НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ НИЗЬКИХ ТЕМПЕРАТУР
ІМ. Б. І. ВЄРКІНА

На правах рукопису

СИНЕЛЬЩИКОВ Сергій Дмитрович

УДК 519.46
517.986.4

ДІЇ НЕКОМУТАТИВНИХ ГРУП І КВАНТОВИХ АЛГЕБР НА ТОЧКОВИХ ПРОСТОРАХ ТА ЇХ q-АНАЛОГАХ

01.01.01 – математичний аналіз

Дисертація на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Харків – 2016

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Об'єкти і пов'язані з ними задачі, що розглянуті у роботі, займають важливі місця у сучасних ергодичній теорії і теорії квантових груп.

Коцикли динамічних систем є потужним засобом побудови нетривіальних групових дій та їх класифікації і можуть бути використані, як це власне і зроблено в дисертації, для вивчення тонких властивостей ергодичних дій груп. Одне з центральних місць серед об'єктів дослідження, яке коцикли займають в ергодичній теорії, пов'язане з тією обставиною, що будь-яка аменабельна ергодична групова дія є образом певного коциклу ергодичного автоморфізму. Цей результат, що був раніше відомий для вільних групових дій, природним чином потребує поширення на групові дії з нетривіальними стабілізаторами.

Задачі з регуляризації групових дій, розглянуті у роботі, мали стати внеском до вирішення проблем усунення «несуттєвих» елементів некоректності поведінки динамічних систем. Можливість такого усунення є ключем до вирішення багатьох задач ергодичної теорії.

Результати щодо полів стабілізаторів є змістовним кроком у вивченні невільних групових дій, для яких відомо набагато менше, ніж для вільних дій груп. Зокрема, проблеми спряженості і ізоморфізму стабілізаторів для ергодичних дій – це перше питання, яке природним чином виникає у цьому контексті.

Методи, розвинені для побудови ентропійної теорії дій скінченно-генерованих нільпотентних груп, є актуальними з точки зору можливості їх узагальнення на більш широкий клас тотально впорядкованих груп.

Коіндуковані дії груп, введені до розгляду з метою побудови небернулліївських дій з цілком позитивною ентропією, можуть стати засобом для вирішення інших задач ентропійної теорії, зокрема для побудови дій із зазначеними вище властивостями для груп без елементів нескінченного порядку.

На базі вивчення обмежених квантових симетричних областей вирішено низку стандартних та нових задач щодо конкретних квантових алгебр і побудови нових q-аналогів. Зокрема, вивчено властивості диференціальних численнь на квантових передоднорідних векторних просторах, побудовано квантові аналоги функтора Бернштейна, комплексного гіперболічного простору і асоційованих конусів, інтеграла Пуассона і рівнянь Хуа.

Квантові універсальні огортуючі алгебри з ідемпотентами, побудовані в роботі, можуть стати в нагоді при вивченні суперсиметрії.

Одержана класифікація симетрій квантової площини і її розширення Лорана може стати першим кроком до з'ясування повної групи симетрій різноманітних квантових об'єктів.

Таким чином, перелік задач, вирішених у дисертаційній роботі, входить до класу сучасних і актуальних проблем ергодичної теорії та теорії квантових груп.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана у відділі математичної фізики математичного відділення Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України. Результати дисертації є складовою частиною таких держбюджетних науково-дослідних робіт:

"Алгебраїчні та геометричні методи в теорії операторів та теорії динамічних систем" (номер державної реєстрації 0196U002943),

"Алгебраїчні та аналітичні методи в теорії операторів та теорії динамічних систем" (номер державної реєстрації 0100U004485),

"Аналітичні методи в теорії операторних алгебр, динамічних систем та теорії розсіювання" (номер державної реєстрації 0103U000313),

"Динамічні системи і спектральна теорія диференціальних та різницевих операторів" (номер державної реєстрації 0106U002558)

"Теорія відображень та груп: класифікація, спектральний та асимптотичний аналіз" (номер державної реєстрації 0110U007896).

Мета і задачі дослідження. Метою роботи є дослідження тонких властивостей ергодичних динамічних систем у термінах їх коциклів, полів стабілізаторів та ентропійних інваріантів, а також побудова квантових аналогів алгебр функцій і диференціальних числень на обмежених симетричних областях, поряд з різноманітними асоційованими структурами.

Об'єктами дослідження є ергодичні динамічні системи і квантові аналоги обмежених симетричних областей.

Предметами дослідження є коцикли динамічних систем разом із похідними груповими діями, поля стабілізаторів і фактори Фелла, алгебри Пінскера, інваріантні розбиття і K-системи, процедура коіндукції, а також коваріантні $*$-алгебри поліномів, узагальнені модулі Верма, коваріантні алгебри та коалгебри, квантові диференціальні числення, алгебри фінітних функцій, інваріантні інтеграли, квантові аналоги оператора Пуассона та рівнянь Хуа, ідемпотенти квантових алгебр і розклади Пірса, R-матриця, квантова площина і її симетрії.

Методи дослідження. Теорія операторів, функціональний аналіз, теорія міри, теорія груп, теорія категорій, теорія груп і алгебр Лі, теорія зображень.

Наукова новизна одержаних результатів. У роботі одержано нові результати з теорії коциклів динамічних систем, регуляризації дій груп та групоїдів, спряженості та ізоморфізму стабілізаторів групових дій, ентропійної теорії дій аменабельних груп, квантових аналогів обмежених симетричних областей, зображень квантових алгебр, квантових алгебр з ідемпотентами, симетрій квантової площини. Зокрема, вперше одержано наступні нові **результати, що виносяться на захист**:

– одержано остаточні результати з класифікації транзитних та рекурентних коциклів аменабельних динамічних систем;

– застосовано результати зі слабої еквівалентності коциклів до вивчення фундаментальних груп динамічних систем та властивостей дійснозначних коциклів з необмеженими лакунами;

– з'ясовано можливість регуляризації дій груп та групоїдів на вимірних відношеннях еквівалентності;

– для відомих результатів зі слабої еквівалентності коциклів з щільними образами та зовнішньої спряженості підгруп нормалізатора повної групи у вимірній ергодичній теорії встановлено нові аналоги для груп псевдо-гомеоморфізмів досконалого польського простору;

– з'ясовано достатні умови спряженості та ізоморфізму стабілізаторів групових дій, а також побудовано змістовні контрприклади;

– побудовано ентропійну теорію для дій скінченно генерованих нільпотентних груп, включно з описом алгебр Пінскера та K-систем в термінах розбиттів зі специфічними властивостями інваріантності;

– встановлено існування небернулліївських дій з цілком позитивною ентропією шляхом вивчення коіндукованих дій;

– побудовано квантовий аналог функтора Бернштейна;

– встановлено дуальність комплекса де Рама для квантових передоднорідних векторних просторів комутативного параболічного типу і узагальненої БГГ-резольвенти;

– побудовано теорію функцій на q-аналозі комплексного гіперболічного простору;

– побудовано квантовий аналог інтегрального оператора Пуассона та рівнянь Хуа;

– побудовано змістовні квантові алгебри з ідемпотентами та іншими дільниками нуля;

– подано повний перелік симетрій квантової площини, а також симетрій загального положення для розширення Лорана квантової площини.

Практичне значення одержаних результатів. Результати роботи мають теоретичний характер. У ній проведено фундаментальні дослідження, які поглиблюють наші знання про коцикли динамічних систем, їх стабілізатори, ентропійні властивості, а також про структуру квантових обмежених симетричних областей та зображення відповідних квантових алгебр. Вони можуть бути використані в ергодичній теорії, теорії квантових груп, математичній фізиці, функціональному аналізі та інших розділах математики.

Особистий внесок здобувача. Усі основні результати дисертації одержано автором особисто і самостійно. З результатів праць, які виконані у співавторстві, на захист виносяться лише положення, що одержані автором дисертації.

Зокрема, особисто дисертантом запропоновано та реалізовано підхід до доведення теореми єдиності коциклів, заснований на зведенні автоморфізма неперервного групоїда на його дискретну редукцію [64, 62, 65]. У роботі [54] автором запропоновано і реалізовано основний підхід до задачі обчислення фундаментальної групи динамічної системи, заснований на застосуванні теореми єдиності для коциклів. Такий же підхід (з використанням теореми єдиності для коциклів) впроваджено з ініціативи дисертанта у роботі [115] для дослідження дій Маккі коциклів з необмеженими лакунами. У роботі [63] автором запропонована і реалізована основна ідея регуляризації, заснована на перевизначенні відношення еквівалентності шляхом фіксації множин міри нуль у групі що діє та просторі з мірою, з подальшим застосуванням теореми Фубіні. У роботі [60] реалізовано ідею автора про перенесення результатів з класифікації коциклів з вимірної ергодичної теорії на контекст груп псевдо-гомеоморфізмів досконалого польського простору. У роботі [66] авторові, окрім вирішального внеску в доведення основних теорем, належать центральні контрприклади, що демонструють існування ергодичних групових дій з неізоморфними стабілізаторами. У роботах [67, 32] дисертанту належить ідея та її реалізація щодо застосування коіндукованих дій для доведення основного результату про існування небернулліївських дій з цілком позитивною ентропією.

У роботах [171, 172, 12, 13] дисертанту належить головний внесок у доведення основних результатів.

У роботі [37] С. Дуплію належить формулювання задач та перелік основних структур, що було проаналізовано, а також аналіз одержаних результатів та ідеї деяких доведень стосовно біалгебр з антиподом, регулярним за фон Нейманом. Авторові належать ідеї та реалізація доведень усіх інших результатів.

У роботі [39] С. Дуплію належить участь у формулюванні задачі і аналізі одержаних результатів. Ним також запроваджено систему інваріантів та позначень, у термінах яких подано класифікацію, що є змістом роботи. Авторові належать ідеї та реалізація доведень основних результатів.

Апробація результатів дисертації. Основні результати досліджень, наведені в дисертації, доповідалися та обговорювалися на таких міжнародних конференціях та семінарах:

– XII Школа з теорії операторів у функціональних просторах, Тамбов, Росія, 1987

– Conference on Ergodic Theory, Warsaw, Poland, 1995

– Conference on Descriptive Set Theory and Dynamical Systems, Marseille, France, 1996

– Конференція з математичної фізики, Київ, 1997

– Conference on Dynamical Systems, Marseille, France, 1998

– Conference on Ergodic Theory and Dynamical Systems, Torun, Poland, 2000

– Non-commutative Geometry and Representation Theory in Mathematical Physics, Karlstad, Germany, 2004

– 5th Mathematical Physics Meeting: Summer School in Modern Mathematical Physics, Belgrade, 2008

– II International Conf. Analysis and Mathematical Physics, Харків, 2014

– III International Conf. Analysis and Mathematical Physics, Харків, 2015

– семінар з ергодичної теорії в університеті м. Торунь, Польща (керівник Б. Каміньський)

– семінар з математичної фізики в університеті Париж-7, Франція (керівник Jean-Jacques Sansuc)

– семінар з ергодичної теорії в University of New South Wales, Australia (керівник Sutherland C. E.)

– семінар з квантових груп в University of Copenhagen, Denmark (керівник Jakobsen H. P.)

Публікації. Результати дисертації (винесені на захист) опубліковано в 21 статті [62, 54, 63, 64, 65, 115, 66, 60, 67, 171, 172, 168, 68, 32, 37, 38, 13, 39, 12, 177, 178].

Додатково з питань, близьких до тематики дисертації, опубліковані роботи [173, 166, 167, 175, 160, 170, 161, 169, 176].

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ І КОРОТКИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

1.1 Аменабельні ергодичні динамічні системи, їх коцикли та дії Маккі

Важлива роль коциклів у ергодичній теорії забезпечується можливістю їх використання для побудови нових групових дій, що є важливими інваріантами динамічної системи, на якій заданий коцикл. З кожним коциклом пов'язана дія, що зветься косим добутком (подекуди її називають ядром коцикла) і дія Маккі (її називають образом коцикла), див. [123]. Добре відомо, що ці дві дії є інваріантами когомологічного класу коциклів. Тим не менше, класифікація коциклів з точністю до когомології не є розумним підходом, як це можна побачити із наступних міркувань.

Ізоморфізм дій Маккі взагалі не означає, що відповідні коцикли когомологічні. Більше того, для когомологічних коциклів косі добутки ізоморфні. Таке співвідношення слід вважати занадто тонким, оскільки з точки зору теорії віртуальних груп Маккі [123] ядро коцикла є віртуальним підоб'єктом динамічної системи, на якій задано коцикл. Зокрема, апроксимативна скінченність цих об'єктів робить їх такими, що мають суто траєкторну природу, повністю ігноруючи структуру групи що діє.

Інший підхід, що був запропонований у роботі В. Голодця та С. Синельщикова [61], передбачає класифікацію коциклів з точністю до ізоморфізму пар, утворених ергодичним відношенням еквівалентності і когомологічним класом його коциклів. Завданням того дослідження було вивчення зовнішньої спряженості аменабельних підгруп нормалізатора апроксимативно скінченної повної групи. Було встановлено, що, з точністю до автоморфізма ергодичного апроксимативно скінченного відношення еквівалентності типу II, існує лише один когомологічний клас коциклів з щільним образом у заданій аменабельній локально компактній сепарабельній (л.к.с.) групі. Подібний результат для коциклів зі значеннями лише в компактних групах був незалежно одержаний іншими методами у роботі А. Фільдстіла [51]. Варто також зазначити, що структура коциклів досліджувалася в роботі К. Шмідта [159]. Зазначене вище співвідношення між коциклами було пізніше названо слабою еквівалентністю.

У роботі В. Крігера [111] подано класифікацію апроксимативно скінченних динамічних систем з точністю до траєкторної еквівалентності у термінах дій Маккі для коциклів Радона-Нікодима. За цим виникла проблема доведення подібної теореми для коциклів загального вигляду. Для транзитних коциклів такий результат подано у цій роботі, підрозділ 2.2 (див. також [62]), де продемонстровано, що класи слабої еквівалентності таких коциклів є у взаємно-однозначній відповідності до класів спряженості асоційованих дій Маккі.

Комбінація названих вище методів дозволяє побудувати класифікацію загальних коциклів у термінах так званих подвійних потоків (див. підрозділ 2.4, [65]). У цьому загальному випадку виникають додаткові проблеми, пов'язані з невільними подвійними потоками. Ці проблеми вирішуються застосуванням теорії К. Сузерланда борелівських полів польських груп [181], поряд з результатами роботи [59].

Інший підхід до цієї проблеми, що використовує теорію розбиттів простору Лебега, був розвинений у роботі А. Л. Федорова [44].

1.2 Проблема регуляризації груп нестрогих перетворень у вимірній ергодичній теорії

Вивчення повних груп, запроваджених Г. А. Даєм [41], а також проблеми зовнішньої спряженості підгруп нормалізатора повної групи (див. роботу А. Конна і В. Крігера [25] і більш пізні роботи [15, 16, 61]) обумовило необхідність працювати з відображеннями та сімействами перетворень, що поводяться коректним способом лише майже всюди. Це зазвичай не викликає ускладнень, коли такі групи перетворень є зчисленними та несингулярними. У цій ситуації все, що треба зробити для регуляризації, – це вилучити множину міри нуль. Але у випадку неперервних груп перетворень цей метод не працює.

Перший крок у вивченні регуляризації дій неперервних груп зроблено Г. Маккі у роботі [122], де встановлено існування та єдиність точкової реалізації для дії локально компактної групи G автоморфізмами булевської алгебри. Для побудови точкової реалізації булевського G-простору ним застосовано властивості універсального G-простору, на якому дія групи G регулярна. Цей підхід дістав цілковитого обґрунтування у роботах А. Рамсея [144, 146]. Подібні проблеми розглядалися А. М. Вершиком [190] із застосуванням іншої техніки.

Ця робота містить вирішення проблеми регуляризації груп нестрогих автоморфізмів вимірних відношень еквівалентності, див. підрозділ 2.6, [63]. Показано, що шляхом несуттєвої перебудови відношення еквівалентності і групової дії можна зробити всі автоморфізми групової дії строгими автоморфізмами відношення еквівалентності. Подібну проблему вирішено також для дії вимірного групоїда, що залишає інваріантним $\mod 0$ вимірне відношення еквівалентності.

Альтернативний підхід до цього класу задач описаний в роботі А. Л. Федорова [45].

1.3 Коцикли та зовнішня спряженість для груп псевдо-гомеоморфізмів

Класифікація груп перетворень простору з мірою у термінах коциклів привертає увагу багатьох авторів і налічує достойну кількість результатів. Досить природною є ідея перенесення таких результатів на коцикли динамічних систем дещо іншої природи, а саме до топологічної динаміки. У цьому контексті змістовним об’єктом для вивчення є групи псевдо-гомеоморфізмів польського простору, що вивчалися, зокрема, у роботі Д.

Суллівана, Б. Вейсса і Дж. Райта [180]. Ними було подано опис траєкторних властивостей таких груп, що до певної міри йдуть у паралелі до подібних результатів вимірної динаміки аменабельних груп перетворень.

Ця робота містить опис траєкторних властивостей таких груп (див. підрозділ 2.7, [60]), що певною мірою виглядають подібними до таких у вимірній динаміці аменабельних груп перетворень. Це звісно є підставою сподіватися на можливість розвинути змістовну теорію коциклів зазначених вище динамічних систем. Першим підходом до цього кола задач є розгляд у цій роботі ергодичних коциклів (тобто коциклів зі щільними образами у термінології вимірної ергодичної теорії). Залишається відкритим питання про вивчення і класифікацію у цьому контексті більш загальних коциклів.

Результатом підрозділу 2.7 є теорема єдиності для ергодичних коциклів зчисленних груп псевдо-гомеоморфізмів зі значеннями у польських групах. У якості безпосереднього наслідку ми одержуємо зовнішню спряженість зчисленних підгруп нормалізатора повної групи. Важливою відмінністю цих результатів від їх аналогів у вимірній динаміці є відсутність жодних посилань на будь-які властивості аменабельності.

1.4 Умови спряженості та ізоморфізму стабілізаторів ергодичних групових дій

Вивчення вимірних відношень еквівалентності і вимірних групоїдів поставило низку питань щодо невільних групових дій.

Відомо, що для борелівської дії групи на просторі з мірою її стабілізатори утворюють борелівське поле підгруп [181]. Такі поля виникають, зокрема, у класифікації коциклів аменабельних відношень еквівалентності у термінах дії Маккі [65], коли ця дія Маккі не є вільною. Вони також використовуються для побудови коциклів із заданою невільною дією Маккі [64]. Крім того, з'ясовано, що властивість аменабельності групової дії цілком визначається аменабельністю відповідного відношення еквівалентності разом із аменабельністю стабілізаторів [42, 2, 64, 196].

І все ж багато природних питань раніше залишалося без відповідей. Наприклад, якщо група діє транзитивно, то всі стабілізатори спряжені. Питання полягає в тому, до якої міри ця властивість зберігається при переході до власне ергодичних дій. Чи можна описати всі випадки, коли всі стабілізатори таких дій спряжені або принаймні ізоморфні? Чи існує ергодична групова дія з неізоморфними стабілізаторами? Усі ці питання вивчаються у цій роботі для дій дійсних груп Лі, розділ 3, див. також [66]. Насправді усі ці питання утворюють частину важливої проблеми щодо властивостей сімейств замкнутих підгруп заданої групи.

У роботі доведено, що компактні стабілізатори для ергодичних дій дійсних груп Лі завжди спряжені. Це зроблено шляхом застосування властивостей фактора Фелла [50]. Точніше кажучи, кожній точці x G-простору ставиться у відповідність її стабілізатор G_x, а також (під)алгебра Лі для підгрупи G_x. Борелевість першого відображення відома за результатами Л. Аусလендера, К. Мура [5] та А. Рамсея [144]. Друге відображення запроваджено і вивчено у цій роботі; воно теж виявилося борелівським. З'ясовано також, що простір підалгебр алгебри Лі гомеоморфний підмноговиду многовиду Грассмана. Це дозволило застосувати властивості алгебраїчно регулярних дій [201], зокрема до вивчення спряженості підалгебр Лі.

Виявилося, що дія алгебраїчної групи спряженнями є також регулярною, коли її обмежити на підпростір скінченних підгруп. Цей факт, разом із згаданим вище, а також структурною теорією груп Лі [189], їх когомологіями [131] і результатами Р. Зіммера щодо індукованих дій [201], дозволяють встановити, що дія дійсної групи Лі на просторі її компактних підгруп має тип I, звідки бажаний результат щодо спряженості. Встановлено також ізоморфізм скінченних стабілізаторів для ергодичних дій загальних л.к.с. груп. Наведено змістовні контрприклади, які, зокрема, демонструють, що ізоморфізм стабілізаторів не є загальною властивістю навіть для дій груп Лі.

Дослідження певних класів стабілізаторів також здійснено в роботі Г. Стака і Р. Зіммера [179].

1.5 Ентропійна теорія для дій зчисленних аменабельних груп

А. Колмогоров відокремив клас динамічних систем, що припускають розбиття з певними гарними властивостями алгебраїчної природи [105]. Такі системи у подальшому були названі К-системами у роботі В. Рохліна і Я. Синая [152]. Зокрема, вони розглянули динамічні системи з тривіальною алгеброю Пінскера (системи з цілком позитивною ентропією, ц.п.е.) і довели, що ця властивість еквівалентна властивості К-системи. Для цього ними було виділено спеціальний клас інваріантних розбиттів.

Опис алгебр Пінскера для дій групи $\mathbb{Z}^d$, $d < \infty$, одержано Дж. Концем [26], який також розглянув для цих груп властивості ц.п.е. і К-системи. Еквівалентність останніх двох властивостей доведено Б. Каміньським [93], який також розвинув теорію Рохліна-Синая у контексті $\mathbb{Z}^d$. Альтернативний підхід до вивчення дій груп $\mathbb{Z}^d$, $1 \leq d \leq \infty$, з ц.п.е. був запропонований Б. Каміньським і П. Ліарде [92]. Новий сплеск активності у цій сфері був пов'язаний з роботою Д. Рудольфа та Б. Вейсса [157], де встановлено, що будь-яка дія зчисленної аменабельної групи з ц.п.е. має властивість асимптотичної незалежності, яка у подальшому була названа властивістю Рудольфа-Вейсса. Крім того, Е. Гласнер, Ж.-П. Тувіно і Б. Вейсс [57] знайшли нові властивості алгебр Пінскера, пов'язані з диз'юнктністю квазіфакторів. У подальшому для цих результатів було знайдено умовні версії А. Даниленком, який запровадив поняття ентропії для коциклів [27]. У роботі В. Голодця і С. Синельщикова [67] доведена зворотна версія асимптотичної властивості Рудольфа-Вейсса, яка була використана для побудови небернулліївських дій з ц.п.е. для класу абелевих груп.

У цій роботі, підрозділ 4.1 (див. також [68]), розглянуто скінченно генеровані нільпотентні групи. Такі групи, з точністю до переходу до нормальної підгрупи скінченного індексу, є верхньо-трикутними уніпотентними матричними групами з цілими елементами або їх підгрупами [97]. Для таких груп подано явний опис алгебр Пінскера, властивостей інваріантності для вимірних розбиттів, а також повну спектральну характеризацію K-систем.

Класичний результат Орнстейна [138] стверджує, що існують небернуллиївські K-автоморфізми з будь-якою заданою ентропією. Цей результат був далі покращений у роботі Орнстейна та Шілдса [136], де побудовано незчисленне сімейство небернулліївських K-автоморфізмів, що попарно неізоморфні, але мають однакову додатну ентропію. Природне питання, що виникає у цьому контексті, полягає в тому, чи має нескінченна аменабельна група небернулліївську дію з ц.п.е. Одне з завдань цієї роботи (див. підрозділ 4.2, [32]) – поширення зазначеного вище результату Орнстейна та Шілдса на клас зчисленних аменабельних груп з елементами нескінченного порядку. Для цього запроваджується конструкція, яка названа коіндукцією. Вона дозволяє будувати дію групи за заданою дією її підгрупи. З'ясовано, що процедура коіндукції має низку властивостей, що дозволяють одержати потрібний результат.

1.6 Квантові обмежені симетричні області і зображення квантових алгебр

У другій половині дев'яностих років три групи математиків одержали перші результати, які б могли закласти основи квантової теорії обмежених симетричних областей.

Т. Танісаки з його співробітниками в роботах [94, 96, 133, 95] запровадили q-аналоги передоднорідних векторних просторів комутативного параболічного типу і знайшли явний вигляд їх поліномів Сато-Бернштейна.

Г. Якобсен запропонував більш простий спосіб побудови цих же квантових векторних просторів і зрозумів, що йде у напрямку до квантових ермітових симетричних просторів некомпактного типу [85, 86].

Аналогічний підхід використано в роботі У. Балдоні і П. Фраджріа [6] про q-аналоги алгебри інваріантних диференціальних операторів і гомоморфізму Хариш-Чандри для таких квантових симетричних просторів.

У ті ж часи Якобсен описав усі модулі зі старшими вагами над алгебрами Дрінфельда-Джімбо, що припускають унітаризацію [87].

Автори перелічених вище робіт не виявили так званої прихованої симетрії розглянутих ними квантових передоднорідних векторних просторів [173, 168] і не перейшли від комплексних векторних просторів до їх дійсних форм. Внаслідок цього вони не одержали квантову теорію обмежених симетричних областей.

Основи цієї теорії були закладені в роботі [174] (див. також [160]), де побудовано квантові аналоги обмежених симетричних областей та відповідних модулів Хариш-Чандри. Окремий випадок, розглянутий в роботі [161], призводить до двох геометричних реалізацій драбинного зображення квантової універсальної огортуючої алгебри $U_q\mathfrak{su}_{2,2}$, а також до квантового перетворення Пеноруза (див. роботу Р. Бастона та В. Іствуда [7]). Головним засобом, використаним в [161], є q-аналог когомологій Чеха. Але узагальнення цього метода пов'язано з нетривіальними проблемами некомутативної алгебраїчної геометрії. Альтернативний метод подолання цих перешкод полягає у заміні q-аналогів когомологій Чеха на q-аналоги когомологій Дольбо. Як добре відомо, у класичному випадку ($q = 1$) когомології Дольбо припускають алгебраїчну побудову із застосуванням когомологічної індукції (див. [104]), яка є важливим методом побудови модулів Хариш-Чандри, що припускають унітаризацію. У підрозділі 5.1 даної роботи продемонстровано, що цей метод має застосування до модулів над квантовими універсальними огортуючими алгебрами.

У своїй роботі [155] Г. Рубентхалер запроваджує та вивчає передоднорідні векторні простори комутативного параболічного типу. Їх квантові аналоги є змістовними об'єктами квантової теорії обмежених симетричних областей. Відомо [8, стор. 135], що в класичному випадку $q = 1$ голоморфний комплекс де Рама диференціальних форм з поліноміальними коефіцієнтами на такому просторі є дуальним до узагальненого комплекса Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда для тривіального $U\mathfrak{g}$-модуля, побудованого Леповським [119, 151, 11]. У підрозділі 5.2 даної роботи подано q-аналог цього результату.

Існує численна література, присвячена вивченню псевдо-ермітових просторів і, зокрема, гармонічному аналізу на таких просторах. Передусім, варто відзначити роботу Дж. Фаро [43], а також роботи В. Молчанова [128, 129], ван Дійка і Ю. Шаршова [28]. Перші спроби квантування таких об'єктів містяться у роботі Решетіхіна, Тахтаджяна та Фаддєєва [150]. Подальший розвиток теорії квантових обмежених симетричних областей дає підстави стверджувати, що ці дослідження варті додаткових зусиль.

У цій роботі, підрозділ 5.3, вивчаються основи теорії функцій на квантових аналогах комплексних гіперболічних просторів (див. також [13]).

Як відомо, класичний інтегральний оператор Пуассона сплітає дії групи $SU_{n,n}$ у просторах неперервних функцій на матричній кулі і її межі Шилова (унітарних матрицях). Але не будь-яка неперервна функція на матричній кулі може бути одержана шляхом застосування інтегрального оператора Пуассона до неперервної функції на межі Шилова.

У роботі Хуа [81] одержано перші результати щодо диференціальних рівнянь, чиї розв'язки містять образи оператора Пуассона. У подальшій роботі Джонсона і Кораньї [89] одержано систему диференціальних рівнянь, що дають повну характеризацію функцій-образів оператора Пуассона.

Ця робота, підрозділ 5.4 (див. також [12]), містить опис квантового аналогу оператора Пуассона. Виведено рівняння Хуа у квантовому випадку. Доведено, що ці рівняння є необхідною умовою приналежності функції до образу квантового оператора Пуассона.

1.7 Квантові алгебри з ідемпотентами

Суттєвою рисою суперсиметричних алгебраїчних структур є те, що відповідні алгебри містять ідемпотенти і інші дільники нуля [9, 40, 143].

У цій роботі розділ 6 присвячений побудові нових біалгебр на основі $U_q(sl_2)$, що містять ідемпотенти і інші дільники нуля. У деяких окремих випадках наведено явні формули для R-матриць. Визначено майже-R-матриці, що задовольняють умові регулярності фон Неймана.

1.8 Симетрії квантової площини

Квантова площина [126] відома як відправна точка у вивченні модулів над квантовими універсальними огортуючими алгебрами [34]. Структури, що існують на квантовій площині, використовують як основу для побудови відповідних структур для більш складних квантових алгебр [37, 38, 36, 35].

Існує єдина виділена структура $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-модульної алгебри на квантовій площині, що розглядалась раніше (див., наприклад, [98]).

У цій роботі, розділ 7 (див. також [39]), з'ясовано, що існує незчисленне сімейство неізоморфних структур $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-модульної алгебри. Подано їх повний перелік. Розглянуто також розширення Лорана квантової площини, у якому "дозволяється" її твірним x, y бути оборотними.

РОЗДІЛ 2
АВТОМОРФІЗМИ І КОЦИКЛИ ВІДНОШЕНЬ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ

2.1 Аменабельні дії груп та образи коциклів

Як було продемонстровано Р. Зіммером, будь-яка групова дія, що припускає представлення у вигляді образу коциклу аменабельної дії, сама є аменабельною [195, теорема 3.3]. Зокрема, усі динамічні системи, що у такий спосіб походять від коциклу індивідуального автоморфізму, є аменабельними. Зворотнє твердження було доведено раніше лише для вільних дій (див. [23] та [48, Наслідок 7.9]). Ми доводимо це зворотне твердження у повному обсязі (див. [64]).

Теорема 2.1.1. *Припустимо, що локально компактна сепарабельна (л.к.с.) група G діє ергодично та аменабельно на просторі Лебега (S, μ). Тоді існує коцикл ергодичного автоморфізму будь-якого наперед заданого типу, чиїм образом є задана дія.*

Отже, будь яка аменабельна групова дія може бути побудована із використанням стандартної конструкції.

