \qquad (8)$$

Из (8) следует, что

$$(P(JW-J)+J)(PS-Q) = I.$$

Таким образом, матрица $PS-Q$ обратима и

$$\|(PS-Q)^{-1}\| \leq 1 + \|W-I\|. \qquad (9)$$

Матрица $W$ выражается через $S$:

$$W = (P-QS)(PS-Q)^{-1}.$$

Поскольку $P$ и $Q$ – дизъюнктные ортопроекторы, то

$$\Delta \overset{def}{=} \det(PS-Q) = \det(PSP-Q).$$

Так как $\|S\| \leq 1$, то и $\|PSP-Q\| \leq 1$, а тогда и $|\Delta| \leq 1$. Дробно-линейные преобразования, переводящие $J$-растягивающие матрицы в сжимающие, рассматривались еще в [1], а в виде (7) – в работе [2].

3. Пусть $W(\xi)$ – аналитическая в круге $|\xi| < 1$ матрица-функция, удовлетворяющая неравенству

$$W(\xi)JW^*(\xi) - J \geq 0, \quad (|\xi| < 1) \qquad (10)$$

и пусть $P$ и $Q$ определены в (4).

Положим

$$S(\xi) = (W(\xi)P+Q)^{-1}(W(\xi)Q+P). \qquad (11)$$

Согласно п. 2 матрица $S(\xi)$ определена и аналитична в круге $|\xi| < 1$ и $I - S(\xi)S^*(\xi) \geq 0$. Матрица-функция $W(\xi)$ представима в виде

$$W(\xi) = (P - QS(\xi))(PS(\xi) - Q)^{-1}, \qquad (12)$$

где матрица $PS(\xi) - Q$ обратима при всех $\xi$ из единичного круга.

Обозначим

$$\Delta(\xi) = \det(PS(\xi) - Q). \qquad (13)$$

Имеем

$$|\Delta(\xi)|\le 1, \quad (|\xi|<1). \tag{14}$$

Вследствие обратимости матрицы $\rho S(\xi)-Q$ выполняется

$$\Delta(\xi)\neq 0, \quad (|\xi|<1). \tag{15}$$

Если $M$ – $m\times m$ матрица, то

$$\|M^{-1}\|\le \|M\|^{m-1}\,|\det M|^{-1}.$$

Поскольку $\|\rho S(\xi)-Q\|\le 2$, то

$$\|(\rho S(\xi)-Q)^{-1}\|\le 2^{m-1}\,|\Delta(\xi)|^{-1}. \tag{16}$$

и значит (12) и (16)

$$\|W(\xi)\|\le 2^{m}\,|\Delta(\xi)|^{-1}, \quad (|\xi|<1). \tag{17}$$

Пусть $\xi_0$ – некоторая точка единичного круга. В соответствии с (9) выполняется неравенство

$$\|(\rho S(\xi_0)-Q)^{-1}\|\le 1+\|W(\xi_0)-I\|$$

и значит неравенство

$$|\Delta(\xi_0)|\ge (1+\|W(\xi_0)-I\|)^{-m} \tag{18}$$

Дальнейшие оценки функции $W(\xi)$ основываются на оценках снизу аналитической функции $\Delta(\xi)$, удовлетворяющей (14), (15) и (18). Из неравенства Гарнака для положительной гармонической в $|\xi|<1$ функции $h(\xi)=-\ln|\Delta(\xi)|$ следует, что

$$|\Delta(\xi)|\ge |\Delta(\xi_0)|^{-C(\xi_0)(1+|\xi|)/(1-|\xi|)}, \tag{19}$$

где $C(\xi_0)=(1+|\xi_0|)/(1-|\xi_0|)$. Кроме того,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\ln\frac{1}{|\Delta(e^{i\theta})|}\,d\theta\le 2\pi C(\xi_0)\ln\frac{1}{|\Delta(\xi_0)|}. \tag{20}$$

<u>Замечание.</u> Если матрица-функция $W(\xi)$ не аналитична, а мероморфна в круге $|\xi|<1$, то определитель $\Delta(\xi)$ обращается в ноль в точках $\xi$, являющихся полюсами $W(\xi)$, и таким образом, оценка (19) неприменима. В этой ситуации можно использовать известные оценки снизу для аналитических функций, могущих обращаться в ноль.

4. <u>Теорема I.</u> Если $W(\xi)$ – аналитическая в круге $|\xi|<1$ $m\times m$ матрица-функция, удовлетворяющая неравенству $W(\xi)JW^*(\xi)-J\ge 0$, $(|\xi|<1)$, а $\xi_0$ – некоторая точка единичного круга, то справедливы неравенства

$$\|W(\xi)\|\le A(1+\|W(\xi_0)-I\|)^{\varkappa/(1-|\xi|)}, \quad (|\xi|<1) \tag{21}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\ln\|W(e^{i\theta})\|| \, d\theta \leq A\ln(1+\|W(\xi_0)-I\|) + B, \tag{22}$$

где $A<\infty$, $\varkappa<\infty$ зависят лишь от $m$ и $\xi_0$; $B<\infty$ зависит лишь от $m$.

Доказательство. Неравенство (2I) следует из (I7) и (I8), а (22) – из (I7) и (20).

Теорема 2. Пусть $W(z)$ – аналитическая в полуплоскости $Im\, z>0$ $m\times m$ матрица-функция, удовлетворяющая неравенству $W(z)JW^*(z)-J\geq 0$, $(Im\, z>0)$ и $z_0$ – некоторая точка этой полуплоскости.

Тогда справедливы неравенства

$$\|W(z)\| \leq A(1+\|W(z_0)-I\|)^{\varkappa(|z|^2+1)/y}, \tag{23}$$
$$(z=x+iy,\ y>0);$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln\|W(x)\||}{1+x^2}\, dx \leq A\cdot \ln(1+\|W(z_0-I)\|) + B, \tag{24}$$

где $A<\infty$, $\varkappa<\infty$ зависят лишь от $m$, $z_0$; $B<\infty$ зависит лишь от $m$.

Теорема 2 может быть получена из теоремы I посредством конформного отображения верхней полуплоскости на единичный круг.

Теорема 3. Пусть $W(\xi)$ – аналитическая в круге $|\xi|<1$ $m\times m$ матрица-функция, удовлетворяющая неравенству $W(\xi)JW^*(\xi)-J\geq 0$, $(|\xi|<1)$, и пусть в некоторой точке $\xi_0$ этого круга выполняется неравенство

$$\|W(\xi_0)JW^*(\xi_0)-J\| \leq C. \tag{25}$$

Тогда всюду в единичном круге выполняется неравенство

$$\|W(\xi)JW^*(\xi)-J\| \leq A\cdot(1+C)^{\varkappa/(1-|\xi|)}, \tag{26}$$

где $A<\infty$, $\varkappa<\infty$ зависят лишь от $m$ и $\xi_0$.

Доказательство. Как известно ([I, 5]) любая $J$-растягивающая матрица $W$ допускает $J$-полярное разложение $W=R\cdot U$, где $U$ – $J$-унитарная матрица $(UJU^*=J)$, а $R$ – так называемый $J$-модуль, т.е. $J$-эрмитова $(RJ=JR^*)$ матрица с положительным спектром, для которой $RJR^*=WJW^*$. При этом справедливы неравенства $0\leq RJ-J\leq WJW^*-J$ и значит неравенство

$$\| R-I \| \le \| WJW^* - J \| . \tag{27}$$

Не теряя в общности, можем считать, что матрица $W(\xi_0)$ нормирована на $J$-модуль: такой нормировки можно достичь, переходя от рассмотрения матрицы-функции $W(\xi)$ к рассмотрению матрицы-функции $W(\xi) U_0^{-1}$, где $U_0$ – матрица из $J$-полярного разложения $W(\xi_0) = R_0 \cdot U_0$. При таком переходе выражение $W(\xi) J W^*(\xi)$, которое требуется оценить, не изменится. Согласно (25) и (27) при такой нормировке имеем

$$\| W(\xi_0) - I \| \le C. \tag{28}$$

Неравенство (26) следует теперь из неравенств (21), (28) и тривиальной оценки $\| W(\xi) J W^*(\xi) \| \le \| W(\xi) \|^2$. Разуеееется, константы $A$ и $\varkappa$ в (26) не те, что в (21).

Теорема 4. Пусть $W(z)$ – аналитическая в полуплоскости $Im\, z > 0$ $m \times m$ матрица-функция, удовлетворяющая неравенству $W(z) J W^*(z) - J \ge 0$ $(Im\, z > 0)$, и пусть в некоторой точке $z_0$ этой полуплоскости выполняется неравенство

$$\| W(z_0) J W^*(z_0) - J \| \le C. \tag{29}$$

Тогда всюду в этой полуплоскости выполняется неравенство

$$\| W(z) J W^*(z) \| \le A \, (1+C)^{\varkappa (|z|^2+1)/y} \tag{30}$$

$$(z = x+iy,\ y>0),$$

где $A < \infty$, $\varkappa < \infty$ зависят лишь от $m$ и $z_0$.

5. Целую матрицу-функцию $W(z)$ назовем $J$-внутренней, если выполняются неравенства

$$W(z) J W^*(z) - J \ge 0, \quad (Im\, z > 0),$$
$$W(z) J W^*(z) - J \le 0, \quad (Im\, z < 0).$$

Если $W(z)$ – целая $J$-внутренняя матрица-функция, а $\Phi(z)$ – матрица-функция, определенная для невещественных $z$ формулой

$$\Phi(z) = i \, \frac{W(z) J W^*(z) - J}{z - \bar{z}},$$

а для вещественных $z$ – доопределенная по непрерывности, то $\| \Phi(z) \|$ логарифмически субгармоническая во всей комплексной плоскости функция.

Теорема 5. Пусть $W(z)$ – целая $J$-внутренняя $m \times m$ матрица-функция, а $z_1$ и $z_2$ – две точки, одна из которых лежит в верхней, а другая в нижней полуплоскости, и пусть выполняются неравенства

$$\| W(z_k) J W^*(z_k) - J \| \le C, \quad (k=1,2). \tag{31}$$

Тогда при всех $z$ выполняется неравенство

$$\| \frac{W(z)JW^*(z)-J}{z-\bar z} \| \le A(1+C)^{\varkappa(|z|+1)}, \tag{32}$$

где $A<\infty$, $\varkappa<\infty$ зависят лишь от $m, z_1, z_2$.

Доказательство. Функция $v(z)=\|\Phi(z)\|$ является логарифмически субгармонической во всей комплексной плоскости и согласно теореме 4 допускает оценку*

$$v(z) \le A(1+C)^{\varkappa_1(|z|^2+1)/|y|} \quad (z=x+iy,\ y\ne 0), \tag{33}$$

где $A<\infty$, $\varkappa<\infty$ зависят лишь от $m$, $z_1$, $z_2$. Оценка (33) "портится" при подходе $z$ к вещественной оси, однако логарифмическая субгармоничность оцениваемой функции $v(z)$ во всей комплексной плоскости позволяет эту оценку улучшить. Соответствующий теоретико-функциональный прием связывают с именами Левинсона и Сьеберга (см. [4, 6]).

Пусть $R$, $1\le R<\infty$ – заданное число. Рассмотрим открытый квадрат $Q_R$ с вершинами в точках $\pm 2R$; $\pm 2iR$ и функцию $u(z)$ в $Q_R$

$$u(z)=v(z)\cdot E_R(z), \tag{34}$$

где

$$E_R(z)=|\exp\{-2\alpha(4R^2+1)\left(\frac{1}{2R-z}-\frac{1}{2R+z}\right)\}|,\quad \alpha=\varkappa_1 \ln(1+C). \tag{35}$$

Поскольку функция $v(z)$ – логарифмически субгармоническая, то и функция $u(z)$ – логарифмически субгармоническая внутри $Q_R$. Функция $E_R(z)$ подобрана так, чтобы выполнялись неравенства

а) $E_R(z)\le 1$, $(z\in Q_R)$;

б) $E_R(z)\le \exp\{-\alpha(|z|^2+1)/|y|\}$, $(z\in\partial Q_R')$; (36)

в) $E_R(z)\ge \exp\{-15\alpha R\}$, $|z|\le R$.

Здесь $\partial Q_R'$ – граница квадрата $Q_R$ после удаления из нее точек $\pm 2R$. Так как функция $v(z)$ локально ограничена, то из (34) и (36) следует, что $\sup\limits_{Q_R} u(z)<\infty$, $(z\in Q_R)$. Из (33), (36) и (35) следует, что $u(z)\le A$, $(z\in\partial Q_R')$. Согласно принципу максимума для субгармонической функции $u(z)$ выполняется неравенство $u(z)\le A$, $(z\in Q_R)$ или (34), $v(z)\le A\cdot E(z)^{-1}$, $(z\in Q_R)$.

* Для $z$ из верхней полуплоскости эта оценка следует из теоремы 4 буквально, для $z$ из нижней полуплоскости теорему 4 нужно применять к функции $J$-сжимающей, т.е. $(-J)$-растягивающей, учитывая, что матрица $(-J)$ обладает теми же свойствами (2), что и матрица $J$.

Из последнего неравенства и из (36,$\beta$) следует, что
$$v(z) \le 15\varkappa R, \quad (|z| \le R,\ R > 1). \tag{37}$$

Таким образом, неравенство (32) выполняется с тем же $A$, что и (33) и с $\varkappa_1 = 15\varkappa$. Теорема доказана.

Поскольку для $J$-внутренней $W(z)$ выполняется
$$W(x)JW^*(x) = J, \quad W^*(x)JW(x) = J, \quad (-\infty < x < \infty),$$
то и
$$\dot W(x)JW^*(x) = -W(x)J\dot W^*(x), \quad (-\infty < x < \infty);$$
$$\dot W^*(x)JW(x) = -W^*(x)J\dot W(x), \quad (-\infty < x < \infty),$$
где точкой обозначено дифференцирование по $x$. Делая предельный переход, получаем, что при $-\infty < x < \infty$ выполняются равенства
$$i\,\frac{W(z)JW^*(z)-J}{z-\bar z}\Big|_{z=x} = i\dot W(x)W^{-1}(x)J, \tag{38}$$
$$i\,\frac{W^*(z)JW(z)-J}{z-\bar z}\Big|_{z=x} = iJW^{-1}(x)\dot W(x). \tag{39}$$
Таким образом, неравенство (32) при вещественных $x$ превращается в неравенство
$$\|\dot W(x)W^{-1}(x)\| \le A\cdot(1+C)^{\varkappa(|x|+1)}, \quad (-\infty < x < \infty).$$

Следствие. Если $W(z)$ – целая $J$-внутренняя $m\times m$ матрица-функция, причем $W(0) = I$, а $z_1$ и $z_2$ – две точки, одна из которых лежит в верхней, а другая в нижней полуплоскости и выполняются неравенства (31), то выполняется неравенство
$$\|\dot W(0)\| \le B\,(1+C)^{\varkappa}, \tag{40}$$
где $B < \infty$, $\varkappa < \infty$ зависят лишь от $m$, $z_1$, $z_2$.

6. Пусть $W(z)$ – целая $J$-внутренняя матрица-функция. Если $z$, $z_0$ – произвольные точки комплексной плоскости такие, что $z \ne \bar z$, $z_0 \ne \bar z_0$, то выполняются неравенства Шварца – Пика (см. [3])
$$\left[\begin{array}{c|c} i\,\dfrac{W(z)JW^*(z)-J}{z-\bar z} & \dfrac{W(z)-W(z_0)}{z-z_0} \\ \hline * & i\,\dfrac{W^*(z_0)JW(z_0)-J}{z_0-\bar z_0} \end{array}\right] \ge 0.$$

Если $W(0) = I$, то выполняя в этом неравенстве предельный переход при $z_0 \to 0$, прийдем согласно (39) к неравенству

$$\begin{bmatrix} i\,\dfrac{W(z)JW^*(z)-J}{z-\bar z} & \dfrac{W(z)-I}{z} \\ * & iJ\dot W(0) \end{bmatrix} \geq 0. \qquad (41)$$

Теорема 6. Пусть $W(z)$ – целая $J$-внутренняя $m\times m$ матрица-функция такая, что

$$W(0)=I \qquad (42)$$

и пусть в двух точках $z_1$ и $z_2$, одна из которых лежит в верхней, а другая в нижней полуплоскости, известны оценки $J$-форм:

$$\| W(z_k)JW^*(z_k)-J\| \leq C, \quad (k=1,2). \qquad (43)$$

Тогда при всех $z$ выполняется неравенство

$$\| W(z)\| \leq A(1+C)^{6(|z|+1)}, \quad (\forall z), \qquad (44)$$

где $A<\infty$, $6<\infty$ зависят лишь от $m, z_1, z_2$.

Доказательство. Из неравенства (4I) следует неравенство

$$\left\| \frac{W(z)-I}{z} \right\|^2 \leq \| \dot W(0)\| \cdot \left\| \frac{W(z)JW^*(z)-J}{z-\bar z} \right\|.$$

Оценивая сомножители в правой части последнего неравенства по теореме 5 ((32) и (40)), прийдем к неравенству (44).

7. Пусть $H(t)$ – суммируемая на $[0,l]$ матрица-функция, $J$-неотрицательная при всех $t\in[0,l]$:

$$H(t)J\geq 0, \quad (0\leq t\leq l) \qquad (45)$$

и пусть матрица $W(z)$ задается мультипликативным интегралом

$$W(z)=\int_0^{l} e^{-izH(t)dt} \qquad (46)$$

Матрица-функция $W(z)$ – целая $J$-внутренняя.

Имеем

$$W(0)=I, \quad \dot W(0)=-i\int_0^l H(t)dt.$$

Обозначим $W=W(i)$

$$W=\int_0^l e^{H(t)dt}. \qquad (47)$$

Поскольку

$$WJW^*=W(i)JW^*(i),$$
$$W^{*-1}JW^{-1}=JW(i)JW^*(-i)J$$

и

$$\int_0^1 \|H(t)\|dt \le \int_0^1 sp(H(t)J)dt = sp(i\dot{W}(0)J) \le m\|\dot{W}(0)\|,$$

то из теоремы 5 (при $z_1 = i$ , $z_2 = -i$ ) вытекает

<u>Теорема В.П. Потапова о модуле</u>* ( [I], теорема I0). Пусть $H(t)$ - суммируемая на $[0,1]$ $J$-неотрицательная матрица-функция и пусть матрица $W$ определена мультипликативным интегралом (47).

Если

$$\|WJW^*\| \le C, \quad \|W^{-1*}JW^{-1}\| \le C,$$

то выполняется неравенство

$$\int_0^1 \|H(t)\|dt \le A \cdot C^{\varkappa}, \tag{48}$$

где $A < \infty$ , $\varkappa < \infty$ зависят лишь с $m$.

8. Обозначим

$$E(W) = \sigma_W + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln\|W(x)\|}{1+x^2} dx,$$

где
$$\sigma_W = \overline{\lim} |z|^{-1} \ln \|W(z)\|, \quad (|z| \to \infty).$$

<u>Теорема 7.</u> Для целой $J$-внутренней $m \times m$ матрицы-функции $W(z)$ , заданной мультипликативным интегралом (46) с суммируемым на $[0,1]$ $J$-неотрицательным показателем $H(t)$ : $H(t)J \ge 0$, $(0 \le t \le 1)$ выполняются неравенства

$$E(W) \le A_1 \int_0^1 \|H(t)\|dt + B_1, \tag{49}$$

$$\int_0^1 \|H(t)\|dt \le \exp\{A_2 E(W) + B_2\}, \tag{50}$$

где величины $A_1$, $A_2$, $B_1$, $C_2 < \infty$ зависят лишь от $m$.

Доказательство. Очевидно, что $\sigma_W \le \int_0^1 \|H(t)\|dt$. Так как $\|W(i)\| \le \exp\{\int_0^1 \|H(t)\|dt\}$ , то из теоремы 2 (при $z_0 = i$ ) следует неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln\|W(x)\|}{1+x^2} dx \le A \ln(1 + \exp(\int_0^1 \|H(t)\|dt)) + B.$$

Таким образом, неравенство (49) справедливо. Поскольку

$$\ln\|W(\pm i)\| \le \sigma_W + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln\|W(x)\|}{1+x^2} dx \tag{51}$$

(оценка для субгармонической в полуплоскости функции $\ln\|W(z)\|$ посредством интеграла Пуассона), то и подавно

$$\|W(\pm i)JW^*(\pm i)\| \le \exp\{2E(W)\}. \tag{52}$$

---

* В работе [I] эта теорема приведена в несколько иной, но эквивалентной формулировке.

Неравенство (50) есть следствие (52) и теоремы о модуле.

Замечание. Если $\varphi(\lambda)$ – функция такая, что $\underline{\lim}\, \lambda^{-1} \ln \varphi(\lambda) < 1 \ (\lambda \to +\infty)$, то неравенство

$$\int_0^l \| H(t) \| dt \leq \varphi(E(W)) \tag{53}$$

не может выполняться для всех $W(z)$ вида (46) с $H(t)$, удовлетворяющим (45). Действительно, пусть $E$ – постоянная матрица такая, что $EJ \geq 0 \quad E^2 = 0$ и $\alpha > 0$.

Положим

$$W(z) = I - iz\alpha E = \exp\{-iz\alpha E\}.$$

$W(z)$ имеет вид (46) с $l = 1$ и $H(t) = \alpha E, \ (0 \leq t \leq 1)$.

Имеем

$$\int_0^1 \| H(t) \| dt = \alpha \| E \|; \qquad \sigma_W = 0,$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \| W(x) \|}{1 + x^2} dx = \ln \alpha + O(1), \qquad \alpha \to +\infty$$

и неравенство (53) не может выполняться при больших $\alpha$

Если $\psi$ – функция такая, что $\underline{\lim}\, \lambda^{-1} \psi(\lambda) < 1/2$, $(\lambda \to +\infty)$, то даже неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \| W(x) \|}{1 + \lambda^2} dx \leq \psi\left(\int_0^l \| H(t) \| dt\right) \tag{54}$$

не может выполняться для всех $W(z)$ вида (46) с $H(t)$, удовлетворяющим (45). Действительно, пусть

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Имеем

$$E_k J \geq 0, \ E_k^2 = 0, \ \| E_k \| = 2 \ (k = 1, 2); \quad E_1 + E_2 = 2J.$$

Положим

$$W_n(z) = \left\{ \left(I - iz \frac{\alpha}{2n} E_1\right)\left(I - iz \frac{\alpha}{2n} E_2\right) \right\}^n.$$

$W_n(z)$ – многочлен и значит $\sigma_{W_n} = 0$. Очевидно,

$$\lim_{n \to \infty} W_n(z) = \exp\left\{-iz \frac{\alpha}{2}(E_1 + E_2)\right\} = e^{-iz\alpha J}, \tag{55}$$

$W_n(z)$ имеет вид (46) с $l = 1$, $H(t) = \alpha E_1$,

$$\frac{k-1}{2n} < t < \frac{k}{2n}, \ H(t) = \alpha E_2, \ \frac{k}{2n} < t < \frac{k+1}{2n}$$

и значит

$$\int_0^1 \| H(t) \| dt = \alpha (\| E_1 \| + \| E_2 \|)/2 = 2\alpha.$$

Согласно (51)

$$\ln\|W_n(i)\| \le \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln\|W_n(x)\|}{1+x^2}\,dx.$$

Если при всех $n$ для $W=W_n$ выполняется (54), то и подавно $\ln\|W_n(i)\| \le \psi(2\alpha)$. Устремляя $n\to\infty$, приходим к неравенству $\ln\|\exp(\alpha J)\| \le \psi(2\alpha)$, невозможному при больших $\alpha$, поскольку

$$\ln\|\exp\{\alpha J\}\| = \alpha .$$


I. Потапов В.П. Мультипликативная структура $J$-нерастягивающих матриц-функций. - Тр. Моск.мат. о-ва, 1955, 4, с. 125-236.

2. Гинзбург Ю.П. О $J$-нерастягивающих операторах в гильбертовом пространстве. - В кн.: Науч. зап. Одес. пед. ин-та, 1958, 22, № I, с. 13-19.

3. Ефимов А.В., Потапов В.П. $J$-растягивающие матрицы-функции и их роль в аналитической теории лектрических цепей. - Успехи мат. наук, 1973, 28, № I, с. 65-130.

4. Гурарий В.П. К теореме Н.Левинсона о нормальных семействах аналитических функций. - Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1970, 19, с. 215-220.

5. Потапов В.П. Теорема о модуле I. (Основные понятия. Модуль). - Теория функций, функцион. анализ и их прил. - 1982, № 38, с. 78-92.

6. Мацаев В.И. О росте целых функций, допускающих некоторые оценки снизу. - Докл. АН СССР, 1960, 132, № 2, с. 283-286.


УДК 517.547

И.В.Ковалишина

## ЗАДАЧА ЛЕВНЕРА В СВЕТЕ $J$-ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

В данной статье методы $J$-теории аналитических матриц-функций [2, 3] используются для решения граничной проблемы Неванлинны - Пика (задача Левнера [1]) в матричной постановке.

Как и в традиционной проблеме Неванлинны - Пика с узлами интерполяции внутри области [4] решение задачи органически связано с Основным матричным неравенством (ОМН). Однако своеобразие граничной проблемы (кроме узлов интерполяции, лежащих на границе области $\xi_k$ $(|\xi_k|=1)$ и значений $w_k$ $(I-w_k^* w_k=0)$, задаются еще и величины $\Lambda_k$ $(\Lambda_k^*+\Lambda_k>0)$, тесно связанные с так называемыми модулями отображения

$$\lim_{\substack{\xi=re^{i\alpha_k}\\ r\to 1}} \frac{I-w_k^* w(\xi)}{1-\bar{\xi}_k\xi} = M_k \quad (\xi_k=e^{i\alpha_k})$$

проявляется в модифицированной записи ОМН, а многомерность задаваемых объектов $w_k$, $\Lambda_k$ приводит к некоторому обобщению постановки проблемы по сравнению со скалярным случаем [1].

Матричная задача Левнера формулируется следующим образом. Пусть заданы последовательность точек, лежащих на единичной окружности

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots \quad (\xi_k = e^{i\alpha_k}),$$

последовательность квадратных матриц $m$-го порядка, принадлежащих границе матричного круга

$$w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots \ (I - w_k^* w_k = 0)$$

и последовательность квадратных матриц $m$-го порядка с положительной вещественной частью

$$\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n, \ldots \quad (\Lambda_k^* + \Lambda_k > 0).$$

Отыскивается сжимающая в единичном круге матрица-функция $w(\xi)$

$$I - w^*(\xi) w(\xi) \geq 0, \quad (1 - \bar{\xi}\xi > 0),$$

принимающая в точках $\xi_k$ значения $w_k$

$$\lim_{\xi \to \xi_k} w(\xi) = w_k,$$

модуль отображения которой в точках $\xi_k$

$$\lim_{\substack{\xi = r_k \xi_k \\ r_k \to 1}} \frac{I - w_k^* w(\xi)}{1 - \bar{\xi}_k \xi} = M_k$$

удовлетворяет неравенству

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\Lambda_k^* + \Lambda_k}{2} & M_k \\ M_k^* & \dfrac{M_k^* + M_k}{2} \end{bmatrix} \geq 0.$$

Требуется доказать существование хотя бы одной сжимающей матрицы-функции $w(\xi)$, обладающей указанными свойствами; а когда функций $w(\xi)$ несколько, дать полное описание их совокупности.