Лема 2.1.2. *Нехай G – л.к.с. група, і (X, μ) – аменабельний ергодичний G-простір. Тоді відповідне вимірне відношення еквівалентності (R_G, ν) є аменабельним.*

Доведення. Дійсно, нехай $\pi : R_G \to \mathrm{ISO}(E)$ – борелівський гомоморфізм відношення еквівалентності R_G в групу ізометричних автоморфізмів сепарабельного банахового простору E, та $\{A_x : x \in X\} \subset E_1^*$ – борелівське поле слабо-$*$-компактних опуклих підмножин одиничної кулі E_1^* у дуальному просторі E^*, що є інваріантним відносно π^*, тобто $\pi^*(x, y)A_y = A_x$. Розглянемо коцикл $\alpha : G \times X \to \mathrm{ISO}(E)$, $\alpha(g, x) = \pi(gx, x)$. Тоді поле$\{A_x\}$ є інваріантним відносно коциклу α^*, тож з огляду на аменабельність G-

простору X існує борелівський переріз $\varphi : X \to E_1^*$ такий, що $\varphi(x) \in A_x$ і $\alpha^*(g,x)\varphi(x) = \varphi(gx)$. Очевидно, φ є також інваріантним відносно π^*, що й доводить аменабельність R_G. $\square$

Доведення Теореми 2.1.1. Нехай (X,μ) – вільний G-простір зі скінченною інваріантною мірою (таким є, наприклад, гаусівська дія, що відповідає циклічному підпростору лівого регулярного зображення групи G). Розглянемо простір $X^{\mathbb{Z}}$ із відповідною продакт-мірою, що зберігається діагональною дією групи G, тобто $(gy)_i = gy_i$ для $y = (y_i)_{-\infty}^{\infty} \in Y$ та $g \in G$. Крім того, на Y ергодично діє група $\mathbb{Z}$ ступенями автоморфізму T: $(Ty)_i = y_{i+1}$, тож T комутує з дією групи G. Таким чином, маємо на просторі $S \times Y$ дію групи $G \times \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} g(s,y) &= (gs, gy), && (s,y) \in S \times Y, \quad g \in G, \\ T_1^n(s,y) &= (s, T^n y), && (s,y) \in S \times Y, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Внаслідок [195, теорема 2.4], [23] та [61, теорема A1], ця дія є апроксимативно скінченною. Визначимо коцикл $\alpha : (G \times \mathbb{Z}) \times (S \times Y) \to G$, $\alpha((g,n),(s,y)) = g$. Безпосередньо перевіряється, що дія Маккі коцикла α є ізоморфною дії групи G на просторі S. Обмежуючи коцикл α на дискретну редукцію [48] принципового апроксимативно скінченного групоїда $(G\times\mathbb{Z})\times(S\times Y)$, отримуємо коцикл ергодичного автоморфізму з заданою дією Макі. Позначимо таку редукцію через (S_0,μ_0), і нехай T_0 – ергодичний автоморфізм що її генерує. Розглянемо також автоморфізм Q простору (Y_0,ν), $\nu(Y_0)=\infty$, що зберігає міру. Побудуємо борелівське відображення $f : S_0 \to N[Q]$ таке, що [111]

$$\operatorname{mod} f(s) = \left(\frac{d\mu_0 \circ T_0}{d\mu_0}(s)\right)^{-1}.$$

Нарешті, розглянемо автоморфізми $\overline{T}_0$ і $\overline{Q}$ на просторі $(S_0 \times Y_0, \mu_0 \times \nu)$:

$$\overline{T}_0(s,y) = (T_0 s, f(s)y), \qquad \overline{Q}(s,y) = (s, Qy).$$

Ці автоморфізми генерують ергодичну апроксимативно скінченну повну групу типу II, над якою коцикл $\overline{\alpha}\left(\overline{Q}^m\overline{T}_0^n,(s,y)\right) = \alpha(n,s)$ має ту ж саму дію Макі, що й коцикл α. Для автоморфізму T простору X заданого типу та автоморфізму S простору Y типу II, відповідна дія групи $\mathbb{Z}^2$ на просторі $X \times Y$ має заданий тип (автоморфізму T). З огляду на це спостереження, подальші розгляди є очевидними. $\square$

Наслідок 2.1.3. *Нехай G – л.к.с. група, та маємо задану аменабельну ергодичну дію групи $G \times \mathbb{R}$. Тоді існує коцикл α ергодичного автоморфізму T зі значеннями у групі G і такий, що задана дія групи $G \times \mathbb{R}$ є образом коциклу $\alpha \times r$, де r – коцикл Радона-Нікодима автоморфізму T.*

Доведення. Внаслідок Теореми 2.1.1, дія групи $G \times \mathbb{R}$ є образом коциклу α_0 ергодичного автоморфізму Q на просторі X зі скінченною інваріантною мірою μ. Нехай (Y, ν) – простір Лебега з нескінченною мірою, та S – ергодичний автоморфізм, що зберігає міру ν. Визначимо функції f і g умовою $\alpha_0(T, x) = (f(x), g(x)) \in G \times \mathbb{R}$ і зафіксуємо борелівське відображення $\varphi : X \to N[S]$ таке, що $\mod \varphi(x) = g(x)$. На просторі $(X \times Y, \mu \times \nu)$ розглянемо повну групу, генеровану автоморфізмами

$$\overline{Q}(x, y) = (Qx, \varphi(x)y), \qquad \overline{S}(x, y) = (x, Sy),$$

разом із коциклом $\overline{\alpha}\left(\overline{Q}^n \overline{S}^m, (x, y)\right) = \alpha_0(Q^n, x)$. Безпосередня перевірка демонструє, що коцикл $\overline{\alpha}$ має вигляд $\alpha \times r$, де r – коцикл Радона-Нікодима повної групи $[\overline{Q}, \overline{S}]$, і дія Маккі коциклу $\overline{\alpha}$ співпадає з дією Маккі коциклу α_0. $\square$

Теорема 2.1.4. *Нехай л.к.с. група G діє ергодично та аменабельно на просторі (S, μ). Тоді для майже всіх $s \in S$ стабілізатор дії G_s у точці s є аменабельним.*

Доведення. Внаслідок Теореми 2.1.1 існує коцикл $\alpha : \Gamma \times X \to G$ ергодичної вільної дії зчисленної аменабельної групи Γ на просторі (X, ν), дія Маккі якого ізоморфна заданій дії групи G. Розглянемо простір $(G \times X, \mu_G \times \mu)$ (тут μ_G – міра Хаара групи G), на якому діє група $G \times \Gamma$ автоморфізмами

$$a(\gamma)(g, x) = (\alpha(\gamma, x)g, \gamma x), \qquad \omega(h)(g, x) = \left(gh^{-1}, x\right).$$

Коцикл $\overline{\alpha}((h,\gamma),(g,x)) = h$ цієї дії має ту ж саму дію Маккі, що й коцикл α, отже існує проекція $\pi : G \times X \to S$ така, що $\pi(\omega(h)(g,x)) = h\pi(g,x)$, і при цьому кожен прообраз $\varphi^{-1}(s)$, $s \in S$, є ергодичною компонентою косого добутку, що відповідає коциклу α. Оскільки розбиття простору $G \times X$ на траєкторії дії ω групи G є вимірним, розбиття $\varphi^{-1}(s)$ на траєкторії (вільної) дії групи G_s є також вимірним. Тому $\varphi^{-1}(s)$ має вигляд $G_s \times Z_s$, де $\{Z_s\}$ є борелівське поле відповідних фактор-просторів, і при цьому $\omega(h)(g,z) = \big(gh^{-1}, z\big)$, $g, h \in G$, $z \in Z_s$. З огляду на комутування з дією ω групи G_s, дія a групи Γ на просторі $G_s \times Z_s$ має вигляд $a(\gamma)(g,z) = (\pi_s(\gamma,z)g, \beta_s(\gamma)z)$, де π_s – коцикл ергодичної дії групи Γ на просторі Z_s з щільним образом у групі G_s. Отже, аменабельність групи G_s випливає безпосередньо з існування такого коциклу та [195, теорема 3.1]. $\square$

Теорема 2.1.5. *Нехай л.к.с. група G діє ергодично на просторі (X,μ) у такий спосіб, що відповідне відношення еквівалентності R_G на X є аменабельним, і для майже всіх $x \in X$ стабілізатор G_x у точці x також є аменабельним. Тоді дія групи G є аменабельною.*

Доведення. Як і в доведенні Теореми 2.1.1, розглянемо лебегівський ймовірнісний простір (Y,ν) разом із вільною дією групи $G \times \mathbb{Z}$, що зберігає міру ν, і при цьому підгрупа $\{e\} \times \mathbb{Z}$ діє ергодично. Тоді група $G \times \mathbb{Z}$ діє вільно та ергодично на просторі $X \times Y$:

$$g(x,y) = (gx, gy), \qquad \overline{T}^n(x,y) = (x, T^n y),$$

з коциклом $\alpha : (G \times \mathbb{Z}) \times (X \times Y) \to G$, $\alpha((g,n),(x,y)) = g$. Дія Маккі цього коциклу співпадає з дією групи G на просторі X; отже, з огляду на [195, теорема 3.3], досить перевірити аменабельність дії групи $G \times \mathbb{Z}$ на просторі $X \times Y$.

Нехай $X_0 \subset X$ – борелівська підмножина, що визначає дискретну редукцію для R_G, і $Q \in \operatorname{Aut} X_0$ – ергодичний автоморфізм, що генерує цю редукцію. Тоді існує відображення $f : X_0 \to G$ таке, що $Qx = f(x)x$ для майже всіх $x \in X_0$. Оберемо f борелівським. На просторі $X_0 \times Y$ автоморфізм $\overline{Q}(x,y) = (Qx, f(x)y)$ нормалізує відношення еквівалентності $\mathcal{E}_0 = \{((x_1,y_1),(x_2,y_2)) |\, x_1 = x_2; \quad \exists n \in \mathbb{Z}\, \exists g \in G_{x_1} :\, T^n y_1 = g y_2\}$.

Аменабельність $\mathcal{E}_0$ є наслідком аменабельності стабілізаторів G_x і результатів Конна [24]. Тому відношення еквівалентності $\mathcal{E}$ на $X_0 \times Y$, генероване $\mathcal{E}_0$ та $\overline{Q}$ є аменабельним [61, теорема A1]. Але ж, оскільки $\mathcal{E}$ є редукцією відношення еквівалентності, генерованого дією групи $G \times \mathbb{Z}$, на підмножину $X_0 \times Y$, зазначена дія також є аменабельною. □

2.2 Порівняння та класифікація транзитних коциклів

При вивченні неперервних груп перетворень простору з мірою важливу роль відіграє теорія вимірних групоїдів. Зокрема, як було продемонстровано в [48], найбільш істотну інформацію про групоїд несе його дискретна редукція. Визначення та докладне вивчення теорії вимірних групоїдів міститься в [48, 123, 144, 146].

Нехай (Ω, Q) – траєкторний групоїд ергодичної дії типу II_∞ або III зчисленної групи Γ на просторі Лебега (X,μ); $(\mathbb{T}\times\mathbb{T}, [\mu_\mathbb{T}\times\mu_\mathbb{T}])$ – транзитивний групоїд, генерований трансляцією кола $\mathbb{T}$ з мірою Хаара $\mu_\mathbb{T}$. Розглянемо прямий добуток $(\mathcal{G}, C) = (\Omega \times (\mathbb{T}\times\mathbb{T}), Q \times [\mu_\mathbb{T}\times\mu_\mathbb{T}])$. Як відомо, будь який принциповий ергодичний групоїд з неперервними орбітами має такий вигляд [48, теорема 6.4].

Наступна теорема, на відміну від її версії в [61], не містить припущення про апроксимативну скінченність групоїду. Вона дасть можливість довести теорему порівняння транзитних коциклів, також без жодного посилання на апроксимативну скінченність чи аменабельність (див. [62]).

Теорема 2.2.1 ([61, 62]). *Нехай A – автоморфізм групоїду $(\mathcal{G}, C)$. Тоді знайдуться автоморфізм θ групоїда (Ω, Q) та внутрішній автоморфізм τ групоїда $(\mathcal{G}, C)$ такі, що $A = (\theta \times \mathrm{id})\tau$.*

Доведення. Завдяки принциповості групоїда $(\mathcal{G}, C)$ автоморфізм A

цілком визначається своїм обмеженням на простір одиниць $(X, \mathbb{T})$. Нехай $A(x,t) = (A_1(x,t), A_2(x,t))$.

Виберемо $t_0 \in \mathbb{T}$ таким чином, щоб множина $X \times \{t_0\}$ містилась $\mod 0$ у неістотній редукції, на якій A є строгим ізоморфізмом, і визначимо борелівське відображення $\varphi : X \to X$, $\varphi(x) = A_1(x, t_0)$. Оскільки A – автоморфізм, то, вилучивши з X борелівську підмножину міри нуль, можна вважати, що кожний елемент з $\varphi(X)$ має лише зчисленний прообраз щодо φ, причому $\varphi(X)$ є борелівська множина додатної міри.

Через те, що розбиття простору X на прообрази точок щодо φ вимірне, існує борелівська множина $S \subset X$ додатної міри (переріз), яку φ відображає ін'єктивно. Крім того, оскільки A – автоморфізм, φ відображає S несингулярно.

У подальшому будемо для певності вважати, що дія групи Γ на (X, μ) має тип III. Випадок типу II_∞ може бути розглянутий аналогічно.

Замінюючи, якщо це потрібно, S його борелівською підмножиною додатної міри, можна вважати, що S та $\varphi(S)$ не співпадають $\mod 0$ з X. Оскільки відносно повної групи типу III будь які дві множини додатної міри еквівалентні, знайдуться автоморфізми γ, δ з повної групи $[\Gamma]$ такі, що $\gamma(S) = X \setminus S$, $\delta(\varphi(S)) = X \setminus \varphi(S)$. Визначимо автоморфізм $\theta : X \to X$:

$$\theta(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in S, \\ \delta \circ \varphi \circ \gamma^{-1}(x), & x \in X \setminus S. \end{cases}$$

Ясно, що θ лежить у нормалізаторі $N[\Gamma]$ повної групи Γ. З конструкції також випливає, що для м.в. $x \in X$ точки $\theta(x)$ та $\varphi(x)$ є Γ-еквівалентними. Таким чином, $\theta \times \mathrm{id}$ набуває значення, еквівалентні відносно дії групи $\Gamma \times \mathbb{T}$ значенням відображення $\varphi \times \mathrm{id}$, а внаслідок цього, й автоморфізму A. Отже, $A(\theta \times \mathrm{id})^{-1}$ є внутрішнім автоморфізмом групоїда $(\mathcal{G}, C)$, що й треба було довести. $\square$

Наслідок 2.2.2. *Нехай $\mathcal{G}|_{C_1}$ та $\mathcal{G}|_{C_2}$ – дискретні редукції нескінченного типу групоїда $(\mathcal{G}, C)$, і $\mathcal{G} \cong \mathcal{G}|_{C_1} \times (\mathbb{T} \times \mathbb{T}) \cong \mathcal{G}|_{C_2} \times (\mathbb{T} \times \mathbb{T})$. Тоді існує внутрішній автоморфізм γ групоїда $\mathcal{G}$ такий, що $\gamma(\mathcal{G}|_{C_1} \times (e \times t)) = \mathcal{G}|_{C_2} \times$*

$(e \times t)$ *для м.в.* $t \in \mathbb{T}$.

Нехай $\pi : \Gamma \times X \to G$ – коцикл ергодичної дії зчисленної групи Γ на просторі Лебега (X, μ) зі значеннями у локально компактній сепарабельній (л.к.с.) групі G. З коциклом π природним способом пов'язані дія групи Γ на просторі $G \times X$ (косий добуток $G \times_\pi X$) та дія W_π групи G (образ Маккі коциклу π) [123]. Якщо траєкторне розбиття косого добутку $G \times_\pi X$ вимірне, то коцикл π називають *транзитним* [48].

У випадку, коли дія групи Γ не вільна, ми обмежимось розглядом траєкторних коциклів π, тобто таких, що $\pi(\gamma, x) = e$ за умови $\gamma x = x$ [200]. Будь-який траєкторний коцикл природно продовжується до коцикла повної групи $[\Gamma]$. Навпаки, будь-який коцикл повної групи є таким продовженням деякого траєкторного коциклу дії групи Γ.

ТЕОРЕМА 2.2.3. *Нехай $\alpha, \beta : [\Gamma] \times X \to G$ – транзитні коцикли повної групи $[\Gamma]$ зі значеннями в л.к.с. групі G такі, що дії Маккі W_α та W_β групи G ізоморфні. Тоді існують автоморфізм $\theta \in N[\Gamma]$ і борелівське відображення $f : X \to G$ такі, що для усіх $\gamma \in [\Gamma]$ має місце $\alpha\left(\theta\gamma\theta^{-1}, \theta x\right) = f(\gamma x)^{-1}\beta(\gamma, x)f(x)$.*

Доведення. Нехай $(G{\times}G, \mu_G{\times}\mu_G)$ – транзитивний групоїд, що відповідає трансляції групи G. Прямий добуток $(G{\times}G){\times}(\Omega{\times}Q)$ позначатимемо, як і в Теоремі 2.2.1, через $(\mathcal{G}, C)$.

Коцикли α та β визначають гомоморфізми $\overline{\alpha}, \overline{\beta} : (G{\times}G){\times}(\Omega{\times}Q) \to G$ групоїда $(\mathcal{G}, C)$ в групу G:

$$\overline{\alpha}((g,h),(\gamma,x)) = \alpha(\gamma,x),$$

$$\overline{\beta}((g,h),(\gamma,x)) = \beta(\gamma,x),$$

де $\gamma \in [\Gamma]$, $x \in X$.

Нехай S_α, S_β – фактор-простори простору $G \times X$ щодо (гладких) косих добутків $G \times_\alpha X$ та $G \times_\beta X$. Тоді на них визначені дії Маккі W_α та W_β. Оскільки α та β – транзитні коцикли, вказані дії вільні та власне ергодичні. Позначимо через $\theta_1 : S_\alpha \to S_\beta$ ізоморфізм дій W_α та W_β, тобто

$\theta_1(W_\alpha(g)s) = W_\beta(g)\theta_1(s)$. Нехай також $\mathcal{H}_\alpha = G \times S_\alpha$ та $\mathcal{H}_\beta = G \times S_\beta$ – групоїди, що відповідають діям W_α та W_β групи G.

З конструкції дії Маккі випливає, що вкладення фактор-просторів S_α та S_β у $G \times X$ у вигляді борелівських перерізів додатної міри щодо траєкторних розбиттів косих добутків $G \times_\alpha X$ та $G \times_\beta X$ визначають ізоморфізми групоїдів $\Phi_\alpha : \mathcal{G} \to \mathcal{H}_\alpha \times (\Gamma \times \Gamma)$ та $\Phi_\beta : \mathcal{G} \to \mathcal{H}_\beta \times (\Gamma \times \Gamma)$, де $(\Gamma \times \Gamma)$ – транзитивний групоїд, генерований трансляцією групи Γ. При цьому підгрупоїди групоїда $\mathcal{G}$, що визначаються траєкторіями косих добутків $G \times_\alpha X$ та $G \times_\beta X$, переходять у прямі співмножники $\Gamma \times \Gamma$.

Ізоморфізм $\theta_1 : S_\alpha \to S_\beta$, введений раніше, підіймається до ізоморфізму групоїдів $\overline{\theta}_1 : \mathcal{H}_\alpha \times (\Gamma \times \Gamma) \to \mathcal{H}_\beta \times (\Gamma \times \Gamma)$:

$$\overline{\theta}_1((g,x),(\gamma_1,\gamma_2)) = ((g,\theta_1(x)),(\gamma_1,\gamma_2)).$$

Визначимо гомоморфізми $\overline{\alpha}_1 : \mathcal{H}_\alpha \times (\Gamma \times \Gamma) \to G$ та $\overline{\beta}_1 : \mathcal{H}_\beta \times (\Gamma \times \Gamma) \to G$, поклавши

$$\overline{\alpha}_1((g,x),(\gamma_1,\gamma_2)) = g; \qquad \overline{\beta}_1((g,x),(\gamma_1,\gamma_2)) = g.$$

Тоді, як легко бачити,

$$\overline{\alpha}_1 = \overline{\beta}_1 \circ \overline{\theta}_1. \tag{2.2.1}$$

Розглянемо гомоморфізми $\overline{\alpha}_1 \circ \Phi_\alpha$ та $\overline{\beta}_1 \circ \Phi_\beta$. Можна безпосередньо перевірити, що

$$(\overline{\alpha}_1 \circ \Phi_\alpha)((g,h),(\gamma,x)) = h^{-1}g^{-1}\alpha(\gamma,x)h, \tag{2.2.2}$$

$$(\overline{\beta}_1 \circ \Phi_\beta)((g,h),(\gamma,x)) = h^{-1}g^{-1}\beta(\gamma,x)h. \tag{2.2.3}$$

Визначимо борелівське відображення $\overline{f} : G \times X \to G$, поклавши $\overline{f}(g,x) = g^{-1}$, тоді, враховуючи (2.2.2) та (2.2.3), одержуємо

$$\overline{f}(gh,\gamma x)^{-1}(\overline{\alpha}_1 \circ \Phi_\alpha)((g,h),(\gamma,x))\overline{f}(h,x) = \overline{\alpha}((g,h),(\gamma,x)), \tag{2.2.4}$$

$$\overline{f}(gh,\gamma x)^{-1}(\overline{\beta}_1 \circ \Phi_\beta)((g,h),(\gamma,x))\overline{f}(h,x) = \overline{\beta}((g,h),(\gamma,x)), \tag{2.2.5}$$

тобто $\overline{\alpha}_1 \circ \Phi_\alpha$ когомологічний $\overline{\alpha}$, а $\overline{\beta}_1 \circ \Phi_\beta$ когомологічний $\overline{\beta}$ як коцикли відношення еквівалентності, утвореного дією групи $G \times \Gamma$ на $G \times X$.

Використовуючи співвідношення (2.2.1), (2.2.4), (2.2.5), одержуємо, що гомоморфізм $\overline{\alpha} \circ A$ еквівалентний гомоморфізму $\overline{\beta}$, де $A = \Phi_{\alpha}^{-1}\overline{\theta}_1\Phi_{\beta}$ – автоморфізм групоїда $\mathcal{G}$.

Внаслідок Теореми 2.2.1 автоморфізм A має вигляд $A = (\theta \times \mathrm{id})\tau = \omega(\theta \times \mathrm{id})$, де $\theta \in N[\Gamma]$. Оскільки ω – внутрішній автоморфізм, гомоморфізм $\overline{\alpha} \circ \omega$ еквівалентний гомоморфізму $\overline{\alpha}$. Таким чином, для коциклів $\overline{\alpha}$ та $\overline{\beta}$ існує така борелівська функція $f : G \times X \to G$, що

$$\overline{\alpha}((g,h),(\theta\gamma\theta^{-1},\theta x)) = f(gh,\gamma x)^{-1}\overline{\beta}((g,h),(\gamma,x))f(h,x). \qquad (2.2.6)$$

Оскільки коцикли $\overline{\alpha}$ та $\overline{\beta}$ не залежать від трансляції групи G, то, поклавши у (2.2.6) $\gamma = e$ та змінюючи $g \in G$, одержуємо, що $f(g,x)$ не залежить від g. Отже, (2.2.6) може бути переписане у вигляді $\alpha\left(\theta\gamma\theta^{-1},\theta x\right) = f(\gamma x)^{-1}\beta(\gamma,x)f(x)$, що й треба було довести. $\square$

2.3 Застосування до вивчення фундаментальних груп для групових дій

У попередньому підрозділі подано відповідь на питання про можливість зведення зовнішнього автоморфізму групоїда до автоморфізму його дискретної редукції. Цей результат нами застосовано до вивчення фундаментальних груп для ергодичних дій (див. [54]).

Фундаментальна група для ергодичних динамічних систем вперше розглядалася в [53], де були побудовані приклади дій дискретних груп з різними фундаментальними групами, а також з одиничною фундаментальною групою. Нижче запроваджено поняття фундаментальної групи для дій неперервних груп.

Нехай G – неперервна локально компактна сепарабельна унімодулярна група, що діє вільно та власне ергодично на просторі Лебега (X,μ) з інваріантною (скінченною або σ-скінченною) мірою μ. Розглянемо ергодичний принциповий групоїд типу II $(\mathcal{G},C) = (G \times X, [\mu_G \times \mu])$, що відповідає вказаній дії, де μ_G – міра Хаара групи G. Кожному автоморфізму A групоїду

$(\mathcal{G}, C)$ можна поставити у відповідність число $\operatorname{mod} A > 0$, яке називається модулем автоморфізму A [61].

Визначення 2.3.1. *Підгрупа* $F(G \times X) = \{\operatorname{mod} A : A \in \operatorname{Aut}(\mathcal{G}, C)\}$ *групи* $\mathbb{R}_+^*$ *називається фундаментальною групою динамічної системи* (G, X, μ).

Теорема 2.3.2. *Нехай G – зв'язна напівпроста дійсна група Лі зі скінченним центром, причому дійсний ранг G не менший двох; (X, μ) – вільний власне ергодичний G-простір зі скінченною інваріантною мірою μ. Припустимо також, що дія G на X є незвідною, тобто кожен простий множник групи G діє ергодично. Тоді $F(G \times X) = \{1\}$.*

Доведення. Спочатку розглянемо випадок, коли G не містить компактних множників, а її центр тривіальний.

Нехай A – зовнішній автоморфізм групоїду $(\mathcal{G}, C)$. Внаслідок принциповості $\mathcal{G}$ автоморфізм A цілком визначається своїм обмеженням на простір одиниць X та задовольняє умові

$$A(gx) = \alpha(g, x)A(x) \tag{2.3.1}$$

при кожному $g \in G$ для майже всіх $x \in X$, де $\alpha : G \times X \to G$ – певний борелівський коцикл. Відображення $A : X \to X$ являє собою траєкторну еквівалентність дії G на X із нею самою. Тому дія Макі коциклу α ізоморфна вказаній дії [197, твердження 2.5], яка, як показано в [198], щільна за Зариським у G. Таким чином, внаслідок [197, теорема 4.1], існують борелівське відображення $f : X \to G$ та сюр'єктивний ендоморфізм $\pi : G \to G$ такі, що

$$\alpha(g, x) = f(gx)^{-1}\pi(g)f(x), \tag{2.3.2}$$

причому π, завдяки нашим припущенням щодо групи G, є автоморфізмом.

Розглянемо борелівське відображення $B : X \to X$, $B(x) = f(x)A(x)$. З (2.3.1) (2.3.2) випливає, що B задовільняє співвідношення $B(gx) = \pi(g)B(x)$ при всіх $g \in G$ для майже всіх (м.в.) $x \in X$. Звідси випливає

Лема 2.3.3. *B є автоморфізмом простору (X, μ), що зберігає міру μ.*

Для доведення цієї леми використовується [199, лема 3.5].

Таким чином, група G та автоморфізм B генерують локально компактну групу перетворень простору (X, μ), а саме напівпрямий добуток $H = G^{\infty} \ltimes_{\pi} \mathbb{Z}$. Як добре відомо, будь-який автоморфізм π напівпростої дійсної групи Лі зберігає її міру Хаара. Тому напівпрямий добуток H є унімодулярною групою. Оскільки, крім того, дія H на X зберігає міру μ, групоїд $(H \times X, [\mu_H \times \mu])$ має тип II.

З іншого боку, слід відзначити, що AB^{-1} – внутрішній автоморфізм групоїду $\mathcal{G}$. Отже, групоїд $H \times X$ співпадає з напівпрямим добутком $\mathcal{H} = \mathcal{G} ⓢ_A \mathbb{Z}$ [61], що побудований за дією групи $\mathbb{Z}$ на $\mathcal{G}$ ступенями автоморфізму A. Нехай $S \subset X$ – повний зчисленний переріз типу II_{∞} для дії групи G на (X, μ), тоді внаслідок [48, теорема 6.4] групоїд $\mathcal{G}$ ізоморфний прямому добуткові $\mathcal{G} = \Omega \times \mathcal{T}$, де Ω – дискретна редукція групоїду $\mathcal{G}$ на множину S, а $\mathcal{T}$ – транзитивний групоїд, утворений трансляцією кола. Крім того, автоморфізм A може бути представлений у вигляді $A = (\theta \times \mathrm{id})\tau$, де θ – автоморфізм групоїду Ω, τ – внутрішній автоморфізм групоїду $\mathcal{G}$, див. Теорему 2.2.1.

Нехай Ω – траєкторний групоїд для дії зчисленної групи Γ на S, тоді траєкторний групоїд дії на S зчисленної групи, утвореної Γ та θ, як легко бачити, є дискретною редукцією принципового групоїду $\mathcal{H}$. Але групоїд $\mathcal{H} = H \times X$ має тип II, а це значить, що $\mod \theta = 1$. Тому і $\mod A = 1$. Внаслідок довільності вибору A маємо $F(G \times X) = \{1\}$, що й треба було довести.

Тепер припустимо, що група G має скінченний центр $Z(G)$. Оскільки розбиття простору X на траєкторії центру $Z(G)$ вимірне, наш результат про тривіальність фундаментальної групи для дії групи $G/Z(G)$ на $X/Z(G)$ переноситься на дію G на X внаслідок їх стабільної траєкторної еквівалентності [48, лема 6.9]. Аналогічним чином можна позбавитися від припущення про відсутність у G компактних множників. $\square$

Наслідок 2.3.4. *Нехай Γ – решітка в простій зв'язній дійсній групі Лі G дійсного рангу не меншого двох, причому центр G скінченний. Нехай*

(X, μ) – *вільний ергодичний* Γ*-простір із скінченною інваріантною мірою* μ. *Тоді* $F(\Gamma \times X) = \{1\}$.

Доведення. За динамічною системою (Γ, X, μ) побудуємо індуковану дію групи G на просторі (S, μ) [196]. Ця дія вільна та власне ергодична. Крім того, оскільки Γ – решітка в G, індукована дія G зберігає скінченну міру ν. Відповідний принциповий групоїд $\mathcal{G}$ припускає, як і вище, представлення у вигляді $\mathcal{G} = \Omega \times \mathcal{T}$. При цьому дискретна редукція Ω може бути обраною траєкторно еквівалентною дії групи $\Gamma \times \mathbb{Z}$ на $X \times \mathbb{Z}$, де $\mathbb{Z}$ діє на собі трансляціями (див., наприклад, [48, теорема 7.4]). Таким чином, будь-який автоморфізм $\theta \in N[\Gamma \times \mathbb{Z}]$ підіймається до автоморфізму $\theta \times \mathrm{id}$ групоїду $\mathcal{G}$. Але з Теореми 2.3.2 випливає, що $\mod(\theta \times \mathrm{id}) = 1$, а, значить, і $\mod \theta = 1$, тобто $F(\Gamma \times X) = \{1\}$. □

Твердження 2.3.5. *Існують зчисленні ергодичні відношення еквівалентності з одиничною фундаментальною групою, але без T-властивості (отже, не утворені діями решіток груп Лі як у Наслідку 2.3.4.*

Доведення. Дійсно, розглянемо групу $SO(n, \mathbb{Q})$, $n \geq 5$, та її дію правими зсувами на $SO(n, \mathbb{R})$. Група $SO(n, \mathbb{Q})$ не є скінченно генерованою і тому може бути представлена у вигляді зчисленного об'єднання послідовності підгруп що зростає. Оскільки розглянута нами дія вільна, аналогічну властивість має також відповідне відношення еквівалентності, а це суперечить T-властивості [132, твердження 6.4.1]. Але ж, як показано в [53], фундаментальна група цієї дії тривіальна. □

2.4 Теорема порівняння для нетранзитних коциклів

2.4.1 Порівняння полів коциклів зі щільними образами

Доведення теореми порівняння для нетранзитних коциклів є більш складним, ніж таке для транзитних коциклів (див. підрозділ 2.2). Зокрема, воно потребує попереднього доведення версії теореми порівняння для борелівських полів коциклів з щільними образами (див. [65]). Тут ми обмежимося лише формулюванням такої теореми, що буде використана у подальшому для одержання загального результату.

Кожному коциклу $\alpha : \Gamma\times S \to G$ вільної апроксимативно скінченної дії зчисленної групи Γ на просторі Лебега (S, μ) зі значеннями в у л.к.с. групі G поставимо у відповідність *подвійний коцикл* $\alpha_0 = \alpha\times r : \Gamma\times S \to G\times\mathbb{R}$, де $r(\gamma, s) = \log(d\mu \circ \gamma/d\mu)(s)$ – коцикл Радона-Нікодима динамічної системи (Γ, S, μ). Дія Маккі подвійного коциклу α_0 називається *подвійним потоком* для коциклу α.

Припустимо заданою борелівську дію л.к.с. групи G на просторі Лебега (X, μ), і нехай при цьому $G_x = \{g \in G|\, gx = x\}$ – стабілізатор цієї дії у точці $x \in X$. Тоді сімейство $\{G_x\}$ становить борелівське поле груп [181]. Нехай також задано борелівське поле ергодичних вільних дій зчисленної аменабельної групи Γ на борелівському полі просторів Лебега (Z_x, μ_x), $x \in X$, разом із борелівським полем коциклів $\pi_x : \Gamma \times Z_x \to G_x$. Це відповідає борелівському коциклу π неергодичної дії на просторі $Z_x * X = \{(z, x) \in \cup_x Z_x \times X \;:\; z \in Z_x\}$ з мірою $\int \mu_x d\mu(x)$ та ергодичними компонентами $Z_x \times \{x\}$, $x \in X$.

Теорема 2.4.1. *Нехай задані борелівські поля коциклів $\pi_x, \tau_x : \Gamma \times Z_x \to G_x$ такі, що для кожного $x \in X$ подвійні коцикли $(\pi_x)_0, (\tau_x)_0 : \Gamma \times Z_x \to G_x \times \mathbb{R}$ мають щільні образи у підгрупі $H_x \subset G \times \mathbb{R}$, і при цьому $\{H_x\}$ утворюють борелівське поле підгруп в $G \times \mathbb{R}$. Тоді існують борелівське поле автоморфізмів $\theta_x \in N[\Gamma]$ на Z_x і борелівське відображення $f : Z_x * X \to G \times \mathbb{R}$ такі, що для кожного $x \in X$ маємо $\bmod \theta_x = \mathrm{id}$ і $f(\gamma z, x)(\pi_x)_0(\gamma, z)f(z, x)^{-1} = (\tau_x)_0(\theta_x\gamma\theta_x^{-1}, \theta_x z)$ для всіх $\gamma \in [\Gamma]$ у μ_x-м.в. точках $z \in Z_x$. Зокрема, подібне співвідношення також має місце для полів коциклів π_x і τ_x.* $\square$

2.4.2 Основна теорема порівняння коциклів

Теорема 2.4.2. *Припустимо, що подвійні потоки для нетранзитних коциклів $\alpha, \beta : \Gamma \times S \to G$ є спряженими. Тоді існують автоморфізм $\theta \in N[\Gamma]$ і борелівське відображення $f : S \to G$ такі, що $\beta\left(\theta\gamma\theta^{-1}, \theta s\right) =$*

$f(\gamma s)\alpha(\gamma, s)f(s)^{-1}$ *для всіх* $\gamma \in [\Gamma]$ *у м.в. точках* $s \in S$.

Доведення. Спочатку доведемо теорему за додаткового припущення про те, що дія групи Γ на S має тип II_∞ або III. У подальшому з'ясується, що з цього випливає загальне твердження.

На просторі $(G \times \mathbb{R} \times S, \mu_G \times \mu_{\mathbb{R}} \times \mu)$ розглянемо дію a_α групи Γ

$$a_\alpha(\gamma)(h, u, s) = (\alpha(\gamma, s)h, u + r(\gamma, s), \gamma s), \tag{2.4.1}$$

разом з дією ω групи $G \times \mathbb{R}$

$$\omega(g, v)(h, u, s) = (hg^{-1}, u - v, s). \tag{2.4.2}$$

Позначимо через X простір подвійного потоку w для α. Тоді існує борелівська проекція $A'_\alpha : G \times \mathbb{R} \times S \to X$ така, що

$$A'_\alpha \circ \omega(g, v) = w(g, v) \circ A'_\alpha, \tag{2.4.3}$$

і при цьому $Y_x^\alpha = A_\alpha'^{-1}(x)$ для кожної точки $x \in X$ є ергодичною компонентою дії a_α групи Γ. Нехай також $\widetilde{\mu}$ – ймовірнісна міра на X з класу мір $A'_{\alpha *}[\mu_G \times \mu_{\mathbb{R}} \times \mu]$, тоді маємо дезінтеграцію $\mu_G \times \mu_{\mathbb{R}} \times \mu = \int \mu_x^\alpha d\widetilde{\mu}(x)$, де μ_x^α – умовна міра, зосереджена на Y_x^α.

Лема 2.4.3. *У* $\widetilde{\mu}$-*м.в. точках* $x \in X$ *простір* $(Y_x^\alpha, \mu_x^\alpha)$ *є власне ергодичним* Γ-*простором з інваріантною* σ-*скінченною мірою* μ_x^α.

Доведення. Властивості проекції A'_α мають наслідком співвідношення $\omega(g, v)Y_x^\alpha = Y_{w(g,v)x}^\alpha$, і оскільки дії ω і a_α комутують, відображення $\omega(g, v) : Y_x^\alpha \to Y_{w(g,v)x}^\alpha$ є ізоморфізмом Γ-просторів. Ясно, що борелівська множина $\{x : Y_x^\alpha \text{ зчисленний}\}$ інваріантна відносно (ергодичного) подвійного потоку w на X. Вона не може співпадати з $X \mod 0$, оскільки α нетранзитний (отже, таким є також і α_0). Таким чином, вона має $\widetilde{\mu}$-міру 0.

Оскільки міра $\mu_G \times \mu_{\mathbb{R}} \times \mu = \int \mu_x^\alpha d\widetilde{\mu}(x)$ є Γ-інваріантною, умовна міра μ_x^α є також Γ-інваріантною для м.в. $x \in X$. Крім того, внаслідок ергодичності подвійного потоку w і ізоморфізмів $\omega(g, v)$ тип II_1 або II_∞ реалізується для м.в. $x \in X$.

Аби довести, що фактично Y_x^α можна розглядати як такі, що мають тип II_∞, зазначимо, що, оскільки дія Γ на S має нескінченний тип, її можна замінити на траєкторно еквівалентну $\Gamma \times \mathbb{Z}$-дію на $S \times \mathbb{Z}$, де $\mathbb{Z}$ діє на собі трансляціями, а коцикли α та r не залежать від трансляції $\mathbb{Z}$. Тоді Y_x^α заміняється на $\Gamma \times \mathbb{Z}$-простір $Y_x^\alpha \times \mathbb{Z}$, який, звичайно, має тип II_∞. $\square$

Внаслідок [111, лема 2.5], існує борелівське поле траєкторних ізоморфізмів $U_x^\alpha : Y_x^\alpha \to Y$, де Y – Γ-простір із σ-скінченною інваріантною мірою. Отже, маємо Γ-траєкторний ізоморфізм $A_\alpha : G \times \mathbb{R} \times S \to Y \times X$,

$$A_\alpha(g, v, s) = \left(U^\alpha_{A'_\alpha(g,v,s)}(g, v, s), A'_\alpha(g, v, s) \right). \tag{2.4.4}$$

На просторі $Y \times X$ розглянемо дію $\overline{\omega}_\alpha$ групи $G \times \mathbb{R}$, що задається так: $\overline{\omega}_\alpha(g, v) = A_\alpha \omega(g, v) A_\alpha^{-1}$. Зрозуміло, що це – дія типу I. Визначимо також на просторі $Y \times X$ (борелівське) відношення еквівалентності

$$\mathcal{E}_\alpha = \{((y_1, x_1), (y_2, x_2)) :\ x_1 = x_2,\ \text{і} \\ \overline{\omega}_\alpha(g, v)(y_1, x_1) = (y_2, x_2) \text{ для певної пари } (g, v) \in H_{x_1}\},$$

де H_x – стабілізатор подвійного потоку w у точці $x \in X$.

Лема 2.4.4. *Відношення еквівалентності $\mathcal{E}_\alpha$ має тип I.*

Доведення. Нехай $\{B_i\}_{i=1}^\infty$ – зчисленне сімейство борелівських підмножин у X, що розділяє точки, $\{C_i\}_{i=1}^\infty$ – зчисленне сімейство борелівських $\overline{\omega}_\alpha$-інваріантних підмножин у $Y \times X$, що розділяє $\overline{\omega}_\alpha$-траєкторії. Розглянемо два класи еквівалентності $\mathcal{E}_\alpha$. Якщо вони містяться у різних множинах, відповідно, $Y \times \{x_1\}$ та $Y \times \{x_2\}$, то такі класи розділяються певною множиною $B_i \times Y$. Якщо ж, навпаки, обидва класи лежать у тій самій множині $Y \times \{x\}$, вони є різними $\overline{\omega}_\alpha(H_x)$-траєкторіями. У цьому випадку вони, внаслідок (2.4.3), (2.4.4), містяться у різних $\overline{\omega}_\alpha(G \times \mathbb{R})$-траєкторіях, і тому розділяються певною множиною C_j. Отже, $\{(B_i \times Y) \cap C_j\}_{i,j=1}^\infty$ складає зчисленне сімейство $\mathcal{E}_\alpha$-інваріантних борелівських підмножин, що розділяють класи еквівалентності $\mathcal{E}_\alpha$, що й треба було довести. $\square$

Нехай $Z_\alpha \subset Y \times X$ – борелівський переріз для $\mathcal{E}_\alpha$, і $Z_x = Z_\alpha \cap (T \times \{x\})$. Оскільки кожен клас еквівалентності $\mathcal{E}_\alpha$, що міститься у $Y \times \{x\}$, являє собою $\overline{\omega}_\alpha(H_x)$-траєкторію, множина $Y \times \{x\}$ може бути представлена у вигляді $H_x \times Z_x$, отже

$$Y \times X \cong (H_x \times Z_x) * X = \{(h, z, x) : \ h \in H_x, \ z \in Z_x\}, \tag{2.4.5}$$

тобто для $(h, z, x) \in (H_x \times Z_x) * X$, $g \in H_x$ маємо

$$\overline{\omega}_\alpha(g)(h, z, x) = (hg^{-1}, z, x). \tag{2.4.6}$$

Оскільки $G \times \mathbb{R}$-дія $\overline{\omega}_\alpha$ комутує з Γ-дією $\overline{a}_\alpha = A_\alpha a_\alpha A_\alpha^{-1}$, обмеження $\overline{a}_\alpha$ на $H_x \times Z_x \times \{x\}$ і H_x-дія $\overline{\omega}_\alpha$ також комутують, звідки випливає, що $\overline{a}_\alpha$ має вигляд

$$\overline{a}_\alpha(\gamma)(h, z, x) = (\pi_x^\alpha(\gamma, z)h, \gamma z, x) \tag{2.4.7}$$

$(\gamma \in \Gamma)$ для певного борелівського поля Γ-дій на Z_x і певного борелівського поля коциклів $\pi_x^\alpha : \Gamma \times Z_x \to H_x$ з щільними образами [71].

Зазначимо також, що внаслідок [71, лема 51] є можливість замінити борелівське поле дій групи Γ на борелівському полі просторів Z_x полем дій групи Γ на єдиному просторі Z. У цьому випадку з квазіінваріантності умовної міри μ_x на $H_x \times Z$ відносно дії $\overline{\omega}_\alpha \times \overline{a}_\alpha$ групи $H_x \times \Gamma$ випливає, що міра μ_x є еквівалентною мірі $\mu_{H_x} \times \eta$, де μ_{H_x} – міра Хаара групи H_x, а η – ймовірнісна міра на Z, квазіінваріантна відносно дії групи Γ.

Безпосередній підрахунок, заснований на (2.4.4), (2.4.5), (2.4.6), дозволяє зробити висновок про те, що дія $\overline{\omega}_\alpha$ групи $G \times \mathbb{R}$ на $(H_x \times Z) * X$ має вигляд

$$\overline{\omega}_\alpha(g)(h, z, x) = \big(\varphi_\alpha(g, z, x)ghg^{-1}, \psi_\alpha(g, x)z, w(g)x\big) \tag{2.4.8}$$

для певних борелівського коциклу $\psi_\alpha : (G \times \mathbb{R}) \times X \to N[\Gamma]$ і борелівського відображення $\varphi_\alpha : (G \times \mathbb{R}) \times Z \times X \to G \times \mathbb{R}$ із властивістю $\varphi_\alpha(g, z, x) \in H_{w(g)x}$. Більш того, для $g \in H_x$ маємо $\psi_\alpha(g, x) = \mathrm{id}_Z$ (тобто ψ_α є траєкторним коциклом), і $\varphi_\alpha(g, z, x) = g^{-1}$.

Нехай $X_0 \subset X$ – зчисленний переріз для відношення еквівалентності R, генерованого на X подвійним потоком w [48], і R_0 – індуковане зчисленне відношення еквівалентності на X_0. Оскільки коцикл ψ_α є траєкторним, він припускає коректно визначене обмеження на R_0, звідки виводимо, що $\{e\}\times Z\times X_0$ є зчисленним перерізом для дії $\overline{\omega}_\alpha\times\overline{a}_\alpha$ групи $G\times\mathbb{R}\times\Gamma$ на $(H_x\times Z)*X$.

З огляду на вкладення $H_x\subset G\times\mathbb{R}$ можна вважати коцикли π_x^α (див. (2.4.7)) такими, що приймають значення у групі $G\times\mathbb{R}$, тобто $\pi_x^\alpha=\widetilde{\pi}_x^\alpha\times r_x^\alpha$, де $\widetilde{\pi}_x^\alpha$ та r_x^α – коцикли дії групи Γ на Z зі значеннями, відповідно, у групах G та $\mathbb{R}$.

Лема 2.4.5. *Для м.в. $x\in X$ коцикл r_x^α є коциклом Радона-Нікодима для дії групи Γ на Z відносно певної міри η'_x, еквівалентної мірі η.*

Доведення. Розглянемо коцикл c_α дії $\omega\times a_\alpha$ групи $G\times\mathbb{R}\times\Gamma$ на $G\times\mathbb{R}\times S$:

$$c_\alpha(\omega(g,v),h,u,s)=(g,v);\qquad c_\alpha(a_\alpha(\gamma),h,u,s)=(e,0).$$

Неважко перевірити, що коцикл c_α когомологічний подвійному коциклу α_0 дискретної редукції $\Gamma\times S$ зазначеного вище групоїду [48], який відповідає зчисленному перерізу $\{e\}\times\{0\}\times S\subset G\times\mathbb{R}\times S$. Отже, аналогічна властивість має місце також для коциклу $c_\alpha\circ A_\alpha^{-1}$ відносно зчисленного перерізу $A_\alpha(\{e\}\times\{0\}\times S)$. Нехай I – внутрішній автоморфізм групоїду $(G\times\mathbb{R}\times\Gamma)\times((H_x\times Z)*X)$, що переводить $A_\alpha(\{e\}\times\{0\}\times S)$ у зчисленний переріз $\{e\}\times Z\times X_0$ (обидва ці перерізи можна вважати такими, що мають нескінченний тип). Тоді коцикл $c_\alpha\circ A_\alpha^{-1}\circ I^{-1}$, після проектування його значень на $\mathbb{R}$ стає когомологічним коциклу Радона-Нікодима дискретної редукції $\Gamma\times(\{e\}\times Z\times X_0)$. Але внаслідок того, що автоморфізм I є внутрішнім, коцикл $c_\alpha\circ A_\alpha^{-1}\circ I^{-1}$ когомологічний коциклу $c_\alpha\circ A_\alpha^{-1}$, в той час як цей останній, після обмеження на редукцію групоїду на підмножину $H_x\times Z\times\{x\}$ є зрозумілим чином когомологічним коциклу π_x^α дії групи Γ на Z. Отже, цим встановлено, що коцикл π_x^α має вигляд $\pi_x^\alpha=\widetilde{\pi}_x^\alpha\times r_x^\alpha$, де коцикл r_x^α є когомологічним коциклу Радона-Нікодима дії групи Γ на Z. Таким чином, коцикл r_x^α сам є коциклом Радона-Нікодима відносно певної еквівалентної міри η'_x; сімейство цих мір утворює борелівське поле мір. $\square$

Оскільки коцикл π_x^α має щільний образ у підгрупі H_x, легко зрозуміти, що коцикл r_x^α має щільний образ у замкненні $H_x^{\mathbb{R}}$ проекції підгрупи

$H_x \subset G \times \mathbb{R}$ на $\{e\} \times \mathbb{R}$. Завдяки комутативності групи $\mathbb{R}$ і співвідношенню $H_{w(g)x} = gH_x g^{-1}$ маємо, що підгрупа $H_x^{\mathbb{R}}$ є постійною понад траєкторіми подвійного потоку w, а внаслідок ергодичності останнього, $H_x^{\mathbb{R}}$ є постійною м.в. З огляду на те, що r_x^α є коциклом Радона-Нікодима, $H_x^{\mathbb{R}}$ цілком визначає траєкторний тип дії групи Γ на Z, що відповідає точці $x \in X$ (зокрема, при $H_x^{\mathbb{R}} = \{e\}$ Γ-простір $Z = Y$має тип II_∞ внаслідок Леми 2.4.3), і тому всі дії групи Γ із зазначеного вище поля є траєкторно еквівалентними. Отже, поле коциклів π_x^α може розглядатися як таке, що визначене над тією самою повною групою.

У подібний спосіб, конструкція, застосована вище до коциклу α_0, може бути використана для побудови a_β, A'_β, A_β, $\overline{\omega}_\beta$, $\overline{a}_\beta$, π_x^β, стартуючи з коциклу β_0. У подальшому ми ототожнюємо подвійні потоки w_α, w_β (зокрема, поля стабілізаторів співпадають), і, внаслідок попередніх розглядів, поле коциклів π_x^β можна розглядати як таке, що визначене над тією ж повною групою на Z, що й поле коциклів π_x^α.

Згідно Теореми 2.4.1 маємо борелівське поле автоморфізмів $\theta_x \in N[\Gamma]$ та борелівське відображення $f : Z \times X \to G \times \mathbb{R}$ такі, що $f(z,x) \in H_x$ і $\pi_x^\beta(\theta_x \gamma \theta_x^{-1}, \theta_x z) = f(\gamma z, x)\pi_x^\alpha(\gamma, z) f(z,x)^{-1}$ для всіх $\gamma \in [\Gamma]$ у м.в. точках $(x,z) \in X \times Z$.

Розглянемо відображення $\Phi : (H_x \times Z) * X \to (H_x \times Z) * X$, задане у такий спосіб: $\Phi(h,z,x) = (f(z,x)h, \theta_x z, x)$. Проста перевірка показує, що Φ^{-1} переводить траєкторії дії $\overline{a}_\beta$ групи Γ в (на) траєкторії дії $\overline{a}_\alpha$ тієї ж групи, а дію $\overline{\omega}_\beta$ групи $G \times \mathbb{R}$ у дію $\widetilde{\omega}_\beta = \Phi^{-1}\overline{\omega}_\beta \Phi$ тієї ж групи, що має вигляд

$$\widetilde{\omega}_\beta(g)(h,z,x) = \left(\psi_\beta(g,z,x) g h g^{-1}, \widetilde{\psi}_\beta(g,x)z, w(g)x\right), \tag{2.4.9}$$

де $\widetilde{\psi}_\beta(g,x) = \theta_{w(g)x}^{-1}\psi_\beta(g,x)\theta_x$,
$\widetilde{\varphi}_\beta(g,z,x) = f(\theta_{w(g)x}\psi_\beta(g,x)\theta_x z, w(g)x)^{-1}\varphi_\beta(g,\theta_x z, x) g f(z,x) g^{-1}$.

Зрозуміло, що $\widetilde{\psi}_\beta$, як і ψ_β, є траєкторним коциклом; крім того, $\widetilde{\varphi}_\beta$, як і φ_β, задовольняє умові $\widetilde{\varphi}_\beta(g,z,x) \in H_{w(g)x}$, і для $g \in H_x$ маємо $\widetilde{\varphi}_\beta(g,z,x) = g^{-1}$.

Перепишемо (2.4.8) та (2.4.9) відповідно у вигляді

$$\overline{\omega}_\alpha(g) = (u_\alpha(g,x)(h,z), w(g)x), \tag{2.4.10}$$

$$\widetilde{\omega}_\beta(g) = (u_\beta(g,x)(h,z), w(g)x), \tag{2.4.11}$$

де $u_\alpha(g,x), u_\beta(g,x) : H_x \times Z \to H_{w(g)x} \times Z$ утворюють два борелівських поля відображень [71] такі, що $u_\alpha(g_1 g_2, x) = u_\alpha(g_1, g_2 x) u_\alpha(g_2, x)$, і аналогічна властивість також має місце для u_β.

Розглянемо $u(g,x) = u_\beta(g,x) u_\alpha(g,x)^{-1}$, тоді $u(g,x) : H_{w(g)x} \times Z \to H_{w(g)x} \times Z$, і з (2.4.5) та (2.4.6) наразі випливає, що $u(g,x)$ комутує з перетвореннями $\overline{\omega}_\alpha(h)$, $h \in H_x$ ($=\widetilde{\omega}_\beta(h)$, $h \in H_x$).

Нехай E_x – група автоморфізмів простору $H_x \times Z$ з нормалізатора повної групи $[\overline{a}_\alpha(\Gamma)]$, що комутують з перетвореннями $\overline{\omega}_\alpha(h)$, $h \in H_x$. Кожне перетворення з E_x має вигляд $(h,z) \mapsto (\varphi(z)h, \psi z)$ для певних $\psi \in \mathcal{D}(\Gamma, \pi_x^\alpha)$ (тут $\mathcal{D}(\Gamma, \pi_x^\alpha)$ – група сумісних автоморфізмів для коцикла π_x^α), $\varphi \in \pi_x^\alpha(\psi)$ (див. [59]), тобто цілком визначається парою (φ, ψ). E_x є польською групою з метрикою

$$\overline{d}_x((\varphi_1, \psi_1), (\varphi_2, \psi_2)) = d(\psi_1, \psi_2) + \int \rho(\varphi_1(z)\varphi_2(z)) d\mu(z), \tag{2.4.12}$$

де d – метрика на $N[\Gamma]$ [71], ρ – лівоінваріантна метрика на $G \times \mathbb{R}$.

Наслідком того, що дія $\overline{a}_\alpha$ групи Γ (2.4.7) і дія $\overline{\omega}_\alpha$ групи $G \times \mathbb{R}$ комутують, є такі співвідношення

$$\begin{aligned} &\pi_x^\alpha \left(\gamma, \psi_\alpha(g,x)^{-1} z\right) = \\ &\quad = g^{-1} \varphi_\alpha \left(g, \psi_\alpha(g,x)^{-1} \gamma z, x\right)^{-1} \pi_{w(g)x}^\alpha(\gamma, z) \varphi_\alpha \left(g, \psi_\alpha(g,x)^{-1} z, x\right) g, \end{aligned} \tag{2.4.13}$$

і $\psi_\alpha(g,x)^{-1}\gamma = \gamma \psi_\alpha(g,x)^{-1}$ для $\gamma \in \Gamma$, $(g,z,x) \in (G \times \mathbb{R}) \times Z \times X$.

У подібний спосіб, комутування дій $\Phi^{-1} \overline{a}_\beta \Phi$ групи Γ та дії $\widetilde{\omega}_\beta$ групи $G \times \mathbb{R}$ мають наслідком таке:

$$\begin{aligned} &\pi_{w(g)x}^\alpha \left(\widetilde{\psi}_\beta(g,x) \gamma \widetilde{\psi}_\beta(g,x)^{-1}, \widetilde{\psi}_\beta(g,x) z\right) = \\ &\qquad\qquad = \widetilde{\varphi}_\beta(g, \gamma z, x) g \pi_x^\alpha(\gamma, z) g^{-1} \widetilde{\varphi}_\beta(g, z, x)^{-1}. \end{aligned} \tag{2.4.14}$$

Нехай $\psi(g,x) = \widetilde{\psi}_\beta(g,x)\psi_\alpha(g,x)^{-1}$, тоді, внаслідок (2.4.13) і (2.4.14) маємо

$$\begin{aligned}\pi^\alpha_{w(g)x}\left(\psi(g,x)\gamma\psi(g,x)^{-1}, \psi(g,x)z\right) = \\ = \widetilde{\varphi}_\beta(g, \psi_\alpha(g,x)^{-1}\gamma z, x)\varphi_\alpha\left(g, \psi_\alpha(g,x)^{-1}\gamma z, x\right)^{-1}\pi^\alpha_{w(g)x}(\gamma, z)\cdot \\ \cdot\varphi_\alpha\left(g, \psi_\alpha(g,x)^{-1}z, x\right)\widetilde{\varphi}_\beta(g, \psi_\alpha(g,x)^{-1}z, x)^{-1}. \quad (2.4.15)\end{aligned}$$

Зважаючи на те, що $\varphi_\alpha(g,z,x), \widetilde{\varphi}_\beta(g,z,x) \in H_{w(g)x}$, робимо висновок з (2.4.15) про те, що $\psi(g,x) \in \mathcal{D}\left(\Gamma, \pi^\alpha_{w(g)x}\right)$. Більше того, запроваджуючи позначення $\varphi(g,z,x) = \widetilde{\varphi}_\beta\left(g, \psi_\alpha(g,x)^{-1}z, x\right)\varphi_\alpha\left(g, \psi_\alpha(g,x)^{-1}z, x\right)^{-1}$, маємо $\varphi \in \pi^\alpha_{w(g)x}(\psi(g,x))$; отже, пара $(\varphi(g,\cdot,x), \psi(g,x))$ належить до замкнення $E^0_{w(g)x}$ групи $E_{w(g)x} \cap [\overline{a}_\alpha(\Gamma)]$ у метриці $\overline{d}_{w(g)x}$ (див. [59]).

Лема 2.4.6. $(E^0_x, \overline{d}_x)$ *утворюють борелівське поле польських груп за Сузерландом (див. [181]).*

Доведення. Перевіримо умови (a) – (c) з [181, твердження 2.4]. З приводу (a) зазначимо, що усі групи E_x вкладаються в групу E, що утворена автоморфізмами $G \times \mathbb{R} \times Z$ вигляду $(g,z) \mapsto (\varphi(z)g, \psi z)$, де $\psi \in N[\Gamma]$, а $\varphi : Z \to H_x$ – борелівське відображення. E є польською групою у метриці $\overline{d}$ (2.4.12), яка наразі не залежить від $x \in X$ і у стандартний спосіб може бути замінена на ліво-інваріантну метрику, що також не залежить від x (див., наприклад, [78]).

Нехай $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ – щільна зчисленна підгрупа повної групи $[\Gamma]$ відносно рівномірної метрики d_u. Ми стверджуємо, що підгрупа, утворена парами $(\pi^\alpha_x(g_k,\cdot), g_k)$, щільна у E_x відносно метрики $\overline{d}_x$. Дійсно, нехай задано довільну пару $(\varphi,\psi) \in E^0_x$. Представимо її у вигляді границі $\overline{d}_x$-збіжної послідовності пар $(\pi^\alpha_x(\gamma_n,\cdot), \gamma_n)$, де $\gamma_n \in [\Gamma]$, тобто $d(\gamma_n,\psi) \to 0$ і $\pi^\alpha_x(\gamma_n,\cdot)$ збігається до φ за мірою μ. Далі виберемо послідовність g_{k_n} елементів підгрупи $\{g_k\}_{k=1}^\infty \subset [\Gamma]$ таку, що $d_u(g_{k_n},\gamma_n) \to 0$. Як добре відомо, у цьому випадку маємо також $d(g_{k_n},\gamma_n) \to 0$ і $\mu\{z : \ \pi^\alpha_x(g_{k_n},z) \neq \pi^\alpha_x(\gamma_n,z)\} \to 0$. Це власне і означає, що $(\pi^\alpha_x(g_{k_n},\cdot), g_{k_n}) \to (\varphi,\psi)$ відносно метрики $\overline{d}_x$, отже умова (b) задовільняється.

Умова (c) прямо випливає з (2.4.12) і борелевості поля коциклів π_x^α. $\square$

Нагадаємо, що $X_0 \subset X$, як і вище, – зчисленний переріз для відношення еквівалентності на X, генерованого подвійним потоком w. Позначимо через $\mathcal{G}$ відповідний головний групоїд зі зчисленними орбітами і простором одиниць X_0, тобто $\mathcal{G} = \{(w(g)x, x) \in X_0 \times X_0 : \ (g, x) \in (G \times \mathbb{R}) \times X_0\}$.