## Некоторые сведения об элементарных матрицах-функциях с полюсами на границе единичного круга

Имея ввиду определенную специфику в записи основных соотношений для элементарных $j$-растягивающих матриц-функций, имеющих полюсы на границе области, рассмотрим минимально необходимые сведения из теории таких матриц-функций.

<u>Теорема I.</u> $j$-растягивающая $(j^* = j,\ j^2 = I)$ в единичном круге $|\xi| < 1$ матрица-функция $w(\xi)$, имеющая в точках $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ $(|\xi_k| = 1)$ полюсы с лорановыми разложениями

$$W(\xi)=\frac{c_k}{(\xi-\xi_k)}s_k+\frac{d_k}{(\xi-\xi_k)}s_{k-1}+\cdots,$$

$j$-унитарная в окрестностях точек $\xi_k$ на единичной окружности, удовлетворяет неравенству

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cccc|c} -\xi_1 d_1 j c_1^* & \dfrac{c_1 j c_2^*}{1-\xi_1\bar\xi_2} & \cdots & \dfrac{c_1 j c_n^*}{1-\xi_1\bar\xi_n} & \dfrac{c_1}{\xi_1-\xi} \\ \dfrac{c_2 j c_1^*}{1-\xi_2\bar\xi_1} & -\xi_2 d_2 j c_2^* & \cdots & \dfrac{c_2 j c_n^*}{1-\xi_2\bar\xi_n} & \dfrac{c_2}{\xi_2-\xi} \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\ \dfrac{c_n j c_1^*}{1-\xi_n\bar\xi_1} & \dfrac{c_n j c_2^*}{1-\xi_n\bar\xi_2} & \cdots & -\xi_n d_n j c_n^* & \dfrac{c_n}{\xi_n-\xi} \\ \hline & & * & & \dfrac{w^*(\xi) j w(\xi)-j}{1-\bar\xi\xi} \end{array}\right]\geq 0. \qquad (0)$$

Соотношение $(0)$ называют матричным неравенством отщепления. Это неравенство играет основную роль в отщеплении от $j$-растягивающей матрицы-функции простейших объектов той же природы [3].

Как правило, неравенство $(0)$ применяется совместно с тождеством для блока $A$ :

$$\begin{bmatrix} \dfrac{c_1}{1-\xi_1} \\ \sim\sim \\ \dfrac{c_n}{1-\xi_n} \end{bmatrix} j \begin{bmatrix} \dfrac{c_1^*}{1-\bar\xi_1}, \ldots, \dfrac{c_n^*}{1-\bar\xi_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{I}{1-\xi_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \dfrac{I}{1-\xi_n} \end{bmatrix} A + A \begin{bmatrix} \dfrac{I}{1-\bar\xi_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \dfrac{I}{1-\bar\xi_n} \end{bmatrix} - A \quad (T),$$

Вопросы отщепления мы здесь не затрагиваем. Соотношения $(0)$ и $(T)$ нам понадобятся для выяснения структуры групповой элементарной матрицы-функции $\omega(\xi)$.

Групповой элементарной называется $j$-унитарная на единичной окружности, $j$-растягивающая в единичном круге матрица-функция $\omega(\xi)$, имеющая простые полюсы в точках $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ $(|\xi_k|=1)$.

<u>Теорема 2.</u> Матрица -функция

$$\omega(\xi)=a_0+\frac{a_1}{\xi-\xi_1}+\ldots+\frac{a_n}{\xi-\xi_n} \quad (\omega(1)=I)$$

является элементарной в том и только в том случае, когда выполнены следующие два условия:

$$A=\begin{bmatrix} -\xi_1 b_1 j a_1^* & \dfrac{a_1 j a_2^*}{1-\xi_1\bar\xi_2} & \cdots & \dfrac{a_1 j a_n^*}{1-\xi_1\bar\xi_n} \\ \dfrac{a_2 j a_1^*}{1-\xi_2\bar\xi_1} & -\xi_2 b_2 j a_2^* & \cdots & \dfrac{a_2 j a_n^*}{1-\xi_2\bar\xi_n} \\ \sim & \sim & \sim & \sim \\ \dfrac{a_n j a_1^*}{1-\xi_n\bar\xi_1} & \dfrac{a_n j a_2^*}{1-\xi_n\bar\xi_2} & \cdots & -\xi_n b_n j a_n^* \end{bmatrix} \ge 0, \quad (A)$$

$$b_k = a_0 + \sum_{l\neq k}\frac{a_l}{\xi_k-\xi_l} \qquad (k=1,2,\ldots,n),$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{a_1}{1-\xi_1} \\ \sim\sim\sim \\ \dfrac{a_n}{1-\xi_n}\end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1-\bar\xi_1} \\ \sim\sim\sim \\ \dfrac{1}{1-\bar\xi_n}\end{bmatrix} j. \qquad (B)$$

При этом $j$-форма $\omega(\xi)$ представляется в виде

$$\frac{\omega(\xi)j\omega^*(\xi)-j}{1-\xi\bar\xi} = \left[\frac{1}{\xi-\xi_1},\ldots,\frac{1}{\xi-\xi_n}\right] A \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\bar\xi-\bar\xi_1} \\ \sim\sim\sim \\ \dfrac{1}{\bar\xi-\bar\xi_n}\end{bmatrix}. \qquad (C)$$

Необходимость условий $(A)$ следует из неравенства $(0)$, записанного для $j$-растягивающей матрицы-функции $\omega(\xi)$, а условий $(B)$ – из тождества $\omega(\xi)\omega^{-1}(\xi)\equiv I$, в котором $\omega^{-1}(\xi)$ в силу $j$-унитарности $\omega(\xi)$ на границе вычисляется по формуле

$$\omega^{-1}(\xi) = j\omega^*\left(\frac{1}{\bar\xi}\right)j.$$

Для доказательства достаточности условий $(A)$ и $(B)$ вычисляется $j$-форма $\omega(\xi)j\omega^*(\xi)-j$, преобразующаяся к виду $(C)$ с помощью соотношений $(B)$ и тождества типа $(T)$.

Задача Левнера

I. Основное матричное неравенство задачи (ОМН).

Как и в других интерполяционных задачах [4-6] исследование задачи Левнера уместно свести к изучению ОМН. Сначала решаем усеченную задачу для $n$ условий:

$$\xi_k,\ \omega_k,\ A_k \qquad (k=1,2,\ldots,n).$$

Сейчас справедлива основная

Теорема 3. I. Если сжимающая матрица-функция $\omega(\xi)$ $(I-w^*(\omega)w(\omega)\ge 0,\quad 1-\bar\xi\xi>0)$, такова, что

$$\omega(\xi_k)=\omega_k^*, \quad (\xi_k=e^{i\alpha k}, \ I-\omega_k^*\omega_k=0)$$

и имеет в точках $\xi_k$ конечные модули отображений $\Lambda_k$, то $\omega(\xi)$ удовлетворяет матричному неравенству

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|c} \frac{\Lambda_1^*+\Lambda_1}{2} & \frac{I-\omega_1^*\omega_2}{1-\bar{\xi}_1\xi_2} & \cdots & \frac{I-\omega_1^*\omega_n}{1-\bar{\xi}_1\xi_n} & \frac{I-\omega_1^*\omega(\xi)}{1-\bar{\xi}_1\xi} \\ \frac{I-\omega_2^*\omega_1}{1-\bar{\xi}_2\xi_1} & \frac{\Lambda_2^*+\Lambda_2}{2} & \cdots & \frac{I-\omega_2^*\omega_n}{1-\bar{\xi}_2\xi_n} & \frac{I-\omega_2^*\omega(\xi)}{1-\bar{\xi}_2\xi} \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\ \frac{I-\omega_n^*\omega_1}{1-\bar{\xi}_n\xi_1} & \frac{I-\omega_n^*\omega_2}{1-\bar{\xi}_n\xi_2} & \cdots & \frac{\Lambda_n^*+\Lambda_n}{2} & \frac{I-\omega_n^*\omega(\xi)}{1-\bar{\xi}_n\xi} \\ \hline & * & & & \frac{I-\omega^*(\xi)\omega(\xi)}{1-\bar{\xi}\xi} \end{array}\right] \geqslant 0. \quad (L)$$

2. Наоборот, если матрица-функция $w(\xi)$ удовлетворяет неравенству $(L)$, то $w(\xi)$ сжимающая; $w(\xi_k)=w_k$, а модуль $M_k$ отображения $w(\xi)$ в точке $\xi_k$ удовлетворяет неравенству

$$\begin{bmatrix} \frac{\Lambda_k^*+\Lambda_k}{2} & M_k \\ M_k^* & \frac{M_k^*+M_k}{2} \end{bmatrix} \geqslant 0.$$

Доказательство этой и последующих теорем можно найти в /10/.

Применяя методику, разработанную при решении других интерполяционных задач /7/, приходим к

<u>Теореме 4</u>. Если информационный блок $A$ обратим, то общее решение усеченной задачи Левнера представляется в виде дробно-линейного преобразования произвольной голоморфной сжимающей неособенной пары $\begin{bmatrix} p(\xi) \\ q(\xi) \end{bmatrix}$

$$w(\xi)=[\alpha(\xi)p(\xi)+\beta(\xi)q(\xi)][\gamma(\xi)p(\xi)+\delta(\xi)q(\xi)]^{-1}, \tag{1}$$

матрица коэффициентов которого

$$A_n(\xi)\begin{pmatrix} \alpha(\xi) & \beta(\xi) \\ \gamma(\xi) & \delta(\xi) \end{pmatrix} = I+\left(\frac{1}{\xi}-1\right)\begin{bmatrix} b_n^*(\tilde{\xi}) \\ c_n^*(\tilde{\xi}) \end{bmatrix} A^{-1}(b_n(1), c_n(1)); \tag{2}$$

$$b_n(\xi)=\begin{bmatrix} \frac{-W_1^*}{1-\bar{\xi}_1\xi} \\ \sim \sim \sim \\ \frac{-W_n^*}{1-\bar{\xi}_n\xi} \end{bmatrix}, \qquad c_n(\xi)=\begin{bmatrix} \frac{-I}{1-\bar{\xi}_1\xi} \\ \sim \sim \sim \\ \frac{-I}{1-\bar{\xi}_n\xi} \end{bmatrix}, \ \tilde{\xi}=\frac{1}{\bar{\xi}}, \ A_n(1)=I$$

строится по данным задачи и является $j$-растягивающей в единичном круге $|\xi|<1$, $j$-унитарной на его границе групповой матрицей-функцией полного ранга с простыми полюсами в точках $\xi_k$ $(\xi_k = e^{i\alpha_k}$, $j=\begin{pmatrix} -I_m & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix})$.

Замечание. Термин "групповая матрица-функция полного ранга" нуждается в пояснении.

Имеет место общий факт: для любой $j$-растягивающей матрицы-функции $\left(j=\begin{pmatrix} -I_q & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix}\right) V(\xi)$ ранг старшего коэффициента лоранового разложения

$$V(\xi)=\frac{c_k}{(\xi-\xi_k)^{s_k}}+\ldots \ (|\xi_k|=1)$$

в окрестности некоторого полюса $\xi_k$ не превосходит $\min(p,q)$:

$$\operatorname{rang} c_k \leq \min(p,q).$$

Из него, в частности вытекает, что ранги вычетов $a_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ произвольной групповой элементарной матрицы-функции

$$\omega(\xi)=a_0+\frac{a_1}{\xi-\xi_1}+\ldots+\frac{a_n}{\xi-\xi_n} \ (|\xi_k|=1)$$

при $j=\begin{pmatrix} -I_m & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$ не превосходит $m$:

$$\operatorname{rang} a_k \leq m.$$

Несложные выкладки позволяют проверить, что ранги вычетов построенной групповой матрицы-функции

$$A_n(\xi)=I+\left(\frac{1}{\xi}-1\right)\begin{pmatrix} b_n^*(\tilde\xi) \\ c_n^*(\tilde\xi) \end{pmatrix} A^{-1}[b_n(1), c_n(1)]j=a_0+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\xi-\xi_k}$$

максимальны:

$$\operatorname{rang} a_k = m \quad (k=1,2,\ldots,n).$$

Именно такие матрицы-функции будем называть матрицами-функциями полного ранга.

2. В построении общего решения усеченной задачи Левнера основную роль играет матрица коэффициентов $A(\xi)$ дробно-линейного преобразования (I). $A(\xi)$ строится по данным задачи, является объектом $J$-теории полного ранга и имеет специальный вид (2).

Естественно поставить вопрос.

Пусть

$$\omega(\xi)=a_0+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\xi-\xi_k} \quad (\omega(1)=I, \ |\xi_k|=1)$$

– произвольная групповая элементарная матрица-функция полного ранга. Как этот объект $J$-теории связан с задачей Левнера с узлами интерполяции в точках $\xi_k$ ?

Ответ на поставленный вопрос по существу содержится в следующем утверждении:

Теорема 5 (о параметризации).

Для каждой групповой элементарной матрицы-функции полного ранга

$$\omega(\xi) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\xi - \xi_k} \quad (\omega(1) = I, \ |\xi_k| = 1)$$

с полюсами $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ на границе единичного круга однозначно определяются "параметры"

$$W_1, W_2, \ldots, W_n; \ \Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n,$$

являющиеся квадратными матрицами $m$ -го порядка, удовлетворяющими условиям

$$I - W_k^* W_k = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n);$$

$$\Lambda_k^* + \Lambda_k > 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n);$$

$$A_n = \begin{bmatrix} \dfrac{\Lambda_1^* + \Lambda_1}{2} & \dfrac{I - W_1^* W_2}{1 - \bar\xi_1 \xi_2} & \cdots & \dfrac{I - W_1^* W_n}{1 - \bar\xi_1 \xi_n} \\ \dfrac{I - W_2^* W_1}{1 - \bar\xi_2 \xi_1} & \dfrac{\Lambda_2^* + \Lambda_2}{2} & \cdots & \dfrac{I - W_2^* W_n}{1 - \bar\xi_2 \xi_n} \\ \sim & \sim & \sim & \sim \\ \dfrac{I - W_n^* W_1}{1 - \bar\xi_n \xi_1} & \dfrac{I - W_n^* W_2}{1 - \bar\xi_n \xi_2} & \cdots & \dfrac{\Lambda_n^* + \Lambda_n}{2} \end{bmatrix} > 0$$

такие, что $\omega(\xi)$ допускает представление

$$\omega(\xi) = I + \left(\frac{1}{\xi} - 1\right) \begin{bmatrix} b_n^*(\bar\xi) \\ c_n^*(\bar\xi) \end{bmatrix} A_n^{-1} (b_n(1), c_n(1)) J, \tag{3}$$

$$b_n(\xi) = -\begin{bmatrix} \dfrac{W_1^*}{1 - \bar\xi_1 \xi} \\ \sim \ \sim \ \sim \\ \dfrac{W_n^*}{1 - \bar\xi_n \xi} \end{bmatrix}, \quad c_n(\xi) = -\begin{bmatrix} \dfrac{I}{1 - \bar\xi_1 \xi} \\ \sim \ \sim \ \sim \\ \dfrac{I}{1 - \bar\xi_n \xi} \end{bmatrix}.$$

Наоборот, любая матрица-функция указанного вида является групповой элементарной функцией полного ранга.

Доказательство теоремы ничем принципиально не отличается от доказательства аналогичной теоремы в работе [7] и поэтому в статье не приводится. Вместе с тем эта теорема чрезвычайно важна тем, что она свидетельствует об адекватности объекта $J$-теории групповой элементарной матрицы-функции $\omega(\xi)$ полного ранга с полюсами на границе $(|\xi_k|=1)$ – интерполяционной задаче Левнера. Действительно, имея $\omega(\xi)$, определяем параметры $w_k$, $\Lambda_k$ и формулируем задачу Левнера.

## Пошаговый процесс

Наметим в обзорном порядке основные этапы пошагового решения задачи, когда последовательно задаются одно, два и т.д. из бесконечного множества интерполяционных условий.

При этом будем считать, что все

$$A_n = \begin{bmatrix} \dfrac{\Lambda_1^* + \Lambda_2}{2} & \dfrac{I - w_1^* w_n}{1 - \bar{\xi}_1 \xi_n} \\ \tilde{\dfrac{I - w_n^* w_1}{1 - \bar{\xi}_n \xi_1}} & \tilde{\dfrac{\Lambda_n^* + \Lambda_n}{2}} \end{bmatrix} > 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

строго положительны.

I. Каждая двучленная элементарная матрица-функция полного ранга с простым полюсом на границе $|\xi_0| = 1$, нормированная в точке $\xi = 1$ к $I$, может быть записана в виде

$$B_0(\xi) = I + \frac{1 - \xi}{(\xi - \xi_0)(1 - \bar{\xi}_0)} \varepsilon_0 ; \tag{4}$$

$$\varepsilon_0 = \begin{pmatrix} w_0 \\ I \end{pmatrix} \left( \frac{\Lambda_0^* + \Lambda_0}{2} \right)^{-1} [w_0^*, I] j ;$$

2. Если

$$I - w_0^* w_0 \quad 0, \ \Lambda_0^* + \Lambda_0 > 0, \ j\varepsilon_0 \geq 0, \ \varepsilon_0^2 = 0, \tag{5}$$

$$B_1(\xi) = I + \left(\frac{1}{\xi} - 1\right) \begin{pmatrix} b_1^*(\tilde{\xi}) \\ c_1^*(\tilde{\xi}) \end{pmatrix} \Lambda_1^{-1} [b_1(1), c_1(1)] j = I + \left(\frac{1}{\xi} - 1\right) \begin{bmatrix} \dfrac{\xi w_1}{\xi - \xi_1} \\ \dfrac{\xi I}{\xi - \xi_1} \end{bmatrix} \left( \frac{\Lambda_1^* + \Lambda_1}{2} \right) \left( \frac{w_1^*}{1 - \bar{\xi}_1}, \frac{I}{1 - \bar{\xi}_1} \right) j = \begin{pmatrix} \alpha_1(\xi) & \beta_1(\xi) \\ \gamma_1(\xi) & \delta_1(\xi) \end{pmatrix}$$

элементарная матрица-функция полного ранга с простым полюсом в точке $\xi_1 (|\xi_1| = 1)$, а $w_1(\xi)$ – произвольная сжимающая матрица-функция, то дробно-линейное преобразование

$$W(\xi) = [\alpha_1(\xi) w_1(\xi) + \beta_1(\xi)][\gamma_1(\xi) w_1(\xi) + \delta_1(\xi)]^{-1} = B_1(\xi)\{w_1(\xi)\}$$

определяет сжимающую матрицу-функцию $W(\xi)$, являющуюся общим решением интерполяционной задачи Левнера

$$W(\xi_1) = w_1, \quad \begin{pmatrix} \dfrac{\Lambda_1^* + \Lambda_1}{2} & M_1 \\ M_1^* & \dfrac{M_1^* + M_1}{2} \end{pmatrix} \geq 0$$

с одним узлом.

3. Общий вид сжимающих матриц-функций $W(\xi)$, удовлетворяющих любому конечному числу первых условий

$$W(\xi_k)=W_k, \quad \begin{pmatrix} \frac{\Lambda_k^*+\Lambda_k}{2} & M_k \\ M_k^* & \frac{M_k^*+M_k}{2} \end{pmatrix} \geq 0 \quad (k=1,2,\dots,n),$$

представим в форме суперпозиции дробно-линейных преобразований

$$W(\xi)=B_1(\xi)\{B_2(\xi)\{\dots (B_n(\xi)\{W_n(\xi)\}\}\dots\}\};$$

где $W_n(\xi)$ – произвольная сжимающая матрица-функция. Матрица коэффициентов результирующего дробно-линейного преобразования равна произведению элементарных множителей полного ранга

$$B_1(\xi)B_2(\xi)\ \dots\ B_n(\xi), \tag{6}$$

$$B_k(\xi)=I+\left(\frac{1}{\xi}-1\right)\begin{bmatrix} \frac{\xi W_k^{(k)}}{\xi-\xi_k} \\ \frac{\xi I}{\xi-\xi_k} \end{bmatrix}\left(\frac{\Lambda_k^{(k)*}+\Lambda_k^{(k)}}{2}\right)^{-1}\left[\frac{W_k^{(k)*}}{1-\bar\xi_k}, \frac{I}{1-\bar\xi_k}\right]j,$$

где матрицы $W_k^{(k)}, \Lambda_k^{(k)}$,
так называемые параметры Шура, последовательно находятся по формулам

$$W_k^{(k)}=B_{k-1}^{-1}(\xi_k)\{B_{k-2}^{-1}(\xi_k)\{\dots\{B_1^{-1}(\xi_k)\{W_k\}\}\dots\}\};$$

$$\lim_{\substack{\xi=r_k\xi_k \\ r_k\to 1}} \frac{I-W_k^*(\xi)W_k(\xi)}{1-\bar\xi\xi}=\frac{\Lambda_k^{(k)*}+\Lambda_k^{(k)}}{2}>0, \quad (k=2,3,\dots,n);$$

$$W_1^{(1)}=W_1,\ \Lambda_1^{(1)}=\Lambda_1.$$

Таким образом, постановке любой задачи Левнера удовлетворяющей условию $\Lambda_n>0$ $(n=1,2,\dots)$, соответствует бесконечное произведение двучленных элементарных матриц-функций полного ранга

$$B_1(\xi)B_2(\xi)\ \dots\ B_n(\xi)\dots, \tag{7}$$

$n$-ое частичное произведение которого

$$A_n(\xi)=B_1(\xi)B_2(\xi)\dots B_n(\xi)^*$$

является матрицей коэффициентов дробно-линейного преобразования произвольной сжимающей функции, дающего общее решение усеченной проблемы. Справедливо и обратное утверждение. В самом деле, зададим произвольное бесконечное произведение двучленных элементарных матриц-функций полного ранга с полюсами в различных точках единичной окружности $|\xi_k|=1$

---

* Обозначение $\prod_{k=1}^{n} B_k(\xi)=A_n(\xi)$ не случайно. Доказано, что матрица-функция $A_n(\xi)$ разлагается в произведение множителей $B_k(\xi)$ вида (6).

$$B_1(\xi) B_2(\xi) \dots B_n(\xi) \dots$$

Записывая каждый из них в параметризованном виде (4)

$$B_k(\xi) = I + \frac{1-\xi}{(\xi-\xi_k)(1-\bar{\xi}_k)} \begin{bmatrix} w_k^{(k)} \\ I \end{bmatrix} \left( \frac{\Lambda_k^{(k)*} + \Lambda_k^{(k)}}{2} \right)^{-1} [w_k^{(k)*}, I] i,$$

$$I - w_k^{(k)*} w_k^{(k)} = 0,$$

определим две матрицы:

унитарную

$$w_k^{(k)} \; (I - w_k^{(k)*} w_k^{(k)} = 0, \; k = 1, 2, \dots)$$

и

позитивную

$$\Lambda_k^{(k)} \; (\Lambda_k^{(k)*} + \Lambda_k^{(k)} > 0, \; k = 1, 2, \dots).$$

По ним строим унитарные матрицы

$$w_k = B_1(\xi_k) \{ B_2(\xi_k) \{ \dots \{ B_{k-1}(\xi_k) \{ w_k^{(k)} \} \} \dots \} \};$$
$$(I - w_k^* w_k = 0, \quad k = 2, 3, \dots; \; w_1^{(1)} = w_1)$$

и строго позитивные матрицы

$$\frac{\Lambda_k^* + \Lambda_k}{2} = \lim_{\substack{\xi = r\xi_k \\ r \to 1}} \frac{I - w^*(\xi) w(\xi)}{1 - \bar{\xi}\xi} \left( \frac{\Lambda_k^* + \Lambda_k}{2} > 0, \; k = 2, 3, \dots; \; \Lambda_1^{(1)} = \Lambda_1 \right),$$

где

$$w(\xi) = B_1(\xi) \{ B_2(\xi) \{ \dots \{ B_{k-1}(\xi) \{ w_k(\xi) \} \} \dots \} \}, \; k = 2, 3, \dots,$$

а $w_k(\xi)$ – сжимающая матрица-функция, для которой

$$\lim_{\substack{\xi = r\xi_k \\ r \to 1}} \frac{I - w_k^*(\xi) w_k(\xi)}{1 - \bar{\xi}\xi} = \frac{\Lambda_k^{(k)*} + \Lambda_k^{(k)}}{2} > 0, \quad w_k(\xi_k) = w_k^{(k)}.$$

Можно показать, что все информационные блоки $A_n$, построенные по матрицам $w_k$, $\Lambda_k$, строго положительны.

Имея последовательности

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots, \; 1 - \bar{\xi}_k \xi_k = 0;$$
$$w_1, w_2, \dots, w_n, \dots, \; I - w_k^* w_k = 0;$$
$$\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n, \dots, \; \Lambda_k^* + \Lambda_k > 0$$

можно формулировать задачу Левнера.

Тем самым показано, что задача Левнера со строго положительными информационными блоками $A_n > 0$ $(n = 1, 2, \dots)$ адекватна заданию бесконечного произведения двучленных элементарных матриц-функций полного ранга с полюсами в узлах интерполяции.

Исследовать проблему Левнера - значит изучить вопросы, связанные со сходимостью или расходимостью этого бесконечного произведения.

I. Nevanlinna R. Über beschränkte analytische Funktionen. - Ann. Acad. Sci. Fenn., 1929, N 32, p. 1-75.
2. Потапов В.П. Мультипликативная структура $J$-нерастягивающих матриц-функций. - Тр. Моск. мат.об-ва, 1955, 4, с. I25-236.
3. Ефимов А.В., Потапов В.П. $J$-растягивающие матрицы-функции и их роль в теории электрических цепей - Успехи мат.наук, 1973, 28, № I, с. 65-I30.
4. Ковалишина И.В., Потапов В.П. Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны - Пика. - Докл. АН АрмССР, I974, 59, № I, с. I7-22.
5. Ковалишина И.В. $J$-растягивающие матрицы-функции в задаче Каратеодори. - Там же, № 3, с.I29-I35.
6. Ковалишина И.В. $J$-растягивающие матрицы-функции и классическая проблема моментов. - Там же, I975, 60, № I, с. 3-I0.
7. Ковалишина И.В. Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач. - Изв. АН СССР, I98I, 279, № I2, с. 25-80.
8. Орлов С.А. О сходимости и характере расходимости монотонных семейств аналитических $J$-сжимающих матриц-функций. - Докл. АН АрмССР, I974, 59, № 4, с. I93-I98.
9. Ковалишина И.В., Потапов В.П. Радиусы круга Вейля в матричной проблеме Неванлинны - Пика. - В кн.: Теория операторов в функциональных пространствах и ее приложения. Киев : Наук. думка, I98I, с. 25-49.
I0. Ковалишина И.В. Граничная проблема Неванлинны - Пика - М. : I98I, - 39 с.-(Рукопись деп. в ВИНИТИ; № 3I04-8I).