Розглянемо коваріантний функтор (див. [181, визначення 4.1]) $F = \big(F_x, F_{(w(g)x,x)}\big)$ з $\mathcal{G}$ у польські групи, заданий у такий спосіб: $F_x = E_x^0$, а ізоморфізм $F_{(w(g)x,x)} : F_x \to F_{(w(g)x)}$ діє так: $F_{(w(g)x,x)}(\theta) = u_\alpha(g,x)\theta u_\alpha(g,x)^{-1}$ (див. (2.4.10), (2.4.11)) для $\theta \in E_x^0$. Варто зазначити, що хоча u_α не є траєкторним коциклом, $u_\alpha(h,x) = \overline{\omega}_\alpha(h)$ комутує з $\theta \in E_x^0$ для $h \in H_x$, отже ізоморфізм $F_{(w(g)x,x)}$ є коректно визначеним. Запровадимо позначення $\mathcal{G} * F = \{(w(g)x, x, \theta) : \ w(g)x, x \in X_0, \theta \in F_x\}$. З [181] випливає, що $F_{(w(g)x,x)}$ є стандартним борелівським простором. Отже, аби переконатися, що F задовольняє умовам [181, твердження 4.1], ми потребуємо

Лема 2.4.7. *Відображення $\mathcal{G} * F \to \dot{\bigcup} F_x$, що задане як $(w(g)x, x, \theta) \mapsto F_{(w(g)x,x)}$, є борелівським.*

Доведення. Припустимо, що $\theta \in E_x^0$ має вигляд $\theta(h,z) = (\varphi(z)h, \psi z)$ для певних $\psi \in \mathcal{D}(\Gamma, \pi_x^\alpha)$ і $\varphi \in \pi_x^\alpha(\psi)$. Підрахунок показує, що $F_{(w(g)x,x)}(\theta)$ визначається парою (φ_1, ψ_1), де $\psi_1 = \psi_\alpha(g,x)\psi\psi_\alpha(g,x)^{-1}$, і

$$\begin{aligned}&\varphi_1(z) = \\ &= \varphi_\alpha\left(g, \psi\psi_\alpha(g,x)^{-1}z, gx\right) g\varphi\left(\psi_\alpha(g,x)^{-1}z\right) g^{-1}\varphi_\alpha\left(g, \psi_\alpha(g,x)^{-1}z, gx\right)^{-1}.\end{aligned}$$

Більше того, оскільки $\mathcal{G}$ генерований єдиним перетворенням [23] на X_0, нам досить довести, що відображення $\dot{\bigcup} F_x \to \dot{\bigcup} F_x$, визначене як $\theta \mapsto F_{(Tx,x)}(\theta)$ для $\theta \in F_x$, є борелівським.

Як і у доведенні Леми 2.4.6, сформуємо зчисленну щільну підгрупу $(\pi_x^\alpha(g_k, \cdot), g_k)$ у кожному E_x^0 відносно метрики $\overline{d}_x$. Всі g_k насправді містяться у $[\Gamma]$, отже можуть бути обраними не залежними від x. З результатів [181] можна побачити, що борелівська структура на $\dot{\bigcup} F_x$ генерована сімейством множин вигляду $\left\{ y \in \dot{\bigcup} F_x : \ \overline{d}_x(y, (\pi_x^\alpha(g_k, \cdot), g_k)) < \varepsilon(x) \right\}$, де $\varepsilon(x) > 0$ –

борелівська функція. Отже, досить перевірити борелевість функцій $x \mapsto \overline{d}_{Tx}\left(F_{(Tx,x)}(\pi_x^\alpha(g_k,\cdot),g_k),(\pi_{Tx}^\alpha(g_j,\cdot),g_j)\right)$. Це стає елементарним, якщо взяти до уваги явний вигляд метрики $\overline{d}_x$ (див. (2.4.12) та [71]). $\square$

Розглянемо відображення $(w(g)x,x) \in \mathcal{G} \mapsto u(w(g)x,x) = u_\beta(g,x)u_\alpha(g,x)^{-1}$. Проста перевірка показує, що це відображення є коректно визначеним і являє собою F-коцикл у сенсі [181, визначення 5.1]. Доведення його борелевості є аналогічним доведенню Леми 2.4.7.

Повна група $[\overline{a}_\alpha(\Gamma)] \cap E_x$ є борелівською нормальною підгрупою у кожній групі F_x, і $F_{(w(g)x,x)}([\overline{a}_\alpha(\Gamma)] \cap E_x) = [\overline{a}_\alpha(\Gamma)] \cap E_{w(g)x}$. Для перевірки борелевості підмножини $\dot{\bigcup}[\overline{a}_\alpha(\Gamma)] \cap E_x$ у $\dot{\bigcup} E_x^0$ досить показати, що природне вкладення $\dot{\bigcup}[\overline{a}_\alpha(\Gamma)] \cap E_x \to \dot{\bigcup} E_x^0$ борелівське. Оскільки рівномірна метрика d_u є очевидно сильнішою за метрику $\overline{d}_x$, ми робимо висновок, що будь-яка множина

$$A_k = \left\{(\varphi,\psi) \in \dot{\bigcup}[\overline{a}_\alpha(\Gamma)] \cap E_x :\ \overline{d}_x((\varphi,\psi),(\pi_x^\alpha(g_k,\cdot),g_k)) < \varepsilon(x)\right\},$$

де $\varepsilon(x) > 0$, містить у собі у якості підмножини множину вигляду

$$B = \left\{(\varphi,\psi) \in \dot{\bigcup}[\overline{a}_\alpha(\Gamma)] \cap E_x :\ d_u(\psi,g_k) < \varepsilon_1(x) \text{ і } x \in C \subset X_0\right\}$$

для певної підмножини C додатної міри в X_0, і $\varepsilon_1(x) \geq 0$. Отже, проста процедура вичерпування дозволяє представити A_k у вигляді зчисленного об'єднання множин, подібних множині B.

Зазначені вище спостереження демонструють, що ми знаходимося в умовах [181, теорема 5.1], застосування якої до F-коциклів u і id дозволяє знайти борелівське відображення $P : X_0 \to N[\overline{a}_\alpha(\Gamma)]$ таке, що $P(x) \in F_x = E_x^0$ і $P(w(g)x)u(w(g)x,x)F_{(w(g)x,x)}(P(x))^{-1} = \mathrm{id} \mod [\overline{a}_\alpha(\Gamma)] \cap E_x$. У термінах коциклів u_α та u_β маємо

$$u_\alpha(g,x) = P(w(g)x)u_\beta(g,x)P(x)^{-1} \qquad \mod [\overline{a}_\alpha(\Gamma)] \cap E_x \tag{2.4.16}$$

для тих пар $(g,x) \in (G \times \mathbb{R}) \times X$, для яких $u(w(g)x,x) \in X_0 \times X_0$.

Нехай $q : X \to G \times \mathbb{R}$ – борелівське відображення з властивостями $q(x)x \in X_0$ і $q(x) = (e,0)$ для $x \in X_0$, тоді відображення P може бути поширене на весь простір X у вигляді $P(x) = u_\alpha(q(x), x)^{-1} P(q(x)x) u_\beta(q(x), x)$. Наразі маємо можливість застосувати (2.4.16) до $u_\alpha(q(gx)gq(x)^{-1}, q(x)x)^{-1}$ та $u_\beta(q(gx)gq(x)^{-1}, q(x)x)$. Просте обчислення показує, що (2.4.16) тепер виконане для всіх $(g, x) \in (G \times \mathbb{R}) \times X$.

Розглянемо відображення $Q : (H_x \times Z) * X \to (H_x \times Z) * X$, задане у такий спосіб: $Q(h, z, x) = (P(x)(h, z), x)$. З зазначених вище властивостей поля перетворень $P(x)$ випливає, що Q сплітає траєкторії дії $\overline{a}_\alpha$ групи Γ, і, крім того, $Q^{-1} \overline{\omega}_\alpha Q = \widetilde{\omega}_\beta(g)\tau(g)$ для $g \in G \times \mathbb{R}$, $\tau(g) \in [\overline{a}_\alpha(\Gamma)]$.

Для завершення доведення Теореми розглянемо коцикл c_α дії $\omega \times a_\alpha$ групи $(G \times \mathbb{R}) \times \Gamma$ на $G \times \mathbb{R} \times S$ (див. (2.4.1), (2.4.2)) зі значеннями в $G \times \mathbb{R}$:

$$c_\alpha(\omega(g), (h, u, s)) = g, \qquad c_\alpha(a_\alpha(\gamma), (h, u, s)) = (e, 0),$$

разом із коциклом c_β дії $\omega \times a_\beta$ групи $(G \times \mathbb{R}) \times \Gamma$ на $G \times \mathbb{R} \times S$ зі значеннями в $G \times \mathbb{R}$:

$$c_\beta(\omega(g), (h, u, s)) = g, \qquad c_\beta(a_\beta(\gamma), (h, u, s)) = (e, 0).$$

Тоді коцикли $c_\alpha \circ A_\alpha^{-1}$ і $c_\beta \circ A_\beta^{-1} \circ \Phi$ мають вигляд:

$$c_\alpha \circ A_\alpha^{-1}(\overline{\omega}(g), (h, z, x)) = g, \qquad c_\alpha \circ A_\alpha^{-1}(\overline{a}_\alpha(\gamma), (h, z, x)) = (e, 0),$$
$$c_\beta \circ A_\beta^{-1} \circ \Phi(\widetilde{\omega}(g), (h, z, x)) = g, \quad c_\beta \circ A_\beta^{-1} \circ \Phi(\overline{a}_\alpha(\gamma), (h, z, x)) = (e, 0),$$

Ці співвідношення разом із властивостями перетворення Q мають наслідком те, що Q переводить відношення еквівалентності, на якому визначений коцикл $c_\beta \circ A_\beta^{-1} \circ \Phi$, у відношення еквівалентності, на якому визначений коцикл $c_\alpha \circ A_\alpha^{-1}$, у такий спосіб, що коцикли $c_\beta \circ A_\beta^{-1} \circ \Phi \circ Q^{-1}$ та $c_\alpha \circ A_\alpha^{-1}$ співпадають. Отже маємо $c_\alpha = c_\beta \circ A_\beta^{-1} \circ \Phi \circ Q^{-1} \circ A_\alpha$.

Оскільки дія групи Γ на S має нескінченний тип, можна представити автоморфізм $A_\beta^{-1} \circ \Phi \circ Q^{-1} \circ A_\alpha$ у вигляді $(\mathrm{id} \times \theta) \cdot \tau$, де $\theta \in N[\Gamma]$, τ – внутрішній автоморфізм групоїда $(G \times \mathbb{R} \times \Gamma) \times (G \times \mathbb{R} \times S)$ [61, 62]. Зазначимо також, що коцикли c_α та c_β когомологічні відповідно коциклам α_0 та β_0 дискретної редукції групоїда $(G \times \mathbb{R} \times \Gamma) \times (G \times \mathbb{R} \times S)$, отже отримуємо співвідношення

$$\beta_0\left(\theta\gamma\theta^{-1}, \theta s\right) = f\left(hg^{-1}, u - v, \gamma s\right) \alpha_0(\gamma, s) f(h, u, s)^{-1} \tag{2.4.17}$$

для певного борелівського відображення $f : G \times \mathbb{R} \times S \to G \times \mathbb{R}$ та всіх $g, h \in G$, $u, v, \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \Gamma$ і $s \in S$. З $\gamma = \mathrm{id}$ співвідношення (2.4.17) набуває вигляду $f\left(hg^{-1}, u - v, s\right) f(h, u, s)^{-1} = e$, тобто f не залежить від h та u. Отже, отримуємо бажане співвідношення для коциклів α_0 та β_0, а значить також і для α та β.

Наприкінці доведемо теорему у випадку, коли дія групи Γ на S має тип II_1. Розглянемо коцикли $\alpha_1, \beta_1 : (\Gamma \times \mathbb{Z}) \times (S \times \mathbb{Z}) \to G$ продакт-дії групи $\Gamma \times \mathbb{Z}$ на $S \times \mathbb{Z}$, у якому група $\mathbb{Z}$ діє на собі трансляціями:

$$\alpha_1(\gamma, n; s, m) = \alpha(\gamma, s), \qquad \beta_1(\gamma, n; s, m) = \beta(\gamma, s).$$

Зрозуміло, що коцикли α_1 і β_1 нетранзитні і мають ті ж подвійні потоки, що й коцикли α і β відповідно. За доведеним вище маємо перетворення $\theta_1 \in N[\Gamma \times \mathbb{Z}]$ на просторі $S \times \mathbb{Z}$ і борелівське відображення $f_1 : S \times \mathbb{Z} \to G$ такі, що $\beta_1\left(\theta_1(\gamma, n)\theta_1^{-1}, \theta_1(s, m)\right) = f_1(\gamma s, n + m)\alpha_1(\gamma, n; s, m) f_1(s, m)^{-1}$.

Нехай (Y, ν) – ергодичний $\mathbb{Z}$-простір типу II_∞, і розглянемо коцикл $\alpha_2 : (\Gamma \times \mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z} \times Y) \to G$, також нетранзитний та з тим же подвійним потоком, що й $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1$. Знову застосуємо вже доведений результат, одержуючи траєкторну еквівалентність $\theta_\alpha : S \times \mathbb{Z} \to S \times Y$ та борелівське відображення $f_\alpha : S \times Y \to G$ такі, що

$$\alpha_1\left(\theta_\alpha(\gamma, n)\theta_\alpha^{-1}, \theta_\alpha(s, m)\right) = f_\alpha(\gamma s, ny)\alpha_2(\gamma, n; s, y) f_\alpha(s, y)^{-1}.$$

Нехай θ_0' – перетворення простору Y таке, що $\theta_0' \in N[\mathbb{Z}]$, $\operatorname{mod}\theta_0' = (\operatorname{mod}\theta_1)^{-1}$, і побудуємо автоморфізм θ_0 простору $S \times Y$: $\theta_0(s, y) = (s, \theta_0' y)$. Зрозуміло, що θ_0 зберігає коцикл α_2, тобто $\alpha_2\left(\theta_0(\gamma, n)\theta_0^{-1}, \theta_0(s, y)\right) = \alpha_2(\gamma, n; s, y)$, і при цьому $\operatorname{mod}\left(\theta_\alpha^{-1}\theta_0\theta_\alpha\theta_1\right) = 1$, а автоморфізм $\theta_\alpha^{-1}\theta_0\theta_\alpha \in N[\Gamma \times \mathbb{Z}]$ зберігає когомологічний клас коциклу α_1.

Доходимо висновку, що автоморфізм $\theta_\alpha^{-1}\theta_0\theta_\alpha$ переводить когомологічний клас коциклу β_1 у когомологічний клас коциклу α_1. Оскільки $\operatorname{mod}\left(\theta_\alpha^{-1}\theta_0\theta_\alpha\theta_1\right) = 1$, автоморфізм $\theta_\alpha^{-1}\theta_0\theta_\alpha$ може бути представлений у вигляді $(\theta_1' \times \mathrm{id}) \cdot \tau$, де $\theta_1' \in N[\Gamma]$ є автоморфізмом простору S, $\tau \in [\Gamma \times \mathbb{Z}]$. Наразі майже ті ж самі розгляди, що були вище застосовані до коциклів

α_0, β_0 для зведення співвідношення (2.4.17) на редукцію $\Gamma \times S$, дозволяють одержати бажане співвідношення між коциклами α та β. $\square$

Зауваження. Може статися, що, на відміну від Теореми 2.4.1, серед автоморфізмів θ, наявність яких стверджується у Теоремі 2.4.2, може не знайтися жодного з $\mod \theta = \mathrm{id}$ [71].

Нехай Q – перетворення ірраціонального обертання на околі $\mathbb{T}$: $Qz = ze^{i\alpha}$, $z \in \mathbb{T}$, $\alpha/\pi \notin \mathbb{Q}$. Розглянемо коцикл $\eta : \mathbb{Z} \times \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ дії групи $\mathbb{Z}$ ступенями автоморфізму Q, заданий так: $\eta(Q, z) = z$. Розглянемо також автоморфізм $\theta \in N[Q]$, $\theta z = ze^{i\beta}$, $\alpha - \beta \notin \pi\mathbb{Q}$. Тоді θ не є сумісним з коциклом η. Дійсно, за припущення такої сумісності, її визначення [59] в нашому випадку може бути переписане у вигляді

$$e^{i\beta} = f\left(ze^{i\alpha}\right) f(z)^{-1} \tag{2.4.18}$$

для певної борелівської функції $f : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$. Відмітимо, що права частина співвідношення (2.4.18) являє собою тривіальний коцикл автоморфізму Q, в той час як ліва частина визначає коцикл зі щільним образом у групі $\mathbb{T}$, що складає протиріччя.

Для ергодичного автоморфізму S типу II_∞ на просторі Лебега (Y, ν) та автоморфізму $U \in N[S]$ із властивістю $\mod U \neq 1$, розглянемо простір $(\mathbb{T} \times Y, \mu_{\mathbb{T}} \times \nu)$ разом із повною групою типу III_0 на ньому, генерованою перетвореннями $S_0(z, y) = (z, Sy)$, $Q_0(z, y) = (Qz, Uy)$, та коциклом $\overline{\eta}$: $[Q_0, S_0] \times (\mathbb{T} \times Y) \to \mathbb{T}$:

$$\overline{\eta}\left(Q_0^k S_0^n, (z, y)\right) = \eta\left(Q^k, z\right). \tag{2.4.19}$$

Проста перевірка показує, що коцикл $\overline{\eta}$ є нетранзитним; автоморфізм $\theta_0(z, y) = (\theta z, y)$ з $N[Q_0, S_0]$ не сумісний з $\overline{\eta}$, і при цьому $\mod \theta_0 \neq \mathrm{id}$.

Зрозуміло, що коцикли $\overline{\eta}$ і $\overline{\eta} \circ \theta_0$ генерують ізоморфні подвійні потоки, але $\overline{\eta} \circ \theta_0$ не є когомологічним жодному з коциклів вигляду $\overline{\eta} \circ \zeta$, де $\zeta \in N[Q_0, S_0]$ такий, що $\mod \zeta = \mathrm{id}$. Дійсно, такий автоморфізм ζ, з точністю до множення його на внутрішній автоморфізм має вигляд $\zeta(z, y) = (z, V_z y)$ для певного поля перетворень $V_z \in N[S]$ [16, твердження 3.1], внаслідок чого автоморфізм ζ має бути сумісним з коциклом $\overline{\eta}$, як це випливає з (2.4.19).

Тим не менше, можна досить легко показати, що для коциклів α, β як у Теоремі 2.4.2 над повною групою типу II_∞, III_λ $(0 < \lambda < 1)$ або III_1 все ж можливо віднайти сплітаючий автоморфізм $\theta \in N[\Gamma]$ із властивістю $\mathrm{mod}\ \theta = \mathrm{id}$. Фактично це вже було зроблено наприкінці доведення Теореми 2.4.2 у випадку типу II_∞, і дуже подібні викладки дозволяють це зробити для типу III_λ $(0 < \lambda < 1)$. Що ж до типів II_1 і III_1, у цих випадках mod не приймає інших значень, окрім id.

2.5 Коцикли з необмеженими лакунами та інваріантні міри для дій Маккі

Властивість необмежених лакун для коциклів з дійсними значеннями було запроваджено у [116], де було продемонстровано, що це є інваріантом когомології. Там же з'ясовано, що ця властивість є достатньою умовою власної ергодичності дії Маккі (точніше кажучи, якщо такий коцикл не єкограницею, то він має тип III_0). Перший приклад рекурентного дійснозначного коциклу типу III_0, що не має необмежених лакун, побудовано Т. Хамачі (див. [72]). Ми покажемо, що властивість необмежених лакун є також інваріантом слабої еквівалентності коциклів і несумісна з наявністю скінченної інваріантної міри для дії Маккі [115].

Нехай H, G – л.к.с. групи, причому група H діє несингулярними перетвореннями на просторі Лебега (X, μ). Будь-який коцикл $\pi : H \times X \to G$ у випадку $H = \mathbb{Z}$ цілком визначається єдиною функцією $\varphi : X \to G$, для якої $\pi(1, x) = \varphi(x)$.

Нагадаємо, що коцикл з косим добутком типу I (тобто з вимірним розбиттям на траєкторії) зветься *транзитним*; у протилежному випадку коцикл називається *рекурентним*.

Якщо π – коцикл і A – підмножина в X додатної міри, тоді відображення $\alpha|_A(\gamma, x) = \alpha(\gamma, x)$, визначене лише для тих $x \in X$, для яких $x, \gamma x \in A$, називається *обмеженим* коциклом.

У подальшому ми, у якості групової дії, на якій задані коцикли, розглядаємо вільну дію зчисленної групи Γ. Як було зазначено вище, у цьому випадку коцикли припускають природне поширення до коциклів дії повної групи $[\Gamma]$. Коцикли $\alpha, \beta : \Gamma \times X \to G$ називаються *слабо еквівалентними*, якщо існують $\theta \in N[\Gamma]$ та борелівська функція $f : X \to G$ такі, що $\alpha(\theta\gamma\theta^{-1}, \theta x) = f(\gamma x)\beta(\gamma, x)f(x)^{-1}$ для всіх $\gamma \in [\Gamma]$ у м.в. $x \in X$. За зазначених вище умов, для заданого коциклу α можна визначити також *траєкторний* коцикл, який теж позначатиметься α; він заданий на парах еквівалентних точок (тобто тих, що належать тій самій Γ-траєкторії): $\alpha(y, x) = \alpha(\gamma, x)$ за умови $\gamma x = y$. У цих термінах два коцикли α, β є слабо еквівалентними тоді й тільки тоді, коли відповідні траєкторні коцикли задовільняють співвідношенню $\alpha \circ \theta(y, x) = f(y)\beta(y, x)f(x)^{-1}$, де $\alpha \circ \theta(y, x) = \alpha(\theta y, \theta x)$.

Визначення 2.5.1 ([116]). *Будемо казати, що дійсно-значний коцикл* $\pi : \Gamma \times X \to \mathbb{R}$ *має властивість необмежених лакун (або просто має необмежені лакуни), якщо існує підмножина* $B \subset X$, $\mu(B) > 0$, *така, що для будь-якого* $M > 0$ *можна знайти інтервал* $(a, b) \subset \mathbb{R}$ *із* $b - a > M$ *та властивістю* $\pi(\gamma, x) \notin (a, b)$ *за умови* $x, \gamma x \in B$.

У протилежному випадку будемо казати, що коцикл π має *обмежені лакуни* (або має властивість обмежених лакун).

Твердження 2.5.2. *Властивість необмежених лакун є інваріантом слабої еквівалентності коциклів.*

Доведення. По-перше встановимо, що властивість необмежених лакун є інваріантом когомології. Для цього розглянемо два коцикли α, β такі, що $\beta(\gamma, x) = f(\gamma x) + \alpha(\gamma, x) - f(x)$, та припустимо, що коцикл α має необмежені лакуни. Нехай $B \subset X$ – підмножина додатної міри як у визначенні властивості необмежених лакун для коциклу α. Розглянемо $\epsilon > 0$ та борелівську підмножину $C \subset B$ додатної міри такі, що $|f(x) - f(y)| < \epsilon$

для $x, y \in C$. Легко перевірити, що обмеження коциклу β на C має бажану властивість.

Нам залишається показати, що композиція коциклу α з необмеженими лакунами і автоморфізму $\theta \in N[\Gamma]$ також має необмежені лакуни. Це стає цілком очевидним після переходу до розгляду відповідних траєкторних коциклів: лакуни коцикла-композиції $\alpha \circ \theta$, обмеженого на підмножину B і лакуни коцикла α, обмеженого на підмножину θB, співпадають. $\square$

Наслідок 2.5.3. *Властивість обмежених лакун є інваріантом слабої еквівалентності коциклів.* $\square$

Лема 2.5.4. *Нехай (X, μ) – ймовірнісний простір Лебега, T – ергодичний автоморфізм простору X, що зберігає міру μ, і $\varphi : X \to \mathbb{R}$ – обмежена борелівська функція з додатними значеннями. Позначимо через $\pi : \mathbb{Z} \times X \to \mathbb{R}$ відповідний коцикл, $\pi(T, x) = \varphi(x)$. Тоді π має властивість обмежених лакун.*

Доведення. Нехай $A \subset X$ – підмножина додатної міри. Розглянемо спеціальний потік $\{T_t\}_{r \in \mathbb{R}}$, побудований під функцією φ. Тоді A може бути вкладене у простір спеціального потоку $\{(x, u) \in X \times \mathbb{R} |\, 0 \le u < \varphi(x)\}$ як підмножина $A \times \{0\}$. Легко помітити, що обмежений коцикл $\pi|_A$ дає час повернення потоку $\{T_t\}_{r \in \mathbb{R}}$ до підмножини $A \times \{0\}$.

Виберемо додатне ціле число N таке, що $\mu\left(\bigcup\limits_{n=0}^{N} T^n A\right) > 1 - \mu(A)$, а також додатне число b з властивістю $\sup \varphi(x) < b/N$. Припустимо заданим $c \in \mathbb{R}$. Ми стверджуємо, що множина $F = \bigcup_{t \in [c, c+b)} T_t(A \times \{0\})$ перетинає $A \times \{0\}$. Дійсно, внаслідок визначень множини F та числа b, для кожної точки $(x, 0) \in A \times \{0\}$ маємо принаймні N чисел $t_1 < t_2 < \ldots < t_N$ у $[c, c+b)$ таких, що $T_{t_i}(x, 0) \in X \times \{0\}$ та $T_{t_i}(x, 0) = (T^{p+i}x, 0)$ для $i = 1, \ldots, N$ і певного цілого p. Базуючись на виборі числа N, доходимо висновку, що множина $\bigcup\limits_{i=p}^{p+N} T^i A$ має непустий перетин із A, звідки наше твердження.

По цьому залишається відмітити, що лакуни для обмеженого коциклу $\pi|_A$ мають довжину не більшу, ніж b. $\square$

Теорема 2.5.5. *Нехай $\{T_t\}_{r\in\mathbb{R}}$ – довільний потік, що зберігає ймовірнісну міру на просторі Лебега (X,μ). Тоді існує рекурентний коцикл $\pi : \mathbb{Z}\times S \to \mathbb{R}$ з обмеженими лакунами ергодичної дії групи $\mathbb{Z}$ типу II_1 на просторі S, чия дія Маккі є $\{T_t\}_{r\in\mathbb{R}}$.*

Доведення. Внаслідок теореми Рудольфа [109], заданий потік має представлення у вигляді спеціального потоку, побудованого під обмеженою функцією $\varphi : S \to \mathbb{R}$ з додатними значеннями для певного перетворення Q, що зберігає міру на ймовірнісному просторі Лебега (S,ν). За цим, застосування Леми 2.5.4 дає для коциклу $\pi : \mathbb{Z}\times S \to \mathbb{R}$, $\pi(Q,s) = \varphi(Q^{-1}s)$, властивість обмежених лакун. До того ж, добре відомо, що дія Маккі коциклу π є саме заданий потік.

Розглянемо дію групи $\mathbb{Z}^2$ на просторі $S\times S$ разом із коциклом цієї дії $\overline{\pi} : \mathbb{Z}^2\times(S\times S) \to \mathbb{R}$, визначеним так: $\overline{\pi}(m,n;s,t) = \pi(Q^m,s)$. Безпосереднім наслідком цього визначення є те, що косий добуток, який відповідає коциклу $\overline{\pi}$, розпадається у прямий добуток певної дії та (власне ергодичної) дії групи $\mathbb{Z}$ на S ступенями перетворення Q, і тому коцикл $\overline{\pi}$ є рекурентним. Крім того, проста перевірка показує, що дія Маккі коциклу $\overline{\pi}$ спряжена дії Маккі коциклу π, і отже є заданим потоком. $\square$

Теорема 2.5.6. *Нехай $\pi : \mathbb{Z}\times S \to \mathbb{R}$ – рекурентний коцикл з необмеженими лакунами ергодичної дії групи $\mathbb{Z}$ типу II_1 на ймовірнісному просторі Лебега (S,μ). Тоді його дія Маккі є ергодичним потоком, що або має нескінченну інваріантну міру, або має тип III.*

Доведення. Припустимо протилежне, тобто що дія Маккі коциклу π є потоком, який зберігає ймовірнісну міру. Тоді за Теоремою 2.5.5 можна знайти рекурентний коцикл $\alpha : \mathbb{Z}\times S \to \mathbb{R}$ з обмеженими лакунами, чия дія Маккі є заданим потоком. Розглянемо подвійні потоки (див. підрозділ 2.4) для коциклів π і α. Проста перевірка дозволяє вивести з інваріантності міри μ, що обидві ці дії групи $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ є дією на просторі вигляду $X\times\mathbb{R}$ перетвореннями $(r,s)(x,u) = (w(r)x, u-s)$, де $w : \mathbb{R} \to \operatorname{Aut} X$ є (одна й та ж сама) дія Маккі коциклів π та α. Отже, подвійні потоки також спряжені, і ми можемо застосувати Теорему 2.4.2, аби дійти висновку про слабу еквівалентність коциклів π та α. Це становить протиріччя з твердженням Теореми 2.5.2, що завершує доведення. □

2.6 Регуляризація дій груп та групоїдів на відношеннях еквівалентності

Вивчення багатьох проблем вимірної ергодичної теорії пов'язано з розглядом сімейств перетворень, які "поводяться добре" лише майже всюди. У випадку, коли група перетворень зчисленна, проблема зводиться до "відкидання поганої множини" міри нуль на просторі з мірою. Але цей метод взагалі виявляється недієздатним у випадку неперервних груп перетворень. Цю проблему вирішено у випадку неперервної підгрупи нормалізатора повної групи вирішено в [61, теорема 2.1]. Ми подаємо узагальнення останнього результату з заміною повної групи на вимірне відношення еквівалентності, а також у контексті регуляризації дій вимірних групоїдів (див. [63]).

2.6.1 Регуляризація для груп автоморфізмів відношень еквівалентності

Нехай (X, μ) – ймовірнісний простір Лебега, на якому задано несингулярну дію л.к.с. групи G автоморфізмами $\alpha(g)$, $g \in G$, у такий спосіб, що відображення $(g, x) \mapsto \alpha(g)x$ є борелівським. Припустимо також, що кожен автоморфізм $\alpha(g)$ лишає інваріантним вимірне відношення еквівалентності $(R, [\nu])$ на X, тобто $\alpha(g)$ є строгим ізоморфізмом неістотних редукцій (н.р.) еквівалентності R.

З [48, теорема 6.4] випливає, що R генероване $\mod 0$ дією л.к.с. групи H на просторі X автоморфізмами $\beta(h)$, $h \in H$.

Для кожного $g \in G$ розглянемо дію β_g групи H автоморфізмами $\beta_g(h) = \alpha(g)\beta(h)\alpha(g)^{-1}$. Позначимо через $R_\beta(g)$ відповідне відношення еквівалентності на X; зокрема $R_\beta(e) = R$. Зрозуміло, що $\beta_g(h)$ є (м.в.) внутрішнім автоморфізмом $R_\beta(e)$.

Лема 2.6.1. *Існують борелівське поле відношень еквівалентності $R(g)$ на X і борелівське поле конульових (μ-міри 1) множин $B(g) \subset X$ такі, що $R(g)$ строго інваріантне відносно дії β_g і $R_\beta(e)|_{B(g)} = R(g)|_{B(g)}$.*

Доведення. Оскільки кожне перетворення $\beta_g(h)$ є внутрішнім для $R_\beta(e)$, для всіх $(g,h) \in G \times H$ область строгості

$$U_h^g = \{x \in X : \, (\beta_g(h)x, x) \in R_\beta(e)\}$$

автоморфізму $\beta_g(h)$ є борелівською множиною μ-міри 1. Звідси випливає, що для кожного $g \in G$ борелівська множина

$$A_g = \{(h,x) \in H \times X : \, (\beta_g(h)x, x) \in R_\beta(e)\}$$

є $\mu_H \times \mu$-конульовою, де μ_H – міра Хаара групи H. Звідси, внаслідок теореми Фубіні, борелівська множина $M_x^g = \{h \in H : \, (\beta_g(h)x, x) \in R_\beta(e)\}$ є конульовою в H при кожному фіксованому $g \in G$ для м.в. $x \in X$. Крім того, оскільки множина $A = \{(g,h,x) \in G \times H \times X : \, (\beta_g(h)x, x) \in R_\beta(e)\}$ є борелівською, з борелевості відображення

$$(g,x) \mapsto \mu_H \left(\{h \in H : \, (g,h,x) \notin A\}\right)$$

[70, §35, теорема 1] випливає, що $B(g) = \{x \in X : \, \mu_H(H \setminus M_x^g) = 0\}$ складають борелівське поле конульових множин.

Кожній парі $(x,y) \in X \times X$ і $g \in G$ поставимо у відповідність множину

$$L_g(x,y) = \{h \in H : \, (\beta_g(h)x, \beta_g(h)y) \in R_\beta(e)\}.$$

Це є борелівське поле множин, оскільки множина

$$K = \{(g,h,x,y) \in G \times H \times X \times X : \, (\beta_g(h)x, \beta_g(h)y) \in R_\beta(e)\}$$

є, очевидно, борелівською. Легко перевірити наступні співвідношення:

(i) $L_g(x,x) = H$;

(ii) $L_g(x,y) = L_g(y,x)$;

(iii) $L_g(x,z) \supset L_g(x,y) \cap L_g(y,z)$;

(iv) $L_g(\beta_g(h)x, \beta_g(h)y) = L_g(x, y)h^{-1}$.

Для кожного $g \in G$ визначимо множину пар

$$R(g) = \{(x, y) \in X \times X : \mu_H(H \setminus L_g(x, y)) = 0\}.$$

З борелевості K і [70, §35, теорема 1] випливає, що $R(g)$ складають борелівське поле множин. Співвідношення (i) – (iii) означають, що кожне $R(g)$ є відношенням еквівалентності на X. Співвідношення (iv) визначає строгу інваріантність $R(g)$ відносно дії β_g групи H.

Нехай $x, y \in B(g)$. Якщо $x, y \in R_\beta(e)$, то $L_g(x, y) \supset M_x^g \cap M_y^g$, звідки $\mu_H(H \setminus L_g(x, y)) = 0$. Навпаки, якщо $x, y \notin R_\beta(e)$, то $H \setminus L_g(x, y) \supset M_x^g \cap M_y^g$. Це означає, що $R_\beta(e)|_{B(g)} = R(g)|_{B(g)}$. □

Лема 2.6.2. *Існує борелівське поле множин $U(g) \subset X$, $g \in G$, таке, що*

(a) $\mu(U(g)) = 1$ *для всіх* $g \in G$*;*

(b) $U(g)$ *інваріантне відносно* $\alpha(g)^n$, $n \in \mathbb{Z}$*;*

(c) $\alpha(g)R_\beta(e)|_{U(g)} = R_\beta(e)|_{U(g)}$.

Доведення. З Леми 2.6.1 випливає, що $\beta_g(h)$ – внутрішній автоморфізм $R(g)$ для всіх $h \in H$, і тому кожне $V_h^g = \{x \in X : (\beta_g(h)x, x) \in R(g)\}$ є конульовою множиною в X. Отже, для кожного $g \in G$ борелівська множина $V^g = \{(h, x) \in H \times X : (\beta_g(h)x, x) \in R(g)\}$ є конульовою в $H \times X$. Як і вище, внаслідок теореми Фубіні, для кожного $g \in G$ множина

$$E_x^g = \{h \in H : (\beta_g(h)x, x) \in R(g)\}$$

є конульовою в H для x з конульової множини

$$\mathcal{D}(g) = \{x \in X : \mu_H(H \setminus E_x^g) = 0\} \subset X.$$

Оскільки множина $V = \{(g, h, x) \in G \times H \times X : (\beta_g(h)x, x) \in R(g)\}$ є борелівською, $\mathcal{D}(g)$ утворюють борелівське поле множин [70, §35, теорема 1].

Безпосереднім наслідком строгої інваріантності $R(g)$ відносно дії β_g групи H є те, що кожне E_x^g є підгрупою в H, і тому $E_x^g = H$ для $x \in \mathcal{D}(g)$. Це означає, зокрема, що $R_\beta(g)|_{\mathcal{D}(g)} \subset R(g)|_{\mathcal{D}(g)}$.

Нехай $U'(g) = B(g) \cap B(g^{-1}) \cap \mathcal{D}(g) \cap \mathcal{D}(g^{-1})$, і далі розглянемо $U(g) = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \alpha(g)^n U'(g)$. Легко перевірити, що $U(g)$ утворюють борелівське поле множин та задовольняють умовам (a) – (b) Леми.

Аби довести, що (c) також виконано, візьмемо $x, y \in U(g)$ такі, що $(x, y) \in R_\beta(e)$, тобто $\alpha(g)y = \alpha(g)\beta_e(h)x = \beta_g(h)\alpha(g)x$, і тому $(\alpha(g)x, \alpha(g)y) \in R_\beta(g)$, звідки $(\alpha(g)x, \alpha(g)y) \in R(g)$, оскільки $\alpha(g)x, \alpha(g)y \in \mathcal{D}(g)$. Зазначимо, що також має місце $\alpha(g)x, \alpha(g)y \in B(g)$, звідки $(\alpha(g)x, \alpha(g)y) \in R_\beta(e)$ (див. Лема 2.6.1).

Навпаки, нехай $x, y \in U(g)$, але $(x, y) \notin R_\beta(e)$. Ми стверджуємо, що $(\alpha(g)x, \alpha(g)y) \notin R_\beta(e)$. Дійсно, якщо $(\alpha(g)x, \alpha(g)y) \in R_\beta(e)$, то розгляд попереднього абзацу з заміною g на g^{-1} дозволяє одержати $(x, y) \in R_\beta(e)$. Це суперечить нашому припущенню. $\square$

Теорема 2.6.3. *Існує борелівське відношення еквівалентності R_α на X і конульова борелівська множина $B \subset X$ такі, що R_α строго інваріантне відносно дії α групи G, і при цьому $R_\alpha|_B = R_\beta(e)|_B$.*

Доведення істотно співпадає з таким щодо Леми 2.6.1. Ми подамо лише короткий опис головних кроків. Борелівське поле областей строгості $U(g)$ для дії α групи G автоморфізмами, що побудовані вище, використовуються для формування $\mu_G \times \mu$-конульової борелівської множини $A = \{(g, x) \in G \times X : \ x \in U(g)\}$, де μ_G – міра Хаара групи G. Застосування теореми Фубіні дозволяє вибрати конульову борелівську підмножину в X, яка складається з таких точок x, що $M_x = \{g \in G : \ x \in U(g)\}$ є конульовою підмножиною в G. Побудуємо сімейство множин

$$L(x, y) = \{g \in G : \ (\alpha(g)x, \alpha(g)y) \in R\}, \qquad (x, y) \in X \times X,$$

що має наступні властивості:

(i) $L(x, x) = G$ для всіх $x \in X$;

(ii) $L(x, y) = L(y, x)$, $x, y \in X$;

(iii) $L(x, z) \supset L(x, y) \cap L(y, z)$, $x, y, z \in X$;

(iv) $L(\alpha(h)x, \alpha(h)y) = L(x, y)h^{-1}$, $x, y \in X$, $h \in G$.

Нарешті, визначимо відношення еквівалентності

$$R_\alpha = \{(x, y) \in X \times X : \mu_G(G \setminus L(x, y)) = 0\},$$

що задовольняє всім необхідним умовам. □

2.6.2 Узагальнення для дій групоїдів

Нижче сформульовані провідні визначення стосовно дій групоїдів на просторах Лебега (див. також [144, 146, 147]).

Визначення 2.6.4. *Дія групоїда $\mathcal{G}$ на множині X – це пара (p, a), де $p : X \to \mathcal{G}^{(0)}$ – сюр'єктивне відображення і a – відображення множини $\mathcal{G} * X = \{(g, x) \in \mathcal{G} \times X : d(g) = p(x)\}$ в X; при цьому мають бути виконані такі умови:*

(i) $p(a(g, x)) = r(g)$;

(ii) $a(hg, x) = a(h, a(g, x))$.

У випадку, коли $\mathcal{G}$ є борелівським групоїдом, а X – борелівським простором, дія (p, a) називається борелівською, якщо p і a – борелівські відображення.

У подальшому ми будемо опускати символ дії a і писати просто gx замість $a(g, x)$.

Нехай $(\mathcal{G}, [\lambda])$ – вимірний групоїд, і ймовірнісна міра λ на $\mathcal{G}$ має дезінтеграцію $\lambda = \int \lambda_u d\widetilde{\lambda}(u)$ відносно d. Розглянемо також ймовірнісний простір Лебега (X, μ), де міра μ має дезінтеграцію $\mu = \int \mu_u d\widetilde{\mu}(u)$ відносно борелівської сюр'єкції $p : X \to \mathcal{G}^{(0)}$.

Визначення 2.6.5. *Пара (p, a) називається дією вимірного групоїда $(\mathcal{G}, [\lambda])$ на просторі Лебега (X, μ), якщо*

(i) *відображення p і a борелівські;*

(ii) *міри $\widetilde{\mu}$ і $\widetilde{\lambda}$ еквівалентні;*

(iii) *існує неістотна редукція $\mathcal{G}|_{U_0}$ групоїда $\mathcal{G}$ така, що пара*

$$\left(p|_{p^{-1}(U_0)}, a|_{\mathcal{G}|_{U_0 * p^{-1}(U_0)}}\right)$$

є дією групоїда $\mathcal{G}|_{U_0}$ у сенсі Визначення 2.6.4 на множині $p^{-1}(U_0)$;

(iv) *міри $d\mu_{d(g)}$ і $\mu_{r(g)}$ еквівалентні для λ-м.в. $g \in \mathcal{G}$.*

Нехай $(R, [\nu])$ – вимірне відношення еквівалентності на (X, μ). Припустимо, що ν має дезінтеграцію $\nu = \int \nu_x d\widetilde{\nu}(x)$, де міра ν_x зосереджена на класі еквівалентності точки x, і $\widetilde{\nu} \sim \mu$. Ми потребуємо також відношення еквівалентності $\mathcal{E} = \{(x, y) : p(x) = p(y)\}$ на X.

Визначення 2.6.6. *Відношення еквівалентності $(R, [\nu])$ називається інваріантним відносно дії (p, a) групоїда $(\mathcal{G}, [\lambda])$, якщо*

(i) *$R \subset \mathcal{E}$;*

(ii) *для будь якого $g \in \mathcal{G}$ та $x, y \in X$ таких, що $p(x) = p(y) = d(g)$, умови $(x, y) \in R$ і $(gx, gy) \in R$ є еквівалентними.*

Визначення 2.6.7. *Відношення еквівалентності $(R, [\nu])$ називається інваріантним $\mod 0$ відносно дії (p, a) групоїда $(\mathcal{G}, [\lambda])$, якщо*

(i) *існує конульова борелівська множина $F \subset X$ така, що $R|_A \subset \mathcal{E}|_A$;*

(ii) *для будь-якого $g \in \mathcal{G}$ існує $\mu_{d(g)}$-конульова борелівська підмножина $U(g) \subset p^{-1}(d(g))$ така, що для $x, y \in U(g)$ умови $(x, y) \in R$ і $(gx, gy) \in R$ є еквівалентними.*

Звичайно, має місце певна неоднозначність у виборі сімейства областей строгості $U(g)$.

Лема 2.6.8. *Нехай задана дія (p, a) групоїда $(\mathcal{G}, [\lambda])$ на (X, μ), що залишає інваріантним $\mod 0$ відношення еквівалентності $(R, [\nu])$. Тоді існує борелівське поле $U(g)$ областей строгості.*

Доведення. Замінимо за необхідності простір X його конульовою підмножиною A і, відповідно, групоїд $\mathcal{G}$ його неістотною редукцією $\mathcal{G}|_{p(A)}$, аби отримати $R \subset \mathcal{E}$ таким, що виконано строго, а не лише $\operatorname{mod} 0$.

Розглянемо міру $\widetilde{\omega} = \int \mu_{d(g)} d\lambda(g)$ на $\mathcal{G} * X$. Борелівський автоморфізм $\phi : \mathcal{G}*X \to \mathcal{G}*X$, $\phi(g, x) = (g^{-1}, gx)$ зберігає клас міри $\widetilde{\omega}$, як легко бачити з Визначення 2.6.5 (iv) та симетрії класу мір $[\lambda]$. Крім того, проста перевірка показує, що $\phi \circ \phi = \mathrm{id}$.

Задамо на $\mathcal{G} * X$ борелівське відношення еквівалентності

$$\Omega_0 = \{((g, x), (h, y)) : \; g = h, \; (x, y) \in R\}.$$

Тоді міра $\omega = \int \int \nu_x d\mu_{d(g)}(x) d\lambda(g)$ на $(\mathcal{G} * X)^2$ зосереджена на Ω_0. (Тут ν_x – умовна міра в дезінтеграції міри ν, як зазначено вище.)

Відображення ϕ підіймається до борелівського ізоморфізму

$$\overline{\phi} : (\mathcal{G} * X)^2 \to (\mathcal{G} * X)^2, \qquad \overline{\phi}((g, x), (h, y)) = \left(\left(g^{-1}, gx\right), \left(h^{-1}, hx\right)\right).$$

Покладемо $\Omega = \Omega_0 \cap \overline{\phi}(\Omega_0)$, тоді Ω – борелівське відношення еквівалентності, що міститься в Ω_0. Крім того, оскільки $\overline{\phi}(\Omega_0|_{U(g)}) = \Omega_0|_{U(g)}$ для м.в. $g \in \mathcal{G}$ (див. Визначення 2.6.7), для таких g маємо $\int \nu_x(\Omega) d\mu_{d(g)}(x) = 1$, звідки $\omega(\Omega) = 1$.

Отже, Ω – конульовий підгрупоїд у Ω_0, тому внаслідок [144, лема 5.2] він містить неістотну редукцію $\Omega_0|_{V_0}$ групоїда Ω_0 на певну $\widetilde{\omega}$-конульову борелівську підмножину V_0 в $\mathcal{G} * X$. Нехай $V = V_0 \cap \phi(V_0)$, тоді V не лише має ті ж властивості, що й V_0, але також інваріантне відносно ϕ. Покладемо $V(g) = \left\{x \in p^{-1}(d(g)) : \; (g, x) \in V\right\}$.

$V(g)$ утворюють борелівське поле множин, що відіграють роль областей строгості для елементів групоїда $\mathcal{G}$. □

У подальшому ми позначатимемо борелівське поле областей строгості через $U(g)$, як у Визначенні 2.6.7.

Теорема 2.6.9. *Нехай $(\mathcal{G}, [\lambda])$ – вимірний групоїд, що діє на ймовірнісному просторі Лебега (X, μ) та залишає інваріантним* $\operatorname{mod} 0$ *вимірне відношення еквівалентності $(R, [\nu])$ на X. Тоді існує борелівське відношення еквівалентності $\widetilde{R}$ на X, яке*

(a) *співпадає з* R *на конульовій борелівській множині* $B \subset X$*;*

(b) *інваріантне (строго, а не лише* $\mod 0$*) відносно дії (певної неістотної редукції) групоїда* $(\mathcal{G}, [\lambda])$.

Доведення. Розглянемо підмножину $U = \{(g, x) \in \mathcal{G} * X : x \in U(g)\}$ в $\mathcal{G} * X$. Внаслідок Леми 2.6.8 можемо вважати U борелівським, а також що $\widetilde{\omega}(U) = 1$, оскільки $\mu_{d(g)}(U(g)) = 1$ для м.в. $g \in \mathcal{G}$. Зазначимо, що міра $\widetilde{\omega} = \int \mu_{d(g)} d\lambda(g)$ може бути представлена у вигляді

$$d\widetilde{\omega}(u, g, x) = d\mu_u(x) d\lambda_u(g) d\widetilde{\lambda}(u).$$

Вона еквівалентна мірі $d\mu_u(x) d\lambda_u(g) d\widetilde{\mu}(u) = d\lambda_{p(x)}(g) d\mu(x)$, оскільки $\widetilde{\mu} \sim \widetilde{\lambda}$. Отже, якщо ми покладемо $M_x = \left\{g \in d^{-1}(p(x)) \subset \mathcal{G} : x \in U(g)\right\}$, то $\lambda_{p(x)}(M_x) = 1$ для всіх x з певної конульової борелівської множини $B \subset X$.

Кожній парі $(x, y) \in \mathcal{E}$ поставимо у відповідність множину

$$L(x, y) = \left\{g \in d^{-1}(p(x)) \subset \mathcal{G} : (gx, gy) \in R\right\}.$$

$L(x, y)$ утворюють борелівське поле множин, оскільки множина

$$C = \{(g, x, y) \in \mathcal{G} \times X \times X : d(g) = p(x) = p(y), (gx, gy) \in R\}$$

є, очевидно, борелівською. Далі, $L(x, y)$ мають наступні очевидні властивості:

(i) $L(x, y) = d^{-1}(p(x))$ для всіх $x \in X$;

(ii) $L(x, y) = L(y, x)$ для всіх $(x, y) \in \mathcal{E}$;

(iii) $L(x, z) \supset L(x, y) \cap L(y, z)$ для всіх $(x, y), (y, z) \in \mathcal{E}$;

(iv) $L(gx, gy) = L(x, y) g^{-1}$ для всіх $(x, y) \in \mathcal{E}$, $g \in d^{-1}(p(x)) \subset \mathcal{G}$.

Внаслідок дезінтеграції мір функція $f : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \lambda_{p(x)}(L(x, y))$ борелівська, а разом з нею й множина $\widetilde{R} = \left\{(x, y) \in \mathcal{E} : \lambda_{p(x)}(L(x, y)) = 1\right\}$. Внаслідок властивостей (i) – (iii) для $L(x, y)$, $\widetilde{R}$ є відношенням еквівалентності. Зазначимо, що для вимірного групоїда $(\mathcal{G}, [\lambda])$ можна вибрати неістотну редукцію на борелівську підмножину $U_0 \subset \mathcal{G}^{(0)}$ таку, що

$g\lambda_{d(g)} \sim \lambda_{r(g)}$ для всіх $g \in \mathcal{G}|_{U_0}$ [144, лема 2.4]. Замінимо групоїд $\mathcal{G}$ його неістотною редукцією $\mathcal{G}|_{U_0}$, та, відповідно, простір X його конульовим підпростором $p^{-1}(U_0)$. Тоді з (iv) випливає строга інваріантність відношення еквівалентності $\widetilde{R}$ відносно дії вимірного групоїда $(\mathcal{G}, [\lambda])$.

Нехай $x, y \in B$ і $(x, y) \in \mathcal{E}$. Якщо $(x, y) \in R$, то легко перевірити, що $L(x, y) \supset M_x \cap M_y$, звідки $\lambda_{p(x)}(L(x, y)) = 1$. Навпаки, якщо $(x, y) \notin R$, то маємо $d^{-1}(p(x)) \setminus L(x, y) \supset M_x \cap M_y$, звідки $\lambda_{p(x)}(L(x, y)) = 0$. Це означає, що $\widetilde{R}|_B = R|_B$, що й треба було довести. $\square$

2.7 Групи псевдо-гомеоморфізмів: еквівалентність коциклів та зовнішня спряженість

Нашим результатом є теорема єдиності для ергодичних коциклів зчисленних груп псевдо-гомеоморфізмів зі значеннями у польських групах. Як наслідок ми отримуємо зовнішню спряженість зчисленних підгруп нормалізатора повної групи (див. [60]).

2.7.1 Позначення, термінологія та попередні відомості

Нехай X – досконалий польський простір, тобто повний сепарабельний метричний простір без ізольованих точок. У цьому підрозділі розглядатимуться лише такі простори. Зазначимо, що щільна G_δ-підмножина такого простору також є досконалим польським простором. Борелівська бієкція Θ простору X називається *псевдо-гомеоморфізмом* на X, якщо будь-яка підмножина A є множиною першої категорії (зчисленним об'єднанням ніде не щільних підмножин) тоді й тільки тоді, коли такою є $\Theta(A)$.

Нехай $\mathcal{R}$ – відношення еквівалентності на X. Для будь-якого $A \subset X$ *насиченням* A відносно $\mathcal{R}$ називається множина $\mathcal{R}[A] = \left\{y \in X : y \overset{\mathcal{R}}{\sim} x \text{ для певного } x \in A\right\}$. Як і в [180], ми казатимемо, що $\mathcal{R}$ є *зчисленним відношенням еквівалентності загального положення*, якщо воно задовольняє таким умовам: $\mathcal{R}$ є борелівською підмножиною в $X \times X$; кожен клас еквівалентності $\mathcal{R}$ є зчисленним; насичення $\mathcal{R}[E]$ будь-якої множини першої категорії $E \subset X$ є також множиною першої категорії.

Легко перевірити, що для заданої зчисленної групи Γ псевдо-гомеоморфізмів простору X відповідне відношення еквівалентності $\mathcal{R}_\Gamma$ є зчисленним відношенням еквівалентності загального положення. Як показано у [180], нехтуючи підмножинами першої категорії, вивчення таких відношень еквівалентності можна звести до розгляду зчисленних груп гомеоморфізмів. У подальших розглядах у межах цього підрозділу мовчки матиметься на увазі, що все робиться за модулем множин першої категорії.

Нехай Γ – зчисленна група псевдо-гомеоморфізмів на X. Ми казатимемо (у межах цього підрозділу), що ця дія є *ергодичною*, якщо для деякого $x \in X$ траєкторія Γx щільна в X. Еквівалентним чином, будь-яка Γ-інваріантна борелівська підмножина в X є або множиною першої категорії, або доповненням такої підмножини. Ергодичність зчисленного відношення еквівалентності загального положення $\mathcal{R}$ на X визначається як ергодичність зчисленної групи перетворень, що генерує $\mathcal{R}$.

Твердження 2.7.1. *Нехай A_n, $(n \in \mathbb{N})$ – зчисленне сімейство борелівських підмножин у X. Тоді існує щільна G_δ-підмножина $Y \subset X$ така, що $A_n \cap Y$ відкрите в Y для всіх $n \in \mathbb{N}$.*

Доведення. Кожне A_n має властивість Бера, тож ми можемо переписати його у вигляді $A_n = (G_n \setminus P_n) \cup R_n$, де G_n відкрите, а P_n, R_n – множини першої категорії (див. [112]). Нехай $P = (P_1 \cup R_1) \cup (P_2 \cup R_2) \cup \ldots$, і $\widetilde{Y} = X \setminus P$. Тоді для кожного n маємо $A_n \cap \widetilde{Y} = G_n \cap \widetilde{Y}$. Множина $\widetilde{Y}$ також має властивість Бера, тому $\widetilde{Y} = Y \cup S$, де S – множина першої категорії, а Y – G_δ-підмножина в X (див. [112]). Зрозуміло, що Y щільне в X і $A_n \cap Y$ відкрите в Y для всіх $n \in \mathbb{N}$. □

Внаслідок Твердження 2.7.1 завжди можна, без обмеження загальності, припускати, що X є цілком незв'язним.

Нехай Γ – зчисленна група гомеоморфізмів простору X.

Визначення 2.7.2. *Кажуть, що псевдо-гомеоморфізм h простору X належить до повної групи $[\Gamma]$, якщо існує послідовність попарно диз'юн-*

ктних відкрито-замкнутих підмножин $\{K_j\}$ $(j = 1, 2, \dots)$ *в* X *і послідовність* $\{\gamma_j\}$ $(j = 1, 2, \dots)$ *елементів групи* Γ *такі, що* $\bigcup K_j$ *щільне в* X *і* $hx = \gamma_j x$ *для кожного* $x \in K_j$. *Якщо* $\bigcup K_j = X$, *будемо казати, що* h *має точний* Γ*-розклад над* X.

Застосування Твердження 2.7.1 та властивостей псевдо-гомеоморфізмів роблять очевидним наступне

Твердження 2.7.3.

i) $h \in [\Gamma]$ *тоді й тільки тоді, коли існує* Γ*-інваріантна щільна* G_δ*-множина* $Y \subset X$, *для якої* $h|_Y$ *– гомеоморфізм на* Y, *що and* $h|_Y$ *має точний* Γ*-розклад над* Y.

ii) Множина $[\Gamma]$ *є групою псевдо-гомеоморфізмів.* □

Визначення 2.7.4. *Множина (група) таких псевдо-гомеоморфізмів* Θ, *що* $\Theta[\Gamma]\Theta^{-1} = [\Gamma]$, *називається нормалізатором* $N[\Gamma]$ *повної групи* $[\Gamma]$.

Нехай $\mathcal{R}$ – зчисленне відношення еквівалентності загального положення, а G – польська група.

Визначення 2.7.5. *Борелівське відображення* $\phi : \mathcal{R} \to G$ *називається коциклом на* $\mathcal{R}$ *зі значеннями у польській групі* G, *якщо для певної* $\mathcal{R}$*-інваріантної щільної* G_δ*-підмножини* Y *в* X *має місце* $\phi(x, y)\phi(y, z) = \phi(x, z)$ *для всіх* $(x, y), (y, z) \in \mathcal{R}|_{Y \times Y}$.

Множина усіх коциклів на $\mathcal{R}$ позначатиметься $Z^1(\mathcal{R}, G)$. Ми ототожнюємо два коцикли, якщо вони відрізняються лише на множині першої категорії. В контексті цього підрозділу ми розглядаємо лише траєкторні коцикли, тобто коцикли відношень еквівалентності як вище. Якщо зчисленна група Γ діє гомеоморфізмами простору X, будь-який коцикл відношення еквівалентності $\mathcal{R}_\Gamma = \{(x, \gamma x) : x \in X, \gamma \in \Gamma\} \subset X \times X$ може також розглядатися як коцикл дії групи Γ.

Два коцикли $\alpha, \beta \in Z^1(\mathcal{R}, G)$ називаються *когомологічними*, якщо існує $\mathcal{R}$-інваріантна щільна G_δ-підмножина Y в X і борелівська функція $f : Y \to G$ такі, що $\alpha(x, y) = f(x)\beta(x, y)f(y)^{-1}$ для всіх $(x, y), (y, z) \in$

$\mathcal{R}|_{Y\times Y}$. Множина класів когомологій коциклів позначається $H^1(\mathcal{R},G)$. Будемо казати, що коцикл $\sigma \in Z^1(\mathcal{R},G)$ є *когранищею*, якщо він когомологічний одиничному коциклу.

Зауваження. Якщо $\phi \in Z^1(\mathcal{R}_\Gamma, G)$, існує Γ-інваріантна щільна G_δ-множина $Y \subset X$ така, що для кожного $\gamma \in \Gamma$ і кожної відкритої множини $F \subset G$ множина $\{y \in Y : \phi(y,\gamma y) \in F\}$ є відкрито-замкнутою в Y.

Нехай $\alpha \in Z^1(\mathcal{R},G)$. Розглянемо відображення $\gamma : G\times X \to G\times X$, $\gamma(g,x) = (\alpha(\gamma x, x)g, \gamma x)$. Легко перевірити, що воно є псевдогомеоморфізмом простору $G\times X$, отже одержуємо дію групи Γ псевдогомеоморфізмами простору $G\times X$. Ця дія називається косим добутком і позначається $\Gamma(\alpha)$. Внаслідок зазначеного вище, його можна розглядати як дію гомеоморфізмами на $G\times X$.

Визначення 2.7.6. *Коцикл $\alpha \in Z^1(\mathcal{R},G)$ називатимемо ергодичним, якщо косий добуток $\Gamma(\alpha)$ на просторі $G\times X$ є ергодичним.*

Доведення наступної леми є очевидним.

Лема 2.7.7. *Нехай $\alpha \in Z^1(\mathcal{R}_\Gamma, G)$ – ергодичний коцикл.*

(i) Існує Γ-інваріантна щільна G_δ-множина $Y \subset X$ така, що для кожного $y \in Y$ і кожного відкритого $U \subset G$ існує $g_0 \in U$, для якого траєкторія $\Gamma(\alpha)(g_0,y)$ є щільною в $G\times X$.

(ii) Нехай $\Delta \subset X$ – Γ-траєкторія точки $t_0 \in Y$, де Y – те ж, що й вище. Для кожного відкритого $A \subset X$ і кожного відкритого $U \subset G$ існує $t_k \in \Delta$ таке, що $t_k \in A$ і $\alpha(t_0,t_k) \in U$. □

Наведена нижче Теорема відповідає на питання про існування ергодичних коциклів зі значеннями у заданій зчисленній групі G. Оскільки будь-які дві ергодичні дії зчисленних груп траєкторно еквівалентні [180], досить побудувати коцикл лише однієї дії зчисленної групи.

Теорема 2.7.8. *Для будь-якої зчисленної групи G існує ергодичний коцикл $\phi \in Z^1(\mathcal{R},G)$, де $\mathcal{R}$ – ергодичне зчисленне відношення еквівалентності загального положення.*

Доведення. Група G діє на просторі $\{0,1\}^G$ природним чином. Нехай $X = Y^{\mathbb{Z}}$. Тоді можна розглянути дві дії на X:

(1) Дію групи $\mathbb{Z}$ ступенями гомеоморфізму T: $(Tx)_i = x_{i+1}$; ця дія ергодична.

(2) Дію групи G: $(gx)_i = gx_i$.

Зрозуміло, що ці дії комутують. Нехай Γ – група гомеоморфізмів, генерована діями G та $\mathbb{Z}$ на X. Визначимо коцикл $\phi : \mathcal{R}_\Gamma \to G$, поклавши $\phi(gT^n x, x) = g$ для $x \in X,\ g \in G$. Легко перевірити, що коцикл ϕ дійсно ергодичний. □

Наслідок 2.7.9. *Для будь-якої польської групи G існує ергодичний коцикл $\phi \in Z^1(\mathcal{R}, G)$, де $\mathcal{R}$ – ергодичне зчисленне відношення еквівалентності загального положення.*

Доведення. Нехай H – щільна зчисленна підгрупа групи G. Легко перевірити, що кожен ергодичний коцикл $\phi \in Z^1(\mathcal{R}, H)$, де H розглядається як дискретна підгрупа, є також ергодичним як коцикл зі значеннями в G. □

Нехай Γ – зчисленна група гомеоморфізмів простору X.