УДК 5I7.946

Д.Ш.Лундина

## ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ХАРТМАНА - ПАТНАМА

Известная теорема Хартмана - Патнама утверждает, что длины лакун в непрерывной части спектра оператора

$$L \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + q(x) \quad (-\infty < x < \infty) \tag{I}$$

стремятся к нулю на бесконечности, если вещественный потенциал $q(x)$ ограничен и равномерно непрерывен [I]. В настоящей работе эта теорема доказывается для более широкого класса потенциалов.

Длину лакуны в непрерывной части спектра оператора (I) с центром в точке $\mu$ условимся обозначать через $d(\mu)$. Для оценки $d(\mu)$ воспользуемся следующим результатом качественного спектрального анализа:

$$d(\mu) \le \varliminf_{n\to\infty} \|y_n\|^{-1} \|(L-\mu)y_n\|, \tag{2}$$

где $y_n(x)$ произвольная последовательность попарно ортогональных функций из области определения оператора $L$ [2].

<u>Лемма</u>. Если вещественный потенциал $q(x)$ локально суммируем с квадратом и для некоторого $h>0$ существует последовательность

непересекающихся и неограниченно расширяющихся интервалов $\Delta_n=(a_n-l_n, a_n+l_n)$ такая, что

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sup_{|y|\le 1}\left\{\frac{1}{2l_n}\int_{a_n-l_n}^{a_n+l_n}|q(x+yh)-q(x)|^2dx+\int_{a_n-h}^{a_n+h}|q(x+yl_n)|^2dx\right\}^{1/2}=\omega(h)<\infty, \tag{3}$$

то при всех $\mu>0$

$$d(\mu)\le\omega(h)\left[1+\frac{1}{2\sqrt{\mu h}}+\frac{\omega(h)}{8\mu h}\right]. \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varphi(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям

$$0\le\varphi(x)\le 1\ (-\infty<x<\infty),\quad \varphi(x)=\begin{cases}0 & x\le 0;\\ 1 & x\ge 1;\end{cases}$$

$$\varphi_n(x)=\varphi(x-a_n+l_n)\cdot\varphi(-x+a_n+l_n);$$

$$q_h(x)=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}q(x+t)\,dt;$$

$$l(x,\mu)=\exp\left\{i\lambda x+\frac{1}{2i\lambda}\int_0^x q_h(t)\,dt\right\},$$

где $\lambda=\sqrt{\mu}$. Рассмотрим последовательность функций

$$y_n(x,\mu)=l(x,\mu)\varphi_n(x).$$

Поскольку интервалы $\Delta_n=(a_n-l_n, a_n+l_n)$ не пересекаются, а $\varphi_n(x)\equiv 0$ при $x\bar{\in}\Delta_n$, то функции $y_n(x,\mu)$ финитны, принадлежат области определения оператора $L$ и попарно ортогональны.

Действуя на $y_n(x,\mu)$ оператором $(L-\mu)$, получаем

$$(L-\mu)y_n(x,\mu)=-\left\{\varphi_n''(x)+2\varphi_n'(x)\left(i\sqrt{\mu}+\frac{q_h(x)}{2i\sqrt{\mu}}\right)\right\}e(x,\mu)+\left\{\frac{q_h^2(x)}{4\mu}-\frac{q_h'(x)}{2i\sqrt{\mu}}+\right.$$

$$\left.+q(x)-q_h(x)\right\}y_n(x,\mu).$$

Из вещественности потенциала $q_h(x)$ и числа $\lambda=\sqrt{\mu}$ следует, что $|e(x,\mu)|=1$, $|y_n(x,\mu)|\le 1$, а из определения функции $\varphi_n(x)$ следует также, что $y_n(x,\mu)=0$ при $x\bar{\in}\Delta_h$, $\varphi_n'(x)=\varphi_n''(x)=0$ при $x\in(a_n-l_n+1, a_n+l_n-1)$ или $x\bar{\in}\Delta_n$, причем $|\varphi_n'(x)|\le C, |\varphi_n''(x)|\le C$ при всех $x$, где константа $C$ не зависит от $n$. Поэтому

$$\|(L-\mu)y_n(x,\mu)\|\le C\sqrt{2}\left[1+2\sqrt{\mu}+\frac{\|q_h(x)\|_{n,1}}{\sqrt{2\mu}}\right]+\frac{\|q_h(x)\|_n}{4\mu}\max_{x\in\Delta_n}|q_h(x)|+$$

$$+\frac{\|q_h'(x)\|_n}{2\sqrt{\mu}}+\|q(x)-q_h(x)\|_n, \tag{5}$$

где

$$\|f\|_n^2=\int_{a_n-l_n}^{a_n+l_n}|f(x)|^2dx;\quad \|f\|_{n,1}^2=\int_{a_n-l_n}^{a_n-l_n+1}|f(x)|^2dx+\int_{a_n+l_n-1}^{a_n+l_n}|f(x)|^2dx.$$

С другой стороны, поскольку при $x\in(a_n-l_n+1,\ a_n+l_n-1)$ $|y_n(x,\mu)|=|e(x,\mu)|=1$, то

$$\|y_n(x,\mu)\|\geq\sqrt{2(l_n-1)}. \tag{6}$$

Оценим теперь $\max\limits_{x\in\Delta_n}|q_h(x)|$, $\|q_h(x)\|_n$, $\|q_h(x)\|_{n,1}$, $\|q_h'(x)\|_n$, $\|q(x)-q_h(x)\|_n$, используя условие (3). Заметим, что из этого условия вытекает справедливость неравенств

$$\sup_{y\in\Delta_n-h}\int^{h}|q(t+y)|^2dt\leq[\omega(h)+\varepsilon_n]^2, \tag{7}$$

$$\sup_{|y|\leq h}\|q(x+y)-q(x)\|_n^2\leq[\omega(h)+\varepsilon_n]^2 2l_n, \tag{8}$$

где $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0.$

Согласно определению функции $q_h(x)$

$$|q_h(x)|\leq\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}|q(x+t)|dt\leq\Big[\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}|q(x+t)|^2dt\Big]^{1/2};$$

$$q_h'(x)=\frac{1}{2h}[q(x+h)+q(x-h)];$$

$$\|q_h'(x)\|_n\leq\frac{1}{2h}\{\|q(x+h)-q(x)\|_n+\|q(x)-q(x-h)\|_n\};$$

$$q_h(x)-q(x)=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}[q(x+t)-q(x)]dt;\quad |q_h(x)-q(x)|\leq\Big\{\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}|q(x+t)-q(x)|^2dt\Big\}^{1/2};$$

$$\|q_h(x)-q(x)\|_n^2\leq\frac{1}{2h}\int_{a_n-l_n}^{a_n+l_n}dx\int_{-h}^{h}|q(x+t)-q(x)|^2dt\leq$$

$$\leq\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\|q(x+t)-q(x)\|_n^2dt\leq\sup_{|t|\leq h}\|q(x+t)-q(x)\|_n^2.$$

Отсюда, используя неравенства (7), (8), находим, что

$$\max_{x\in\Delta_n} |q_h(x)| \le \frac{1}{\sqrt{2h}}\,[\omega(h)+\varepsilon_n];$$

$$\|q_h(x)\|_{n,1} \le \frac{1}{\sqrt{h}}\,[\omega(h)+\varepsilon_n];$$

$$\|q_h(x)\|_n \le \sqrt{\frac{l_n}{h}}\,[\omega(h)+\varepsilon_n];$$

$$\|q_h'(x)\|_n \le \sqrt{\frac{2l_n}{h}}\,[\omega(h)+\varepsilon_n];$$

$$\|q_h(x)-q(x)\|_n \le \sqrt{2l_n}\,[\omega(h)+\varepsilon_n].$$

Из этих оценок и неравенств (5), (6) следует, что

$$\frac{\|(L-\mu)y_n(x,\mu)\|}{\|y_n(x,\mu)\|} \le \frac{C}{\sqrt{l_n-1}}\Big\{1+2\sqrt{\mu}+\frac{1}{\sqrt{2h\mu}}(\omega(h)+\varepsilon_n)\Big\}+\sqrt{\frac{l_n}{l_n-1}}\,[\omega(h)+\varepsilon_n]\times$$

$$\times\Big[1+\frac{1}{2\sqrt{\mu h}}+\frac{1}{8\mu h}(\omega(h)+\varepsilon_n)\Big],$$

и значит

$$\varliminf_{n\to\infty} \|y_n(x,\mu)\|^{-1}\|(L-\mu)y_n(x,\mu)\| \le \omega(h)\Big[1+\frac{1}{2\sqrt{\mu h}}+\frac{\omega(h)}{8\mu h}\Big],$$

откуда согласно (2) вытекает справедливость доказываемой леммы.

Устремляя в неравенстве (4) $\mu\to+\infty$, находим, что $\varlimsup_{\mu\to\infty} d(\mu)\le\omega(h)$. Поскольку функция $\omega(h)$ монотонно убывает, существует предел $\omega(+0)=\lim_{h\to+0}\omega(h)$, для которого, очевидно, тоже справедливо неравенство

$$\varlimsup_{\mu\to+\infty} d(\mu)\le\omega(+0).$$

Отсюда вытекает

<u>Теорема</u>. Если вещественная функция $q(x)$ удовлетворяет условию (3) и $\omega(+0)=\lim_{h\to+0}\omega(h)=0$, то длины лакун в спектре оператора (I) стремятся к нулю на бесконечности.

Эта теорема является основным результатом настоящей работы.

<u>Замечание.</u> Условиям теоремы удовлетворяют, например, любые периодические потенциалы, суммируемые с квадратом на периоде, так же как любые ограниченные и равномерно-непрерывные на вещественной оси потенциалы.

I. Hartman P., Patnam C.R. The gaps in the essential spectra of wave equations.- Amer.J.Math., 1950, 72, p.849-862.
2. Глазман И.М. Прямые методы качественного спектрального анализа. – М. : Физматгиз, I963. – 339 с.

УДК 517.5

И.В.Михайлова

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ $J$-ВНУТРЕННЕЙ МАТРИЦЫ-ФУНКЦИИ

I. Одним из основных результатов $J$-теории В.П.Потапова является теорема о мультипликативной структуре $J$-растягивающей аналитической матрицы-функции. Матрица $J$ – $m \times m$ матрица, удовлетворяющая условиям

$$J = J^*, \; J^2 = I, \tag{I}$$

где $I$ – единичная $m \times m$ матрица. Напомним, что матрица $\mathfrak{A}$ называется $J$-растягивающей, если $\mathfrak{A}^* J \mathfrak{A} - J \geq 0$ (или, что эквивалентно, $\mathfrak{A} J \mathfrak{A}^* - J \geq 0$ ) и $J$-унитарной, если $\mathfrak{A}^* J \mathfrak{A} = J$ (или, что то же самое, $\mathfrak{A} J \mathfrak{A}^* = J$ ).

Сформулируем частный случай теоремы В.П.Потапова, относящийся к так называемым целым $J$-внутренним матрицам-функциям.

Определение. Целая $m \times m$ матрица-функция $\mathfrak{A}(z)$ называется $J$-внутренней, если она $J$-растягивающая в верхней полуплоскости, т.е. выполняется

$$\mathfrak{A}^*(z) J \mathfrak{A}(z) - J \geq 0; \qquad (\operatorname{Im} z > 0) \tag{2}$$

и $J$-унитарна на вещественной оси (т.е. $\mathfrak{A}^*(z) J \mathfrak{A}(z) = J \; (z = \bar{z})$ ).

Теорема (см.[1]). Целая $J$-внутренняя матрица-функция $\mathfrak{A}(z)$ представима мультипликативным интегралом

$$\mathfrak{A}(z) = \overset{\curvearrowright}{\int_0^l} e^{-izH(t)dt} \mathfrak{A}(0), \tag{3}$$

где $l \in [0, \infty)$, а $H(t)$ – некоторая суммируемая на $(0, l)$ $m \times m$ матрица-функция, удовлетворяющая условию $H(t)J \geq 0$, $t \in (0, l)$.

Функция $H(t)$, фигурирующая в (3), называется показателем мультипликативного интеграла.

Вопрос о единственности мультипликативного разложения (3), т.е. вопрос о том, определяется ли однозначно показатель $H(t)$ мультипликативного интеграла (3) матрицей-функцией $\mathfrak{A}(z)$, является сложным. Этот вопрос окончательно решен только для 2x2 матриц $\mathfrak{A}(z)$ де Бранжем (см. [2] и ссылки там на более ранние статьи этого автора). Де Бранж показал, что при естественных условиях нормировки показатель $H(t)$ в (3) определяется 2x2 матрицей $\mathfrak{A}(z)$ однозначно.

Доказательство этой теоремы единственности, данное де Бранжем, является результатом длинной цепочки тонких аналитических построений и использует глубокие средства теории целых функций.

В данной работе предлагается подход к вопросам единственности мультипликативного разложения целых (и не только целых) аналитических $J$-растягивающих матриц-функций, основанный на рассмотрении связанных с этими матрицами-функциями кругов Вейля.

Методом кругов Вейля здесь дается простое доказательство теоремы единственности де Бранжа в частном случае $J$-внутренней 2x2 матрицы-функции $\mathfrak{A}(z)$ вида

$$\mathfrak{A}(z)=e^{-izA_1}e^{-izA_2}\ldots e^{-izA_n}, \tag{4}$$

где $A_j$ $(j=1,2,\ldots,n)$ – постоянные $J$-положительные $(A_jJ\geq 0)$ матрицы.

Вопрос о представлении матрицы $\mathfrak{A}(z)$ в виде (4) является существенным омментом $J$-теории. Здесь нами по сути решается задача отщепления целых дискретных множителей $e^{-izA}$ от матрицы-функции. Эта задача при рассмотрении классических интерполяционных проблем в рамках $J$-теории играет ту же роль, что и задача об отщеплении множителей Бляшке – Потапова в дробно-рациональном случае.

Матрицы-функции вида $e^{-izA}$ в дальнейшем называются элементарными множителями. Для удобства будем рассматривать конкретную матрицу.

$$J=\begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Это не приводит к потере общности, поскольку любая 2x2 матрица $J, J\neq\pm I$ со свойствами (I) унитарно эквивалентна (5).

2. Напомним понятие круга Вейля $W\{\mathfrak{A}\}$, связанного с произвольной $J$-растягивающей матрицей $\mathfrak{A}$ $(\mathfrak{A}J\mathfrak{A}^*-J\geq 0)$.

Матрица $\mathfrak{A}$ с коэффициентами

$$\mathfrak{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{6}$$

порождает дробно-линейное преобразование

$$w=(a\omega+b)(c\omega+d)^{-1} \tag{7}$$

произвольного параметра $\omega$. Причем при суперпозиции дробно-линейных преобразований соответственные матрицы коэффициентов перемножаются. Дробно-линейное преобразование (7) переводит верхнюю полуплоскость в круг. Если матрица $\mathfrak{A}$ $J$-растягивающая, то данный круг будет лежать в верхней полуплоскости.

<u>Определение</u>. Кругом Вейля $W\{\mathfrak{A}\}$ $J$-растягивающей матрицы $\mathfrak{A}$ (6) называется образ дробно-линейного преобразования (7) с матрицей коэффициентов $\mathfrak{A}$, когда параметр $\omega$ пробегает верхнюю полуплоскость: $Im\,\omega\geq 0$.

Представляя $Im\,\omega = [\bar{\omega}, 1]J\begin{bmatrix}\omega\\1\end{bmatrix}$, нетрудно убедиться, что круг Вейля матрицы $\mathfrak{A}$ состоит из тех и только тех точек $w$, которые удовлетворяют неравенству

$$[\bar{w}, 1]\mathfrak{A}^{-1*}J\mathfrak{A}^{-1}\begin{bmatrix}w\\1\end{bmatrix} \geq 0. \tag{8}$$

Общее доказательство этого факта для $2m\times 2m$ матриц можно найти в [3].

Пользуясь определением (8), покажем, что круг Вейля $J$-растягивающей матрицы $\mathfrak{A}$ действительно лежит в верхней полуплоскости и найдем центр и радиусы этого круга.

Из соотношения

$$\mathfrak{A}^*J\mathfrak{A} - J \geq 0$$

вытекает, что $\mathfrak{A}^{-1*}[\mathfrak{A}^*J\mathfrak{A} - J]\mathfrak{A}^{-1} \geq 0;\ J - \mathfrak{A}^{-1*}J\mathfrak{A}^{-1} \geq 0,$

откуда

$$[\bar{w}, 1]J\begin{bmatrix}w\\1\end{bmatrix} - [\bar{w}, 1]\,\mathfrak{A}^{-1*}J\mathfrak{A}^{-1}\begin{bmatrix}w\\1\end{bmatrix} \geq 0;$$

$$\frac{w-\bar{w}}{i} \geq [\bar{w}, 1]\mathfrak{A}^{-1*}J\mathfrak{A}^{-1}\begin{bmatrix}w\\1\end{bmatrix}.$$

Таким образом, если $w$ удовлетворяет (8), то $Im\,w \geq 0$, т.е. круг Вейля лежит в верхней полуплоскости.

Далее, обозначая элементы матрицы Вейля

$$\mathfrak{A}^{-1*}J\mathfrak{A}^{-1} = \begin{bmatrix}-R & S\\ \bar{S} & -T\end{bmatrix},$$

получим

$$[\bar{w}, 1]\begin{bmatrix}-R, & S\\ \bar{S} & -T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w\\1\end{bmatrix} \geq 0,\ -R\bar{w}w + \bar{S}w + \bar{w}S - T \geq 0.$$

Из $J$ - растягиваемости матрицы $\mathfrak{A}$ вытекает, что

$$\begin{bmatrix}R & i-S\\ -i-S & T\end{bmatrix} \geq 0,$$

откуда $R, T \geq 0$, и если $R = 0$, то $S = i$.

Следовательно, при $R > 0$ неравенство (8) эквивалентно условию

$$|w - SR^{-1}|^2 \leq (S\bar{S} - TR)/R^2.$$

Отсюда вытекает, что (8) задает при $R \neq 0$ круг с центром

$$C = SR^{-1} \tag{9}$$

и радиусом

$$\rho=\sqrt{S\bar{S}-TR}\,/R=\sqrt{-\det(\mathfrak{a}^{-1*}J\mathfrak{a}^{-1})}\,/R=1/(R\det\mathfrak{a}). \tag{10}$$

Когда $R=0$ , круг Вейля вырождается в полуплоскость $(w-\bar{w})/i \geq T$.

3. Введем для неособенных $J$-растягивающих матриц понятие делимости: $J$-растягивающая матрица $A$ называется левым делителем $J$-растягивающей матрицы $C$ , если их отношение $A^{-1}C$ – также $J$-растягивающая матрица.

Основную роль в наших рассмотрениях играет тот факт, что делимость $J$-растягивающих матриц равносильна вкладываемости кругов Вейля. Точно это положение сформулировано в следующих двух леммах.

<u>Лемма I.</u> Если $A, B$ – $J$-растягивающие матрицы, то

$$W\{A\} \supseteq W\{AB\}. \tag{11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из неравенства

$$B^{*}JB-J \geq 0$$

последовательно получаем

$$J-B^{*-1}JB^{-1} \geq 0, \quad [\bar{w},1]A^{-1*}\{J-B^{-1*}JB^{-1}\}A^{-1}\begin{bmatrix} w \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0;$$

$$[\bar{w},1]A^{-1*}JA^{-1}\begin{bmatrix} w \\ 1 \end{bmatrix} \geq [\bar{w},1](AB)^{-1*}J(AB)^{-1}\begin{bmatrix} w \\ 1 \end{bmatrix},$$

откуда и вытекает (II). Лемма доказана.

Если на $J$-растягивающие матрицы $A$ , $C$ наложено дополнительное условие симплектичности:

$$AJA^{\tau}=J, \quad CJC^{\tau}=J \tag{12}$$

( $\tau$ – транспонирование), то имеет место утверждение, обратное лемме I.

<u>Лемма 2.</u> Пусть $A, C$ – $J$-растягивающие симплектические матрицы и их круги Вейля вложены:

$$W\{A\} \supseteq W\{C\}. \tag{13}$$

Тогда матрица $B=A^{-1}C$ является $J$-растягивающей.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (I3) вытекает, что матрица

$$B=A^{-1}C=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

посредством дробно-линейного преобразования (7) переводит верхнюю полуплоскость в себя, т.е. В – неособенная симплектическая "+ матрица". Но тогда согласно теореме II из работы /4/ матрица $B$ – $J$-растягивающая. Теорема доказана.

Пусть теперь $\mathfrak{A}(z)$ – произвольная целая вещественная $J$-внутренняя матрица. Под вещественностью понимается, как обычно, вещественность на действительной оси. Тогда $\det \mathfrak{A}(z) = \pm 1$ и имеет место равенство

$$\mathfrak{A}(z) J \mathfrak{A}^{T}(z) = J, \tag{14}$$

которое легко проверяется на действительной оси: $\mathfrak{A}(x) J \mathfrak{A}^{T}(x) - J = \mathfrak{A}(x) J \mathfrak{A}^{*}(x) - J$ и затем распространяется на всю комплексную плоскость. Таким образом, целая вещественная $J$-внутренняя матрица симплектична. Класс таких матриц будем обозначать через $\mathfrak{M}$.

Зафиксируем точку $z = z_0$ из верхней полуплоскости и свяжем с матрицей $\mathfrak{A}(z_0)$ $(\mathfrak{A}(z) \in \mathfrak{M})$ круг Вейля:

$$W[\mathfrak{A}(z_0)] = W_{z_0}[\mathfrak{A}].$$

Если теперь точка $z_0 = z$ меняется, то мы получим для матрицы $\mathfrak{A}(z)$ множество кругов вейля $W_z[\mathfrak{A}]$, плавающих в верхней полуплоскости вместе с точкой $z$.

Определение. Пусть $\mathfrak{A}(z)$ $\mathfrak{B}(z)$ – целые вещественные $J$-внутренние матрицы (т.е. $\mathfrak{A}(z), \mathfrak{B}(z) \in \mathfrak{M}$). Будем говорить, что $\mathfrak{A}(z)$ делит $\mathfrak{B}(z)$ слева, если отношение $\mathfrak{A}^{-1}(z)\mathfrak{B}(z)$ принадлежит тому же классу $\mathfrak{M}$.

Из лемм I, 2 вытекает теорема о целимости:

Теорема I. Пусть $\mathfrak{A}(z), \mathfrak{B}(x) \in \mathfrak{M}$. Для того чтобы матрица $\mathfrak{A}(z)$ являлась левым делителем матрицы $\mathfrak{B}(z)$, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке $z: \operatorname{Im} z > 0$ имело место вложение

$$W_z[\mathfrak{A}] \supseteq W_z[\mathfrak{B}].$$

4. Переходя непосредственно к изучению элементарного множителя $e^{-izH}$, выясним структуру $J$-положительного показателя $H (HJ \geq 0)$. Среди $J$-положительных матриц особо выделяются "$J$-проекторы":

$$P: PJ \geq 0,\ P^2 = P; \quad Q: QJ \geq 0,\ Q^2 = -Q; \quad \varepsilon: \varepsilon J \geq 0,\ \varepsilon^2 = 0,$$

а также матрицы, удовлетворяющие условию $HJ \geq 0$, $\operatorname{sp} H = 0$. Очевидно, к последним относятся и $J$-проекторы $\varepsilon$: $\varepsilon^2 = 0$; $\varepsilon J \geq 0$.

$J$-проекторы допускают параметризацию:

$$P = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} [\bar\alpha, \bar\beta] J; \quad Q = \begin{bmatrix} \bar\alpha \\ \bar\beta \end{bmatrix} [\alpha, \beta] J; \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} [\bar\xi, \bar\eta] J, \tag{15}$$

где числа $\alpha, \beta$ и $\xi, \eta$ таковы, что $\frac{\alpha\bar\beta - \bar\alpha\beta}{i} = 1$, $\frac{\bar\xi\eta - \xi\bar\eta}{i} = 0$.

Проекторы такого типа являются составляющими для любой $J$-положительной матрицы. Нетрудно убедиться в справедливости утверждения:

Лемма 3. Если $\Phi J \geq 0$, то либо $\Phi^2 = 0$, либо матрица $\Phi$

имеет вид

$$\Phi = kQ + lP, \tag{16}$$

где $\quad k, l \in [0, \infty); \quad PJ \geq 0, \quad QJ \geq 0, \quad P^2 = P, \quad Q^2 = -Q,$

$$PQ = QP = 0, \qquad P - Q = I.$$

Из (16) следует еще одно представление для $J$-положительной матрицы $\Phi$ :

$$\Phi = (sp\,\Phi/2)I + H; \quad H = \varkappa(P+Q); \quad HJ \geq 0, \; sp\,H = 0. \tag{17}$$

Отсюда вытекает утверждение:

Лемма 4. Произвольный элементарный множитель $e^{-iz\Phi}$, $\Phi J \geq 0$, допускает представление: $e^{-iz\Phi} = e^{-iz\,sp\,\Phi/2}\, e^{-izH}$,

где $HJ \geq 0$, $sp\,H = 0$.

Отметим, что из $sp\,H = 0$ вытекает, что $\det e^{-izH} = 1$ и множитель $e^{-izH}$ симплектичен. Лемма 4 по сути утверждает, что целая $J$-внутренняя матрица умножением на скалярный экспоненциальный множитель приводится к симплектическому виду.

Замечание I. Если $\Phi = kQ + lP;\ k, l \geq 0;\quad P - Q = I$ и $\rho$ выбрано так, что $-l \leq \rho \leq k$, то произведение $e^{-iz\rho}\, e^{-iz\Phi}$ остается $J$-внутренней матрицей.

Действительно, поскольку $\Phi + \rho I = (k-\rho)Q + (l+\rho)P$, то $(\Phi + \rho I)J = (k-\rho)QJ + (l+\rho)PJ \geq 0.$

Замечание 2. В том случае, когда множители в мультипликативном представлении матрицы $\mathfrak{A}(z)$ (4) не симплектичны, постановка вопроса о единственности этого представления может утратить смысл.