Визначення 2.7.10. *Коцикли $\phi, \psi \in Z^1(\mathcal{R}_\Gamma, G)$ називаються слабо еквівалентними, якщо існує $\Theta \in N[\Gamma]$ такий, що коцикли ϕ і $\psi \circ (\Theta \times \Theta)$ когомологічні.*

2.7.2 Теорема про слабу еквівалентність коциклів

Перед тим, як сформулювати основну теорему цього підрозділу, ми наводимо низку допоміжних результатів.

Лема 2.7.11. *Нехай Γ – ергодична зчисленна група гомеоморфізмів простору X, G – польська група, $\phi \in Z^1(\mathcal{R}_\Gamma, G)$ – ергодичний коцикл. Припустимо заданими $g \in G$, окіл одиниці V у G і щільна траєкторія $\Delta = \Gamma x_0$ в X. Нехай A, B – непусті диз'юнктні відкрито-замкнуті множини в X. Тоді існують Γ-інваріантна щільна G_δ-множина $Y \subset X$ і гомеоморфізм h на Y з такими властивостями: $Y \supset \Delta$, $h = h^{-1}$, h переставляє $A \cap Y$*

та $B \cap Y$, h є тотожнім відображенням на $Y \setminus (A \cup B)$ і має строгий Γ-розклад над Y, при цьому $\phi(x, hx) \in Vg$ для всіх $x \in A \cap Y$.

Доведення. Занумеруємо зчисленні множини $A \cap \Delta$ і $B \cap \Delta$. Без обмеження загальності можемо припустити, що існує $g_0 \in G$ таке, що траєкторія $\Gamma(\phi)(x_0, g_0)$ щільна в $G \times X$.

Нехай x_1 – перший за номером елемент у $A \cap \Delta$. Оскільки ϕ ергодичний, існує $\gamma_1 \in \Gamma$ такий, що $\gamma_1 x_1 \in B$ і $\phi(x_1, \gamma_1 x_1) \in V g_1$. Нехай A_1 – відкрито-замкнутий окіл елемента x_1 такий, що A_1 є власною підмножиною в A, $\gamma_1 A_1$ – власна підмножина в B і $\phi(x, \gamma_1 x) \in V g_1$ для всіх $x \in A_1$. Покладемо $B_1 = \gamma_1 A_1$.

Нехай x_2 – перший за номером елемент у $B \cap \Delta$, який не міститься у B_1. Використовуючи той самий аргумент, що й вище, знаходимо $\gamma_2 \in B_2$ та відкрито-замкнутий окіл B_2 точки x_2 такі, що B_2 – власна підмножина в $B \setminus B_1$, $A_2 = \gamma_2 B_2$ – власна підмножина в $A \setminus A_1$, і $\phi(x, \gamma_2^{-1} x) \in V g_1$ для всіх $x \in A_2$.

Продовжуючи цю побудову, одержуємо дві послідовності $\{A_k\}$ і $\{B_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, кожна з яких складається з попарно диз'юнктних множин, а також послідовність $\{\gamma_k\} \subset \Gamma$. Маємо $\Delta \cap A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ і $\Delta \cap B \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$. Нехай $S = R_\Gamma\left((A \cup B) \setminus \left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \cup B_k\right)\right)$, і покладемо $Y = X \setminus S$. Зрозуміло, що Y – Γ-інваріантна щільна G_δ множина. Задаємо h так:

$$hx = \begin{cases} \gamma_{2k-1} x, & x \in A_{2k-1} \cap Y, \\ \gamma_{2k-1}^{-1} x, & x \in B_{2k-1} \cap Y, \\ \gamma_{2k}^{-1} x, & x \in A_{2k} \cap Y, \\ \gamma_{2k} x, & x \in B_{2k} \cap Y, \\ x, & x \in Y \setminus (A \cap B). \end{cases} \qquad \square$$

Лема 2.7.12. *Нехай Γ – зчисленна група гомеоморфізмів, що діє ергодично на X, $\phi \in Z^1(\mathcal{R}_\Gamma, G)$, де G – польська група. Тоді ϕ когомологічний коциклу $\psi \in Z^1(\mathcal{R}_\Gamma, G)$ зі значеннями у заданій зчисленній щільній підгрупі H групи G.*

Доведення. Виберемо фундаментальну систему околів одиниці $\{W_i\}$ в групі G із такими властивостями: $W_i = W_i^{-1}$ і $W_{i+1} \cdot W_{i+1} \cdot W_{i+1} \subset W_i$, $i \in \mathbb{N}$.

Позначимо через $\underline{\alpha}$ елемент $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ прямого добутку $\{0,1\}^n$.

Ми використовуємо техніку, розвинену в [180] для побудови дії групи $\bigoplus\limits_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}_2$, що генерує те ж саме відношення еквівалентності, що й Г. Згідно [180, лема 1.7, теорема 1.8], можна припускати без обмеження загальності, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує сімейство $\{K^n(\underline{\alpha}) : \underline{\alpha} \in \{0,1\}^n\}$ попарно диз'юнктних відкрито-замкнутих множин і сімейство $\{h_n\}$ гомеоморфізмів простору X що попарно комутують, із такими властивостями:

(i) $h_n = h_n^{-1}$; кожен h_n має строгий Г-розклад над X, і кожен $\gamma \in \Gamma$ має строгий Ω-розклад над X, де Ω – група, генерована $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(ii) $h_1^{\alpha_1} h_2^{\alpha_2} \ldots h_n^{\alpha_n} K^n(\underline{0}) = K^n(\underline{\alpha})$ для кожного $\underline{\alpha} \in \{0,1\}^n$, і $K^n(\underline{0}) = K^{n+1}(0,0,\ldots,0,1) \cup K^{n+1}(0,0,\ldots,0)$.

(iii) $\bigcup\limits_{\underline{\alpha} \in \{0,1\}^n} K^n(\underline{\alpha}) = X$.

(vi) $\{t_0, t_1, \ldots\}$ – така Г-траєкторія, що $t_0 \in K^n(\underline{0})$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ визначимо відображення $\delta_n : K^{n-1}(\underline{0}) \to K^n(\underline{0})$ $(K^0(\underline{0}) = X)$:

$$\delta_n x = \begin{cases} h_n^{-1} x, & x \in K^n(0,\ldots,0,1), \\ x, & x \in K^n(0,\ldots,0). \end{cases}$$

Покладемо також $\lambda_n = \delta_n \cdot \ldots \cdot \delta_1$. Нехай Ω_k – скінченна група $\left\{h_1^{\alpha_1} \ldots h_k^{\alpha_k} : \underline{\alpha} \in \{0,1\}^k\right\}$.

Досить визначити коцикл ψ на точках вигляду $(\delta_n x, x)$, $x \in K^{n-1}(\underline{0})$, $n \in \mathbb{N}$. Продовжимо побудову індукцією за n та опишемо n-й крок. Внаслідок Твердження 2.7.1 можемо припускати, що відображення $\phi(t, \omega t) : X \to G$ є неперервним за t для кожного фіксованого $\omega \in \Omega$.

Нехай $g(\underline{\alpha}) = \phi(t_0, h_1^{\alpha_1} \ldots h_n^{\alpha_n} t_0)$. Внаслідок неперервності функції $\phi(t, h_1^{\alpha_1} \ldots h_n^{\alpha_n} t)$ за t можемо знайти відкритий окіл O_n точки t_0 такий, що $\phi(t, h_1^{\alpha_1} \ldots h_n^{\alpha_n} t) \in g(\underline{\alpha}) W_{n+1}$ для всіх $\underline{\alpha} \in \{0,1\}^n$, $t \in O_n$. Покладемо $A_n = \bigcup\limits_{\omega\in\Omega_n} \omega O_n$. Нехай V_{n+1} – окіл одиниці в G, для якого $g(\underline{\alpha})^{-1}V_{n+1}g(\underline{\alpha}) \subset W_n$ для всіх $\underline{\alpha} \in \{0,1\}^n$. Апроксимуємо відображення $\phi(\delta_n x, x)$, $x \in K^{n-1}(\underline{0})$, відображенням $\psi(\delta_n x, x)$ зі значеннями в H у такий спосіб, що $\phi(\delta_n x, x)^{-1}\psi(\delta_n x, x) \in V_n$.

Нехай $p_n(x) = \phi(\lambda_n x, x)^{-1}\psi(\lambda_n x, x)$. Зазначимо, що $\lambda_n \omega x = \lambda_n x$ для $\omega \in \Omega_k$, $n \geq k$. Тому

$$\begin{aligned} p_n(\omega x)^{-1}\phi(\omega x, x)p_n(x) &= \\ &= \psi(\lambda\omega x, \omega x)^{-1}\phi(\lambda_n\omega x, \omega x)\phi(\omega x, x)\phi(\lambda_n x, x)^{-1}\psi(\lambda_n x, x) = \\ &= \psi(\lambda_n\omega x, x)^{-1}\psi(\lambda_n x, x) = \psi(\omega x, x) \end{aligned} \quad (2.7.1)$$

Нехай $x \in \bigcap\limits_{i=n+1}^{n+k} A_i$. Тоді

$$\begin{aligned} p_{n+k}(x) &= \phi(\lambda_{n+k}x, x)^{-1}\psi(\lambda_{n+k}x, x) = \\ &= \phi(\lambda_{n+k-1}x, x)^{-1}\phi(\delta_{n+k}\lambda_{n+k-1}x, \lambda_{n+k-1}x)^{-1}\cdot \\ &\cdot \psi(\delta_{n+k}\lambda_{n+k-1}x, \lambda_{n+k-1}x)\psi(\lambda_{n+k-1}x, x) \subset \\ &\subset \phi(\lambda_{n+k-1}x, x)^{-1}V_{n+k}\psi(\lambda_{n+k-1}x, x) = \\ &= \phi(\lambda_{n+k-1}x, x)^{-1}V_{n+k}\phi(\lambda_{n+k-1}x, x)\phi(\lambda_{n+k-1}x, x)^{-1}\psi(\lambda_{n+k-1}x, x) \subset \\ &\subset W_{n+k}W_{n+k}W_{n+k}p_{n+k-1}(x) \subset W_{n+k-1}p_{n+k-1}(x) \subset \ldots \subset W_n p_n(x). \end{aligned}$$

Зазначимо, що $\bigcap\limits_{i=n+1}^{n+k} A_i$ – відкрита множина, яка містить $\{\omega t_0 : \omega \in \Omega_{n+1}\}$, отже доходимо висновку, що послідовність $\{p_n\}$ збігається на щільній G_δ-множині $Y \subset X$ до певного борелівського відображення p. З огляду на (2.7.1), одержуємо $p(x)^{-1}\phi(x, y)p(y) = \psi(x, y)$ для всіх $(x, y) \in R_\Gamma|_{Y\times Y}$. $\square$

Теорема 2.7.13. *Нехай Γ – зчисленна ергодична група гомеоморфізмів простору X, і G – польська група. Припустимо, що коцикли $\phi, \psi \in Z^1(\mathcal{R}_\Gamma, G)$ ергодичні. Тоді існують Γ-інваріантна щільна G_δ-множина $Y \subset X$, $\Theta \in N[\Gamma]$ і борелівська функція $f : Y \to G$ такі, що $\Theta|_Y$ – гомеоморфізм на Y, і при цьому $\phi(\gamma y, y) = f(\gamma y)^{-1}\psi(\Theta\gamma y, \Theta y)f(y)$ для всіх $y \in Y$, $\gamma \in \Gamma$.*

Доведення. Внаслідок Леми 2.7.12 можна вважати, що коцикли ϕ і ψ приймають значення у щільній зчисленній підгрупі $H \subset G$. Крім того, за Твердженням 2.7.1 можна припускати, що для кожного $h \in H$ і кожного $\gamma \in \Gamma$ множини $\{x \in X : \phi(\gamma x, x) = h\}$, $\{x \in X : \psi(\gamma x, x) = h\}$ і $\{x \in X : \gamma x = x\}$ відкрито-замкнуті.

Лема 2.7.14. *За умов Теореми 2.7.13, нехай $\Delta = \{t_0, t_1, \ldots\}$ і $\widetilde{\Delta} = \{\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1, \ldots\}$ – щільні траєкторії дії групи Γ. Припустимо також, що $g_0, \widetilde{g}_0 \in G$ обрано у такий спосіб, що кожна з траєкторій $\Gamma(\phi)(t_0, g_0)$, $\Gamma(\psi)(\widetilde{t}_0, \widetilde{g}_0)$ щільна в $X \times G$.*

Нехай $\{S_n\}$ та $\{\widetilde{S}_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ послідовності відкрито-замкнутих околів точок t_0 і $\widetilde{t}_0$ відповідно, що монотонно спадають, і таких, що $S_n \subset B(t_0, 1/n)$, $\widetilde{S}_n \subset B(\widetilde{t}_0, 1/n)$, де $B(x, r)$ позначає кулю радіусу r із центром в точці x, і при цьому $t_n \notin S_{2n-1}$, $\widetilde{t}_n \notin \widetilde{S}_{2n}$.

Тоді має місце таке:

1. *Існують дві Γ-інваріантні G_δ-множини T і $\widetilde{T}$ такі, що $\Delta \subset T$, $\widetilde{\Delta} \subset \widetilde{T}$, а також дві послідовності $\{h_n\}$, $\{\widetilde{h}_n\}$, де кожний h_n і кожний $\widetilde{h}_n$ є гомеоморфізмом на T і $\widetilde{T}$, відповідно, $h_n = h_n^{-1}$, $\widetilde{h}_n = \widetilde{h}_n^{-1}$, і при цьому кожен h_n, $\widetilde{h}_n$ має строгий Γ-розклад над T і $\widetilde{T}$, відповідно.*

2. *Для кожного n існують два сімейства $\{K^n(\underline{\alpha})\}$ і $\{\widetilde{K}^n(\underline{\alpha})\}$, $\underline{\alpha} \in \{0,1\}^n$, кожен з яких складається з попарно диз'юнктних відкрито-замкнутих підмножин у T і в $\widetilde{T}$, відповідно, і при цьому об'єднання підмножин є T та $\widetilde{T}$, відповідно.*

3. $K^n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = K^{n+1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 0) \cup K^{n+1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 1)$,
   $\widetilde{K}^n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \widetilde{K}^{n+1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 0) \cup \widetilde{K}^{n+1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 1)$.

4. $K^n(\underline{0}) \subset S_n \cap T$, $t_0 \in K^n(\underline{0})$, *для всіх* n,
   $\widetilde{K}^n(\underline{0}) \subset \widetilde{S}_n \cap \widetilde{T}$, $\widetilde{t}_0 \in \widetilde{K}^n(\underline{0})$, *для всіх* n.

5. $h_1^{\alpha_1} \ldots h_n^{\alpha_n} K^n(\underline{0}) = K^n(\underline{\alpha})$, $\qquad \widetilde{h}_1^{\alpha_1} \ldots \widetilde{h}_n^{\alpha_n} \widetilde{K}^n(\underline{0}) = \widetilde{K}^n(\underline{\alpha})$,
   для всіх $\alpha \in \{0,1\}^n$.

6. $\{t_0,\dots,t_n\} \subset \left\{h_1^{\alpha_1}\dots h_{2n}^{\alpha_{2n}}(t_0):\ \underline{\alpha}\in\{0,1\}^{2n}\right\}$
$\{\widetilde{t}_0,\dots,\widetilde{t}_n\} \subset \left\{\widetilde{h}_1^{\alpha_1}\dots \widetilde{h}_{2n}^{\alpha_{2n}}(\widetilde{t}_0):\ \underline{\alpha}\in\{0,1\}^{2n}\right\}$

7. Існують скінченна множина $Q_n \subset H$ та відкрито-замкнута множина $A_n \supset \{h_1^{\alpha_1}\dots h_n^{\alpha_n}(t_0):\ \underline{\alpha}\in\{0,1\}^n\}$, $A_n \subset T$, такі, що $\phi(x, h_1^{\alpha_1}\dots h_n^{\alpha_n}x)\in Q_n$ для всіх $\underline{\alpha}\in\{0,1\}^n$, $x\in A_n$.

8. $\phi(\delta_n x, x)^{-1}\psi(\widetilde{\delta}_n y, y)\in V_n$ для всіх $x\in K^{n-1}(\underline{0})$ та $y\in \widetilde{K}^{n-1}(\underline{0})$, де δ_n є те ж саме відображення, що й у доведенні Леми 2.7.12, V_n – окіл одиниці в G із властивістю $gV_ng^{-1}\subset W_n$ для всіх $g\in Q_1^{-1}\dots Q_{n-1}^{-1}$, $(n\geq 2)$, $V_1 = W_1$.

Доведення. Застосуємо індукцію. На кожному кроці передбачається відкидати множину першої категорії. Аби запобігти технічних ускладнень, ми припускатимемо, що все відбувається на просторі T, який є Γ-інваріантною щільною G_δ-підмножиною в X, і що усі "погані" множини вже відкинуто. Те ж саме припущення робиться стосовно $\widetilde{T}$.

Нехай $D = S_1$, $E = X\setminus S_1$. Тоді $t_0\in D$, $t_1\in E$. Нехай $t_1=\gamma_1 t_0$, $\phi(t_0,t_1)=g_1$, а також O_1 – відкрито-замкнутий окіл точки t_0 із такими властивостями: O_1 – власна підмножина в D, $\gamma_1 O_1$ – власна підмножина в E, $\phi(x,\gamma_1 x) = g_1$ для всіх $x\in O_1$. З Леми 2.7.11 випливає, що існує гомеоморфізм h_1 на T такий, що h_1 має строгий Γ-розклад над T, $h_1 = h_1^{-1}$, h_1 переставляє D та E, і при цьому

$h_1 x = \gamma_1 x,\quad x\in O_1,$

$h_1 x = \gamma_1^{-1} x,\quad x\in \gamma_1 O_1,$

$\phi(x, h_1 x)\in U_1 g_1$ для всіх $x\in D$, де U_1 – такий окіл одиниці в G, що $g_1^{-1}U_1^{-1}U_1 g_1\subset V_1$.

Нехай $A_1 = O_1\cup\gamma_1 O_1$, $Q_1=\{g_1, g_1^{-1}, e\}$, $K^1(0) = D$, $K^1(1) = E$.

Покладемо $\widetilde{D} = \widetilde{S}_1$, $\widetilde{E} = X\setminus \widetilde{S}_1$. Подібно тому, як це зроблено вище, доходимо висновку про існування гомеоморфізму $\widetilde{h}_1$ на $\widetilde{T}$ такого, що $\widetilde{h}_1$ має строгий Γ-розклад над $\widetilde{T}$, і при цьому $\widetilde{h}_1 = \widetilde{h}_1^{-1}$, $\widetilde{h}_1$ переставляє $\widetilde{D}$ та $\widetilde{E}$, і $\psi(y,\widetilde{h}_1 y)\in U_1 g_1$ для всіх $y\in\widetilde{D}$. Покладемо $\widetilde{K}^1(0)=\widetilde{D}$, $\widetilde{K}^1(1)=\widetilde{E}$. Зрозуміло, що $\phi(\delta_1 x, x)^{-1}\psi(\widetilde{\delta}_1 y, y)\in g_1^{-1}U_1^{-1}U_1 g_1\subset V_1$ для всіх $x\in T$,

$y \in \widetilde{T}$.

Припустимо, що вже побудовано $\{h_k\}_{k=1}^n$, $\left\{\widetilde{h}_k\right\}_{k=1}^n$, а також сімейства $\left\{K^k(\underline{\alpha})\right\}$, $\left\{\widetilde{K}^k(\underline{\alpha})\right\}$, $\underline{\alpha} \in \{0,1\}^k$, $k = \overline{1,n}$. Подамо опис $(n+1)$-го кроку. Припустимо, що n непарне. Нехай $\widetilde{t}_m$ – перший за нумерацією елемент множини $\widetilde{\Delta}$ такий, що $\widetilde{t}_m \notin \left\{\widetilde{h}_1^{\alpha_1} \ldots \widetilde{h}_n^{\alpha_n} t_0 : \alpha \in \{0,1\}^n\right\}$. Маємо $\widetilde{t}_m \in \widetilde{K}^n(\underline{\beta})$ для певного $\underline{\beta} \in \{0,1\}^n$. Нехай $\widetilde{c} = \widetilde{h}_1^{\beta_1} \ldots \widetilde{h}_n^{\beta_n} \widetilde{t}_m \in \widetilde{K}^n(\underline{0})$, $\widetilde{g}_m = \widetilde{\psi}\left(\widetilde{t}_0, \widetilde{c}\right)$. Застосуємо той самий аргумент, що й у [180, лема 1.7], а також на першому кроці, для побудови $\widetilde{h}_{n+1}$, $\left\{\widetilde{K}^{n+1}(\underline{\alpha}) : \underline{\alpha} \in \{0,1\}^{n+1}\right\}$, у такий спосіб, що $\psi(x, \widetilde{h}_{n+1}x) \in U_{n+1}\widetilde{g}_m$ для всіх $x \in \widetilde{K}^{n+1}(\underline{0})$, де U_{n+1} – окіл одиниці в G із властивістю $\widetilde{g}_m^{-1} U_{n+1}^{-1} U_{n+1} \widetilde{g}_m \in V_{n+1}$. Внаслідок Леми 2.7.7, існує $t_j \in (K^n(\underline{0}) \setminus S_{n+1}) \cap \Delta$ таке, що $\phi(t_0, t_j) = g_j \in U_{n+1}\widetilde{g}_m$. Нехай $t_j = \gamma t_0$. Існує відкрито-замкнутий окіл O_{n+1} точки t_0 такий, що $\phi(t, \gamma_j t) = g_j$ для всіх $t \in O_{n+1}$, і множина $Q_n = \{\phi\left(t, h_1^{\alpha_1} \ldots h_n^{\alpha_n} \gamma_j t\right) : \underline{\alpha} \in \{0,1\}^n, t \in O_{n+1}\}$ є скінченною.

У такий же спосіб, як це було зроблено на першому кроці, ми встановлюємо існування гомеоморфізму h_{n+1}, що має строгий Γ-розклад над T і такого, що переставляє $K^{n+1}(\underline{0})$ та $K^{n+1}(0, \ldots, 0, 1)$, і при цьому $h_{n+1} = h_{n+1}^{-1}$,

$$h_{n+1}x = \gamma_j x, \quad x \in O_{n+1},$$
$$h_{n+1}x = \gamma_j^{-1} x, \quad x \in \gamma_j O_{n+1},$$
$$\phi(x, h_{n+1}x) \in U_{n+1}\widetilde{g}_m \text{ для всіх } x \in K^n(\underline{0}).$$

Покладемо $A_{n+1} = \bigcup\limits_{\underline{\alpha} \in \{0,1\}^{n+1}} h_1^{\alpha_1} \ldots h_{n+1}^{\alpha_{n+1}} O_{n+1}$.

Можна безпосередньо перевірити, що усі побудовані нами об'єкти задовольняють умовам Леми.

Якщо n парне, побудова здійснюється у подібний спосіб, але має починатися з вибору $t_m \in \Delta$, де m – перший номер у нумерації Δ такий, що $t_m \notin \{h_1^{\alpha_1} \ldots h_n^{\alpha_n} t_0 : \alpha \in \{0,1\}^n\}$. $\square$

Доведення Теореми 2.7.13. Розглянемо $\bigoplus\limits_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}_2$ як підпростір канторівського простору $\prod\limits_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}_2$ з індукованою топологією. Нехай Θ_1 – гомеоморфізм $\Delta \to \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}_2$:

$$\Theta_1 \left(h_1^{\alpha_1} \dots h_m^{\alpha_m} t_0\right) = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, 0, 0, \dots), \qquad \underline{\alpha} \in \{0,1\}^m$$

(див. теорема 1.8 в [180]); далі, нехай Θ_2 – гомеоморфізм $\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}_2 \to \widetilde{\Delta}$:

$$\Theta_2(\alpha_1, \dots, \alpha_m, 0, 0, \dots) = \widetilde{h}_1^{\alpha_1} \dots \widetilde{h}_m^{\alpha_m} \widetilde{t}_0, \qquad \underline{\alpha} \in \{0,1\}^m.$$

Отже, маємо гомеоморфізм $\Theta = \Theta_2\Theta_1$ з Δ на $\widetilde{\Delta}$.

Внаслідок теореми Лаврент'єва [112] існують (щільні) G_δ-підмножини $Y_1 \supset \Delta$ і $Y_2 \supset \widetilde{\Delta}$ в T і $\widetilde{T}$ відповідно, та розширення Θ до гомеоморфізму з Y_1 на Y_2 (яке ми також позначаємо через Θ). Тепер зазначимо, що у Лемі 2.7.14 можна покласти $\Delta = \widetilde{\Delta}$, $t_0 = \widetilde{t}_0$. Отже, з $Y_3 = Y_1 \cap Y_2$ одержуємо гомеоморфізм $\Theta : Y_3 \to Y_3$. Очевидно, можна вважати Y_3 Γ-інваріантним, а також h_k, $\widetilde{h}_k$-інваріантним для всіх $k \in \mathbb{N}$. Гомеоморфізм $\Theta h_1^{\alpha_1} \dots h_m^{\alpha_m} \Theta^{-1}$ співпадає з $\widetilde{h}_1^{\alpha_1} \dots \widetilde{h}_m^{\alpha_m}$ на щільній (зчисленній) підмножині в Y_3, звідки маємо $\Theta h_1^{\alpha_1} \dots h_m^{\alpha_m} \Theta^{-1} y = \widetilde{h}_1^{\alpha_1} \dots \widetilde{h}_m^{\alpha_m} y$ для всіх $y \in Y_3$. У такий же спосіб, як це було зроблено в [180, теорема 1.8], встановлюємо, що дія $\{\Theta\gamma\Theta^{-1}\}_{\gamma\in\Gamma}$ генерує те ж саме відношення еквівалентності, що й Γ, звідки $\Theta r \Theta^{-1} \in [\Gamma]$ для кожного $r \in [\Gamma]$, тобто $\Theta \in N[\Gamma]$. Розглянемо коцикл ϕ_1 на $\mathcal{R}|_{Y_3}$, $\phi_1(x,y) = \psi(\Theta x, \Theta y)$, $(x,y) \in \mathcal{R}|_{Y_3}$. Зазначимо, що Θ відображає $K^n(\underline{\alpha})$ на $\widetilde{K}^n(\underline{\alpha})$, $\alpha \in \{0,1\}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Звідси одержуємо, внаслідок Леми 2.7.14 (умова 8), що $\phi(\delta_n x, x)^{-1}\phi_1(\delta_n x, x) \in V_n$ для всіх $x \in K^{n-1}(\underline{0})$. З нашої побудови випливає, що $\phi(\delta_n x, x) \in Q_n$ для всіх $x \in A_n \cap Y_3$. Застосувавши той же самий аргумент, що й у доведенні Леми 2.7.12, доходимо висновку, що коцикли ϕ і ϕ_1 когомологічні. $\square$

Зауваження. З Теореми 2.7.13, зокрема, випливає, що будь-який ергодичний коцикл з точністю до слабої еквівалентності зводиться до ергодичного коциклу зі значеннями у дискретній зчисленній групі. Дійсно, кожен ергодичний $\phi \in Z^1(R,G)$ когомологічний ергодичному коциклу зі значеннями у щільній зчисленній підгрупі H. Нехай ψ – ергодичний коцкл з $Z^1(R,H)$, де H розглядається як дискретна група, який також є ергодичним як коцикл зі значеннями в групі G. Внаслідок Теореми 2.7.13, ϕ і ψ

слабо еквівалентні, що й треба було встановити.

Зауваження. У випадку, коли група G є дискретною і зчисленною, співвідношення між коциклами ϕ та ψ у формулюванні Теореми 2.7.13 може бути записане у більш простій формі: $\phi(\gamma y, y) = \psi(\Theta_1\gamma y, \Theta_1 y)$, де $\Theta_1 \in N[\Gamma]$. Аби побачити це, подаємо таке спостереження. Якщо $\sigma \in Z^1(\mathcal{R}_\Gamma, G)$ – ергодичний коцикл, і G як зазначено вище, то будь-яка борелівська функція $f : Y \to G$ має представлення у вигляді $f(y) = \sigma(\tau y, y)$ для певного $\tau \in [\Gamma]$. Цей факт може бути застосований безпосередньо до функції f у формулюванні Теореми, отже загальне співвідношення перетворюється на таке: $\phi(\gamma y, y) = \psi(\Theta_1\gamma y, \Theta_1 y)$, де $\Theta_1 = \Theta\tau^{-1}$.

2.7.3 Зовнішня спряженість підгруп нормалізатора повної групи

Нехай Γ – зчисленна група гомеоморфізмів простору X. Наступна Лема стверджує, що у випадку, коли дія групи Γ ергодична, будь-який елемент з $N[\Gamma]$ є або чисто зовнішнім, або чисто внутрішнім.

Лема 2.7.15. *Якщо дія групи Γ ергодична, то для будь-якого елементу $\tau \in N[\Gamma]$ множина $A = \bigcup_{\gamma\in\Gamma}\{x \in X : \tau x = \gamma x\}$ є або множиною першої категорії, або доповненням такої множини.* □

Визначення 2.7.16. *Нехай a_1, a_2 – дії зчисленної групи G гомеоморфізмами простору X такі, що $a_1(g), a_2(g) \in N[\Gamma]$ для всіх $g \in G$. Ці дії називаються зовнішньо спряженими, якщо існують Γ-інваріантна щільна G_δ-підмножина Y в X та гомеоморфізм Θ на Y такі, що*

$$a_1(g)y = \Theta^{-1}a_2(g)\tau\Theta y,$$

де $\Theta \in N[\Gamma]$, $\tau = \tau(g) \in [\Gamma]$ для всіх $g \in G$, $y \in Y$.

Теорема 2.7.17. *Нехай Γ – ергодична група гомеоморфізмів простору X. Дії a_1, a_2 з $N[\Gamma]$ зовнішньо спряжені тоді й тільки тоді, коли*

$$\{g \in G : a_1(g) \in [\Gamma]\} = \{g \in G : a_2(g) \in [\Gamma]\}.$$

Доведення. Необхідність є очевидною, і ми доведемо достатність. Позначимо через H_i групу гомеоморфізмів, генеровану $a_i(G)$ та Γ $(i = 1, 2)$. Нехай $\mathcal{R}_1$ – відношення еквівалентності, генероване H_1. Оскільки групи H_1, H_2 ергодичні, з [180, теорема 1.8] випливає існування Γ-інваріантної щільної G_δ-множини $X_1 \subset X$ і гомеоморфізму Q на X_1 із властивістю $[H_1] = Q[H_2]Q^{-1}$. Розглянемо $G_0 = \{g \in G : a_1(g) \in [\Gamma]\} = \{g \in G : a_2(g) \in [\Gamma]\}$. Тоді G_0 є нормальною підгрупою групи G. Нехай $p : G \to G/G_0$ – природна проекція. Визначимо коцикли ϕ і ψ на $R_1|_{X_1 \times X_1}$ зі значеннями в G/G_0:

$$\phi(a_1(g)\gamma x, x) = p(g),$$

$$\psi(Qa_2(g)\gamma Q^{-1}x, x) = p(g), \qquad g \in G,\ \gamma \in \Gamma,\ x \in X_1.$$

Ці визначення є коректними з огляду на Лему 2.7.15.