П р и м е р. Пусть $\mathfrak{A}(z) = e^{-iz\Phi_1}\, e^{-iz\Phi_2}$ и пусть в представлениях $\Phi_1 = k_1 Q_1 + l_1 P_1$, $\Phi_2 = k_2 Q_2 + l_2 P_2$ $(\Phi_1\Phi_2 \neq \Phi_2\Phi_1)$ числа $k, l$ положительны. Выберем $\rho$ так, чтобы

$$-l_1 < \rho < k_1, \quad -l_2 < \rho < k_2,$$

тогда

$$e^{-iz\Phi_1}\, e^{-iz\Phi_2} = e^{-iz\tilde{\Phi}_1}\, e^{-iz\tilde{\Phi}_2},$$

где $\tilde{\Phi}_1 = \Phi_1 + \rho I$, $\quad \tilde{\Phi}_2 = \Phi_2 - \rho I$ и единственность нарушена.

Таким образом, вопрос о единственности разложения на множители $J$-внутренней целой матрицы-функции имеет смысл лишь при дополнительной нормировке, например, в классе симплектических матриц-функций.

Выведем еще представление, аналогичное (I5) для матрицы $H$ : $HJ \geq 0$, $sp\,H = 0$.

Теорема 2. $J$-положительная матрица $H, HJ \geq 0$ такая, что $sp\,H = 0$ допускает представление

$$H=\begin{bmatrix}\alpha\bar\alpha & (\alpha\bar\beta+\bar\alpha\beta)/2\\ (\bar\alpha\beta+\alpha\bar\beta)/2 & \beta\bar\beta\end{bmatrix}J,\quad \frac{\alpha\bar\beta-\bar\alpha\beta}{2i}=x\geq 0. \tag{18}$$

Доказательство теоремы вытекает из представления (15) и из того, что, согласно лемме 3, матрица $H$ является либо $J$-проектором III рода: $H=\varepsilon,\ \varepsilon^2=0$, либо разлагается в сумму взаимно ортогональных проекторов (17): $H=x(P+Q)$.

5. Вычислим элементы матрицы Вейля элементарного множителя $b(z)=e^{-izH},\ HJ\geq 0,\ spH=0$:

$$W(z)=b^{-1*}(z)Jb^{-1}(z)=\begin{bmatrix}-R(z) & S(z)\\ \bar S(z) & -T(z)\end{bmatrix}$$

Найдем сначала выражение для $b^{-1}(z)$. Поскольку из (17) $H^2=x^2I$, то

$$e^{\alpha H}=I+\alpha H+\frac{(\alpha H)^2}{2!}+\frac{(\alpha H)^3}{3!}+\ldots=I(1+\alpha^2x^2/2!+\ldots)+$$

$$+H(\alpha+\alpha^3x^2/3!+\ldots)=ch(\alpha x)I+\frac{sh\,\alpha x}{x}H.$$

Таким образом,

$$b^{-1}(z)=e^{+izH}=ch(izx)I+\frac{sh(izx)}{x}H=\cos zx\, I+\frac{\sin zx}{x}H, \tag{19}$$

причем для $x=0$ следует считать $\sin zx/x=z$, т.е. $e^{+iz\varepsilon}=I+iz\varepsilon\ (\varepsilon^2=0)$.

Из (19) получаем

$$W(z)=b^{-1*}(z)Jb^{-1}(z)=ch\left(\frac{z-\bar z}{i}x\right)J-\frac{1}{x}sh\left(\frac{z-\bar z}{i}x\right)JH.$$

Обозначая $(z-\bar z)/2i=y$, окончательно получаем с учетом (18)

$$W(z)=\begin{bmatrix}-\frac{sh2xy}{x}\beta\bar\beta & \frac{sh2xy}{x}\cdot\frac{\alpha\bar\beta+\bar\alpha\beta}{2}+i\,ch2xy\\ \frac{sh2xy}{x}\cdot\frac{\alpha\bar\beta+\bar\alpha\beta}{2}-i\,ch2xy & -\frac{sh2xy}{x}\alpha\bar\alpha\end{bmatrix}. \tag{20}$$

Используя (20), найдем центр и радиус круга Вейля $W_z[b]$ по формулам (9), (10):

$$C_z=S(z)R^{-1}(z)=\frac{\alpha\bar\beta+\bar\alpha\beta}{2\beta\bar\beta}+i\frac{x}{\beta\bar\beta\, th2xy}=\frac{\alpha}{\beta}+i\frac{x}{\beta\bar\beta}(\ cth2xy-1\ );$$

$$\rho_z=\frac{1}{R(z)\det b(z)}=\frac{1}{R(z)}=\frac{1}{\beta\bar\beta}\,\frac{x}{sh2xy}\ .$$

При $\beta=0$ круг Вейля вырождается в полуплоскость

$$Im\, w \geq \alpha\bar{\alpha}\, Im\, z\ .$$

Таким образом, мы получаем следующую картину поведения кругов Вейля $W_z\{b\}$ элементарных множителей в зависимости от свойств матрицы $H$.

При $H^2 \neq 0$ круг Вейля лежит строго в верхней полуплоскости и при $Im\, z \to +\infty$ стягивается к точке $\alpha/\beta,\ Im(\alpha/\beta) = \varkappa/(\beta\bar{\beta}) > 0$.

При $H^2 = 0,\ \beta \neq 0$ круг Вейля касается вещественной оси в точке $\alpha/\beta = \bar{\alpha}/\bar{\beta}$ и при $Im\, z \to +\infty$ стягивается к этой точке.

Наконец, при $\beta = 0$ (в этом случае $H^2 = 0$) круг Вейля является полуплоскостью $Im\, w \geq \alpha\bar{\alpha}\, Im\, z$ и стягивается к бесконечно удаленной точке при $Im\, z \to +\infty$.

Сформулируем наше заключение об асимптотическом поведении кругов Вейля элементарного множителя в виде леммы.

<u>Лемма 5.</u> Круг Вейля элементарного множителя $e^{-izH}$, $HJ \geq 0$, где $H$ имеет представление (18), при $Im\, z \to +\infty$ стягивается в точку $\alpha/\beta$ (если $\beta = 0$, то эта точка бесконечно удаленная).

Разделение асимптотик кругов Вейля для двух различных элементарных множителей $b_1 = e^{-izH_1}$, $b_2 = e^{-izH_2}$ $(H_1 \neq kH_2,\ k$ – скаляр) приводит к тому, что при достаточно больших $y = Im\, z > Y$ круги Вейля этих множителей $W_z\{b_1\}$ и $W_z\{b_2\}$ не пересекаются. Поскольку для любых матриц-функций $\mathfrak{A}(z), \mathfrak{B}(z) \in \mathfrak{M}$ имеет место включение

$$W_z\{b_1\} \supseteq W_z\{b_1 \cdot \mathfrak{A}\}; \quad W_z\{b_2\} \supseteq W_z\{b_2 \cdot \mathfrak{B}\}\ ,$$

то при $y > Y$ не пересекаются также круги Вейля матриц $\mathfrak{A}_1(z) = e^{-izH_1} \times \mathfrak{A}(z)$ и $\mathfrak{B}_1(z) = e^{-izH_2}\mathfrak{B}(z)$, откуда $\mathfrak{A}_1(z) \neq \mathfrak{B}_1(z)$. Итак, справедлива

<u>Теорема 3.</u> Пусть матрицы-функции $\mathfrak{A}(z), \mathfrak{B}(z) \in \mathfrak{M}$. Тогда из равенства

$$e^{-izH_1}\mathfrak{A}(z) = e^{-izH_2}\mathfrak{B}(z) \quad (H_iJ \geq 0,\ sp H_i = 0,\ H_i \neq 0_i,\ i = 1,2),\ \forall z$$

вытекает коллинеарность показателей: $H_1 = kH_2$ $(k = \bar{k}$ – скаляр). Отсюда и следует факт единственности представления матрицы-функции в виде произведения элементарных множителей.

<u>Теорема 4.</u> Пусть матрица-функция $\mathfrak{A}(z)$ допускает два разложения:

$$\mathfrak{A}(z) = e^{-izA_1}e^{-izA_2}\cdots e^{-izA_n} \quad (A_jJ \geq 0,\ spA_j = 0,\ j = 1,\ldots,n); \tag{21}$$

$$\mathfrak{A}(z) = e^{-izB_1}e^{-izB_2}\cdots e^{-izB_m} \quad (B_jJ \geq 0,\ spB_j = 0,\ j = 1,\ldots,m),$$

где

$$A_j \neq kA_{j+1}\ (j = 1,\ldots,n-1),\ A_n \neq 0;\ B_j \neq kB_{j+1}\ (j = 1,\ldots,m-1),\ B_m \neq 0,$$

к – произвольный скаляр.

Тогда $n=m$ и $B_j=A_j$ $(j=1,2,\dots,n)$.

Доказательство. Согласно теореме 2, показатели $A_1$ и $B_1$ коллинеарны: $A_1=lB_1$. Если $l\neq 1$, например, $l>1$, то из представления для матрицы $e^{izB_1}\mathfrak{A}(z)=e^{-iz(l-1)B_1}e^{-izA_2}\dots=e^{-izB_2}\dots$ вытекает коллинеарность $B_1$ и $B_2$, что противоречит условию теоремы. Таким образом, $A_1=B_1$. Рассматривая теперь матрицу-функцию $e^{izA_1}\times\mathfrak{A}(z)$, приходим к выводу, что $A_2=B_2$. Далее последовательно убеждаемся, что $A_j=B_j$, $n=m$. Теорема доказана.

Теорема 5. Если имеют место два представления:

$$\mathfrak{A}(z)=e^{-izA_1}e^{-izA_2}\cdot\ldots\cdot e^{-izA_n}\mathfrak{F}(z);\qquad\qquad (22)$$
$$\mathfrak{A}(z)=e^{-izB_1}e^{-izB_2}\cdot\ldots\cdot e^{-izB_n}\mathfrak{F}_1(z),$$

где $\mathfrak{F}(z),\mathfrak{F}(z)\in\mathfrak{M}$, а показатели $A_j,B_j$ $(j=1,\dots,n)$ удовлетворяют условиям теоремы 4, то $A_j=B_j$ $(j=1,\dots,n)$. При этом круг Вейля $W_z\{\mathfrak{A}\}$ матрицы $\mathfrak{A}(z)$ вложен в круг $W_z\{e^{-izA_1}\}$ и стягивается вместе с ним в точку $\xi_1\,(Im\,\xi_1\geq 0)$ при $Im\,z\to+\infty$. По точке $\xi_1$ матрица $A_1$ может быть найдена с точностью до скалярного множителя $k>0$:

1) если $\xi_1=\infty$, то $A_1=k\varepsilon_0=k\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}J$ $\quad(\varepsilon_0^2=0)$; (23)

2) если $\xi_1=\bar\xi_1<\infty$, то $A_1=k\tilde\varepsilon=k\dfrac{1}{\xi_1^2}\begin{bmatrix}\xi_1^2&\xi_1\\ \xi_1&1\end{bmatrix}J$ $\quad(\tilde\varepsilon^2=0)$; (24)

3) если $Im\,\xi_1>0$, то $A_1=k\tilde H=k\dfrac{1}{Im\,\xi_1}\begin{bmatrix}\xi_1\bar\xi_1&Re\,\xi_1\\ Re\,\xi_1&1\end{bmatrix}J$ $\quad(\tilde H^2=1)$. (25)

6. Пусть матрица-функция $\mathfrak{A}(z)$ имеет вид (22). Преобразованием подобия со специально подобранной $J$-унитарной матрицей $U, U^*JU=J$:

$$\tilde{\mathfrak{A}}(z)=U^{-1}\mathfrak{A}(z)U=e^{-iz\tilde A_1}e^{-iz\tilde A_2}\cdot\ldots\cdot e^{-iz\tilde A_n}\tilde{\mathfrak{F}}(z)$$

(где $\tilde A_j=U^{-1}A_jU$ $(j=1,2,\dots,n)$, $\tilde{\mathfrak{F}}(z)=U^{-1}\mathfrak{F}(z)U\in\mathfrak{M}$)

переведем в один из двух стандартных множителей первый множитель $e^{-izA_1}$:

$$U^{-1}e^{-izA_1}U=e^{-izk\varepsilon_0}\quad,\ \text{если}\ A_1^2=0;$$
$$U^{-1}e^{-izA_1}U=e^{-izkJ}\quad,\ \text{если}\ A_1^2\neq 0.$$

Матрицу $U$ можно построить по предельной точке $\xi_1$ круга $W_z\{\mathfrak{A}\}$

если $\xi_1=\bar\xi_1$, то $U=\begin{bmatrix}1&0\\1/\xi_1&1\end{bmatrix}$, при $\xi_1=0, U=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$, (26)

если $Im\,\xi_1>0$, то $U=\dfrac{1}{\sqrt{Im\,\xi_1}}\begin{bmatrix}Im\,\xi_1&Re\,\xi_1\\0&1\end{bmatrix}$. (27)

Изучим свойства стандартных множителей $e^{-izk\varepsilon_0}$ и $e^{-izkJ}$. Введем для этого понятие функционального круга Вейля.

Пусть $\mathfrak{A}(z)\in\mathfrak{M}$,

$$\mathfrak{A}(z)=\begin{bmatrix}a(z)&b(z)\\c(z)&d(z)\end{bmatrix}.\qquad (28)$$

Рассмотрим дробно-линейные преобразования с матрицей коэфициентов $\mathfrak{A}(z)$

$$w(z)=(a(z)\omega(z)+b(z))(c(z)\omega(z)+d(z))^{-1}, \qquad (29)$$

где $\omega(z)$ – неванлинновские функции (напомним, что аналитическая в верхней полуплоскости функция называется неванлинновской, если $Im\,\omega(z)\geq 0$ при $Im\,z>0$ ; будем обозначать класс неванлинновских функций через $N$ ). В силу свойства $J$-растягиваемости матрицы $\mathfrak{A}(z)$ функции (29) неванлинновские.

Множество функций $w(z)$ из $N$ , представимых в виде (29), где $\omega(z)\in N$ , называется функциональным кругом Вейля матрицы $\mathfrak{A}(z)$.

Обозначим функциональный круг Вейля матрицы-функции $\mathfrak{A}(z)$ через $W\{\mathfrak{A}(z)\}$ . Очевидно, круг Вейля $W\{\mathfrak{A}(z)\}$ образуют те и только те аналитические функции $w(z)$ , которые в каждой точке $z, Im\,z>0$ принимают значения из точечного круга Вейля $W_z\{\mathfrak{A}\}$.

Легко убедиться, так же как и в случае точечных кругов Вейля, что функциональный круг $W\{\mathfrak{A}(z)\}$ определяется неравенством

$$[\bar{w}(z),1]\mathfrak{A}^{-1*}(z)J\mathfrak{A}^{-1}(z)\begin{bmatrix} w(z) \\ 1 \end{bmatrix}\geq 0, \quad Im\,z>0. \qquad (30)$$

На язык функциональных кругов Вейля переводится критерий делимости матриц-функций класса $\mathfrak{M}$.

<u>Теорема 6</u>. Пусть $\mathfrak{A}(z),\mathfrak{B}(z)\in\mathfrak{M}$ . Матрица-функция $\mathfrak{B}(z)$ является левым делителем $\mathfrak{A}(z)$ тогда и только тогда, когда $W\{\mathfrak{A}(z)\}\subset W\{\mathfrak{B}(z)\}$.

Отметим, что принадлежность двух неванлинновских функций $w_1(z)$, $w_2(z)$ одному и тому же кругу Вейля $W\{\mathfrak{A}(z)\}$ некоторой матрицы-функции (27) $\mathfrak{A}(z)\in\mathfrak{M}$ накладывает на них связь

$$|w_1(z)-w_2(z)|\leq 2\rho_z, \qquad (31)$$

где радиус Вейля $\rho_z$ находится по формуле (10) (если только $R(z)\neq 0$).

Вычисляя элемент $R(z)$ матрицы Вейля $\mathfrak{A}^{-1*}(z)J\mathfrak{A}^{-1}(z)$ , получаем

$$\rho_z=\frac{1}{R(z)}=\frac{i}{d(z)\overline{c(z)}-c(z)\overline{d(z)}}=\frac{1}{|c(z)|^2\,2Im(d(z)/c(z))}\,. \qquad (32)$$

Приведем здесь без доказательства четыре леммы (их доказательство опущено из-за недостатка места; оно основывается на неравенстве Шварца – Пика [5] для матрицы $\mathfrak{A}(z)\in\mathfrak{M}$ и будет дано в другой статье).

<u>Лемма 6</u>. Пусть матрица-функция $\mathfrak{A}(z)\in\mathfrak{M}$ . Если в представлении для матрицы Вейля

$$\mathfrak{A}^{-1*}(z)J\mathfrak{A}^{-1}(z)=\begin{bmatrix} -R(z) & S(z) \\ \overline{S(z)} & -T(z) \end{bmatrix} \qquad (33)$$

элемент $R(z)=0$ хотя бы в одной точке $z=z_0$, $Im z_0>0$, то $R(z)\equiv 0$ и $\mathfrak{A}(z)=e^{-izk\varepsilon_0}\mathfrak{A}(0)$, $k\in[0,\infty)$.

Лемма 7. Пусть матрица-функция $\mathfrak{A}(z)\in\mathfrak{M}$. И пусть элемент из (33) ограничен на мнимой полуоси:

$$R(iy)\le C<\infty.$$

Тогда $R(z)\equiv 0$ и $\mathfrak{A}(z)=e^{-izk\varepsilon_0}\mathfrak{A}(0)$, $k\in[0,\infty)$.

Лемма 8. Пусть матрицы-функции $\mathfrak{A}(z),\mathfrak{B}(z)\in\mathfrak{M}$ и пусть $\mathfrak{A}(z)$ делит $\mathfrak{B}(z)$ в классе $\mathfrak{M}$ (слева или справа). Тогда при $Im z>1$ имеет место оценка

$$\|\mathfrak{A}(z)\|\le|z|C\ \|\mathfrak{B}(z)\|.$$

Лемма 9. Пусть матрица $\mathfrak{A}(z)\in\mathfrak{M}$ имеет экспоненциальный тип роста $L$. Тогда справедлива оценка: $R(iy)\ge C(\varepsilon)e^{2y(L-\delta)}(y>1),\forall\delta>0$.

7. Изучим свойства функционального круга Вейля элементарного множителя $b_0(z)=e^{-izk\varepsilon_0}$.

Теорема 7. Функциональный круг Вейля множителя $b_0(z)=e^{-izk\varepsilon_0}$ состоит из всех тех и только тех неванлинновских функций $w(z)$, для которых в интегральном представлении

$$w(z)=pz+q+\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{1}{t-z}-\frac{t}{1+t^2}\right\}d\sigma(t)\left(\sigma(t)\uparrow,\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\sigma(t)}{1+t^2}<\infty\right)\tag{34}$$

число

$$p\ge k.\tag{35}$$

Доказательство. Поскольку $b_0(z)=e^{-izk\varepsilon_0}=I-izk\varepsilon_0=\begin{bmatrix}1&kz\\0&1\end{bmatrix}$, то круг Вейля $W[b_0(z)]$ состоит из всех функций $w(z)$, представимых в виде

$$w(z)=\omega(z)+kz,\ \omega(z)\in N.\tag{36}$$

Очевидно, представление (36) эквивалентно (34), (35). Теорема доказана.

Заметим, что для неванлинновской функции $w(z)$ условие (34) – (35) эквивалентно следующему:

$$\lim_{y\to+\infty}w(iy)/(iy)\ge k.\tag{37}$$

Лемма 10. Пусть матрица-функция $\mathfrak{A}(z)\in\mathfrak{M}$ и пусть для некоторой функции $w(z)=w_0(z)$ из круга Вейля $W[\mathfrak{A}(z)]$ справедливо равенство

$$\lim_{y\to+\infty}w(iy)/(iy)=k.\tag{38}$$

Тогда либо $\mathfrak{A}(z)=e^{-izl\varepsilon_0}\mathfrak{A}(0)$ $(l<k)$, либо для любой функции $w(z)\in W[\mathfrak{A}(z)]$ имеет место (38).

Доказательство. Если $\mathfrak{A}(z)=e^{-izl\varepsilon_0}\mathfrak{A}(0)$, то в силу теоремы 7, (38) может иметь место лишь при $l\le k$. Пусть

$\mathfrak{A}(z)\neq e^{-izl\varepsilon_0}\mathfrak{A}(0),\ l\in[0,\infty)$. Тогда из (31), (32) получаем соотношение для любой функции $w(z)$ из $W[\mathfrak{A}(z)]$: $|w(z)-w_0(z)|\le 2\rho_z=2/R(z)$. В силу лемм 6,7 существует последовательность $y_j\to+\infty\ (j=1,2,\dots)$ такая, что $\lim\limits_{y=y_j\to+\infty}\rho_{iy}=0$. Отсюда вытекает, что функция $w(z)$ удовлетворяет вместе с $w_0(z)$ равенству (38). Лемма доказана.

Таким образом, если матрица $\mathfrak{A}(z)$ удовлетворяет условию леммы 10, то ее функциональный круг Вейля вложен в круг Вейля матрицы $b_0=e^{-izl\varepsilon_0}$. Переводя этот факт на язык делимости в классе $\mathfrak{M}$, получаем утверждение:

<u>Теорема 8</u>. Пусть матрица-функция (28) $\mathfrak{A}(z)\in\mathfrak{M}$. И пусть существует такой параметр $\omega(z)\in N$, что результат $w(z)$ дробно-линейного преобразования (29) удовлетворяет условию (38). Тогда либо $\mathfrak{A}(z)=e^{-izl\varepsilon_0}$ $(l\le k)$, либо отношение $b_0^{-1}\mathfrak{A}(z)\in\mathfrak{M}$.

Из теоремы 7 и формул (23), (24) вытекает следующий критерий отщепляемости от матрицы $\mathfrak{A}(z)\in\mathfrak{M}$ множителя $e^{-iz\varepsilon}$, $\varepsilon J\ge 0$, $\varepsilon^2=0$.

<u>Теорема 9</u>. 1. Для того, чтобы матрица-функция (28) $\mathfrak{A}(z)\in\mathfrak{M}$ допускала представление

$$\mathfrak{A}(z)=e^{-izk\varepsilon_0}\mathfrak{B}(z),\ k=\bar{k}>0,\ \varepsilon_0=\begin{bmatrix}0 & i\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ \mathfrak{B}(z)\in\mathfrak{M},$$

необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{y\to+\infty}a(iy)/(iy\,c(iy))\ge k$.

2. Для того, чтобы $\mathfrak{A}(z)$ допускала представление

$$\mathfrak{A}(z)=e^{-iz\varepsilon}\mathfrak{B}(z),\ \varepsilon=\begin{bmatrix}\alpha\bar{\alpha} & \alpha\bar{\beta}\\ \bar{\alpha}\beta & \beta\bar{\beta}\end{bmatrix}J,\ \alpha\bar{\beta}=\bar{\alpha}\beta,\ \mathfrak{B}(z)\in\mathfrak{M},$$

достаточно выполнение двух необходимых условий:

а) $\lim\limits_{y\to+\infty}a(iy)/c(iy)=\xi_1=\bar{\xi}_1$ $\quad(\xi_1=\alpha/\beta)$;

б) матрица-функция

$$\tilde{\mathfrak{A}}(z)=U^{-1}\mathfrak{A}(z)U=\begin{bmatrix}\tilde{a}(z) & \tilde{b}(z)\\ \tilde{c}(z) & \tilde{d}(z)\end{bmatrix}, \tag{39}$$

где $U$ берется из (26) и удовлетворяет условию

$$\lim_{y\to+\infty}\tilde{a}(iy)/(iy\,\tilde{c}(iy))\ge k \qquad (k=\bar{\alpha}\alpha). \tag{40}$$

8. Ранее было выведено характеристическое свойство функций $w(z)$ из круга Вейля элементарного множителя $b_0=e^{-izk\varepsilon_0}$. Исследуем теперь свойства функций $w(z)$ из круга Вейля множителя $B_0(z)=e^{-izlJ}$. Введем для этого понятие ассоциированной с $w(z)$ функции.

Пусть функция $w(z)\in N$ и в ее представлении (34) число $\rho=0$:

$$w(z)=q+\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{t-z}-\frac{t}{1+t^2}\right\}d\sigma(t)\quad\left(\sigma(t)\uparrow,\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(t)}{1+t^2}<\infty,\ q=\bar{q}\right). \tag{41}$$

Построенную по мере $d\sigma(t)$ и числу $q$ функцию $g(x)$:

$$g(x)=g_W(x)=-iqx+\int_{-\infty}^{\infty}\{1-e^{-itx}-itx/(1+t^2)\}d\sigma(t)/t^2 \qquad (42)$$

будем называть ассоциированной с $w(z)$.* Очевидно, $g(x)$ непрерывна, $g(-x)=\overline{g(x)}$.

Заметим, что функция $w(z)\in N$ имеет вид (41) лишь тогда, когда

$$w(z)/z\to 0 \quad (\operatorname{Im} z\to+\infty). \qquad (43)$$

Лемма 11. Пусть матрица-функция $\mathfrak{A}(z)\in\mathfrak{M}$ имеет экспоненциальный тип роста $L>0$, и пусть для некоторой функции $w(z)=w_0(z)\in W[\mathfrak{A}(z)]$ выполняется (43). Тогда для произвольных $w_1(z)\in W[\mathfrak{A}(z)]$, $w_2(z)\in W[\mathfrak{A}(z)]$ справедливо соотношение

$$w_1(iy)-w_2(iy)=O(e^{-2y(L-\delta)}) \ (y\to+\infty),\ \forall\delta>0, \qquad (44)$$

а для ассоциированных с $w_1(z), w_2(z)$ функций $g_1(x), g_2(x)$ – равенство

$$g_1(x)=g_2(x) \qquad \forall x\in[-2L,2L]. \qquad (45)$$

Доказательство. Оценка (44) следует из формул (31), (32) и леммы 9. Эквивалентность соотношений (44) и (45) вытекает из того факта, что для произвольной функции $w(z)$ (41) и ассоциированной с нею $g_W(x)$ (43) и произвольной непрерывной функции $s(x)$ равенство

$$g_W(x)=s(x) \qquad \forall x\in[-2L,2L] \qquad (46)$$

имеет место тогда и только тогда, когда $w(z)$ и $s(x)$ связаны условием

$$-iw(iy)(e^{-2yL}-1)/y+\int_0^{2L}ye^{uy}s(u)du=O(e^{-2y(L-\delta)}),\ \forall\delta>0, \qquad (47)$$

когда $y\to+\infty$ (доказательство этого факта можно найти в [7]).

Перейдем непосредственно к характеризации круга Вейля множителя

$$B_0(z)=e^{-izlJ}=\begin{bmatrix}\cos lz & \sin lz\\ -\sin lz & \cos lz\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a(z) & b(z)\\ c(z) & d(z)\end{bmatrix}. \qquad (48)$$

Теорема 10. Круг Вейля матрицы-функции $B_0(z)$ (48) состоит из всех тех и только тех неванлинновских функций $w(z)$, которые удовлетворяют условию

$$w(iy)-i=O(e^{-2y(l-\delta)}) \ (y\to+\infty) \quad \forall\delta>0 \qquad (49)$$

или эквивалентному (49) условию на ассоциированные функции $g_W(x)$:

$$g_W(x)=|x| \qquad \forall x\in(-2l,2l). \qquad (50)$$

Доказательство. Полагая в формуле (29), задающей круг Вейля, $\omega(z)=i$:

$$w(z)=(a(z)i+b(z))(c(z)i+d(z))^{-1}=(\cos lz\, i+\sin lz)(-\sin lz\, i+\cos lz)^{-1}=i$$

---

* Функции, имеющие представление (42), называются функциями класса $G$ [6].

убеждаемся, что функция $w(z)=i$ принадлежит $W\{B_0(z)\}$. Соотношение (49) следует теперь из леммы II. Поскольку в представлении (41) для функции $w(z)=i$ мера $d\sigma(t)=dt$ $q=0$, то ассоциированная с $i$ функция $g_i(x)=|x|$. Вновь применяя лемму II, приходим к равенству (50).

Чтобы показать, что круг Вейля $W\{B_0(z)\}$ включает в себя все функции $w(z)\in N$, удовлетворяющие (50), обратимся к одному замечательному соотношению, взятому из общей теории интерполяционных задач – к Основному матричному неравенству класса $G$ (ОМН ($G$)) ([8, с 38]).

Пусть функция $w(z)=\tilde{w}(z)$ удовлетворяет условию (50). Согласно теореме $G$ ([8, с. 40]) такая функция $\tilde{w}(z)$ удовлетворяет ОМН $(G_{2l})$ вместе с ассоциированной функцией $s(x)=g(s)=|x|$, $x\in(-2l,2l)$. Специально подбирая участвующий в ОМН $(G)$ параметр $\varphi(t)$, убеждаемся, что $\tilde{w}(z)$ удовлетворяет неравенству

$$\begin{bmatrix} (e^{4yl}-1)/(4y) & (\tilde{w}(z)-i)(e^{4yl}-1)/(4y) \\ \overline{(\tilde{w}(z)+i)}(e^{4yl}-1)/(4y) & (\tilde{w}(z)-w(z))/(2iy) \end{bmatrix} \geq 0, \forall z: Im z\neq 0,$$

которое после преобразования имеет вид

$$|\tilde{w}(z)-i\,cth\,2yl| \leq 1/sh2yl. \tag{51}$$

Остается лишь заметить, что (51) эквивалентно неравенству Вейля (30), когда $\mathfrak{A}(z)=B_0(z)$. Отсюда вытекает, что $w(z)=\tilde{w}(z)$, удовлетворяющее (50), лежит в круге Вейля $W\{B_0(z)\}$, что и доказывает теорему.

Из того факта, что функция $w(z)=i$ имеет ассоциированную $g_i(x)=|x|$, вытекает следующее утверждение:

<u>Лемма I2.</u> Пусть матрица-функция $\mathfrak{A}(z)\in\mathfrak{M}$ имеет экспоненциальный тип роста $l, L\geq l$ и пусть для некоторой функции $w(z)=w_0(z)\in W\{\mathfrak{A}(z)\}$ справедливо соотношение

$$w(iy)-i=o(e^{-2y(l-\delta)})\,(y\to+\infty), \forall\delta>0, \tag{52}$$

тогда все функции $w(z)\in W\{\mathfrak{A}(z)\}$ удовлетворяют (52), а ассоциированные функции – условию (50).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Соотношение (52) вытекает из оценки (44), справедливой в силу леммы II. Эквивалентность соотношений (52) и (50) доказывается так же, как в лемме II – из эквивалентности (46) и (47). Лемма доказана.

Таким образом, если матрица-функция $\mathfrak{A}(z)$ удовлетворяет условию леммы I2, то ее функциональный круг Вейля вложен в круг Вейля матрицы $B_0(z)$. Переведем этот факт на язык целимости в классе $\mathfrak{M}$.

<u>Теорема II</u>. Пусть матрица-функция (28) $\mathfrak{A}(z)\in\mathfrak{M}$ имеет экспоненциальный тип роста $L, L\geq l$ и пусть существует такая функция

$W(z)=W_0(z)\in W(\mathfrak{A}(z))$, для которой имеет место (52) (или, что то же, ассоциированная к $W_0(z)$ функция $g(x)$ удовлетворяет (52)). Тогда $\mathfrak{A}(z)$ имеет вид

$$\mathfrak{A}(z)=e^{-izU}\mathfrak{B}(z),\ \mathfrak{B}(z)\in\mathfrak{M}. \tag{53}$$

Из теоремы II и формулы (25) вытекает критерий отщепляемости от матрицы-функции $\mathfrak{A}(z)\in\mathfrak{M}$ множителя $e^{-izH}$, $HJ\geq 0$, $H^2\neq 0$, $sp\,H=0$.

<u>Теорема I2. I</u>$^0$. Для того, чтобы матрица-функция (28) $\mathfrak{A}(z)\in\mathfrak{M}$, имеющая экспоненциальный тип роста $L, L\geq 1$, допускала представление (53), необходимо и достаточно, чтобы отношение ее элементов $W_0(z)=a(z)/c(z)$ удовлетворяло условию $W_0(iy)-i=O(e^{-2y(1-\delta)})(y\to+\infty), \forall\delta>0.$

$2^0$. Для того, чтобы $\mathfrak{A}(z)$ допускала представление

$$\mathfrak{A}(z)=e^{-izH}\mathfrak{B}(z),\ H=\begin{bmatrix}\alpha\bar{\alpha} & (\bar{\alpha}\beta+\bar{\alpha}\beta)/2\\ (\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta)/2 & \beta\bar{\beta}\end{bmatrix}J,\ \frac{\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta}{2}=\varkappa>0,\ \mathfrak{B}(z)\in\mathfrak{M},$$

достаточно выполнения двух необходимых условий:

а) $\lim\limits_{y\to+\infty} a(iy)/c(iy)=\xi_1,\ Im\,\xi_1>0 \qquad (\xi_1=\alpha/\beta);$

б) элементы матрицы-функции (39), где $U$ задача из (27), удовлетворяют условию

$$\tilde{a}(iy)/\tilde{c}(iy)-i=O(e^{-2y(1-\delta)})(y\to+\infty),\ \forall\delta>0, \tag{54}$$

где

$$\varkappa=\sqrt{-\det H}\leq 1.$$

9. Из утверждений доказанных в пунктах 7, 8 вытекает общая теорема единственности для матриц, допускающих представление (2I):

<u>Основная теорема.</u> Пусть $\mathfrak{A}(z)$ допускает разложение (2I), а также представление в виде мультипликативного интеграла:

$$\mathfrak{A}(z)=\int_0^{T} e^{-iz\Phi(\tau)d\tau},\ \Phi(\tau)J\geq 0,\ sp\,\Phi(\tau)=0,\ \Phi(\tau)\in L^1(0,T). \tag{55}$$

Тогда существует такое разбиение интервала $(0,T): 0=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_n=T$, что

$$\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} e^{-iz\Phi(\tau)d\tau}=e^{-izA_j} \qquad (j=1,2,\ldots,n).$$

Доказательство. Достаточно показать, что существует число $\tau_1$, $0<\tau_1\leq T$, для которого

$$\int_0^{\tau_1} e^{-iz\Phi(\tau)d\tau}=e^{-izA_1}. \tag{56}$$

Производя преобразование подобия с помощью $J$-унитрной матрицы (как это было сделано в п.6), можно считать, что в разложении (2I) $A_1$ совпадает с одной из двух матриц: либо $A_1=k\varepsilon_0$, либо $A_1=lJ\,(k,l\in(0,\infty))$. Мы покажем, что (56) имеет место в каждом из этих случаев.

Поскольку для любого $\tau: 0<\tau<T$ матрица-функция $\mathfrak{A}(\tau,z)=\int_0^{\tau} e^{-iz\Phi(u)du}$ – делитель $\mathfrak{A}(z)$, то имеет место включение

$$W\{\mathfrak{A}(z)\} \subseteq W\{\mathfrak{A}(\tau, z)\}. \tag{57}$$

С другой стороны, из представления (2I)

$$W\{\mathfrak{A}(z)\} \subseteq W\{e^{-izA_1}\}. \tag{58}$$

Пусть $A_1 = k\varepsilon_0$ . Из включений (58) и (57) вытекает, что круг Вейля $W\{\mathfrak{A}(z)\}$ содержит функции, удовлетворяющие (37) (при любом $\tau, 0<\tau\leq T$ ). Но тогда по теореме 8 $\mathfrak{A}(\tau,z)$ имеет вид $\mathfrak{A}(\tau,z)= e^{-izl\varepsilon_0}$ $(l\leq k)$, либо $\mathfrak{A}(\tau,z) = e^{-izk\varepsilon_0}\mathfrak{B}(z)$ , где $\mathfrak{B}(z) \in \mathfrak{M}$ . Причем матрица вида $e^{-izk\varepsilon_0}\mathfrak{B}(z)$ не может быть делителем матрицы $e^{-izl\varepsilon_0}$ $(l<k)$. Поскольку для любых двух точек $\tau'<\tau''$ матрица-функция $\mathfrak{A}(\tau'',z)$ делится на $\mathfrak{A}(\tau',z)$ , то интервал $(0,T)$ разбивается на два подинтервала $(0,\tau_1)$ и $(\tau_1,T)$ так, что если $\tau\in(0,\tau_1)$ , то $\mathfrak{A}(\tau,z)= e^{-izl\varepsilon_0}$ $(l<k)$, а при $\tau\in(\tau_1,T)$, $\mathfrak{A}(\tau,z)= e^{-izk\varepsilon_0}\mathfrak{B}(z)$ $(\mathfrak{B}(z)\in\mathfrak{M})$. Из непрерывности $\mathfrak{A}(\tau,z)$ как функции $\tau$ и начального условия $\mathfrak{A}(0,z)=I$ число $\tau_1>0$ и $\mathfrak{A}(\tau_1,z)= e^{-izk\varepsilon_0} = e^{-izA_1}$.

Пусть теперь $A_1 = lJ$. Обозначим через $\rho(\tau)$ экспоненциальный тип роста матрицы-функции $\mathfrak{A}(\tau,z)$ (при каждом фиксированном $\tau$ ). Замечая что $\rho(\tau)$ – монотонно растущая функция, непрерывная в силу оценки $\|\mathfrak{A}(\tau'',z)\mathfrak{A}(\tau',z)\| \leq \exp(|z|\int_{\tau'}^{\tau''}\|\Phi(\tau)\|\,d\tau)$ , подберем число $\tau_1$ так, чтобы $\rho(\tau_1)=k$ и $\rho(\tau)<k$ при $\tau<\tau_1$ . Зафиксируем точку $\tau<\tau_1$ . Из включений (58), (57) и теоремы II вытекает представление $\mathfrak{A}(\tau,z)= e^{-iz\rho(\tau)J}M(z)$ , где $M(z)$ – матрица-функция минимального типа роста, $M(z)\in\mathfrak{M}$. Из (2I) вытекает оценка на прямой $z=x+i$, $-\infty<x<+\infty$: $\|\mathfrak{A}(z)\|<C|z|^n$. Тогда из леммы 8 $\|M(z)\|< C|z|^{n-2}$, $z=x+i$. В силу принципа Фрагмена – Линделефа $M(z)$ – полином. Но тогда $M(z)$ представима в виде $M(z)= e^{-iz\varepsilon_1}e^{-iz\varepsilon_2}\dots e^{-iz\varepsilon_m}$, $\varepsilon_j J\geq 0$, $\varepsilon_i^2 = 0$ , и значит

$$\mathfrak{A}(z)= e^{-iz\rho(\tau)J}e^{-iz\varepsilon_1}\dots e^{-iz\varepsilon_m}\mathfrak{B}(z),\ \mathfrak{B}(z)\in\mathfrak{M},\ \rho(\tau)<k.$$

Сопоставим это представление с (2I). Из теоремы 5 $m=0$, $M(z)=I$. Отсюда $\mathfrak{A}(\tau,z)= e^{-iz\rho(\tau)J}$ $(\tau<\tau_1)$ и значит $\mathfrak{A}(\tau_1,z)= e^{-izA_1}$. Теорема доказана.

Заметим, что в теоремах 9, I2 и формулах (23)-(25) содержится способ восстановления по $\mathfrak{A}(z)$ множителя $e^{-izA_1}$ из представления (2I). $A_2$ находится затем по матрице-функции $\mathfrak{A}_1(z)= e^{izA_1}\mathfrak{A}(z)$. и т.д.

Таким образом можно последовательно восстановить по результату произведения (2I) – матрице-функции $\mathfrak{A}(z)$ – все множители $e^{-izA_j}$ $(j=1,2,\dots,n)$.

I. Потапов В.П. Мультипликативная структура $J$-нерастягивающих матриц-функций. - Тр. Моск. мат.о-ва, 1955, 4, с. I25-236.

2. L. de Branges. Hilbert Spaces of Entire Functions.- New York: Prentice-Hall; Englewood Cliffs, 1968.- 326 p.
3. Ковалишина И.В., Потапов В.П. Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны – Пика. – Докл. АН АрмССР, 1974, 59, № 1, с. 17–22.
4. Потапов В.П. Дробно-линейные преобразования матриц. – В кн.: Исследования по теории операторов и их приложениям. Киев : Наук. думка, 1979, с.75–91.
5. Ефимов А.В., Потопов В.П. $J$-растягивающие матрицы и их роль в аналитической теории электрических цепей. – Успехи мат. наук, 1973, 28, с. 65–130.
6. Крейн М.Г. О логарифме безгранично разложимой эрмитово положительной функции. – Докл. АН СССР, 1944, 45, № 3, с. 99–102.
7. Кацнельсон В.Э. Континуальные аналоги теоремы Гамбургера – Неванлинны и основные матричные неравенства классических задач. – Теория функций, функ. анализ и их прил. 1982, № 37, с. 38–55.
8. Кацнельсон В.Э. Континуальные аналоги теоремы Гамбургера – Неванлинны ... Там же, 1981, № 36, с. 31–48.

УДК 517.5

В.П.Потапов

# БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ И МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЙ ИНТЕГРАЛ

## 1. Бесконечные произведения

Пусть $R$ – нормированное кольцо квадратных матриц $m$-го порядка с комплексными элементами или общее кольцо ограниченных операторов $A$, действующих в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ векторов $f$. Норма оператора $A$ определяется равенством

$$\|A\| = \sup_{f \in \mathfrak{H}} \frac{\|Af\|}{\|f\|},$$

где норма (длина) вектора равна корню квадратному из скалярного квадрата вектора $f$:

$$\|f\| = (f,f)^{1/2}.$$

Без труда устанавливаются следующие свойства нормы:

1. $\|A\| \geq 0$, если $\|A\| = 0$, то $A = 0$;
2. $\|\lambda A\| = |\lambda| \, \|A\|$ ($\lambda$ – скаляр);
3. $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$;
4. $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$.

Последовательность $A_n$ называется последовательностью Коши, если

$$\|A_m - A_n\| \to 0, \ (m,n \to \infty).$$

Легко доказывается, что каждая последовательность Коши имеет предел, т.е. существует ограниченный оператор $A$ такой, что

$$\|A - A_n\| \to 0, \ n \to \infty.$$

Сейчас произведение зависит от порядка сомножителей, в связи с чем мы будем пользоваться следующими обозначениями:

$$\overrightarrow{\prod_{j=1}^{n}} B_j = B_1 B_2 \ldots B_m, \overleftarrow{\prod_{j=1}^{n}} B_j = B_n B_{n-1} \ldots B_1 .$$

В полном соответствии со скалярным случаем дадим следующее

Определение. Бесконечное произведение $\overrightarrow{\prod_{j=1}^{\infty}} B_j$ называется сходящимся, если существует обратимый предел $A = \lim A_n$ частичных произведений

$$A_n = \overrightarrow{\prod_{j=1}^{n}} B_j ,$$

т.е. если $A^{-1}$ существует и является ограниченным оператором.

Несколько отличается от традиционного доказательство следующей леммы: если последовательность $A_n$ имеет обратимый предел $A$, то, начиная с некоторого номера $N_0$, все члены последовательности $A_n$ обратимы, и последовательность обратных $A_n^{-1}$ стремится к $A^{-1}$.

В самом деле, взяв $\varepsilon = \frac{1}{2\|A^{-1}\|}$, найдем $N_0$ так, чтобы при $n > N_0$

$$\|A - A_n\| < \frac{1}{2\|A^{-1}\|} .$$

Поскольку

$$A = A P_n \qquad , \text{ где } P_n = I - Q_n, Q_n = A^{-1}(A - A_n),$$

и при $n \geq N_0$

$$\|Q_n\| \leq \|A^{-1}\| \, \|A - A_n\| < \frac{1}{2} ,$$

то ряд

$$I + Q_n + Q_n^2 + \ldots$$

мажорируется по норме прогрессией

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots = 2$$

и тем самым сходится. Его сумма, очевидно, есть $P_n^{-1}$, причем $\|P_n^{-1}\| \leq 2$ при $n > N_0$. Но тогда существует $A_n^{-1} = P_n^{-1} A^{-1}$ и $\|A_n^{-1}\| \leq 2\|A^{-1}\|$.

После этого из неравенства

$$\|A_n^{-1} - A_m^{-1}\| = \|A_m^{-1}(A_m - A_n) A_n^{-1}\| \leq 4\|A^{-1}\|^2 \|A_m - A_n\|$$

вытекает, что $A_n^{-1}$ – последовательность Коши. Утверждение леммы становится очевидным.

Из первой части доказательства вытекает, что если бесконечное произведение $\overrightarrow{\prod_{j=1}^{\infty}} B_j$ сходится, то все его сомножители $B_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$ обратимы. Из леммы вытекает также справедливость следующего утверждения: для того, чтобы бесконечное произведение

$$\overrightarrow{\prod_{j=1}^{\infty}} B_j$$

было сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы сходились последовательности

$$A_n = \overrightarrow{\prod_{j=1}^{n}} B_j\ , \quad A_n^{-1} = \overleftarrow{\prod_{j=1}^{n}} B_j^{-1}\ .$$

Не вникая в тонкости, связанные с операторным случаем, заметим, что высказанные выше утверждения приводят к более удобной записи произведения

$$\overrightarrow{\prod_{j=1}^{n}} B_j\ .$$

Рассматривая вопрос о его сходимости, необходимо считать $B_j$ обратимой матрицей. Но тогда $B_j$ допускает представление

$$B_j = e^{H_j},$$

где, как известно, матрица $H_j$ определяется неоднозначно.

Однако специфика мультипликативных структур, изучаемых в этой работе, позволяет естественным образом и притом однозначно выбрать показатель $H_j$.

Преимущество "равновесной" формы записи

$$A_n = \overrightarrow{\prod_{j=1}^{n}} e^{H_j}, \quad A_n^{-1} = \overleftarrow{\prod_{j=1}^{n}} e^{-H_j}$$

в вопросах сходимости не вызывает сомнений.

<u>Лемма I</u>. Имеют место неравенства

$$\| e^{H_1} e^{H_2} \dots e^{H_n} \| \le e^{\|H_1\| + \|H_2\| \dots \|H_n\|}, \tag{I}$$

$$\| e^{H_1} e^{H_2} \dots e^{H_n} - I \| \le (\|H_1\| + \dots + \|H_n\|) e^{\|H_1\| + \dots + \|H_n\|}, \tag{II}$$

$$\| e^{H_2} e^{H_2} \dots e^{H_n} - (I + H_1 + \dots H_n) \| \le \frac{1}{2} (\|H_1\| + \dots + \|H_n\|) e^{\|H_1\| + \dots + \|H_n\|}. \tag{III}$$

Докажем, например, последнее неравенство. Сопоставим разложения в степенные ряды двух выражений

$$e^{H_1} e^{H_2} \dots e^{H_n} - (I + H_1 + \dots + H_n);$$

$$e^{\|H_1\|} e^{\|H_2\|} \dots e^{\|H_n\|} - (1 + \|H_1\| + \dots + \|H_n\|),$$

объединяя для определенности в группы члены одинакового измерения. Второе разложение получается из первого заменой матриц $H_j$ соответствующими числами $\|H_j\|$. Кроме того, все коэффициенты при произведеннях матриц $H_1, H_2, \dots, H_n$ в первом разложении являются положительными числами. Но тогда из свойств нормы

$$\|\alpha A\| = \alpha \|A\|, \quad (\alpha > 0);$$
$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|;$$
$$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$$

вытекает, что

$$\|e^{H_1} e^{H_2} \dots e^{H_n} - (I + H_1 + \dots + H_n)\| \leq e^{\|H_1\|} e^{\|H_2\|} \dots e^{\|H_n\|} - (1 + \|H_1\| + \dots + \|H_n\|).$$

После этого остается воспользоваться тривиальным неравенством

$$e^x - 1 \leq \frac{1}{2} x^2 e^x.$$

Первые два неравенства доказываются аналогично.

Из неравенств (I), (П) леммы легко следует

Теорема. Сходимость ряда

$$M = \sum_{j=1}^{\infty} \|H_j\| < \infty$$

достаточна для сходимости бесконечного произведения

$$\prod_{j=1}^{\infty} e^{H_j}.$$

В самом деле, при $m < n$

$$A_n - A_m = \prod_{j=1}^{n} e^{H_j} - \prod_{j=1}^{m} e^{H_j} = \prod_{j=1}^{m} e^{H_j} \Big( \prod_{j=m+1}^{n} e^{H_j} - I \Big)$$

и, следовательно,

$$\|A_n - A_m\| \leq \Big\| \prod_{j=1}^{m} e^{H_j} \Big\| \, \Big\| \prod_{j=m+1}^{n} e^{H_j} - I \Big\| \leq e^{\sum_{j=1}^{m} \|H_j\|} \sum_{j=m+1}^{n} \|H_j\| \times$$
$$\times e^{\sum_{j=m+1}^{n} \|H_j\|} \leq 2M \sum_{j=m+1}^{n} \|H_j\|,$$

т.е. $A_n$ – последовательность Коши; то же, очевидно, справедливо и для последовательности $A_n^{-1}$. Теорема доказана.

Заметим, что в скалярном случае при дополнительном условии неотрицательности показателей $H_j = h_j > 0$

$$\|H_j\| = h_j$$

сходимость ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|H_j\| = \sum_{j=1}^{\infty} h_j$$

является не только достаточным, но и необходимым условием сходимости произведения

$$\prod_{j=1}^{\infty} e^{H_j} = \prod_{j=1}^{\infty} e^{h_j}.$$

В самом деле, сейчас

$$\prod_{j=1}^{\overrightarrow{}} e^{h_j} = e^{\sum_{j=1}^{\overline{}} h_j},$$

откуда и следует утверждение.

В матричном случае требование на $H_j$, аналогичное неотрицательности, формулируется без труда в зависимости от конкретной ситуации. Однако из-за некоммутативности умножения

$$\overrightarrow{\prod_{j=1}} e^{H_j} \neq e^{\sum_{j=1}^{\overline{}} H_j},$$

и это обстоятельство делает доказательство необходимости далеко нетривиальным. Подчеркнем, что сходимость ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty} \| H_j \|$$

имеет существенное значение для построения мультипликативной теории аналитических матриц-функций.

<u>Лемма П.</u> Пусть

$$A_n = \overrightarrow{\prod_{j=1}^{n}} K_j\,; \qquad B_n = \overrightarrow{\prod_{j=1}^{n}} L_j$$

и пусть

$$\mu_n = \max_j \{ \|L_1\| \|L_2\| \ldots \|L_{j-1}\| \|K_{j+1}\| \ldots \|K_n\| \}.$$

Тогда

$$\| A_n - B_n \| \le \mu_n \sum_{j=1}^{n} \| K_j - L_j \| . \tag{IУ}$$

В самом деле

$$A_n - B_n = K_1 K_2 \ldots K_{n-1} K_n - L_1 L_2 \ldots L_{n-1} L_n = K_1 \cdot K_2 \ldots K_{n-1} K_n -$$

$$- L_1 K_2 \ldots K_{n-1} K_n + L_1 K_2 \ldots K_{n-1} K_n - L_1 L_2 K_3 \ldots K_{n-1} K_n + L_1 L_2 \ldots L_{n-1} K_n - L_1 L_2 \ldots L_{n-1} L_n .$$

Переходя к нормам, получаем

$$\| A_n - B_n \| \le \| K_1 - L_1 \| \| K_2 \| \| K_3 \| \ldots \| K_n \| + \| L_1 \| \| K_2 - L_2 \| \ldots \| K_3 \| \ldots \| K_n \| +$$

$$+ \ldots + \| L_1 \| \| L_2 \| \ldots \| L_{n-1} \| \| K_n - L_n \| ,$$

или

$$\| A_n - B_n \| \le \mu_n \sum_{j=1}^{n} \| K_j - L_j \| ,$$

что и требовалось доказать.

## $2^0$. Мультипликативный интеграл Стилтьеса

Пусть на сегменте $[a,b]$ заданы скалярная функция $f(t)$ и оператор-функция $H(t)$. Через $\mathfrak{z}$ обозначим разбиение сегмента $[a,b]$ на $n$ частей точками

$$a=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n=b.$$

В каждом из мелких сегментов $[t_{j-1},t_j]$, $(j=1,2,\ldots,n)$ выберем по точке $\tau_j$, $t_{j-1}\le\tau_j\le t_j$ и, обозначив для кратности

$$H(t_j)-H(t_{j-1})=\Delta_j,$$

рассмотрим произведение

$$\Pi_{\mathfrak{z}}=e^{f(\tau_1)\Delta_1}\,e^{f(\tau_2)\Delta_2}\ldots e^{f(\tau_n)\Delta_n}=\overset{\curvearrowright}{\prod_{j=1}^{n}}e^{f(\tau_j)\Delta_j}.$$

$\Pi_{\mathfrak{z}}$ назовем интегральным произведением стилтьесовского типа для функции $f(t)$ по весу $H(t)$, составленному по разбиению $\mathfrak{z}$. Предположим теперь, что при

$$\max(t_j-t_{j-1})\to 0$$

существует обратимый предел интегральных произведений $\Pi_{\mathfrak{z}}$, независящий ни от способа разбиения сегмента $[a,b]$ на части, ни от выбора точек $\tau_j$. Этот предел назовем мультипликативным интегралом Стилтьеса и обозначим так:

$$\overset{\curvearrowright}{\int_a^b}e^{f(t)dH(t)}=\lim_{\max(t_j-t_{j-1})\to 0}\overset{\curvearrowright}{\prod_{j=1}^{n}}e^{f(\tau_j)[H(t_j)-H(t_{j-1})]}$$

Теперь естественно возникает вопрос об условиях на $f(t)$ и $H(t)$, обеспечивающих существование мультипликативного интеграла. Несмотря на то, что из-за некоммутативности умножения

$$\overset{\curvearrowright}{\int_a^b}e^{f(t)dH(t)}\ne e^{\int_a^b f(t)dH(t)}$$

не лишено интереса сравнение мультипликативного интеграла

$$\overset{\curvearrowright}{\int_a^b}e^{f(t)dH(t)}$$

с обычным аддитивным интегралом

$$\int_a^b f(t)\,dH(t).$$

Рассмотрим четыре класса операторных весов.