Наступна Лема є простим наслідком визначень та леми 2.7.15.

Лема 2.7.18. *Нехай $h \in [H_1]$ і $\psi(hx, x) = p(g)$ для всіх $x \in X_1$. Тоді існує $\omega \in [\Gamma]$ таке, що $hx = Qa_2(g)\omega Q^{-1}x$ для всіх x з деякої щільної G_δ-підмножини X_2 в X_1.* □

Завершення доведення Теореми 2.7.17. Неважко побачити, що коцикли ϕ, ψ ергодичні. З Теореми 2.7.13 випливає існування Γ-інваріантної щільної G_δ-підмножини Y в X_1 і гомеоморфізму $F \in N[H_1]$ на Y із властивістю $\phi(x, y) = \psi(Fx, Fy)$ для всіх $(x, y) \in R_1|_{Y \times Y}$ (див. також Зауваження вище). Тоді для кожного $\widetilde{\gamma} \in [\Gamma]$, $y \in Y$ маємо $\psi(F\widetilde{\gamma}F^{-1}y, y) = p(e)$, де e – одиниця групи G. Внаслідок Леми 2.7.18, $Q^{-1}F\widetilde{\gamma}F^{-1}Qy = \omega y$ для певного $\omega \in [\Gamma]$. Аргумент, подібний до такого з Леми 2.7.18, застосований до коциклу ϕ, дозволяє встановити, що $F^{-1}Q\widetilde{\gamma}Q^{-1}F \in [\Gamma]$ для будь-якого $\widetilde{\gamma} \in \Gamma$, отже $Q^{-1}F \in N[\Gamma]$. Крім того, для всіх $y \in Y$ маємо $\psi(Fa_1(g)F^{-1}y, y) = p(g)$, звідки $Fa_1(g)F^{-1}y = Qa_2(g)\tau Q^{-1}y$ для $\tau \in [\Gamma]$. Покладаючи $\Theta = Q^{-1}F$, одержуємо $a_1(g)y = \Theta^{-1}a_2(g)\tau\Theta y$, $\tau = \tau(g) \in [\Gamma]$, що й стверджувалося. □

Висновки до розділу 2

В роботі одержано остаточний результат щодо можливості представлення аменабельної дії локально компактної сепарабельної (л.к.с.) групи у вигляді дії Маккі ергодичного автоморфізму. Цей результат, раніше відомий для вільних групових дій, тут встановлено для дій (не обов'язково аменабельної) л.к.с. групи з нетривіальними стабілізаторами. Аналогічний результат встановлено також для так званих "подвійних дій", що є діями Маккі "подвійних коциклів". Встановлено, що аменабельність групової дії еквівалентна аменабельності відповідного відношення еквівалентності, разом із аменабельністю стабілізаторів.

Але більш змістовним (принаймні, з точки зору застосувань) є так звана теорема єдиності для коциклів, яка встановлює взаємно-однозначну відповідність між класами слабої еквівалентності коциклів і класами спряженості їх дій Маккі. Цей результат встановлено на найбільш загальному рівні. У роботі розглянуто окремо випадки транзитних та нетранзитних (рекурентних) коциклів.

У більш простому випадку транзитних коциклів взагалі не йдеться про властивості аменабельності груп чи групових дій, які розглядаються.

У випадку нетранзитних коциклів, поряд із припущенням про аменабельність групових дій, довелося замінити коцикл на відповідний подвійний коцикл, що враховує властивості класу мір щодо перетворення, на якому заданий коцикл.

Як застосування, доведено тривіальність фундаментальної групи для неприводимих ергодичних дій зв'язних напівпростих дійсних груп Лі зі скінченним центром і дійсним рангом не меншим двох; аналогічний результат встановлено для дій решіток у подібних групах.

Ще одне застосування теореми єдиності для коциклів полягає в доведенні відсутності скінченної інваріантної міри для потоків Маккі дійснозначних коциклів з необмеженими лакунами.

Отже, продемонстрована можливість застосування теореми единості коциклів до вирішення різноманітних проблем ергодичної теорії.

У роботі вирішено проблему регуляризації дій л.к.с. груп автоморфізмами вимірних відношень еквівалентності. Мова йде про усунення елементів некоректної поведінки автоморфізмів групи перетворень на множинах нульової міри; це здійснюється шляхом зміни відношення еквівалентності на множині міри нуль. Цей результат узагальнено на випадок дій групоїдів.

Виявилося, що концепція існування та єдиності коциклів зберігають коректно визначені аналоги при переході від вимірної ергодичної теорії до теорії груп псевдо-гомеоморфізмів досконалого польського простору. У такому контексті в роботі доведено теореми існування та єдиності для ергодичних коциклів. У якості застосування доведено теорему про зовнішню спряженість зчисленних підгруп нормалізатора повної групи. Ці останні результати не містять жодних посилань на властивості аменабельності чи апроксимативної скінченності об'єктів що розглядаються. До того ж, залишаються відкритими низка проблем, пов'язаних з перенесенням до даного контексту більш загальних результатів із критеріїв слабої еквівалентності коциклів, зовнішньої спряженості тощо, які існують у межах вимірної ергодичної теорії.

РОЗДІЛ 3
ПРОБЛЕМИ СПРЯЖЕНОСТІ ТА ІЗОМОРФІЗМУ СТАБІЛІЗАТОРІВ ГРУПОВИХ ДІЙ

На відміну від вільних групових дій, де існує досить розгалужена теорія, зокрема траєкторна, про невільні дії груп відомо набагато менше. Ми вивчаємо одне з найперших питань з цього кола: за яких умов стабілізатори ергодичної групової дії є спряженими або принаймні ізоморфними? Звичайно, така спряженість має місце для дій абелевих груп чи транзитивних дій, але якщо маємо власне ергодичну дію некомутативної групи, питання стає нетривіальним. Ми подаємо достатні умови, за яких має місце спряженість або ізоморфізм стабілізаторів, а також наводимо змістовні контрприклади (див. [66]).

3.1 Спряженість компактних стабілізаторів для ергодичних дій груп Лі

3.1.1 Позначення та термінологія

Нехай G – л.к.с. група і X – стандартний борелівський G-простір з ергодичною квазі-інваріантною мірою μ. *Стабілізатором* цієї дії у точці $x \in X$ називають підгрупу $G_x = \{g \in G : \ gx = x\}$ групи G. З результатів [122, 188] випливає, що G_x є замкнутою підгрупою для м.в. $x \in X$. Якщо $G_x = \{e\}$ для м.в. $x \in X$, дія групи G називається вільною. У загальному випадку очевидне співвідношення $G_{gx} = gGg^{-1}$ означає спряженість стабілізаторів над кожною траєкторією; зокрема, для суттєво транзитивних дій м.в. стабілізатори спряжені.

За наявності відображення $F : \ X \to Y$ між двома несингулярними G-просторами (X, μ) і (Y, ν) і за умов еквівалентності мір $F_*\mu$ і ν, а також $F(gx) = gF(x)$ для всіх $g \in G$ у м.в. $x \in X$, простір (Y, ν) називається фактором (фактор-G-простором) простору (X, μ), а (X, μ) – розширенням простору (Y, ν). Звичайно ж, ергодичність G-простору означає ергодичність будь-якого його фактору.

Ми розглядатимемо простір $\mathcal{S} = \mathcal{S}(G)$ замкнутих підгруп групи G. У топології, запровадженої Дж. Феллом [50], це є замкнутою підмножиною компактного хаусдорфового простору $\mathcal{C}(G)$ замкнутих підмножин групи G. Зазначена топологія визначається базою відкритих множин $\mathfrak{U}(C, \mathcal{F}) = \{K \in \mathcal{C}(G) : \ K \cap C = \varnothing$ і $K \cap A \neq \varnothing$ для будь-якого $A \in \mathcal{F}\}$, де C – компактна підмножина в G і $\mathcal{F}$ – скінченне сімейство відкритих підмножин в G.

За наших умов на групу G, $\mathcal{S} = \mathcal{S}(G)$ є компактним метричним простором [50], отже й стандартним борелівським G-простором, на якому група G діє спряженнями. Крім того, борелівське відображення $X \to \mathcal{S}$, $x \mapsto G_x$ [5, 144] є G-фактор відображенням, якщо $\mathcal{S}$ устатковане образом міри μ. Отже, для заданого G-простору (X, μ) ми називаємо $\mathcal{S}$ фактором Фелла.

Лема 3.1.1. *Нехай G – л.к.с. група, H – замкнута нормальна підгрупа, $\pi : G \to G/H$ – відповідна проекція. Тоді асоційоване відображення $\overline{\pi}$: $\mathcal{S}(G) \to \mathcal{S}(G/H)$ є борелівським відносно топологій Фелла.*

Доведення. Спочатку зазначимо, що

$$\mathfrak{U}(C;\, U_1, \ldots, U_n) = \mathfrak{U}(C; \varnothing) \cap \mathfrak{U}(\varnothing; U_1) \cap \ldots \cap \mathfrak{U}(\varnothing; U_n)$$

де C – компактне, а $U_1, \ldots, U_n$ – відкриті підмножини в G. Крім того, якщо U – відкрита множина, можна знайти компактні множини $C_1, C_2, \ldots$ з об'єднанням U, тому $\mathfrak{U}(\varnothing; U) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\mathcal{S}(G) \setminus \mathfrak{U}(C_n; \varnothing))$. Отже, множини $\mathfrak{U}(C; \varnothing)$ генерують борелівську σ-алгебру в $\mathcal{S}(G)$, внаслідок чого, маємо, звичайно, аналогічне твердження для $\mathcal{S}(G/H)$. Таким чином, ми потребуємо лише доведення борелевості множини $\overline{\pi}^{-1}(\mathfrak{U}(C; \varnothing))$ в $\mathcal{S}(G)$.

Нехай Q_n – послідовність компактних множин в G що зростає, причому $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$, тоді $\overline{\pi}^{-1}(\mathfrak{U}(C; \varnothing)) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{U}(\pi^{-1}(C) \cap Q_n; \varnothing)$. $\square$

Лема 3.1.2. *Нехай G – л.к.с. група і $\mathcal{S}_c(G)$ – сімейство компактних під-*

груп групи G. Тоді $\mathcal{S}_c(G)$ – борелівська підмножина в $\mathcal{S}(G)$ відносно топології Фелла.

Доведення. Нехай $Q_n \subset G$ – послідовність компактів що зростає, і при цьому $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$. Тоді $\mathcal{S}_c(G) = \mathcal{S}(G) \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{U}(\varnothing; G \setminus Q_n)$. □

Лема 3.1.3. *Припустимо, що послідовність підмножин $H_n \in \mathcal{C}(G)$ збігається в топології Фелла до підмножини H, а послідовність точок $x_n \in H_n$ збігається до точки x. Тоді $x \in H$.*

Доведення. Якщо $x \notin H$, то існує компактний окіл U_x точки x такий, що $U_x \cap H = \varnothing$, звідки $\mathfrak{U}(U_x, \varnothing)$ – відкритий окіл множини H у топології Фелла. Оскільки $x_n \to x$ $(n \to \infty)$, маємо $x_n \in U_x$ для досить великих n, що суперечить збіжності $H_n \to H$ у топології Фелла та вибору околу $\mathfrak{U}(U_x, \varnothing)$. □

Нижче подано два тривіальні випадки, коли стабілізатори є спряженими.

Твердження 3.1.4. *Для ергодичної дії абелевої групи G на просторі X існує лише один стабілізатор над конульовою множиною.*

Доведення. У цьому випадку борелівське відображення $x \mapsto G_x$ є константою над кожною траєкторією, і отже є константою м.в. □

Твердження 3.1.5. *Для ергодичної дії зчисленної групи G на просторі X зі скінченними стабілізаторами, стабілізатори є спряженими над конульовою множиною.*

Доведення. Маємо борелівське відображення

$$x \mapsto (\text{клас спряженості стабілізатора } G_x)$$

зі значеннями у не більш ніж зчисленній множині. Оскільки це відображення є константою над кожною траєкторією, воно є константою м.в. □

3.1.2 Простори підалгебр алгебри Лі

Нехай $\mathcal{G}$ – дійсна алгебра Лі. Розглядаючи $\mathcal{G}$ як векторну групу, маємо, що сімейство її замкнутих підгруп $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ замкнуте в топології Фелла. Ми також зацікавлені у розгляді підсімейства $\mathcal{LA}(\mathcal{G})$ підалгебр Лі в $\mathcal{G}$. Для цього нам спершу потрібна

Лема 3.1.6. *Сімейство векторних підпросторів $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ є замкнутим в топології Фелла.*

Доведення. Зазначимо, що векторні підпростори є такими з підгруп з $\mathcal{S}(\mathcal{G})$, що інваріантні відносно множень їх елементів на скалярні множники. Нехай $\mathcal{H}_n$ – збіжна в топології Фелла послідовність підпросторів з $\mathcal{G}$, чиєю границею є підгрупа $\mathcal{H}$. Припустимо заданими $v \in \mathcal{H}$ і $\lambda \in \mathbb{R}$. Оскільки $\mathcal{H}_n$ збігається до $\mathcal{H}$, можна розглянути послідовність U_n околів v що спадає, разом із відповідними околами $\mathfrak{U}(\varnothing, U_n)$ підгрупи $\mathcal{H}$, для знаходження послідовності $v_n \in \mathcal{H}_n$ такої, що $v_n \to v$. Звідси маємо, що λv_n збігається до λv, що міститься в $\mathcal{H}$ внаслідок Леми 3.1.3 $\square$

Лема 3.1.7. *Сімейство $\mathcal{LA}(\mathcal{G})$ підалгебр Лі в $\mathcal{G}$ є замкнутим в $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ в топології Фелла.*

Доведення. Нехай $\mathcal{H}_n$ – збіжна в топології Фелла послідовність підалгебр алгебри Лі $\mathcal{G}$ з граничним підпростором $\mathcal{H}$. Із заданими $u, v \in \mathcal{H}$, внаслідок збіжності в топології Фелла $\mathcal{H}_n \to \mathcal{H}$ знаходимо $u_n, v_n \in \mathcal{H}_n$ такі, що $u_n \to u$, $v_n \to v$, звідки маємо, що $[u_n, v_n]$ збігається до $[u, v]$. Застосування Леми 3.1.3 дає $[u, v] \in \mathcal{H}$. $\square$

Лема 3.1.8. *Сімейство $\mathcal{LA}_n(\mathcal{G})$ усіх n-вимірних підалгебр Лі алгебри Лі $\mathcal{G}$ замкнуте в топології Фелла для кожного n.*

Доведення. Внаслідок попередньої Леми, досить довести наше твердження для векторних підпросторів $\mathcal{G}$. Нехай $\mathcal{H}_k$ – послідовність n-вимірних підпросторів у $\mathcal{G}$, що збігається в топології Фелла до p-вимірного підпростора $\mathcal{H}$.

Зазначимо, що збіжність послідовності $v_k \in \mathcal{H}_k$ до певного v наразі означає, що $v \in \mathcal{H}$. Дійсно, якщо припустити, що $v \notin \mathcal{H}$, то існує такий компактний окіл U_v точки v, що $U_v \cap \mathcal{H} = \varnothing$, і при цьому $\mathfrak{U}(U_x, \varnothing)$ є околом $\mathcal{H}$, що суперечить збіжності $\mathcal{H}_k \to \mathcal{H}$. Зафіксуємо довільний скалярний добуток в $\mathcal{G}$, і нехай $\{e_1^k, \ldots, e_n^k\}$ – ортонормована база в $\mathcal{H}_k$. Після відокремлення певної підпослідовності можна вважати, що $e_i^k \to e_i \in \mathcal{H}$ для $k \to \infty$. Зрозуміло, що $\{e_i\}_{i=1}^n$ – база підпростору в $\mathcal{H}$, і тому $p > n$.

З іншого боку, якщо $\{e_i\}_{i=1}^p$ – довільна ортонормована база в $\mathcal{H}$, то можна знайти околи $U_1, \ldots, U_p$ відповідно для $e_1, \ldots, e_p$, досить малі для того, аби матриця Грама будь-якого сімейства векторів $v_1, \ldots, v_p$, $v_i \in U_i$, була невиродженою. Утворимо окіл $\mathfrak{U}(\varnothing, U_1, \ldots, U_p)$; він містить $\mathcal{H}_k$ для досить великих k, і тому в $\mathcal{H}_k$ можна знайти сімейство $v_1, \ldots, v_p$ із зазначеними вище властивостями, звідки маємо $p \le n$. □

Лема 3.1.9. *Сімейство $\mathcal{L}_n(\mathcal{G})$ n-вимірних підпросторів векторного простору $\mathcal{G}$, устатковане топологією Фелла, гомеоморфне многовиду Грассмана G_n^{n+k}.*

Доведення. Многовид Грассмана G_n^{n+k} припускає природне вкладення у вигляді замкнутого за Зариським підмноговида проективного простору $\mathbb{P}^1(\bigwedge^n \mathbb{R}^{n+k})$ над n-м зовнішнім ступенем простору $\mathbb{R}^{n+k}$, що задається як (лінійна оболонка векторів $e_1, \ldots, e_n$) $\mapsto$ (пряма, що містить вектор $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$) для кожної лінійно незалежної системи векторів $e_1, \ldots, e_n$ [82]. Це вкладення устатковує G_n^{n+k} топологією, що індукована природною топологією проективного простору як дійсного многовиду. Оскільки ця топологія є очевидно метризованою, як і топологія Фелла, все може бути зроблено шляхом розгляду збіжних послідовностей. Нагадаємо також, що $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n = \lambda e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$ для певної константи λ тоді й тільки тоді, коли кожен v_i належить лінійній оболонці векторів $e_1, \ldots, e_n$.

Припустимо, що маємо збіжність n-вимірних підпросторів $H_k \to H$ в топології Фелла. Нехай $\{e_1, \ldots, e_n\}$ – ортонормована база в H, тоді внаслідок збіжності за Феллом підпросторів H_k, для будь-яких околів $U_1, \ldots, U_n$

відповідно векторів $e_1, \ldots, e_n$, існують $e_1^k, \ldots, e_n^k \in H_k$ такі, що $e_i^k \in U_i$ для досить великих k. Зменшуючи U_i, можна зробити так, що $e_i^k \to e_i$ для $k \to \infty$. З цього випливає, що $e_1^k \wedge \ldots \wedge e_n^k \to e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$, звідки також маємо бажану збіжність у проективному просторі.

Навпаки, припустимо заданими n-вимірні підпростори H_k, H з ортонормованими базами $\{e_1^k, \ldots, e_n^k\}$ і $\{e_1, \ldots, e_n\}$, відповідно, і такими, що прямі, які містять $e_1^k \wedge \ldots \wedge e_n^k$, збігаються у проективному просторі $\mathbb{P}^1(\bigwedge^n \mathbb{R}^{n+k})$ до прямої, що містить $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$. Отже, домножаючи за необхідності e_1^k на ± 1, маємо $e_1^k \wedge \ldots \wedge e_n^k \to e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$ для $k \to \infty$. Замінимо кожний e_i^k певним вектором v_i^k з H_k у такий спосіб, що $v_1^k \wedge \ldots \wedge v_n^k = e_1^k \wedge \ldots \wedge e_n^k$, і при цьому v_i^k збігаються до e_i $(k \to \infty)$.

Нехай $\mathfrak{U}(C; U_1, \ldots, U_p)$ – окіл підпростору H у топології Фелла. Якщо $u = \sum_i \alpha_i e_i \in U_m$ для певного $1 \leq m \leq p$, тоді, оскільки $v_i^k \to e_i$ для $k \to \infty$, $u^k = \sum_i \alpha_i v_i^k$ також міститься в U_m для досить великих k, тобто $H_k \cap U_m \neq \emptyset$.

Припустимо також, що існує послідовність $u_{k_j} \in H_{k_j}$ така, що $u_{k_j} \in C$. Після відокремлення підпослідовності можна вважати, що u_{k_j} збігаються до певного $u \in C$ для $j \to \infty$. З іншого боку, внаслідок Леми 3.1.3 маємо $u \in H$. Це суперечить визначенню $\mathfrak{U}(C; U_1, \ldots, U_p)$ як околу підпростору H, і тому $H_k \cap C = \varnothing$ для досить великих k. $\square$

Алгебраїчною групою ми називаємо замкнуту за Зариським підгрупу групи $GL(n, \mathbb{R})$. Нехай G – така група. Її алгебра Лі $\mathcal{G}$ може розглядатися як підалгебра матричної алгебри $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$, що складається з усіх дотичних векторів до G в її одиниці. Приєднане зображення $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}\,\mathcal{G}$ задається спряженням матриць: $(\mathrm{Ad}\, g)(x) = gxg^{-1}$, $g \in G$, $x \in \mathcal{G}$; воно зрозумілим чином є алгебраїчно регулярним. Це зображення у природний спосіб генерує дію групи G на $\mathcal{LA}(\mathcal{G})$. Ми маємо на меті довести, що це – алгебраїчно регулярна дія на алгебраїчному многовиді.

Нагадаємо, що $\mathcal{LA}_n(\mathcal{G})$ як підмножина многовиду Грассмана G_n^{n+k} є також підмножиною проективного простору $\mathbb{P}^1(\bigwedge^n \mathcal{G})$ [82].

Лема 3.1.10. *$\mathcal{LA}(\mathcal{G})$ є замкнутою за Зариським підмножиною в $\mathbb{P}^1(\bigwedge \mathcal{G})$ і, зокрема, алгебраїчним многовидом.*

Доведення. Досить довести, що $\mathcal{LA}_n(\mathcal{G})$ для кожного n є замкнутим за Зариським в $\mathbb{P}^1(\bigwedge^n \mathcal{G})$.

Нехай $e_1, \ldots, e_m$ – база в $\mathcal{G}$, тоді вектори $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}$, $i_1 < \ldots < i_n$, утворюють базу в $\wedge^n \mathcal{G}$. Позначимо через U афінну карту в $\mathbb{P}^1(\bigwedge^n \mathcal{G})$, що визначається ненульовою однорідною координатою відповідно до вектору $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$, а через D_0 – лінійну оболонку векторів $e_1, \ldots, e_n$. Тоді n-вимірний підпростір D міститься в U тоді й тільки тоді, коли природна проекція $\mathcal{G}$ на D_0, обмежена на D, є взаємно однозначною, і зворотні образи $v_i = e_i + \sum_{j>n} a_{ij} v_j$ векторів e_i, $i = 1, \ldots, n$, щодо тієї обмеженої проекції утворюють базу в D.

Визначимо відображення $\phi_i : U \to \mathcal{G}$, $\phi_i(D) = v_i$; вони є регулярними, оскільки a_{ij} є координатою D, відповідною вектору $v_1 \wedge \ldots \wedge v_j \wedge \ldots \wedge v_n$, де v_j $(j > n)$ замінює у зазначеному вище зовнішньому добутку i-й множник v_i. Розглянемо також відображення $\Phi_{ij} : U \to \wedge^{n+1} \mathcal{G}$, $\Phi_{ij}(D) = [\phi_i(D), \phi_j(D)] \wedge \phi_1(D) \wedge \ldots \wedge \phi_n(D)$. Вони також регулярні, і тому $\mathcal{LA}_n(\mathcal{G}) \cap U = \bigcap_{i,j} \left(\Phi_{ij}^{-1}(\{0\}) \cap G_n^{n+k}\right)$ є замкнутою за Зариським підмножиною в U. Оскільки $\mathbb{P}^1(\bigwedge^n \mathcal{G})$ покрите лише скінченним сімейством афінних карт, подібних до U, множина $\mathcal{LA}_n(\mathcal{G})$ є замкнутою за Зариським відповідно до афінного критерію замкнутості [82]. □

Лема 3.1.11. *Нехай G – алгебраїчна група. Дія G на $\mathcal{LA}(\mathcal{G})$ має тип I.*

Доведення. Досить встановити, що така дія має тип I при обмеженні на кожне $\mathcal{LA}_n(\mathcal{G})$. Але ж оскільки це останнє є G-інваріантним алгебраїчним підмноговидом у $\mathbb{P}^1(\bigwedge^n \mathcal{G})$ (Лема 3.1.8) відносно природної дії групи G, що задається $g(\mathbb{R}v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) = \mathbb{R} g v_1 g^{-1} \wedge \ldots \wedge g v_n g^{-1}$, все зводиться до перевірки алгебраїчної регулярності останньої дії, що є очевидним.

Нагадаємо, що траєкторії регулярних дії алгебраїчних груп на алгебраїчних многовидах локально замкнуті в топології Зариського [82], отже локально замкнуті також і в топології Фелла (див. Леми 3.1.7 – 3.1.9), звідки маємо тип I для групової дії [148]. $\square$

3.1.3 Простори компактних підгруп груп Лі

Твердження 3.1.12. *Нехай G – дійсна алгебраїчна група. Дія G на просторі $\mathcal{S}_f(G)$ скінченних підгруп спряженнями має тип I.*

Доведення. Досить довести, що ця дія має тип I, якщо її обмежити на простір $\mathcal{S}_n(G)$ n-елементних підгруп.

Розглянемо прямий добуток G^n устаткований такою дією групи G:

$$h(g_1, \dots, g_n) = \left(hg_1h^{-1}, \dots, hg_nh^{-1}\right),$$

а також дією групи переставлень S_n:

$$\sigma(g_1, \dots, g_n) = \left(g_{\sigma(1)}, \dots, g_{\sigma(n)}\right);$$

легко бачити, що ці дії комутують, отже маємо дію групи $G \times S_n$. Запровадимо також алгебраїчно регулярні відображення $\pi_k, i_k, p_{jk} : G^n \to G$:

$$\begin{aligned} \pi_k(g_1, \dots, g_n) &= g_k \text{ (проекція)}, \\ i_k(g_1, \dots, g_n) &= g_k^{-1}, \\ p_{jk}(g_1, \dots, g_n) &= g_j g_k. \end{aligned}$$

Нехай

$$\begin{aligned} A &= \bigcup_{k=1}^{n} \{(g_1, \dots, g_n) \in G^n : \pi_k(g_1, \dots, g_n) = e\}, \\ B &= \bigcap_{k=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{n} \{(g_1, \dots, g_n) \in G^n : i_k(g_1, \dots, g_n) = \pi_j(g_1, \dots, g_n)\}, \\ C &= \bigcap_{j=1}^{n} \bigcap_{k=1}^{n} \bigcup_{r=1}^{n} \{(g_1, \dots, g_n) \in G^n : p_{jk}(g_1, \dots, g_n) = \pi_r(g_1, \dots, g_n)\}, \end{aligned}$$

тоді замкнута в топології Зариського множина $Q = A \cap B \cap C$ інваріантна відносно дії (дійсної алгебраїчної групи) $G \times S_n$. Ця дія має локально замкнуті траєкторії, і тому має тип I. Крім того, виключивши з Q замкнуту за Зариським $G \times S_n$-інваріантну множину, ми одержуємо відкриту множину $\widetilde{Q}$, яка складається з таких $(g_1, \dots, g_n)$, що усі g_i різні. Дія групи $G \times S_n$ на $\widetilde{Q}$ також має тип I.

Ми стверджуємо, що дія групи G на фактор-просторі $\widetilde{Q}/S_n$ також має тип I. Дійсно, нехай $T \subset \widetilde{Q}$ – борелівський переріз відносно дії групи $G \times S_n$ (тобто борелівська множина, що перетинає кожну траєкторію рівно один раз), і $q : \widetilde{Q} \to \widetilde{Q}/S_n$ – природна проекція. Легко перевірити, що $Gq(T) = \widetilde{Q}/S_n$, і при цьому кожна G-траєкторія перетинає борелівську множину $q(T)$ лише скінченну кількість разів, отже дія групи G індукує на $q(T)$ скінченне відношення еквівалентності. Це останнє знов має борелівський переріз $T_1 \subset q(T)$, який є також борелівським перерізом для дії групи G на $\widetilde{Q}/S_n$. Отже, ця дія має тип I. З іншого боку, відображення $S_n(g_1, \dots, g_n) \mapsto$ (підгрупа, утворена елементами $g_1, \dots, g_n$) задає борелівський G-еквіваріантний ізоморфізм між фактор-простором $\widetilde{Q}/S_n$ і простором $\mathcal{S}_n(G)$ n-елементних підгруп, що й треба було довести. $\square$

Наступна Лема є корисною для перевірки типу I для розширень групових дій типу I.

Лема 3.1.13. *Нехай G – л.к.с. група, X і Y – локально компактні хаусдорфові топологічні G-простори, $F : X \to Y$ – борелівске G-еквіваріантне відображення. Припустимо, що дія групи G на Y має тип I, і для кожного $y \in F(X)$ обмеження відношення еквівалентності на X, генерованого дією групи G, на $F^{-1}(y)$ має тип I. Тоді дія групи G на X має тип I.*

Доведення. Ми знаходимося в умовах теореми Гліма [58]; отже, для доведення типу I для дії групи G на просторі X досить перевірити, що будь-яка ергодична квазіінваріантна ймовірнісна міра зосереджена на єдиній траєкторії. Нехай μ – така міра на X. Тоді $F_*\mu$ – ергодична квазіінваріантна міра для фактор-G-простору Y, і оскільки цей останній має тип I, він містить конульову траєкторію.

Ми стверджуємо, що в $F_*\mu$-м.в. $y \in Y$ індуковане відношення еквівалентності на $F^{-1}(y)$ (яке насправді задається дією стабілізатора G_y) ергодичне відносно відповідної умовної міри. Для встановлення цього, розглянемо дезінтеграцію $\mu = \int_Y \mu_y d\nu(y)$ міри μ відносно відображення F; внаслідок [145, лема 3.1], сімейство умовних ймовірнісних мір μ_y може бути вибрано у такий спосіб, що $\mu_y \circ g^{-1} \sim \mu_{gy}$ для всіх $g \in G$, $y \in F(X)$. Якщо дія стабілізатора G_y на $F^{-1}(y)$ для деякого y не ергодична, можна знайти G_y-інваріантну борелівську підмножину $B \subset F^{-1}(y)$ таку, що $0 < \mu_y(B) < 1$ (насправді B може бути обрана строго інваріантною відносно кожного $g \in G_y$). Тоді її насичення GB є аналітичною (насправді борелівською) інваріантною множиною в X, отже можна використати транзитивність фактор-G-простору Y і встановлену вище властивість умовних мір, аби довести, що $0 < \mu(GB) < 1$. Це суперечить ергодичності дії групи G на просторі X, чим доведено, що μ_y є G_y-ергодичною.