I. Оператор-функции $H(t)$ ограниченной вариации, т.е. такие $H(t)$, для которых существует постоянная $B>0$ такая, что для любого разбиения $\mathfrak{z}$ сегмента

$$\sum_{j=1}^{n} \| H(t_j) - H(t_{j-1}) \| \le B.$$

Точная верхняя грань

$$\sup_{\mathfrak{F}} \sum_{j=1}^{n} \| H(t_j) - H(t_{j-1}) \| = V$$

называется полной вариацией функции $H(t)$.

2. Непрерывные функции $H(t)$ ограниченной вариации.

3. Абсолютно непрерывные оператор-функции $H(t)$, т.е. такие, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что из неравенства

$$\sum (\beta_j - \alpha_j) < \delta$$

вытекает неравенство

$$\sum \| H(\beta_j) - H(\alpha_j) \| < \varepsilon,$$

где $(\alpha_j, \beta_j)$, $(j = 1, 2, \ldots)$ – попарно-непересекающиеся интервалы из $[a, b]$.

4. Оператор-функции $H(t)$, удовлетворяющие условию Липшица, т.е. такие, что существует постоянная $K > 0$ такая, что для любых точек $t'$, $t''$ из сегмента $(a, b)$ выполняется неравенство

$$\| H(t') - H(t'') \| \le K | t' - t'' |.$$

Легко проверяется, что каждый следующий класс содержится в предыдущем.

Для аддитивного интеграла справедлива следующая классическая теорема существования.

Если $f(t)$ непрерывна, а $H(t)$ ограниченной вариации на сегменте $[a, b]$, то интеграл Стилтьеса

$$\int_a^b f(t)\, dH(t)$$

существует.

Аналогичная теорема для мультипликативного интеграла

$$\overset{\frown}{\int_a^b} e^{f(t) dH(t)}$$

неверна (доказательство теоремы в данной литературе* ошибочно), как это вытекает из следующего примера.

Пусть $f(t) \equiv 1$, а

$$H(t) = \begin{cases} A & (a \le t < c), \\ B & (t = c), \\ C & (c < t \le b). \end{cases}$$

---

* $\boxed{\text{Потапов В.П.}}$ : Мультипликативная структура $J$-нерастягивающих матриц-функций. – Тр. Моск.мат. о-ва, 1955, 4, с. 125–236.

Если $\gamma$ не содержит точки $c$, то

$$\Pi_\gamma = e^{C-A}.$$

Если же $\gamma$ содержит точку $c$, то

$$\Pi_\gamma = e^{B-A} e^{C-B}.$$

Подобрав $A, B, C$ так, чтобы

$$e^{B-A} e^{C-B} \neq e^{C-A}$$

придем к тому, что

$$\lim_{\max(t_j - t_{j-1})} \Pi_\gamma$$

не существует.

Первая (основная) теорема существования.

Если $f(t)$ интегрируема в смысле Римана, а $H(t)$ удовлетворяет условию Липшица на сегменте $[a,b]$, то мультипликативный интеграл

$$\overset{b}{\underset{a}{\curvearrowright}} e^{f(t)\,dH(t)}$$

существует.

Доказательство. Согласно критерию Коши достаточно показать, что два интегральных произведения $\Pi_{\gamma_1}^{t\prime}$, $\Pi_{\gamma_2}^{t\prime}$ будут как угодно мало отличаться друг от друга, если разбиения $\gamma_1, \gamma_2$ будут достаточно мелкими. Рассмотрим разбиение $\gamma$, полученное объединением точек разбиений $\gamma_1, \gamma_2$. Так как

$$\| \Pi_{\gamma_1} - \Pi_{\gamma_2} \| \leq \| \Pi_{\gamma_1} - \Pi_\gamma \| + \| \Pi_\gamma - \Pi_{\gamma_2} \|,$$

то остается убедиться в малости

$$\| \Pi_{\gamma_1} - \Pi_\gamma \|.$$

Пусть

$$\gamma_1 : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b;$$
$$\gamma : t_{j-1} = t_0^{(j)} < t_1^{(j)} < \ldots < t_{k_j}^{(j)} = t_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

По неравенству (IV) леммы II

$$\| \Pi_{\gamma_1} - \Pi_\gamma \| = \| \prod_{j=1}^{n} e^{f(\tau_j)\Delta_j} - \prod_{j=1}^{n} e^{f(\tau_1^{(j)})\Delta_1^{(j)}} \ldots e^{f(\tau_{k_j}^{(j)})\Delta_{k_j}^{(j)}} \| \leq$$

$$\leq \mu \sum_{j=1}^{n} \| e^{f(\tau_j)\Delta_j} - e^{f(\tau_1^{(j)})\Delta_1^{(j)}} \ldots e^{f(\tau_{k_j}^{(j)})\Delta_{k_j}^{(j)}} \|,$$

где

$$\mu = \max_j \{ \| e^{f(\tau_1)\Delta_1} \| \ldots \| e^{f(\tau_{j-1})\Delta_{j-1}} \| \| e^{f(\tau_1^{(j+1)})\Delta_1^{(j+1)}} \ldots$$

$$\ldots e^{f(\tau_{k_{j+1}}^{(j+1)})\Delta_{k_{j+1}}^{(j+1)}} \| \ldots \| e^{f(\tau_1^{(n)})\Delta_1^{(n)}} \ldots e^{f(\tau_{k_n}^{n})\Delta_{k_n}^{n}} \| \}.$$

Обозначив $\sup_{(a,b)} |f(x)|$ через $\nu$, воспользуемся неравенством (I) леммы I и получим

$$\mu \leq e^{\nu\|\Delta_1\|} \ldots e^{\nu\|\Delta_{j-1}\|} e^{\nu(\|\Delta_1^{(j+1)}\| + \ldots + \|\Delta_{k_{j+1}}^{(j+1)}\|)} \times \ldots$$

$$\times e^{\nu(\|\Delta_1^{(n)}\| + \ldots \|\Delta_{k_n}^{(n)}\|)} \leq e^{\nu \sup_{\gamma} [\|\tilde{\Delta}_1\| + \ldots + \|\tilde{\Delta}_m\|]} = e^{\nu \bigvee_a^b H} = M,$$

и следовательно,

$$\| \Pi_{\gamma_1} - \Pi_{\gamma} \| \leq M \sum_{j=1}^{n} \| e^{f(\tau_j)\Delta_j} - e^{f(\tau_1^{(j)})\Delta_1^{(j)}} \ldots e^{f(\tau_{k_j}^{(j)})\Delta_{k_j}^{(j)}} \|.$$

Оценивая произвольное слагаемое последней суммы, учтем прежде всего что

$$\Delta_j = \Delta_1^{(j)} + \Delta_2^{(j)} + \ldots + \Delta_{k_j}^{(j)}.$$

Тогда получим

$$\| e^{f(\tau_j)\Delta_j} - e^{f(\tau_1^{(j)})\Delta_1^{(j)}} \ldots e^{f(\tau_k^{(j)})\Delta_{k_j}^{(j)}} \| =$$

$$= \| (I + f(\tau_j)\Delta_j + R_j) - (I + [f(\tau_1^{(j)})\Delta_1^{(j)} + \ldots + f(\tau_{k_j}^{(j)})\Delta_{k_j}^{(j)}] + \tilde{R}_j \| \leq \{ |f(\tau_j) - f(\tau_1^{(j)})| \times$$

$$\times \|\Delta_1^{(j)}\| + \ldots + |f(\tau_j) - f(\tau_{k_j}^{(j)})| \|\Delta_{k_j}^{(j)}\| \} + \{ \|R_j\| + \|\tilde{R}_j\| \} = A + B.$$

Для оценки первого слагаемого введем в рассмотрение

$$\omega_j = \sup_{t', t'' \in [t_{j-1}, t_j]} |f(t') - f(t'')|$$

– колебание функции $f(t)$ на сегменте $(t_{j-1}, t_j)$ и, вспоминая, что $H(t)$ удовлетворяет условию Липшица, получаем

$$A \leq K\omega_j (t_1^{(j)} - t_0^{(j)}) + \ldots + K\omega_j (t_{k_j}^{(j)} - t_{k_{j-1}}^{(j)}) = K\omega_j (t_j - t_{j-1}).$$

Для оценки второго слагаемого $B$ воспользуемся неравенством (II) леммы I: $\|R_j\| \leq \nu^2 \|\Delta_j\|^2 e^{\nu\|\Delta_j\|} \leq \nu^2 \|\Delta_j\| \max_{j} \|\Delta_j\| e^{\nu \bigvee_a^b H} \leq \nu^2 K \times$

$$\times (t_j - t_{j-1}) K \max_j (t_j - t_{j-1}) M.$$

Таким образом,

$$\|R_j\| \le (t_j - t_{j-1})\nu^2 K^2 M \max(t_j - t_{j-1}).$$

Аналогично

$$\|\tilde{R}_j\| \le \nu^2 \Big(\sum_{i=1}^{k_j} \|\Delta_i^{(j)}\|\Big)^2 e^{\nu \sum_{i=1}^{k_j} \|\Delta_i^{(j)}\|} \le \nu^2 K^2 (t_j - t_{j-1})^2 e^{\nu \overset{b}{\underset{a}{V}} H} \le \nu^2 K^2 M \times$$

$$\times \max_j (t_j - t_{j-1})(t_j - t_{j-1})$$

и, следовательно,

$$B \le (t_j - t_{j-1})\nu^2 K^2 M \max(t_j - t_{j-1}).$$

Окончательно получим

$$\|\Pi_{\mathfrak{Z}_1} - \Pi_{\mathfrak{Z}}\| \le KM \sum_{j=1}^{n} \omega_j (t_j - t_{j-1}) + (b-a)\, 2\nu^2 K^2 M^2 \max(t_j - t_{j-1}),$$

поскольку функция $f(t)$ интегрируема по Риману, то правая часть неравенства стремится к нулю при $\max(t_j - t_{j-1}) \to 0$.
Теорема доказана, так как по тем же соображениям и $\Pi_{\mathfrak{Z}_1}^{-1} - \Pi_{\mathfrak{Z}}^{-1} \to 0$.

Так же (притом значительно проще) доказывается при тех же условиях существование аддитивного операторного интеграла

$$\int_a^b f(t)\, dH(t)$$

и скалярного интеграла

$$\int_a^b |f(t)|\, dV(t),$$

где

$$V(t) = \overset{t}{\underset{a}{V}} H(x).$$

Условие Липшица, наложенное на $H(t)$, слишком обременительно, его можно в значительной степени ослабить, ужесточив несколько условие на $f(t)$. Дело в том, что мультипликативные интегралы

$$\overset{b}{\underset{a}{\int\limits^{\curvearrowright}}} e^{f(t) dH(t)}, \quad \overset{\beta}{\underset{\alpha}{\int\limits^{\curvearrowright}}} e^{f_1(x) dH_1(x)},$$

где

$$f_1(x) = f(\varphi(x)), \quad H_1(x) = H(\varphi(x)),$$

а $t = \varphi(x)$ – непрерывная строго монотонная функция, отображающая сегмент $[\alpha, \beta]$ на семент $[a, b]$, одновременно существуют (и равны между собой) в силу того, что предельные переходы при

$$\max(t_j - t_{j-1}) \to 0, \quad \max(x_j - x_{j-1}) \to 0$$

эквиваленты. Ясно также, что

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} H(t) = \overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}} H_1(x),$$

и что счетное множество отображением $t = \varphi(x)$ переводится снова в счетное, чего нельзя сказать о множестве нулевой меры*.

Покажем сейчас, что отправляясь от произвольной непрерывной оператор-функции $H(t)$ ограниченной вариации, всегда можно перейти к функции $H_1(x) = H(\varphi(x))$, удовлетворяющей условию Липшица.

Рассмотрим скалярную функцию

$$\pi(t) = \overset{t}{\underset{a}{V}} H \qquad (a < t < b).$$

Нетрудно убедиться, что при $t' < t''$

$$\pi(t'') - \pi(t') = \overset{t''}{\underset{t'}{V}} H$$

и что $\pi(t)$ непрерывна одновременно с $H(t)$.

Введем новую переменную $x$, полагая

$$x = \pi(t) + t.$$

Функция $x = x(t)$ строго возрастает, непрерывна и отображает сегмент $(a, b)$ на $(\alpha, \beta)$, где $\alpha = a,\ \beta = \pi(b) + b = V + b$. Через

$$t = \varphi(x)$$

обозначим обратную функцию. Оператор-функция

$$H_1(x) = H[\varphi(x)]$$

удовлетворяет условию Липшица на сегменте $[\alpha, \beta]$.

В самом деле, пусть $x' < x''$ — две произвольные точки из $[\alpha, \beta]$. Мы имеем

$$\|H_1(x'') - H_1(x')\| = \|H[\varphi(x'')] - H[\varphi(x')]\| = \|H(t'') - H(t')\| \leq \pi(t'') - \pi(t') <$$
$$< \pi(t'') + t'' - \pi(t') - t' = x'' - x' = 1 \cdot |x'' - x'|.$$

После изложеноого становится ясной

<u>Вторая теорема существования.</u>

Если ограниченная на сегменте $[a, b]$ функция $f(t)$ имеет максимум счетное множество точек разрыва, а оператор-функция $H(t)$ непрерывна и имеет ограниченную вариацию на этом сегменте, то мультипликативный интеграл

---

* Отображение $t = \varphi(x)$, переводящее множество меры нуль в множество не нулевой меры, легко построить, опираясь на известный пример непрерывной монотонной функции, множество точек роста которой имеет меру, равную нулю.

$$\overset{\curvearrowright}{\int_a^b} e^{f(t)dH(t)}$$

существует.

Нетрудно убедиться в том, что при этих же условиях существует аддитивный операторный интеграл

$$\int_a^b f(t)\, dH(t)$$

и скалярный интеграл

$$\int_a^b |f(t)|\, d(\overset{t}{\underset{a}{V}} H).$$

Предельный переход в неравенствах леммы I приводит к следующим оценкам мультипликативного интеграла.

<u>Лемма III</u>. Имеют место следующие неравенства:

$$\Big\| \overset{\curvearrowright}{\int_a^b} e^{f(t)dH(t)} \Big\| \le e^{\int_a^b |f(t)|dv(t)}; \tag{I}$$

$$\Big\| \overset{\curvearrowright}{\int_a^b} e^{f(t)dH(t)} - I \Big\| \le \int_a^b |f(t)|dv(t)\, e^{\int_a^b |f(t)|dv(t)}; \tag{II}$$

$$\Big\| \overset{\curvearrowright}{\int_a^b} e^{f(t)dH(t)} - [I + \int_a^b f(t)dH(t)] \Big\| \le \frac{1}{2} \Big[\int_a^b |f(t)|dv(t)\Big]^2 e^{\int_a^b |f(t)|dv(t)} \tag{III}$$

Всюду здесь

$$v(t) = \overset{t}{\underset{a}{V}} H.$$

Остановимся еще на следующих, легко доказываемых свойствах мультипликативного интеграла.

1. Если $a < c < b$, то

$$\overset{\curvearrowright}{\int_a^b} e^{f(t)dH(t)} = \overset{\curvearrowright}{\int_a^c} e^{f(t)dH(t)} \overset{\curvearrowright}{\int_c^b} e^{f(t)dH(t)}$$

2. $$\Big(\overset{\curvearrowright}{\int_a^b} e^{f(t)dH(t)}\Big)^{-1} = \overset{\curvearrowleft}{\int_a^b} e^{-f(t)dH(t)}.$$

Отметим, наконец, один частный, но важный случай второй теоремы существования.

<u>Третья теорема существования</u>.

Если $f(t) \equiv 1$, а $H(t)$ абсолютно непрерывна на сегменте $[a, b]$, то мультипликативный интеграл

$$\overset{\curvearrowright}{\int_a^b} e^{dH(t)}$$

существует.

## 3. Мультипликативный интеграл Лебега

Рассмотрим матрицы $(m_{kj}(t)) = M(t)_{(a \le t \le b)}$, все элементы которых являются комплекснозначными суммируемыми по Лебегу функциями. Заметим, что, опираясь на теорию интегрирования в векторных пространствах, можно было бы продолжить изложение на операторном уровне, вводя понятие суммируемой по Лебегу оператор-функции, не слишком обыденное для широкого круга математиков. Мы этого делать не будем, поскольку излагаемая здесь теория аналитических матриц-функций обладает достаточной информативной ценностью уже в случае квадратных матриц второго порядка.

Итак, пусть $M(t)\ (a \le t \le b)$ – суммируемая по Лебегу матрица-функция. Через

$$\lambda_1(t) \geq \lambda_2(t) \geq \ldots \geq \lambda_m(t) \geq 0$$

обозначим собственные числа матрицы $M(t)M^*(t)\ (M^*(t) = \overline{M^T}(t))$.
Тогда

$$\|M(t)\| = \sqrt{\lambda_1(t)} \le \sqrt{\lambda_1(t) + \lambda_2(t) + \ldots + \lambda_m(t)} =$$

$$= \sqrt{\sum_{k,j=1}^{m} m_{kj}(t)\overline{m_{kj}}(t)} \le \sqrt{\left(\sum_{k,j=1}^{m} |m_{kj}(t)|\right)^2} = \sum_{k,j=1}^{m} |m_{kj}(t)|$$

и, следовательно, $\|M(t)\|$ также суммируемая функция.

Очевидно и наоборот, если $\|M(t)\|$ – суммируема, а $m_{kj}(t)$ – измеримые функции, то из неравенства

$$|m_{kj}(t)| \le \|M(t)\|$$

следует, что и $m_{kj}(t)$ – суммируемы.

Через $H(t)$ обозначим интеграл Лебега с переменным верхним пределом

$$H(t) = \int_a^t M(x)\,dx .$$

Как обычно доказывается, что $H(t)$ – абсолютно непрерывна; $\bigvee_a^b H = \int_a^b \|M(x)\|\,dx$; $H(t)$ почти всюду имеет производную $\frac{dH}{dt} = M(t)$.

Но тогда из третьей теоремы существования и леммы III вытекает, что мультипликативный интеграл Стилтьеса

$$\int_a^{b}\!\!\!\!\frown e^{dH(t)}$$

существует и удовлетворяет следующим оценкам:

$$\left\| \int_a^{b}\!\!\!\!\frown e^{dH(t)} \right\| \le e^{\int_a^b \|M(t)\|dt} ; \qquad \text{(I)}$$

$$\left\| \int_a^{b}\!\!\!\!\frown e^{dH(t)} - I \right\| \le \int_a^b \|M(t)\|\,dt \; e^{\int_a^b \|H(t)\|dt} ; \qquad \text{(II)}$$

$$\left\| \overset{\curvearrowright}{\int_a^b} e^{dH(t)} - \left[ I + \int_a^b M(t)dt \right] \right\| \leq$$
$$\leq \frac{1}{2} \left[ \int_a^b \| M(t) \| dt \right]^2 e^{\int_a^b \| M(t) \| dt} . \qquad \text{(III)}$$

Построенный так по матрице-функции $M(t)$ интеграл

$$\overset{\curvearrowright}{\int_a^b} e^{dH(t)} = \overset{\curvearrowright}{\int_a^b} e^{d(\int_a^t M(x)dx)}$$

будем обозначать

$$\overset{\curvearrowright}{\int_a^b} e^{M(t)dt} = \overset{\curvearrowright}{\int_a^b} e^{dH(t)}$$

и называть мультипликативным интегралом Лебега от матрицы-функции $M(t)$.

В дальнейшем важное значение имеет изучение мультипликативного интеграла Лебега с переменным верхним пределом

$$W(t) = \overset{\curvearrowright}{\int_a^t} e^{M(x)dx} \quad (a \leq t \leq b).$$

Теорема. Для любой суммируемой $M(t)$ мультипликативный интеграл Лебега

$$W(t) = \overset{\curvearrowright}{\int_a^t} e^{M(x)dx} \quad (a \leq t \leq b)$$

с переменным верхним пределом является абсолютно непрерывной функцией на сегменте $[a, b]$ и имеет, следовательно, почти всюду на $[a, b]$ суммируемую производную, равную

$$\frac{dW}{dt} = W(t) M(t) \qquad (*)$$

и по ней интегрированием восстанавливается матрица-функция $W(t)$:

$$W(t) = I + \int_a^t W(x) M(x) dx.$$

Из утверждений теоремы в доказательстве нуждаются лишь свойство абсолютной непрерывности и формула (*), остальные являются хорошо известными следствиями из них.

Пусть $a \leq \alpha < \beta \leq b$ . Воспользовавшись неравенствами (I, II), получим

$$\| W(\beta) - W(\alpha) \| = \left\| \overset{\curvearrowright}{\int_a^\alpha} e^{M(x)dx} \left( \overset{\curvearrowright}{\int_\alpha^\beta} e^{M(x)dx} - I \right) \right\| \leq \left\| \overset{\curvearrowright}{\int_a^\alpha} e^{M(x)dx} \right\| \left\| \overset{\curvearrowright}{\int_\alpha^\beta} e^{M(x)dx} - I \right\| \leq$$

$$\leq e^{\int_a^\alpha \|M(x)\|dx} \int_\alpha^\beta \|M(x)\|dx \; e^{\int_\alpha^\beta \|M(x)\|dx} \leq K[v(\beta)-v(\alpha)],$$

где

$$K = e^{\int_a^b \|M(x)\|dx}, \quad v(t) = \int_a^t \|M(x)\|dx.$$

Абсолютная непрерывность $W(t)$ непосредственно следует из абсолютной непрерывности $v(t)$ – скалярного аддитивного интеграла Лебега с переменным верхним пределом.

Фиксируя $t$, вычислим правую производную $W_+'(t)$, считая, что $\Delta t > 0$. Очевидно,

$$W(t+\Delta t) - W(t) = \overset{t+\Delta t}{\underset{a}{\int\!\!\!\!\curvearrowright}} e^{M(x)dx} - \overset{t}{\underset{a}{\int\!\!\!\!\curvearrowright}} e^{M(x)dx} = W(t)[\overset{t+\Delta t}{\underset{t}{\int\!\!\!\!\curvearrowright}} e^{M(x)dx} - I]$$

и если обозначить

$$\overset{t+\Delta t}{\underset{t}{\int\!\!\!\!\curvearrowright}} e^{M(x)dx} - [I + \int_t^{t+\Delta t} M(x)dx] = R_{\Delta t},$$

то по неравенству (Ш)

$$\|R_{\Delta t}\| \leq \frac{1}{2}[\int_t^{t+\Delta t} \|M(x)\|dx]^2 e^{\int_t^{t+\Delta t}\|M(x)\|dx} \leq [\int_t^{t+\Delta t} \|M(x)\|dx]^2 K.$$

Но тогда

$$\frac{W(t+\Delta t) - W(t)}{\Delta t} = W(t)\{\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} M(x)dx + \frac{1}{\Delta t} R_{\Delta t}\},$$

и почти всюду

$$\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} M(x)\,dx \to M(t)$$

$$\|\frac{1}{\Delta t} R_{\Delta t}\| \leq K[\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} \|M(x)\|dx] \int_t^{t+\Delta t} \|M(x)\|dx \to K\|M(t)\|0 = 0.$$

Следовательно,

$$W_+'(t) = W(t)M(t).$$

Но поскольку производная абсолютно непрерывной функции $W(t)$ существует почти всюду, то почти всюду имеет место равенство

$$\frac{dW}{dt} = W(t)M(t),$$

что и завершает доказательство теоремы.

Рассмотрим последнее равенство как дифференциальное уравнение относительно неизвестной матрицы-функции с суммируемым на $[a,b]$ матричным коэффициентом $M(t)$.

Из доказанной выше теоремы следует, что мультипликативный интеграл

$$W(t)=\overset{t}{\underset{a}{\int}} e^{M(x)dx}$$

является матрицей-функцией, удовлетворяющей почти всюду дифференциальному уравнению и начальному условию в точке $t=a$

$$W(a)=I.$$

Покажем, что эта задача имеет единственное решение в классе абсолютно непрерывных функций. В самом деле, пусть $W_1(t)$ – произвольное решение задачи. Интегрируя от $a$ до $t$, придем к тождествам

$$W_1(t)=I+\int_a^t W_1(x)\,M(x)\,dx;$$

$$W(t)=I+\int_a^t W(x)\,M(x)\,dx$$

и тогда для разности

$$Y(t)=W_1(t)-W(t)$$

справедливо тождество

$$Y(t)=\int_a^t Y(x)\,M(x)\,dx.$$

Доказательство того, что $Y(t)\equiv 0$ достаточно традиционно. Обозначим через $\mu$ наибольшее значение абсолютно непрерывной функции $\|Y(t)\|$ на сегменте $[a,b]$. Тогда

$$\|Y(t)\|\le\int_a^t \mu\,\|M(x)\|dx.$$

Используя эту оценку для $Y(x)$ под знаком предыдущего интеграла, получаем улучшенную оценку

$$\|Y(t)\|\le\mu\int_a^t\int_a^x\|M(u)\|du\,\|M(x)\|\,dx=\mu\,\frac{\left[\int_a^t\|M(x)\|dx\right]^2}{2}.$$

После $n$ шагов придем к неравенству

$$\|Y(t)\|\le\mu\,\frac{\left[\int_a^t\|M(x)\|dx\right]^n}{n!}.$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$, получаем

$$\|Y(t)\|=0,$$

что и требовалось доказать.

В заключение заметим, что мультипликативный интеграл

$$W(b)=\overset{b}{\underset{a}{\int}} e^{M(t)dt}$$

является хорошо известным объектом теории систем линейных дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dw_1}{dt} = w_1 m_{11}(t) + \ldots + w_m \; m_{m1}(t),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dw_m}{dt} = w_1 m_{1m}(t) + \ldots + w_m \; m_{mm}(t)$$

с суммируемой матрицей коэффициентов на сегменте $[a,b]$

$$M(t) = \begin{pmatrix} m_{11}(t) & \ldots & m_{1m}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ m_{m1}(t) & \ldots & m_{mm}(t) \end{pmatrix}.$$

Очевидно, каждая строка матрицы

$$W(t) = \begin{pmatrix} w_{11}(t) & \ldots & w_{1m}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ w_{m1}(t) & \ldots & w_{mm}(t) \end{pmatrix}$$

является решением системы; эти решения в точке $t=a$ удовлетворяют начальным условиям

$$w_{11}(a)=1, \quad w_{12}(a)=0, \quad \ldots, w_{1m}(a)=0;$$
$$w_{21}(a)=0, \quad w_{22}(a)=1, \quad \ldots, w_{2m}(a)=0;$$
$$w_{m1}(a)=0, \quad w_{m2}(a)=0, \quad \ldots; w_{mm}(a)=1.$$

Поскольку $W^{-1}(t)$ существует, то они линейно независимы, т.е. образуют фундаментальную систему, а матрица, составленная из таких решений, называется матрицей Вронского или вронскианом. Таким образом, мультипликативный интеграл

$$\int_a^b e^{M(t)dt}$$

является вронскианом системы дифференциальных уравнений, нормированным в точке $t=a$ условием

$$W(a)=I.$$

УДК 517.53

В.А.Ткаченко

## О РАЗРЕШИМОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СВЕРТКИ

В работах [1-3] был найден критерий разрешимости неоднородных уравнений типа свертки в пространствах аналитических функционалов, которые являются сопряженными пространствами к индуктивным пределам семейств банаховых пространств целых функций. Аналитическая реализация этих результатов дает возможность указать необходимые и достаточные условия разрешимости таких уравнений в пространствах функций, аналитических в выпуклых областях.

Основная задача настоящей работы состоит в рассмотрении уравнений типа свертки в пространствах, которые являются сопряженными к проективным пределам семейств банаховых пространств: в изучении двойственной ситуации. В качестве аналитической реализации получим критерий разрешимости уравнения типа свертки на выпуклом компакте с внутренней точкой.

Зафиксируем ограниченную тригонометрически выпуклую при заданном порядке $\rho > 0$ функцию $K(\theta)$ и введем пространство $P(K)$ всех целых функций одной комплексной переменной, индикаторы которых при порядке $\rho$ не превосходят $K(\theta)$. Каждому целому $m>0$ соответствует банахово пространство $B_m(K)$ всех целых функций, для которых конечна норма

$$\|\psi\|_{m,K} = \sup_{r,\theta} |\psi(re^{i\theta})| \exp(-K(\theta) - \tfrac{1}{m}) r^{\rho}. \tag{I}$$

Пространство $P(K)$ является проективным пределом семейства $\{B_m(K)\}_1^{\infty}$ и, будучи наделено системой норм (I), оказывается пространством Фреше. Поскольку каждое вложение $B_{m+1}(K) \to B_m(K)$ вполне непрерывно, $P(K)$ относится к пространствам типа $(M^*)$, которые были введены в работе [4]. Сопряженное пространство $H(K)$ по терминологии [4] имеет тип $(LN^*)$: оно является индуктивным пределом семейства сопряженных пространств $\{B_m^*(K)\}_1^{\infty}$, образующих прямой спектр относительно вполне непрерывных вложений $i_m^*$.

Если $K_1(\theta)$ и $K_2(\theta)$ – две функции с указанными свойствами и $\psi(\lambda)$ – целая функция с индикатором $h_\psi(\theta)$ при порядке $\rho$, то при выполнении условия $K_2(\theta) + h_\psi(\theta) \le K_1(\theta)$ оператор $\varphi$ умножения на $\psi(\lambda)$ непрерывно отображает пространство $P(K_2)$ в $P(K_1)$. Сопряженный оператор $\psi(D) = \varphi^*$, который мы и называем оператором типа свертки, непрерывно отображает $H(K_1)$ в $H(K_2)$. Цель данной работы состоит в описании условий, при которых последнее отображение эпиморфно, т.е. мы устанавливаем критерий разрешимости неоднородного уравнения

$$\psi(D) f = g \tag{2}$$

в $H(K_1)$ при произвольной правой части $g \in H(K_2)$.

Вначале обозначим через $R(K_2)$ множество тех точек $\alpha$ отрезка $[0, 2\pi]$, в каждой двусторонней окрестности которых отлична от постоянной функция $K_2'(\theta) + \rho^2 \int_\alpha^\theta K_2(\omega) d\omega$. Положим еще $\mathcal{P}(K_2) = \{\lambda = re^{i\theta} : \theta \in R(K_2)\}$. Очевидно, что на дополнительном к $R(K_2)$ множестве функция $K_2(\theta)$ является тригонометрическим индикатором. В дальнейшем предполагается, что найдется тригонометрически $\rho$-выпуклая функция $h(\theta)$, для которой $h(\theta)<K_2(\theta)$ при всех $\theta\in[0,2\pi]$. Отсюда следует, что $K_2(\theta)$ может быть тригонометрическим индикатором лишь на интервалах, длина которых меньше $\pi/\rho$.

Теорема. Для того чтобы уравнение (2) имело решение $f\in H(K_1)$ при произвольной правой части $g\in H(K_2)$, необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись следующие условия:

а) если $\theta\in R(K_2)$, то $K_2(\theta)+h_\varphi(\theta)=K_1(\theta)$;

в) функция $\varphi(\lambda)$ имеет вполне регулярный рост на множестве лучей $\mathcal{P}(K_2)$.

Доказательство достаточности состоит в проверке замкнутости подпространства $\Phi P(K_2)$ в $P(K_1)$. Оно проводится так же, как и аналогичное рассуждение в [2] для уравнений в пространствах, сопряженных к индуктивным пределам семейств банаховых пространств целых функций, и здесь будет опущено.

Для доказательства необходимости введем подпространство $N_\varphi\subset H(K_1)$ решений однородного уравнения $\varphi(D)f=0$. Ввиду непрерывности оператора $\varphi(D)$, подпространство $N_\varphi$ замкнуто в $H(K_1)$ и, как следует из результатов работы [5], фактор-пространство $M_\varphi=H(K_1)/N_\varphi$ имеет одновременно с $H(K_1)$ тип $(LN^*)$. Если $N_\varphi^{(m)}=N_\varphi\cap B_m^*(K_1)$, то (как нетрудно проверить) $M_\varphi$ – индуктивный предел семейства банаховых пространств $\{N_\varphi^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$. Если (2) разрешимо в $H(K_1)$ при любом $g\in H(K_2)$, то фактор-оператор $\hat{\Phi}$ взаимно-однозначно и непрерывно отображает пространство $M_\varphi$ на $H(K_2)$. Поскольку пространство $M_\varphi$ имеет тип $(LN^*)$, оно является сопряженным к рефлексивному пространству Фреше [4] и как таковое совершенно полно [6]. Кроме того, $H(K_2)$ – бочечное пространство. Поэтому к $\hat{\Phi}$ можно применить теорему Банаха об обратном операторе [6] и заключить, что $\hat{\Phi}^{-1}$ непрерывно отображает $H(K_2)$ на $M_\varphi$.

Обозначим через $S_m$ единичный шар пространства $B_m^*(K_2)$. Из определения индуктивной топологии следует, что множество $S_m$ ограничено в $H(K_2)$, а тогда $\hat{\Phi}^{-1}S_m$ – ограниченное множество в $M_\varphi$. Привлекая теперь описание ограниченных множеств в пространствах типа $(LN^*)$, данное в [4], заключаем, что для каждого $m\geq 1$ найдется такое целое $p=p(m)\geq 1$ и постоянная $C=C(m)>0$, что множество $\hat{\Phi}^{-1}S_m$ содержится в шаре радиуса $C$ пространства $N^{(p)}$ с центром в нуле. Это значит, что для всех $g\in S_m$ будет выполняться оценка $\|\hat{\Phi}^{-1}g\|_p\leq C$, в которой согласно определению фактор-нормы

$$\|\hat{\Phi}^{-1}g\|_p=\inf_{x\in N_\varphi^{(p)}}\|f+x\|_{p,K_1}$$

при таком $f \in H(K_1)$, что $\varphi(D)f = g$ и

$$\|f\|_{p,K_1} = \sup_{\|\psi\|_{p,K_1} \le 1} |\langle f, \psi \rangle|.$$

Иными словами, при каждом $m \ge 1$ можно найти такое $p > 1$ и такое $C > 0$, что при любом $g \in B_m^*(K_2)$ существует решение $f \in H(K_1)$ уравнения (2), удовлетворяющее неравенству $\|f\|_{p,K_1} \le C\|g\|_{m,K_2}$.

Теперь для произвольной функции $\psi \in P(K_2)$ $g \in B_m^*(K_2)$ имеем

$$|\langle g, \psi \rangle| = |\langle \varphi(D)f, \psi \rangle| = |\langle f, \varphi\psi \rangle| \le \|f\|_{p,K_1} \|\varphi\psi\|_{p,K_1} \le C\|g\|_{m,K_2} \|\varphi\psi\|_{p,K_1}.$$

Если выбрать здесь в качестве $g$ функционал $\delta_\mu$, определяемый равенством $\langle \delta_\mu^{(0)}, \psi \rangle = \psi(\mu)$, то получим

$$|\psi(\mu)| \le C\|\varphi\psi\|_{p,K_1} \exp(K_2(\theta) + \frac{1}{m})r^\rho, \; \mu = re^{i\theta}. \tag{3}$$

Из этой оценки следует замкнутость подпространства $\varphi P(K_2)$ в $P(K_1)$ и, как и в [2], выполнение первого условия доказываемой теоремы.

Для доказательства необходимости второго условия предположим, что $\alpha \in R(K_2)$ и на луче $\arg\lambda = \alpha$ рост функции $\varphi(\lambda)$ нерегулярен. Тогда из работы [7] найдутся такие положительные числа $\gamma$, $\varepsilon$ и $\xi$ и монотонно растущая к $+\infty$ последовательность чисел $\{R_k\}_1^\infty$, что $\lim\limits_{k\to\infty} R_k R_{k+1}^{-1} = 0$ и

$$r^{-\rho} \ln|\varphi(re^{i\theta})| \le h_\varphi(\theta) - \gamma, \; |\theta - \alpha| \le \varepsilon, \; |t - R_k| \ge \xi R_k.$$

Поскольку $\alpha \in R(K_2)$, можно выбрать число $\Delta > 0$ и тригонометрически $\rho$-выпуклую функцию $h(\theta)$ так, чтобы при всех $\theta \in [0, 2\pi]$ выполнялись неравенства

$$h(\theta) \le K_2(\theta) - 2\Delta$$

и чтобы нашлась такая точка $\beta \in [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$, что $h(\beta) + 2\Delta = K_2(\beta)$. Теперь по определившимся числам $\Delta$ и $\xi$ и последовательности $\{R_k\}_1^\infty$ /см.2, 7/ можно построить такую целую функцию $\omega(\lambda)$ типа $\Delta$ с индикатором $h_\omega(\theta) \le \Delta$ при порядке, $\rho$, что $h_\omega(\beta) = \Delta$ и

$$r^{-\rho} \ln|\varphi(re^{i\theta})| \le \Delta - \gamma, \quad |t - R_k| \le \xi R_k.$$

Очевидно, можно считать, что в обеих оценках $\gamma < \frac{1}{2}\Delta$.

Пусть $k(\theta)$ – какая-нибудь тригонометрически $\rho$-выпуклая функция, равная $\Delta$ при $\theta \bar{\in} [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$, всюду не превосходящая $\Delta + \gamma$ и такая, что $k(\beta) = \Delta + \gamma'$ с некоторым $\gamma' \in (0, \gamma)$. Обозначим через $\psi$ и $\chi$ две целые функции вполне регулярного роста с индикаторами $h(\theta)$ и $k(\theta)$ соответственно. Очевидно, $\psi \in P(K_2)$, $\omega\psi \in P(K_2)$ и каким бы ни был полином $P$, выполняются вытекающие из (3) оценки

$$|P(\lambda)\omega(\lambda)\psi(\lambda)| \le C\|\psi\varphi\omega\psi\|_{\rho,K_1} \exp(K_2(\theta)+\frac{1}{m})r^{\rho},\ \mu=re^{i\theta} \tag{4}$$

Зафиксируем здесь $m$ настолько большим, что $\gamma' m > 1$. Тогда определяются соответствующие значения $C$ и $\rho$. Из теоремы 2 работы [8] следует существование последовательности полиномов $\{\varphi_n\}_1^{\infty}$, которая сходится к функции $\chi(\lambda)$ в пространстве $P(k)$. Поскольку эта последовательность ограничена в $P(k)$, можно указать такую постоянную $A$, что при всех $n \ge 1$ будет $|P_n(re^{i\theta})| \le A\exp(k(\theta)+\frac{1}{5\rho})r^{\rho}$. Оценим теперь последовательность $x_n = \psi P_n \omega\psi,\ n \ge 1$.

Если $|\theta-\alpha| \ge \varepsilon$, то при всех достаточно больших $n$

$$r^{-\rho}\ln|A^{-1}x_n(re^{i\theta})| \le h_\psi(\theta)+\frac{1}{5\rho}+k(\theta)+\frac{1}{5\rho}+\Delta+\frac{1}{5\rho}+h(\theta)+\frac{1}{5\rho} \le h_\psi(\theta)+K_2(\theta)+\frac{1}{\rho} \le K_1(\theta)+\frac{1}{\rho}.$$

Если же $|\theta-\alpha| \le \varepsilon$ и $|r-R_k| \ge \xi R_k$ при всех $k \ge 1$, то

$$r^{-\rho}\ln|A^{-1}x_n(re^{i\theta})| \le h_\psi(\theta)+\frac{1}{5\rho}+k(\theta)+\frac{1}{5\rho}+\Delta-\gamma+h(\theta)+\frac{1}{5\rho} \le h_\psi(\theta)+K_2(\theta)+\gamma'-\gamma+\frac{1}{\rho} \le K_1(\theta)+\frac{1}{\rho}.$$

Наконец, при $|\theta-\alpha| \le \varepsilon$ и $|r-R_k| \le \xi R_k$ с некоторым $k > 1$ имеем

$$r^{-\rho}\ln|A^{-1}x_n(re^{i\theta})| \le h_\psi(\theta)-\gamma+k(\theta)+\frac{1}{5\rho}+\Delta+\frac{1}{5\rho}+h(\theta)+\frac{1}{5\rho} \le h_\psi(\theta)+K_2(\theta)-\gamma+\gamma'+\frac{1}{\rho} \le K_1(\theta)+\frac{1}{\rho}.$$

Окончательно $r^{-\rho}\ln|A^{-1}x_n(re^{i\theta})| \le K_1(\theta)+\frac{1}{\rho}$ и из (4) получаем $|\psi(\lambda)\varphi_n(\lambda)\cdot$ $\cdot\,\omega(\lambda)\psi(\lambda)| \le A\exp(K_1(\theta)+\frac{1}{\rho})r^{\rho}$. Выполнив в последней оценке предельный переход при $n\to\infty$, придем к неравенству

$$|\chi(\lambda)\omega(\lambda)\psi(\lambda)| \le \mathrm{const}\,\exp(K_2(\theta)+\frac{1}{m})r^{\rho},\ \lambda=re^{i\theta}.$$

Индикаторы функций $\chi$, $\omega$ и $\psi$ в точке $\theta=\beta$ равны соответственно $\Delta+\gamma'$, $\Delta$ и $K_2(\theta)-2\Delta$. Поскольку функции $\chi$ и $\psi$ имеют вполне регулярный рост, индикатор произведения этих функций при $\theta=\beta$ равен $K_2(\beta)+\gamma'$. Но тогда из последней оценки следует $\gamma' \le \frac{1}{m}$ вопреки выбору числа $m$. Полученное противоречие доказывает теорему. В заключение приведем одну ее аналитическую реализацию.

Пусть $Q$ – выпуклый компакт комплексной плоскости с опорной функцией $K(\theta)$. Как известно, преобразование Бореля [9] изоморфно отображает пространство $P(K(-\theta))$ на пространство функций, аналитических вне $Q$ и равных нулю на бесконечности. Поэтому пространство $H(K(-\theta))$ изоморфно пространству $A(Q)$ функций, аналитических на $Q$, с естественной топологией индуктивного предела.

Из доказанной теоремы вытекает следующее предложение.

Пусть $Q_1$ и $Q_2$ – два выпуклых компакта, содержащих внутренние точки, с опорными функциями $K_1(\theta)$ и $K_2(\theta)$ и пусть $\varphi(\lambda)$ – целая функция экспоненциального типа с преобразованием Бореля $\gamma(\xi)$, сопряженной диаграммой – выпуклым компактом $Q$, опорная функция которого $h(\theta)$ удовлетворяет условию $K_2(\theta)+h(\theta)\leq K_1(\theta)$.

Для того чтобы уравнение

$$\oint\limits_{l} f(z+\xi)\gamma(\xi)d\xi = g(z),\ z\in Q_2, \tag{5}$$

в котором $l$ – простой замкнутый контур, охватывающий компакт $Q$, имело решение $f(z)$, аналитическое на $Q_1$, при произвольной правой части $g(z)$, аналитической на $Q_2$, необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись следующие условия:

а) если $\theta\in R(K_2(-\theta))$, то $K_2(-\theta)+h(-\theta)=K_1(-\theta)$;

б) функция $\varphi(\lambda)$ имеет вполне регулярный рост на множестве лучей $P(K_2(-\theta))$.

Для доказательства достаточно заметить, что, согласно /8/, $\varphi(D)$ в рассматриваемой ситуации имеет вид интегрального оператора из левой части (5), где при заданной функции $f\in A(Q_1)$ следует выбрать контур $l$ столь близким к компакту $Q$, чтобы функция $f(z+\xi)$ была аналитична на некоторой окрестности компакта $Q_2$ при каждом $\xi\in l$.

1. Ткаченко В.А. Об операторах типа свертки в пространствах аналитических функционалов. – Докл АН СССР, 1974, 219, № 3, с. 555-557.
2. Ткаченко В.А. Уравнения типа свертки в пространствах аналитических функционалов. – Изв. АН СССР. Сер. мат., 1977, 41, № 2, с. 378-392.
3. Ткаченко В.А. О разрешимости неоднородного уравнения типа свертки в пространствах аналитических функционалов. – В кн.: Исследования по теории операторов и их приложениям. Киев : Наук. думка, 1979. с. 123-128.
4. Sebastiao-e-Silva J. Sur certo classi di spazi localmente convessi importanti per le applicazioni. - Rend.math.et appl.,1955, N 5, p. 388-410.
5. Райков Д.А. Об индуктивных и проективных пределах с вполне непрерывными вложениями. – Докл. АН СССР, 1957, 113, № 5, с.984-986.
6. Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства. – М. : Мир, 1967. – 258 с.
7. Азарин В.С. Об одном характеристическом свойстве функций вполне регулярного роста внутри угла. – Теория функций, функц. анализ и их прил., 1966, вып. 2, 55-66.
8. Ткаченко В.А. Об операторах, коммутирующих с обобщенным дифференцированием в пространствах аналитических функционалов с заданным индикатором роста. – Мат.сб., 1977, 102, № 3, с. 435-456.
9. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. – М. : Гостехиздат, 1956. – 632 с.

УДК 517.9+519.219

И.Д.Чуешов

# О СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ В НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКЕ УПРУГИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

I. Нелинейная динамика упругой пологой оболочки, защемленной по контуру, может быть описана следующей системой уравнений Кармана (см., например, [1]):

$$\ddot{u}+\gamma\dot{u}+a_1\Delta^2 u-[u+f,v]+\lambda L[u]=p(x,y,t);$$
$$a_2\Delta^2 v+[u+2f,u]=0,\quad (x,y)\in\Omega,\ t\in[0,T]; \tag{I}$$

$$u\big|_\Gamma=\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma=0,\quad v\big|_\Gamma=\frac{\partial v}{\partial n}\Big|_\Gamma=0,\quad \Gamma=\partial\Omega;\quad u\big|_{t=0}=u_0(x,y),\quad \dot{u}\big|_{t=0}=u_1(x,y),$$

где $[\varphi,\psi]=\varphi_{xx}\psi_{yy}+\varphi_{yy}\psi_{xx}-2\varphi_{xy}\psi_{xy}$ ; $\Omega$ – ограниченная область в $R^2$ с кусочно гладкой границей $\Gamma$, точка над функцией означает дифференцирование по $t$, $\Delta^2$ – бигармонический оператор, $a_1, a_2>0$, $\gamma\geq 0$, $L[u]=(T_1 u_x+S u_y)_x+(T_2 u_y+S u_x)_y$ Предполагается, что $p(x,y,t)$ существенно ограниченная по $t$ функция со значениями в $L^2(\Omega)$, $u_0$ и $f$ лежат в соболевском пространстве $H_0^2(\Omega)$, $u_1, T_1, T_2, S\in L^2(\Omega)$.

При сделанных предположениях существование решения задачи (I) было установлено в работе И.И.Воровича [2] (см. также [1]). Однако не всегда целесообразно рассматривать индивидуальные решения системы (I). Дело в том, что при некоторых $\lambda$ оболочка может иметь несколько форм равновесия и судить о ее реальном поведении можно лишь статистически. В настоящей работе по заданному распределению начальных условий $\{u_0,u_1\}$ построим меру $\rho$, сосредоточенную на множестве решений системы (I) и изучим некоторые ее свойства. Как и в статистической гидромеханике (см.3) основная трудность связана с тем, что проблема единственности решения задачи (I) вообще говоря не решена, поэтому для построения эволюции начального распределения нельзя воспользоваться оператором сдвига по траекториям системы (I). Эту трудность (как и в [3]) удается обойти с помощью рассмотрения галеркинских аппроксимаций системы (I).

Отметим, что настоящая статья написана под влиянием работ по статистической теории турбулентности вязкой несжимаемой жидкости (см.[3] и имеющиеся там ссылки) и использует некоторые идеи и методы, развитые в рамках этой теории.

2. Нам понадобятся следующие функциональные пространства. Пусть

$$Z = C^1(0,T; H^{-2}(\Omega)) \cap C(0,T; L^2(\Omega)),$$

где $C^1(0,T; H^{-2}(\Omega))$ – пространство сильно непрерывно дифференцируемых на $[0,T]$ функций со значениями в соболевском пространстве $H^{-2}(\Omega)$; $C(0,T; L^2(\Omega))$ – пространство сильно непрерывных на $[0,T]$ функций со значениями в $L^2(\Omega)$. Очевидно, что $Z$ – банахово пространство с нормой

$$\|u\|_Z = \max_{[0,T]} \|u(t)\| + \max_{[0,T]} \|\dot u(t)\|_{-2},$$

где $\|\cdot\|_l$ – норма в соболевском пространстве $H^l(\Omega)$; $\|\cdot\|$ – норма в $L^2(\Omega)$ (эти обозначения используются в дальнейшем).

Пусть $L$ – множество вектор-функций на $[0,T]$ со значениями в $H_0^2(\Omega)$, для которых конечна норма

$$\|u\|_L = \operatorname*{ess\,sup}_{[0,T]} \|u(t)\|_2 + \operatorname*{ess\,sup}_{[0,T]} \|\dot u(t)\| + \operatorname*{ess\,sup}_{[0,T]} \|\ddot u(t)\|_{-2}.$$

Известно, что при сделанных выше предположениях любое индивидуальное решение $u(x,y,t)$ задачи (I) лежит в $L$ (см. [2, 4]).

Пользуясь теоремой Ю.А.Дубинского [3, с. 123], можно доказать, что пространство $L$ компактно вложено в $Z$.

Пусть $V = H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Норму элемента $u = \{u_0, u_1\}$ из $V$ определим формулой $\|u\|_V^2 = \|u_0\|_2^2 + \|u_1\|^2$. В качестве пространства начальных распределений рассмотрим множество $\mathcal{B}^\alpha(V)$ вероятностных мер $\mu$ на $\sigma$-алгебре $\mathcal{B}(V)$ борелевских множеств пространства $V$, обладающих при некотором $\alpha > 1$ свойством

$$E^\alpha(\mu) = \int_V [E(w_0, w_1)]^\alpha \mu(dw) < \infty, \tag{2}$$

где $w = \{w_0, w_1\}$, а

$$E(w_0, w_1) = \frac{1}{2}(\|w_1\|^2 + a_1\|\Delta w_0\|^2 + \frac{a_2}{2}\|\Delta \tilde w_0\|^2), \tag{3}$$

причем $\tilde w_0 = -\frac{1}{a_2} G_2([w_0 + 2f, w_0])$; $G_2$ – оператор Грина задачи Дирихле для бигармонического оператора в $\Omega$. Величина $E(w_0, w_1)$ имеет смысл энергии оболочки с прогибом $w_0$ и мгновенной скоростью $w_1$. Поскольку скобка $[\cdot,\cdot]$ задает непрерывное билинейное отображение $H_0^2(\Omega)$ в $H^{-2}(\Omega)$ [4], легко показать, что $E(w_0, w_1)$ – непрерывный функционал на $V$. Поэтому условие (2) имеет смысл.

Пусть $\gamma_t$ – ограниченный линейный оператор из $Z$ в $H = L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)$, действующий по формуле

$$\gamma_t[u] = \{u(t), \dot u(t)\}.$$

Оператор $\gamma_t$ можно сузить до плотно заданного отображения $Z$ в $V \subset H$. Так же как и в работе [3] удается показать, что отображение $\gamma_t$ измеримо.

По аналогии с [3] введем следующее понятие статистического решения.

Определение. Пространственно-временным статистическим решением задачи (I), отвечающим начальной мере $\mu$ на $V$, называется вероятностная мера $P$ на $\sigma$-алгебре $\mathcal{B}(Z)$ борелевских множеств пространства $Z$, обладающая следующими свойствами.

I. Существует замкнутое в $L$ множество $W$ такое, что а) $W \in \mathcal{B}(Z)$; б) $P(W)=1$; в) $W$ состоит из функций $w$ таких, что пара $\{w, -\frac{1}{a_2} B_2([w+2f, w])\}$ образует решение задача (I).

2. $\gamma_0^* P = \mu$, т.е. для любого $A \in \mathcal{B}(V)$; $P(\gamma_0^{-1}[A]) = \mu(A)$, где $\gamma_0^{-1}[A]$ – полный прообраз множества $A$ при отображении $\gamma_0 : Z \to V$.

3. Основным результатом является следующая

Теорема I. Пусть начальная мера $\mu$ лежит в $\mathcal{B}^{\alpha}(V)$, $\alpha \geq 3/2$. Тогда задача (I) имеет пространственно-временное статистическое решение $P$, обладающее следующими тремя свойствами:

I) $\int_Z \|u\|_L \; P(du) < \infty$; (4)

2) существует константа $C_T$ такая, что для всех $t \in [0,T]$

$$\int_Z (\|u(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2)^{\alpha} P(du) < C_T; \tag{5}$$

3) имеет место следующее энергетическое неравенство

$$\int_Z [E(u(t), \dot{u}(t))]^{\alpha/2} P(du) < C_1 + C_2 E^{\alpha}(\mu), \tag{6}$$

где $C_1$ и $C_2$ могут зависеть от $T$.

Доказательство теоремы конструктивно и проводится по следующей схеме. Сначала строятся меры $P_m$, отвечающие галеркинским приближениям системы (I). Затем устанавливается слабая компактность семейства $\{P_m\}$. И, наконец, доказывается, что каждая предельная точка семейства $\{P_m\}$ является пространственно-временным статистическим решением.

Пусть $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ – базис собственных функций бигармонического оператора с условиями Дирихле на $\Gamma = \partial\Omega$. Приближенное решение задачи (I) ищется в виде

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) e_i .$$

Коэффициенты $g_{im}(t)$ выбираются так, что

$$(\ddot{u}_m, e_j) + \gamma(\dot{u}_m, e_j) + a_1(\Delta u_m, \Delta e_j) + ([u_m + f, v_m], e_j) + L(u_m, e_j) = (p(t), e_j), \quad j = 1,2,\ldots,m; \tag{7}$$

$$v_m = -\frac{1}{a_2} G_2 ([u_m + 2f, u_m]);$$

$$u_m|_{t=0} = u_{0m} = P_m u_0, \quad \dot{u}_m|_{t=0} = u_{1m} = \dot{P}_m u_1;$$

$$L(\varphi,\psi) = \lambda \int_\Omega [T_1 \varphi_x \psi_x + T_2 \varphi_y \psi_y + S(\varphi_x \psi_y + \varphi_y \psi_x)] dxdy,$$

где $P_m$ и $\dot{P}_m$ – ортопроекторы на линейную оболочку $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ в пространстве $H_0^2(\Omega)$ и $L^2(\Omega)$ соответственно.

Если (7) умножить на $\dot{g}_{jm}(t)$ и просуммировать по $j$, то нетрудно обнаружить (см. [2,4]), что

$$\frac{d}{dt}\{E(u_m(t), \dot{u}_m(t)) + \frac{1}{2} L(u_m, u_m)\} = -\gamma \|\dot{u}_m\|^2 + (p(t), \dot{u}_m).$$

Добавляя к левой и правой частям равенства, если это необходимо, член $C(u_m, \dot{u}_m)$ с подходящей константой $C > 0$, можно получить, что

$$E(u_m(t), \dot{u}_m(t)) \le c_1 + c_2 E(u_{0m}, u_{1m}), \; t \in [0,T], \qquad (8)$$

где константы $c_1$ и $c_2$ могут зависить от $T$.

Из стандартных теорем теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [5]), вытекает, что функция $u_m(t)$ определяется системой (7) однозначно и непрерывно зависит от начальных данных (следует иметь в виду, что в (7) зависимость от $\{g_{jm}(t)\}$ полиномиальна). Таким образом, мы можем ввести оператор $S_m(t): \{u_{0m}, u_{1m}\} \to u_m(t)$ как непрерывное отображение $V_m = \pi_m V$ в $Z$ (здесь $\pi_m = P_m + \dot{P}_m$).

Пусть $\mu$ – вероятностная мера на $V$. Для каждого $m = 1,2,\ldots$ построим на $V$ вероятностные меры $\mu_m$:

$$\mu_m(A_0) = \mu(\pi_m^{-1}(A_0 \cap V_m)), \; A_0 \in \mathcal{B}(V). \qquad (9)$$

Пространственно-временное статистическое решение системы (7) определим формулой

$$P_m(A) = \mu_m(S_m^{-1}(A)), \quad A \in \mathcal{B}(Z). \qquad (10)$$

Как и в случае статистической гидромеханики [3], легко установить, что каждая из вероятностных мер $P_m$ сосредоточена на решениях системы (7) и $\gamma_0^* P_m = \mu_m$. Поэтому из априорной оценки (8) получаем, что

$$\int_Z \operatorname*{ess\,sup}_{[0,T]} [E(u(t), \dot{u}(t))]^\alpha P_m(du) \le c_1 + c_2 E^\alpha(\mu) \qquad (11)$$

(измеримость подынтегрального выражения вытекает из того, что $E(u_m(t), \dot{u}_m(t))$ непрерывно зависит от начальных условий).

Докажем теперь, что каждое решение $u_m(t)$ системы (7) обладает свойством

$$\|\ddot{u}_m(t)\|_{-2} \le c_1 + c_2 E(u_m(t), \dot{u}_m(t)). \tag{12}$$

Действительно, из (7) вытекает, что для любого $\psi \in H_0^2(\Omega)$

$$(\ddot{u}_m, P_m\psi) + \gamma(\dot{u}_m, P_m\psi) + \alpha_1(\Delta u_m, \Delta P_m\psi) + ([u_m + f, v_m], P_m\psi) + L(u_m, P_m\psi) = (p(t), P_m\psi). \tag{13}$$

Однако поскольку $\{e_i\}$ – базис собственных функций бигармонического оператора, то $(\ddot{u}_m, P_m\psi) = (\ddot{u}_m, \psi)$. Поэтому из (13) легко извлечь, что

$$|(\ddot{u}_m(t), \psi)| \le (c_1 + c_2 E(u_m(t), \dot{u}_m(t)))\|\psi\|_2.$$

Отсюда и получается оценка (12).

Из (11), (12) вытекает, что

$$\int_Z \|u\|_2 \, P_m(du) \le c_1 + c_2 E^1(\mu). \tag{14}$$

Для доказательства теоремы I нам понадобится также построить некоторые специальные регуляризации подынтегральных выражений в (4)-(6). Поэтому введем регуляризирующий оператор $P^\varepsilon = \exp(-\varepsilon H)$, где $H$ – корень квадратный из бигармонического оператора с условиями Дирихле на $\partial\Omega$.

Пусть

$$\gamma_t^\varepsilon u = \{P^\varepsilon u(t), P^\varepsilon \dot{u}(t)\}.$$

Очевидно, что при каждом фиксированном $\varepsilon > 0$, $\gamma_t^\varepsilon$ непрерывное отображение $Z$ в $V$. Нетрудно также показать, что для всех $u \in H_0^2(\Omega)$ и $v \in H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$ имеет место неравенство

$$|([u_\varepsilon, \tilde{u}_\varepsilon] - [u, \tilde{u}], v)| \le \varepsilon \|v\|_4 (c_1 + c_2\|\Delta u\|^3),$$

где $u_\varepsilon = P^\varepsilon u$, $\tilde{w} = -1/\alpha^2 G_2([w + 2f, w])$. Кроме того, очевидно, что $\|\Delta \tilde{u}_\varepsilon\| \le c_1 + c_2\|\Delta u\|^2$.

Указанные свойства оператора $P^\varepsilon$ позволяют легко установить следующее утверждение.

Лемма I. Пусть $\mu \in \mathcal{B}^1(V)$. Тогда для любых фиксированных $w \in V$ и $k = 1, 2, \ldots, m$ имеют место равномерные по $m$ и $t \in [0, T]$ оценки

$$\int_Z |(\gamma_t^\varepsilon u, w)_V| \, P_m(du) \le c_1;$$

$$\int_Z |(\gamma_t^\varepsilon u - \gamma_t u, \pi_k w)_V| \, P_m(du) \le c_2\varepsilon.$$

Если же $\mu \in \mathcal{B}^{3/2}(V)$, то величины $\|\Delta u_\varepsilon\|$ и $\langle [u_\varepsilon + f, \tilde{u}_\varepsilon], P_k v \rangle$ являются непрерывными функционалами на $Z$ и имеют место оценки

$$\int_Z |\langle [u_\varepsilon + f, \tilde{u}_\varepsilon], P_k v \rangle| \, P_m(du) \le c_1;$$

$$\int_Z |\langle [u_\varepsilon + f, \tilde{u}_\varepsilon] - [u+f, \tilde{u}], \rho_k v\rangle| P_m(du) \le C_2\varepsilon,$$

для $k=1,2,\ldots, v\in \mathcal{D} = C_0^\infty(\Omega\times(0,T))$, $\langle\ .\ ,\ .\ \rangle$ – двойственность, порожденная скалярным произведением в $L^2(0,T; L^2(\Omega)) = L^2((0,T)\times\Omega)$.

Первая часть леммы I и проведенные ранее рассмотрения позволяют установить следующее утверждение.

<u>Лемма 2.</u> Пусть $\mu\in \mathcal{B}^\alpha(V)$, $\alpha > 1$. Тогда семейство мер $\{P_m\}$ слабо компактно на $Z$. Каждая слабая предельная точка $P$ этого семейства обладает свойствами (4), (5) и такова, что $\gamma_0^* P = \mu$.

Напомним, что слабая сходимость $P_k$ к $P$ означает, что для любой функции $f_U$ из пространства $C(Z)$ непрерывных ограниченных функций на $Z$

$$\int_Z f(u) P_k(du) \to \int_Z f(u) P(du),\ k\to\infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Слабая компактность семейства $\{P_m\}$ использует теорему Прохорова, оценку (I4) и компактность вложения $L$ в $Z$. Рассуждения аналогичны доказательству подобного утверждения в [3]. Для доказательства (4) и (5) следует заметить, что соответствующие подынтегральные выражения могут быть аппроксимированы снизу последовательностью непрерывных функционалов на $Z$. Например, подынтегральное выражение в (5) нужно аппроксимировать функционалом

$$(\|P^\varepsilon \dot{u}(t)\|^2 + \|\Delta P^\varepsilon u(t)\|^2)^\alpha$$

(в интеграле (4) необходимо также с помощью гладкого ядра осуществить сглаживание по $t$ члена, содержащего $\ddot{u}$). Далее следует рассуждать как и в [3]. Для того чтобы установить равенство $\gamma_0^* P = \mu$ нужно воспользоваться тем, что

$$I_m^\varepsilon = \int_Z \exp\{i(\gamma_0^\varepsilon u, \pi_k v)_V\} P_m(du)$$

при $\varepsilon\to 0$ и фиксированных $k$ равномерно по $m$ стремится к характеристическому функционалу меры $\mu_m = \gamma_0^* P_m$ (это вытекает из леммы I) и тем, что подынтегральное выражение в $I_m^\varepsilon$ – непрерывный функционал на $Z$.

Покажем теперь, что при $\mu\in\mathcal{B}^\alpha(V)$, $\alpha > 3/2$ каждая предельная точка $P$ сосредоточена на множестве решений системы (I).

Пусть $\varphi_j(t)\in C^1(0,T)$, $\varphi_j(T) = 0$. Тогда нетрудно показать, что для $\psi_r(t) = \sum_{j=r}^{r} \varphi_j(t) \otimes e_j$ имеет место тождество

$$M(u_m,\psi_r) = -\langle \dot u_m, \dot\psi_r\rangle - \gamma\langle u_m, \dot\psi_r\rangle + \alpha_1\langle \Delta u_m, \Delta\psi_r\rangle -$$

$$-\langle [u_m+f, \tilde u_m], \psi_r\rangle - \int_0^T L(u_m(\tau), \psi_r(\tau))d\tau - \langle p, \psi_r\rangle - (u_m, \psi_r(0)) = 0,$$

где $u_m$ – решение системы (7); $\tilde u_m = -1/\alpha_2 G([u_m+2f, u_m])$.
А поскольку каждое распределение $P_m$ сосредоточено на множестве решений системы (7), то для любой функции $g(u)$ из пространства $C_b(Z)$ непрерывных ограниченных функций на $Z$ с носителем из некоторого шара имеем, что

$$\int_Z M(u,\psi_r)g(u)P_m(du) = 0, \; m > r. \tag{15}$$

<u>Лемма 3.</u> Пусть $\mu \in \mathcal{L}^\alpha(V)$, $\alpha \geq 3/2$ . Тогда каждая предельная точка $P$ семейства $\{P_m\}$ удовлетворяет неравенству (6) и такова, что для любого $g \in C_b(Z)$

$$\int_Z M(u,\psi_r)g(u)P(du) = 0, \; r = 1,2,\dots . \tag{16}$$

Для доказательства необходимо построить регуляризации нелинейных членов в $M(u,\psi_r)$ и $E(u,\dot u)$.

Пусть

$$M_\varepsilon(u,\psi_r) = M(u,\psi_r) - \langle [u+f, \tilde u], \psi_r\rangle + \langle [u_\varepsilon + f, \tilde u_\varepsilon], \psi_r\rangle.$$

Тогда нетрудно показать, что $M_\varepsilon(u,\psi_r)$ – непрерывный функционал на $Z$ , а из леммы I вытекает, что

$$\int_Z |M_\varepsilon(u,\psi_r) - M(u,\psi_r)| P_m(du) \leq \varepsilon C$$

для всех $m = 1,2,\dots$ . Поэтому в интеграле

$$\int_Z M_\varepsilon(u,\psi_r)\, P_m(du)$$

предельные переходы по $\varepsilon$ и $m$ коммутируют. Следовательно, из (15) вытекает (16). Аналогичные рассмотрения позволяют получить и оценку (6). Заметим, что автоматически получается измеримость подынтегральных выражений в (6) и (16).

Из лемм 2 и 3 вытекает, что при $\mu \in \mathcal{L}^\alpha(V)$, $\alpha \geq 3/2$ каждая слабая предельная точка семейства $\{P_m\}$ приближенных статистических решений является пространственно-временным статистическим решением системы (I), если положить

$$W = \{u : M(u,\psi_r) = 0, \; r = 1,2,\dots\},$$

а уравнения в системе (I) понимать как равенства элементов в $H^{-2}(\Omega)$.

Установим в заключение некоторые дополнительные свойства статистических решений. Пусть $\mu \in \mathcal{L}^\alpha(V)$, $\alpha \geq 3/2$ и $P$ – статистическое решение, построенное в теореме I. Поскольку $\gamma_t$ –

непрерывное отображение $Z$ в $H$, то можно построить семейство вероятностных мер $\mu_t = \gamma_t^* \rho$, $t \in [0,T]$ на $H$. Из теоремы I при этом вытекает, что

$$\int_H (\|u_1\|^2 + \|\Delta u_0\|^2)^\alpha \mu_t(du) < C_T,$$

где $u = \{u_0, u_1\} \in H$. Поэтому каждая из мер $\mu_t$ $t \in [0,T]$ сосредоточена на $V$ и $\mu_0 = \mu$.

Отметим, что при каждом $t \in [0,T]$ мера $\mu_t$ имеет прозрачный физический смысл: она является совместным распределением прогиба оболочки и ее мгновенной скорости в момент $t$.

Определим на $H' = L^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$ характеристический функционал меры $\mu_t$

$$\chi(t,v) = \int_H e^{i(w_0,v_0) + i(w_1,v_1)} \mu_t(dw),$$

где $w = \{w_0, w_1\} \in H$, $v \in \{v_0, v_1\} \in H'$. Используя развитую выше технику, так же как и в [3] можно установить следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $\mu \in \mathcal{L}^\alpha(V)$, $\alpha > 3/2$. Тогда семейство мер $\mu_t = \gamma_t^* \rho$, где $\rho$ – статистическое решение построенное в теореме I, удовлетворяет уравнению Хопфа, отвечающему задаче (I), т.е. при любом $v \in H'$ функционал $\chi(t,v)$ абсолютно непрерывен по $t$ и

$$\frac{\partial \chi(t,v)}{\partial t} + i \int_H e^{i(w_0,v_0) + i(w_1,v_1)} R(t,v,w)\, \mu_t(dw) = 0, \qquad (17)$$

где $v = \{v_0, v_1\} \in H'$, $w = \{w_0, w_1\} \in H$, $R(t,v,w) = -(w_1, v_0) + \gamma(w_1, v_1) +$

$$+ a_1(\Delta w_0, \Delta v_1) + ([w_0 + f, \tilde{w}_0], v_1) - (p(t), v_1),$$

причем $\tilde{w}_0 = -1/a_2\, G_2([w_0 + 2f, w_0])$.

Отметим, что существование интеграла (17) вытекает из леммы I.


I. Ворович И.И. Неединственность и устойчивость в нелинейной механике сплошной среды. Некоторые математические проблемы. – В кн.: Нерешенные задачи механики и прикладной математики. М.; Изд. Моск. ун-та, 1977, с. 10–47.

2. Ворович И.И. О некоторых прямых методах в нелинейной теории пологих оболочек. – Изв. АН СССР, 1957, т. 21, № 6, с. 747–784.

3. Вишик М.И., Фурсиков А.В. Математические задачи статистической гидромеханики. – М. : Наука, 1980. – 440 с.

4. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М. : Мир, 1972. – 587 с.

5. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М. : Мир, 1970. – 720 с.

УДК 512

Нормальные формы в пространстве матриц / Белицкий Г.Р. – В кн.: Анализ в бесконечномерных пространствах и теория операторов. Сб.науч. тр. Киев: Наук. думка, 1983, с. 3-15.

Рассматриваются подгруппы $\mathcal{G} \subset GL(n,k)\times GL(m,k)$, являющиеся полупрямым произведением некоторой унипотентной подгруппы и подгруппы, изоморфной прямому произведению полных линейных групп меньшей размерности. Предлагается конструкция и алгоритм вычисления нормальной формы относительно действия двусторонними преобразованиями группы $\mathcal{G}$ в пространстве $n\times m$ – матриц. Общая конструкция дает, в частности, нормальную форму нескольких матриц относительно одновременного подобия и одновременного двустороннего преобразования. Множество нормальных форм относительно данной группы оказывается конструктивным.

УДК 548.571; 681.3

Исследование спектра колебаний полубесконечного двухатомного слоистого кристалла / Гельфгат И.М., Сыркин Е.С. – В кн.: Анализ в бесконечномерных пространствах и теория операторов. Сб.науч.тр. Киев: Наук. думка, 1983, с.15-23.

помощью обобщения хорошо известного метода исследовано формирование спектра поверхностных волн при наличии в двухатомном кристалле сильной анизотропии упругих свойств. Изучены для конкретной модели поверхностные волны как чисто сдвиговые, так и с вертикальной поляризацией.

Ил. 2. Библиогр.: 13 назв.

УДК 517.547

О проблеме Неванлинны – Пика в обобщенном классе Шура аналитических матриц-функций / Голинский Л.Б. – В кн.: Анализ в бесконечномерных пространствах и теория операторов. Сб.науч.тр. Киев: Наук. думка, 1983, с. 23-33.

Получено описание совокупности всех решений проблемы Неванлинны – Пика в обобщенном классе Шура в неопределенной ситуации. Показано, что резольвентная матрица задачи имеет тот же вид, что и в случае классической проблемы Неванлинны – Пика в классе сжимающих аналитических матриц-функций.

Библиогр.: 6 назв.

УДК 513.8.

К вопросу о коциклах динамических систем с плотным образом / Голодец В.Я., Шиков Р.А. - В кн.: Анализ в бесконечномерных пространствах и теория операторов. Сб. науч. тр. Киев: Наук.думка, 1983, с.33-42.

В работе доказывается, что любая нильпотентная сепарабельная локально-компактная группа является образом некоторого коцикла любой эргодической, свободной, аппроксимативно-конечной динамической системы, а также любого эргодического потока.

Библиогр.: 6 назв.

УДК 517.9

Обратная задача рассеяния для уравнения Штурма - Лиувилля с потенциалом, медленно убывающим на одном конце оси / Давыдов Р.Н. - В кн.: Анализ в бесконечномерных пространствах и теория операторов. Сб. науч. тр. Киев: Наук. думка, 1983, с. 42-54.

Построено решение обратной задачи рассеяния для уравнения $-y''+q(x)y=\lambda^2 y$ на оси с потенциалом $q(x)$, удовлетворяющим для всех $k$ и некоторого $n$ $(k,n=1,2,3,\dots)$ условию

$$\int_{\infty}^{1}|q(x)-n(n+1)/x^2|^2|x|^k dx+\int_{-1}^{\infty}|q(x)|^2(1+|x|^k)dx<\infty .$$

Библиогр.: 6 назв.

УДК 517.54

Параметризация элементарного кратного множителя неполного ранга / Дубовой В.К. - В кн.: Анализ в бесконечномерных пространствах и теория операторов. Сб. науч.тр. Киев: Наук. думка, 1983, с.54-68.

Дана параметризация $J$-растягивающего кратного множителя неполного ранга, возникающего в интерполяционной задаче Шура.

Библиогр.: 10 назв.

УДК 517.535.4

О поведении целой функции на последовательности концентрических окружностей / Еременко А.Э., Содин М.Л. - В кн.: Анализ в бесконечномерных пространствах и теория операторов. Сб.науч.тр. Киев: Наук. думка, 1983, с. 68-76.

Для любой последовательности непрерывных $2\pi$-периодических функций $g_k(\theta)$, удовлетворяющих условиям

$$\max_{\theta\in[0,2\pi]} g_k(\theta)=1,\quad \int_0^{2\pi} g_k(\theta)d\theta\geq 0,\ k\in\mathbb{N},$$

построена целая функция $f$ наперед заданного порядка $\rho$, $0\leq\rho\leq\infty$, для которой существует последовательность $r_k\to\infty$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty}\max_{\theta\in[0,2\pi]}\left|\frac{\log|f(r_k e^{i\theta})|}{\log M(r_k,f)}-g_k(\theta)\right|=0.$$

В качестве следствия опровергается одна из гипотез о поведении $L^p$-нормы функции $\log^+\frac{1}{|f(re^{i\theta})|}$.

Библиогр.: 7 назв.

УДК 517.5

Критерии компактности семейств $J$-растягивающих аналитических матриц-функций / Кацнельсон В.Э. – В кн.: Анализ в бесконечномерных пространствах и теория операторов. Сб. науч. тр. Киев: Наук. думка, 1983, с.76-87.

Получен ряд неравенств для аналитических в круге или в полуплоскости $J$-растягивающих $(J=J^*, J^2=I)$ матриц-функций. Эти неравенства полезны при обосновании различных предельных переходов в теории таких метриц-функций. По характеру эти неравенства родственны неравенству Гарнака для положительных гармонических функций: в них значение аналитической матрицы-функции в любой точке единичного круга или верхней полуплоскости оценивается через ее значение в некоторой точке.

Библиогр.: 6 назв.

УДК 517.547

Задача Левнера в свете $J$-теории аналитических матриц-функций / Ковалишина И.В. – В кн.: Анализ в бесконечномерных пространствах и теория операторов. Сб. науч.тр. Киев: Наук. думка, 1983, с. 87-97.

Сформулирована граничная проблема Неванлинны – Пика (задача Левнера) в матричной постановке. Выведено и решено Основное матричное неравенство задачи. Приведены основные факты $J$-теории, связанные с поставленной задачей. Дано описание пошагового процесса.

Библиогр.: 10 назв.

УДК 517.946

Обобщение теоремы Хартмана – Патнама / Лундина Д.Ш. – В кн.: Анализ в бесконечномерных пространствах и теория операторов. Сб. науч. тр. Киев : Наук. думка, 1983, с. 97-100.

В работе показано, что длины лакун в непрерывной части спектра оператора $L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + q(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ стремятся к нулю на бесконечности, если существует последовательность непересекающихся и неограниченно расширяющихся интервалов $(a_n - l_n, a_n + l_n)$ такая, что

$$\lim_{h\to 0} \limsup_{n\to\infty,\,|y|\le 1} \left\{ \frac{1}{2l_n} \int_{a_n-l_n}^{a_n+l_n} |q(x+yh)-q(x)|^2 dx + \int_{a_n-h}^{a_n+h} |q(x+yl_n)|^2 dx \right\} = 0.$$

Библиогр.: 2 назв.

УДК 517.5

Использование геометрической интерпретации для получения мультипликативного представления $J$-внутренней матриц-функции / Михайлова И.В. – В кн.: Анализ в бесконечномерных пространствах и теория операторов. Сб. науч. тр. Киев: Наук. думка, 1983, с. 101-117.

Применен метод кругов Вейля для исследования мультипликативного представления целых $J$-растягивающих матриц-функций. Доказано, что для матриц-функций вида

$$W(z)=e^{-izA_1}\cdot e^{-izA_2}\cdots e^{izA_n},\ A_kJ\geq 0,\ spA_k=0\ (k=1,\dots,n).$$

$A_k$ определяются по $W(z)$ однозначно (если $A_k$ и $A_{k+1}$ не коллинеарны), а также указана финитная процедура нахождения $A_k$ по $W(z)$.

Библиогр.: 8 назв.

УДК 517.946

Бесконечные произведения и мультипликативный интеграл / Потапов В.П. – В кн.: Анализ в бесконечномерных пространствах и теория операторов. Сб. науч.тр. Киев: Наук. думка, 1983, с.117-133.

Приведены определения мультипликативного интеграла Стилтьеса

$$\int_a^{\curvearrowright b} e^{f(t)dH(t)},$$

где $f(t)$ – скалярная функция на $[a,b]$, $H(t)$ – $m\times m$ матрица-функция. Доказаны теоремы существования мультипликативного интеграла при условиях: $f(t)$ интегрируема по Риману, $H(t)$ удовлетворяет условию Липшица, а также при условиях: $f(t)$ имеет на $[a,b]$ не более чем счетное множество точек разрыва, а $H(t)$ – непрерывная функция ограниченной вариации. В случае, когда $f(t)\equiv 1$, $H(t)=\int_a^t M(x)dx$, где $M(x)$ суммируема на $[a,b]$, мультипликативный интеграл называется мультипликативным интегралом Лебега. Доказана абсолютная непрерывность по $t$ мультипликативного интеграла Лебега с переменным верхним пределом

$$W(t)=\int_a^{\curvearrowright t} e^{M(x)dx}$$

и формула

$$\frac{dW}{dt}=W(t)M(t).$$

Библиогр.: 1 назв.

УДК 517.53

О разрешимости неоднородных уравнений типа свертки / Ткаченко В.А. – В кн.: Анализ в бесконечномерных пространствах и теория операторов. Сб.науч.тр. Киев: Наук. думка, 1983, с. 133-138.

Найден критерий эпиморфности оператора типа свертки, действующего в пространстве, сопряженном с проективным пределом семейства весовых пространств целых функций, связанных вполне непрерывными вложениями.

Библиогр.: 9 назв.

УДК 517.9+ 519.219

<u>О статистических решениях в нелинейной механике упругих пологих оболочек</u> / Чуешов И.Д. – В кн.: Анализ в бесконечномерных пространствах и теория операторов. Сб. науч. тр. Киев: Наук. думка, 1983, с. 139–146.

Доказано существование пространственно-временных статистических решений системы уравнений Кармана, описывающей динамику упругих пологих оболочек. Эти решения получаются как слабые предельные точки решений соответствующих галеркинских приближений системы Кармана. Изучены некоторые свойства построенных решений. При этом используются идеи и методы, развитые в статистической гидромеханике.
Библиогр.: 5 назв.

АНАЛИЗ В БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ
И ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ

Сборник научных трудов


Утверждено к печати ученым советом
Физико-технического института низких температур АН УССР

Редактор Е.Н.Цыганкова
Обложка художника М.С.Моложавого
Художественный редактор Л.А.Комяхова
Технический редактор Т.М.Зубрицкая
Корректор Л.Ю.Каменских

Информ. бланк № 6017

Подп. к печ. 24.11.83. БФ 05440. Формат 60x84/16. Бумага офс.№ 1.
Офс. печ. Усл.печ.л. 8,84. Усл.кр.-отт. 9,08. Уч.-изд.л. 8,62.
Тираж 500 экз. Заказ 3-871 Цена 1 р.

Издательство "Наукова думка". 252601, Киев 4, ул. Репина, 3.
Киевская книжная типография научной книги. 252004, Киев 4,ул.Репина,4.