Оскільки вона у той же час має тип I, вона суттєво транзитивна. Залишається зазначити, що, внаслідок квазіінваріантності міри μ, класи еквівалентності умовних мір над конульовою траєкторією в Y сплітаються дією групи G, отже μ сама зосереджена на єдиній траєкторії. $\square$

У подальшому ми потребуємо деякі факти стосовно простору $\mathcal{LA}(\mathcal{G})$ підалгебр Лі алгебри Лі $\mathcal{G}$ дійсної групи Лі G. Визначимо G-еквіваріантне відображення $\mathcal{L} : \mathcal{S}_c(G) \to \mathcal{LA}(\mathcal{G})$ у такий спосіб: $\mathcal{L}(H)$ – підалгебра Лі в $\mathcal{G}$, що відповідає підгрупі H.

Твердження 3.1.14. *Відображення $\mathcal{L} : \mathcal{S}(G) \to \mathcal{LA}(\mathcal{G})$ є борелівським відносно топологій Фелла.*

Доведення. Оскільки множини $\mathfrak{U}(C; \varnothing)$ генерують борелівську σ-алгебру в $\mathcal{S}(G)$ (див. доведення Леми 3.1.1), нам досить довести, що

$$\Phi^{-1}(\mathfrak{U}(C; \varnothing)) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathfrak{U}\left((\exp C)^{1/k}, \varnothing\right),$$

де $C \subset \mathcal{G}$ – компакт, а $(\exp C)^{1/k} = \left\{\exp(\frac{t}{k} \cdot v) : \exp(tv) \in \exp C\right\}$.

Припустимо, що підгрупа $H \subset G$ міститься в $\mathcal{L}^{-1}(\mathfrak{U}(C; \varnothing))$, тоді для будь-якого вектора $v \in C$ однопараметрична група $\{\exp(tv) : t \in \mathbb{R}\}$ не міститься в H, звідки $(U \setminus \{e\}) \cap \{\exp(tv) : t \in \mathbb{R}\} \cap H = \varnothing$ для досить малого околу U одиниці e в G. З іншого боку, $(\exp C)^{1/k} \subset U$ для досить великих k. Це має наслідком $H \in \mathfrak{U}\big((\exp C)^{1/k}; \varnothing\big)$.

Навпаки, припустимо, що $H \in \mathfrak{U}\big((\exp C)^{1/k}; \varnothing\big)$ для певного k. Це звісно має наслідком те, що H не містить цілої однопараметричної підгрупи $\{\exp(tv) : t \in \mathbb{R}\}$ для будь-якого $v \in C$, звідки її алгебра Лі не може містити вектор v. Тобто, $H \in \mathcal{L}^{-1}(\mathfrak{U}(C; \varnothing))$. $\square$

Теорема 3.1.15. *Нехай G – дійсна група Лі. Дія групи G на просторі $\mathcal{S}_c(G)$ компактних підгруп спряженнями має тип I.*

Доведення. Нехай G_0 – зв'язна компонента одиниці групи G і $R \subset G$ – радикал. Тоді R – зв'язна розв'язна група Лі, а фактор-група G/R – напівпроста група Лі.

Ми почнемо з доведення типу I для дії підгрупи R на $\mathcal{S}_c(G)$. Це можна зробити індукцією за вимірністю R. Якщо R нуль-вимірна (тобто одинична) група, наше твердження є тривіальним.

У іншому разі R має послідовність нормальних підгруп $R = R_0 \supset R_1 \supset \ldots \supset R_p \supset R_{p+1} = \{0\}$, де усі фактори R_i/R_{i+1} є зв'язними абелевими групами Лі. Оскільки всі такі групи ізоморфні прямому добуткові вигляду $\mathbb{R}^m \times \mathbb{T}^n$, і при цьому $\mathbb{T}^n$ є нормальною (відтак, центральною) підгрупою в R/R_{i+1}, можна вважати, що кожен фактор R_i/R_{i+1} ізоморфний або векторному простору $\mathbb{R}^m$, або тору $\mathbb{T}^n$.

Внаслідок припущення індукції дія фактор-групи R/R_p на $\mathcal{S}_c(G/R_p)$ має тип I, тобто існує зчисленне сімейство R/R_p-інваріантних борелівських множин $B_j \subset \mathcal{S}_c(G/R_p)$, що розділяють R/R_p-траєкторії. Зрозуміло, що ця R/R_p-дія може також розглядатися як дія групи R, яка має природне підняття до дії на $\mathcal{S}_c(G)$. Ми позначимо це розширення $\overline{p} : \mathcal{S}_c(G) \to \mathcal{S}_c(G/R_p)$ (це відображення борелівське внаслідок Леми 3.1.1; воно асоційоване з природною проекцією $p : G \to G/R_p$).

З початку розглянемо випадок $R_p \cong \mathbb{R}^m$. Нехай $K_0, K \subset G$ – дві компактні підгрупи, для яких $p(K_0) = p(K)$. Оскільки $K_0 \cap \mathbb{R}^m = K \cap \mathbb{R}^m = \{0\}$, для кожного $k \in K_0$ існує єдиний елемент $\sigma(k) \in \mathbb{R}^m$ такий, що $k\sigma(k) \in K$. Можна також перевірити, що $\sigma : K_0 \to \mathbb{R}^m$ – борелівський (насправді неперервний) 1-коцикл (тобто $\sigma(k_1k_2) = k_2^{-1}\sigma(k_1)k_2\sigma(k_2)$) [131]. Внаслідок [131, теорема 2.3], будь-який такого вигляду коцикл тривіальний, звідки легко вивести, що підгрупи K і K_0 спряжені. У запроваджених вище термінах $\overline{p}^{-1}(B_j)$ є послідовністю R-інваріантних борелівських підмножин у $\mathcal{S}_c(G)$, які розділяють R-траєкторії, отже R-простір $\mathcal{S}_c(G)$ має тип I.

Перейдемо до розгляду випадку $R_p \cong \mathbb{T}^n$. Нехай $K_0, K \subset G$ – дві компактні підгрупи, для яких $p(K_0) = p(K)$ і $K_0 \cap \mathbb{T}^n = K \cap \mathbb{T}^n = C$. Зрозуміло, що C – нормальна підгрупа в обидвох групах K і K_0. Внаслідок $p(K_0) = p(K)$, для кожного $k \in K_0/C$ існує єдиний елемент $\sigma(k) \in \mathbb{T}^n/C$ такий, що $k\sigma(k) \in K/C$. Як і вище, можна перевірити, що $\sigma : K/C \to \mathbb{T}^n/C$ – неперервний 1-коцикл, причому когомологічні такі коцикли σ_1 і σ_2 визначають спряжені підгрупи K_1/C і K_2/C групи $N(C)/C$. Насправді ми маємо спряженість підгруп K_1 і K_2 в $N(C)$. Внаслідок [131, теорема 2.2], перша група когомологій $H^1(K_0/C, \mathbb{T}^n/C)$ зчисленна. Це, разом із зчисленністю множини замкнутих підгруп групи $\mathbb{T}^n$, має наслідком те, що для будь-якої компактної підгрупи $F \subset G$, $p^{-1}(p(K))$ (отже, також і $p^{-1}(p(\{g^{-1}Kg : g \in G\})))$ перетинає не більше ніж зчисленну кількість класів спряженості компактних підгруп групи G. Це означає, що ми знаходимося в умовах Леми 3.1.13, застосування якої дає тип I для R-простору $\mathcal{S}_c(G)$ також і в цьому випадку.

Зазначимо, що для попередньої частини доведення не є суттєвими властивості розв'язності фактор-групи R/R_p; використано лише той факт, що дія R/R_p на $\mathcal{S}_c(G/R_p)$ має тип I. Отже, нам досить встановити, що G/R-простір $\mathcal{S}_c(G/R)$ має тип I. Це є предметом наступного

Твердження 3.1.16. *Нехай G – дійсна група Лі з напівпростою зв'язною компонентою одиниці G_0. Дія групи G на просторі компактних підгруп $\mathcal{S}_c(G)$ спряженнями має тип I.*

Доведення. Нехай $C(G_0)$ – централізатор G_0. Зрозуміло, що це є нормальна підгрупа. Вона також дискретна та зчисленна, оскільки її зв'язна компонента одиниці, очевидно, міститься в G_0, отже є підгрупою центра групи G_0; цей центр є дискретним внаслідок наших припущень щодо G_0.

Нехай $\mathcal{G}$ – алгебра Лі групи $\overline{G} = G/C(G_0)$. Зрозуміло, що група $\operatorname{Aut}\mathcal{G}$ алгебраїчна, отже її дія на $\mathcal{LA}(\mathcal{G})$ має тип I [82]. З іншого боку, оскільки $\overline{G}_0 = G_0/C(G_0) \cong \operatorname{Ad} G_0$ напівпроста та має тривіальний центр, $\overline{G}_0 = \operatorname{Ad} G_0$ є зв'язною компонентою одиниці групи $\operatorname{Aut}\mathcal{G}$ [76]. Зокрема, $\overline{G}_0$ є підгрупою скінченного індексу в $\operatorname{Aut}\mathcal{G}$ [82], отже група $\overline{G}$ теж має цю властивість. Таким чином, внаслідок [196, лема 5.6], дія групи $\overline{G}$ через Ad на $\mathcal{LA}(\mathcal{G})$ має тип I.

Розглянемо $\overline{G}$-еквіваріантне відображення $\mathcal{L} : \mathcal{S}_c(\overline{G}) \to \mathcal{LA}(\mathcal{G})$, покладаючи $\mathcal{L}(H)$ підалгеброю Лі в $\mathcal{G}$, що відповідає підгрупі H. Це відображення є борелівським внаслідок Твердження 3.1.14, отже $\mathcal{LA}(\mathcal{G})$ є фактор-простором типу I $\overline{G}$-простору $\mathcal{S}_c(\overline{G})$.

Внаслідок взаємно-однозначної відповідності між підалгебрами Лі в $\mathcal{G}$ і зв'язними підгрупами групи $\overline{G}$, $\mathcal{L}(H)$ є повним інваріантом H_0; зокрема, зв'язні компоненти одиниці підгруп з $\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{H})$ є однаковими для кожної підалгебри Лі $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$.

Зазначимо, що $N_{\overline{G}}(H_0)$ співпадає з (замкнутою) підгрупою в $\overline{G}$, чия дія залишає $\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{H})$ інваріантним. Крім того, оскільки $\overline{G}_0$ є підгрупою скінченного індексу в $\operatorname{Aut}\mathcal{G}$, легко перевірити, що $N_{\overline{G}}(H_0)$ є також підгрупою скінченного індексу в $N_{\operatorname{Aut}\mathcal{G}}(H_0)$. Група $N_{\operatorname{Aut}\mathcal{G}}(H_0)$ є зрозумілим чином алгебраїчною з огляду на компактність H_0.

Оскільки всі підгрупи з $\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{H})$ містять H_0 як зв'язну компоненту одиниці, маємо насправді дію алгебраїчної фактор-групи $N_{\operatorname{Aut}\mathcal{G}}(H_0)/H_0$ на $\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{H})$, причому цей останній простір може бути ототожнений з підсімейством $\mathcal{S}_f(N_{\operatorname{Aut}\mathcal{G}}(H_0)/H_0)$ скінченних підгруп групи $N_{\operatorname{Aut}\mathcal{G}}(H_0)/H_0$. Зрозуміло, що таке ототожнення є борелівським відображенням, звідки дія групи $N_{\operatorname{Aut}\mathcal{G}}(H_0)/H_0$ на $\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{H})$ має тип I внаслідок Твердження 3.1.12. Зазначена вище дія може також розглядатися як дія групи $N_{\operatorname{Aut}\mathcal{G}}(H_0)$, отже з [196, лема 5.6] маємо, що дія підгрупи скінченного індексу $N_{\overline{G}}(H_0)$ на $\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{H})$ також має тип I. З іншого боку, відповідне відношення еквівалентності співпадає з таким, що задається обмеженням на $\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{H})$ відношення еквівалентності, генерованого дією групи $\overline{G}$ на $\mathcal{S}_c(\overline{G})$. Отже, застосування Леми 3.1.13 встановлює тип I для дії групи $\overline{G}$ на $\mathcal{S}_c(\overline{G})$.

Нехай $p : G \to \overline{G}$ – природна проекція, і $\overline{p} : \mathcal{S}_c(G) \to \mathcal{S}_c(\overline{G})$ – відповідне борелівське відображення (Лема 3.1.1), що є G-еквіваріантним. Ми стверджуємо, що $\overline{p}$ має зчисленні прообрази точок. Дійсно, оскільки $\overline{p}$ є локальним діффеоморфізмом, для підгрупи $\overline{Q} \in \mathcal{S}_c(\overline{G})$, всі підгрупи $K \in \overline{p}^{-1}(\overline{Q})$ мають одну й ту саму (під)алгебру Лі в $\mathcal{G}$, отже й одну й ту саму зв'язну компоненту одиниці, скажімо K_0. Таким чином, для заданої зв'язної компоненти $\overline{q}\overline{Q}_0$ групи $\overline{Q}$, будь-які дві відповідні зв'язні компоненти g_1K_0 та g_2K_0 (можливо різних) підгруп із $\overline{p}^{-1}(\overline{Q})$ можуть відрізнятися лише множенням на елемент зчисленної групи $C(G_0)$, і отже може існувати лише зчисленне сімейство таких компонент. Оскільки, крім того, компактна група $\overline{Q}$ має лише скінченну кількість зв'язних компонент, ми доходимо висновку про те, що $\overline{p}^{-1}(\overline{Q})$ є не більш ніж зчисленним. Зокрема, для будь-якої підгрупи $\overline{Q} \in \mathcal{S}_c(\overline{G})$, обмеження відношення еквівалентності, генерованого дією групи $\overline{G}$ на $\mathcal{S}_c(\overline{G})$, на $\overline{p}^{-1}(\overline{Q})$ має тип I. Наразі наше твердження є наслідком Леми 3.1.13. $\square$

В якості наслідка одержуємо таке.

Теорема 3.1.17. *Нехай G – дійсна група Лі, а (X, μ) – ергодичний G-простір, усі стабілізатори якого компактні. Тоді всі стабілізатори є спряженими в G.* $\square$

У Додатку А.1 подано приклади ергодичних групових дій із неспряженими стабілізаторами.

3.2 Ізоморфізм скінченних стабілізаторів для ергодичних групових дій.

Перейдемо до проблеми ізоморфізму стабілізаторів ергодичних дій. Розпочнемо з випадку скінченних стабілізаторів. Розглянемо властивості збіжних послідовностей скінченних підгруп л.к.с. групи G відносно топології Фелла. Якщо кожна з підгруп K_n має m елементів, і $K_n \to K$, тоді легко перевірити, що K має не більше ніж m елементів. Для цього досить розглянути окіл підгрупи K вигляду $\mathfrak{U}(\varnothing, \mathcal{F})$, де $\mathcal{F} = \{kV : \ k \in K\}$, а V – досить малий окіл одиниці в G. З цього випливає, що множина m-елементних підгруп $\mathcal{S}_m$ є локально замкнутою, зокрема борелівською в $\mathcal{S}$. Крім того, виявляється, що гранична підгрупа K успадковує суттєву інформацію про операції множення в K_n.

Лема 3.2.1. *Нехай K_n, K – m-елементні підгрупи л.к.с. групи G, і при цьому $K_n \to K$ в топології Фелла. Якщо всі K_n ізоморфні, то K ізоморфна кожній з K_n.*

Доведення. Нехай U – окіл одиниці в G досить малий, аби $k_1U \cap k_2U = \varnothing$ для будь-яких різних $k_1, k_2 \in K$. Тоді можна вибрати окіл V одиниці в G такий, що $V \cdot k^{-1}Vk \subseteq U$ для всіх $k \in K$. Тепер розглянемо окіл підгрупи K вигляду $\mathfrak{U}(\varnothing, \mathcal{F})$, де $\mathcal{F} = \{kV : \ k \in K\}$. Зі збіжності $K_n \to K$ в топології Фелла випливає, що для досить великих n і кожного $k \in K$ існує лише один елемент $k' \in K_n$ такий, що $k' \in kV$, чим установлюється взаємно-однозначна відповідність між K_n і K. Можна легко вивести з властивостей околів U і V, що зазначена вище відповідність фактично є ізоморфізмом між K_n і K. $\square$

Теорема 3.2.2. *Нехай (X, μ) – ергодичний лебегівський G-простір для л.к.с. групи G зі скінченними стабілізаторами. Тоді всі стабілізатори над конульовою підмножиною в X є ізоморфними.*

Доведення. На початку відзначимо, що кількість елементів m стабілізатора є константою м.в. Це можна довести застосуванням процедури "вичерпування" до борелівської підмножини $\{(g, x) : \ g \in G_x\} \subset G \times X$, використовуючи також очевидну постійність m на кожній G-траєкторії і ергодичність дії групи G на просторі X. Отже, міра на факторі Фелла $\mathcal{S} = \mathcal{S}(G)$ зосереджена на підмножині $\mathcal{S}_m$, утвореній m-елементними підгрупами.

Розглянемо розбиття $\mathcal{S}_m$ на замкнення класів спряженості підгруп в топології Фелла. Для перевірки коректності визначення цього розбиття досить показати, що будь-які два такі замкнення або не перетинаються, або співпадають. Якщо K – гранична підгрупа класу спряженості підгрупи K_1, то, зрозумілим чином, K_1 – також гранична підгрупа для послідовності спряжених до K підгруп. Отже, якщо K належить також до замкнення класу спряженості деякої іншої підгрупи K_2, то з наведених вище міркувань одержуємо, що обидва класи спряженості для K_1 і для K_2 мають те ж саме замкнення.

Зрозуміло, що ми одержали відношення еквівалентності типу I на факторі Фелла, оскільки кожен клас еквівалентності замкнутий [148]. З іншого боку, кожен клас еквівалентності є інваріантним відносно дії групи G на $\mathcal{S}$. Отже, маємо G-інваріантне борелівське відображення простору X до (стандартного борелівського) фактор-простору для простору $\mathcal{S}_m$ відносно поданого вище відношення еквівалентності. Внаслідок ергодичності дії групи G, це відбраження є константою м.в., тобто сімейство стабілізаторів над конульовою підмножиною в X є замкнутим. Наразі твердження Теореми випливає з Леми 3.2.1. □

У Додатку А.2 наведено приклади ергодичних групових дій із неізоморфними стабілізаторами.

Висновки до розділу 3

Для невільних групових дій важливим інваріантом є так званий фактор Фелла, що є простором замкнутих підгруп групи що діє. У випадку л.к.с. групи це є стандартний борелівський простір, що устаткований проекцією міри з простору, на якому діє група. Зрозуміло, що істотна транзитивність такого фактору є еквівалентом спряженості м.в. стабілізаторів групової дії. В свою чергу, така транзитивність може бути наслідком певних властивостей регулярності фактора Фелла як динамічної системи, які можуть бути виявлені шляхом розгляду на відповідних об’єктах додаткових структур.

Отже, фактори Фелла є важливим знаряддям дослідження проблеми спряженості і ізоморфізму стабілізаторів ергодичних динамічних систем. У роботі, у випадку дії дійсної групи Лі, поряд з власне фактором Фелла розглянуто факторпростір підалгебр Лі, що відповідають стабілізаторам. Доведено, що простір підалгебр Лі вкладається у (алгебраїчний) многовид Грассмана, і тому у випадку, коли група Лі є алгебраїчною, стає алгебраїчно регулярною динамічною системою. Для такої системи розбиття на траєкторії має тип I, звідки істотна транзитивність відповідної фактор-дії.

Інше ключове спостереження, що міститься у роботі, полягає в розгляді дій дійсних алгебраїчних груп зі скінченними стабілізаторами. Виявлено, що відповідний фактор Фелла вкладається в алгебраїчний многовид з дією зазначеної вище алгебраїчної групи, що є алгебраїчно регулярною.

З огляду на наведені вище міркування, в роботі доведено, що дія дійсної групи Лі спряженнями на просторі компактних підгруп має тип I. Внаслідок цього, ергодична дія дійсної групи Лі з компактними стабілізаторами має всі стабілізатори спряженими. Наведено контрприклади, що демонструють суттєвість припущень цієї теореми.

Ще один результат роботи – це ізоморфізм скінченних стабілізаторів для ергодичних дій л.к.с. групи.

Подано змістовні контрприклади, в яких ергодичні дії груп Лі мають неізоморфні стабілізатори.

При цьому залишається відкритим питання про спряженість та/або ізоморфізм стабілізаторів ергодичних групових дій за більш загальних припущень, наприклад для дій зчисленних груп з нескінченними стабілізаторами.

РОЗДІЛ 4
ЕНТРОПІЯ ДЛЯ ДІЙ АМЕНАБЕЛЬНИХ ГРУП

4.1 Ентропійна теорія для дій скінченно-генерованих нільпотентних груп

Для дій зазначеного тут класу груп ми подаємо явний опис алгебр Пінскера, властивостей інваріантності для вимірних розбиттів, а також повну спектральну характеризацію K-систем (див. [68]).

Нагадаємо базові визначення, факти та позначення. Для розбиття α з не більше ніж зчисленною кількістю елементів на просторі Лебега $(X, \mathcal{A}, \mu)$ визначимо ентропію:

$$H(\alpha) = -\sum_i \mu(A_i) \log \mu(A_i).$$

Нехай $\mathcal{L}$ позначає сімейство розбиттів α як вище, для яких $H(\alpha) < \infty$. Для будь-якого вимірного розбиття β умовна ентропія $H(\alpha|\beta)$ визначається у стандартний спосіб. Зокрема, $H(\alpha|\beta) = 0$ еквівалентне $\alpha \leq \beta$; $H(\alpha|\beta)$ є зростаючою функцією α і спадаючою функцією β. Метрика d на $\mathcal{L}$ задається так:

$$d(\alpha, \beta) = H(\alpha|\beta) + H(\beta|\alpha).$$

$\mathcal{L}$, устатковане метрикою d, є повним метричним простором. Основною властивістю ентропії розбиттів є таке:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathcal{L},\ \forall \gamma \qquad H(\alpha\beta|\gamma) = H(\alpha|\gamma) + H(\beta|\alpha \vee \gamma), \tag{4.1.1}$$

звідки маємо субадитивність для H:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathcal{L},\ \forall \gamma, \qquad H(\alpha \vee \beta|\gamma) \leq H(\alpha|\gamma) + H(\beta|\gamma).$$

Якщо $\{\gamma_n\}$ – зростаюча послідовність розбиттів і $\gamma = \bigvee_n \gamma_n$, то для всіх $\alpha \in \mathcal{L}$ маємо

$$\lim_n H(\alpha|\gamma_n) = H(\alpha|\gamma).$$

У подібний спосіб, для спадаючої послідовності розбиттів $\{\gamma_n\}$ із $\gamma = \bigwedge_n \gamma_n$ маємо для всіх $\alpha \in \mathcal{L}$

$$\lim_n H(\alpha|\gamma_n) = H(\alpha|\gamma).$$

Нехай T – автоморфізм простору $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Для будь-якого розбиття α ми використовуватимемо позначення

$$\alpha_T^n = \bigvee_0^{n-1} T^k\alpha, \qquad \alpha_T^- = \bigvee_1^{\infty} T^{-k}\alpha, \qquad \alpha_T = \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^k\alpha.$$

Послідовність $\frac{1}{n}H\left(\alpha_T^n\right)$ має границю, яку позначають $h(\alpha, T)$; вона також може бути представлена через умовну ентропію $H\left(\alpha \left| \alpha_T^-\right.\right)$. Більш загально, якщо γ – T-інваріантне вимірне розбиття, послідовність $\frac{1}{n}H\left(\alpha_T^n \left|\gamma\right.\right)$ має границю $H\left(\alpha \left|\alpha_T^- \vee \gamma\right.\right)$, яка позначається $h(\alpha, T, \gamma)$. Зокрема, $h(\alpha, T) = h(\alpha, T, \nu)$, де ν – тривіальне розбиття.

Ентропія автоморфізму T визначається як

$$h(T) = \sup_{\alpha \in \mathcal{L}} h(\alpha, T).$$

Нагадаємо дуже важливу формулу Пінскера:

$$h(\alpha \vee \beta, T) = h(\alpha, T) + H\left(\beta \left|\alpha_T \vee \beta_T^-\right.\right),$$

і, більш загально,

$$h(\alpha \vee \beta, T, \gamma) = h(\alpha, T, \gamma) + H\left(\beta \left|\alpha_T \vee \beta_T^- \vee \gamma\right.\right)$$

для будь-якого T-інваріантного вимірного розбиття γ.

4.1.1 Ентропія та алгебри Пінскера для матричних нільпотентних груп

Розпочнемо наші розгляди з найпростішого випадку групи Гейзенберга, маючи на меті подальше перенесення на більш широкий клас нільпотентних груп. Нехай G – нільпотентна порядку 2 зчисленна матрична група

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n_3 & n_1 \\ 0 & 1 & n_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \ n_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Зафіксуємо твірні

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1\ 0\ 1 \\ 0\ 1\ 0 \\ 0\ 0\ 1 \end{pmatrix}; \qquad T_2 = \begin{pmatrix} 1\ 0\ 0 \\ 0\ 1\ 1 \\ 0\ 0\ 1 \end{pmatrix}; \qquad T_3 = \begin{pmatrix} 1\ 1\ 0 \\ 0\ 1\ 0 \\ 0\ 0\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тут T_1 генерує центр Z групи G. Визначимо лінійне відношення порядку на цих генераторах як $T_3 > T_2 > T_1$, разом із відповідним *лексикографічним упорядкуванням* на G: $T_3^{j_3}T_2^{j_2}T_1^{j_1} < T_3^{k_3}T_2^{k_2}T_1^{k_1}$ у тому й тільки тому випадку, коли (j_3, j_2, j_1) лексикографічно менше, ніж (k_3, k_2, k_1). Це відношення порядку є інваріантним щодо лівих зсувів на групі G, отже маємо *поняття "минулого"* на G, що визначається як підмножина елементів групи G, які менші від одиниці.

Серед скінченних підмножин в G ми відокремлюємо *прямокутники* $\{T_3^{i_3}T_2^{i_2}T_1^{i_1} : m_1 \le i_1 \le M_1,\ m_2 \le i_2 \le M_2,\ m_3 \le i_3 \le M_3\}$. Нехай задана послідовність прямокутників $\{\rho_n\}$; ми казатимемо, що *модуль* ρ_n *прямує до нескінченності*, якщо $\min\limits_{k=1,2,3}(M_k(n) - m_k(n)) \to \infty$, $\frac{M_1(n)-m_1(n)}{M_2(n)-m_2(n)} \to \infty$, $\frac{M_1(n)-m_1(n)}{M_3(n)-m_3(n)} \to \infty$ для $n \to \infty$.

Твердження 4.1.1. *Нехай* $\{\rho_n\}$ *– послідовність прямокутників в групі* G *із модулем, що прямує до нескінченності. Тоді* $\{\rho_n\}$ *утворюють систему множин Фьолнера в групі* G.

Доведення. Внаслідок співвідношення

$$\left(T_3^{i_3}T_2^{i_2}T_1^{i_1}\right)^{-1} T_3^{k_3}T_2^{k_2}T_1^{k_1} = T_3^{k_3-i_3}T_2^{k_2-i_2}T_1^{k_1+i_2(k_3-i_3)-i_1},$$

для будь-якого $g = \left(T_3^{i_3}T_2^{i_2}T_1^{i_1}\right)^{-1}$ і прямокутника ρ, заданого через $0 \le k_j \le p_j$, $j = 1, 2, 3$, маємо

$$S(g\rho_n \Delta \rho_n) \le 2|i_3|p_1p_2 + 2|i_2|p_1p_3 + 2(|i_1| + |i_2i_3| + |i_2|p_3)p_2p_3,$$

звідки

$$\frac{S(g\rho_n\Delta\rho_n)}{S(\rho_n)} \le \frac{2|i_3|}{p_3} + \frac{2|i_2|}{p_2} + \frac{2(|i_1| + |i_2i_3| + |i_1|p_3)}{p_1} \to 0$$

для $n \to \infty$. □

Нехай група G діє на просторі $(X, \mathcal{A}, \mu)$. З Твердження 4.1.1 та [142, Теорема 1] випливає, що для будь-якої послідовності прямокутників $\{\rho_n\}$ в G, чий модуль прямує до нескінченності, і будь-якого $\alpha \in \mathcal{L}$ існує границя $\frac{1}{S(\rho_n)} H\left(\alpha_{\rho_n}\right)$. Ця границя не залежить від вибору ρ_n. Вона називається середньою ентропією розбиття α відносно групи перетворень G і позначається $h(\alpha, G)$. Проте вона може бути представлена іншими формулами.

Запровадимо поняття минулого для розбиття α відносно дії групи G, поклавши $\alpha_G^- = \bigvee T_3^{k_3} T_2^{k_2} T_1^{k_1} \alpha$, де перетин береться по всіх трійцях $(k_3, k_2, k_1) \in \mathbb{Z}^3$, що лексикографічно менші від $(0,0,0)$. Більш розлого, $\alpha_G^- = \alpha_{T_1}^- (\alpha_{T_1})_{T_2}^- (\alpha_{T_1 T_2})_{T_3}^-$. Як відомо з [142, 158], для будь-якого розбиття $\alpha \in \mathcal{L}$, $h(\alpha, G) = H\left(\alpha \left| \alpha_G^- \right.\right)$.

Перейдемо до розгляду більш загального випадку групи $UT_n(\mathbb{Z})$ нільпотентних верхньо-трикутних матриць з цілими елементами. Виявляється і буде використано у подальшому, що ця група має послідовність множин Фьолнера, які є також фундаментальними областями для спадаючої послідовності підгруп скінченного індексу з тривіальним перетином.

Нехай I – одинична матриця, а u_{ij} - матрична одиничка (матриця, чий елемент з індексами k, p дорівнює $\delta_{ik}\delta_{jp}$). Розглянемо систему твірних для $UT_n(\mathbb{Z})$, що складається з матриць $T_{ij} = I + u_{ij}$, $i < j$, $1 \le i, j \le n$. Запровадимо лінійне відношення порядку на цих твірних, покладаючи $T_{ij} < T_{i'j'}$ для $j - i > j' - i'$ або $j - i = j' - i'$ і $i < i'$. Далі це відношення порядку поширюється на всю групу $UT_n(\mathbb{Z})$ за лексикографічним правилом. У такий спосіб, $UT_n(\mathbb{Z})$ стає впорядкованою групою [158]. Дійсно, T_{ij} відіграють роль бази Мальцева [97] для $UT_n(\mathbb{Z})$.

Нехай p – просте число. Для кожного $m \in \mathbb{N}$ розглянемо підгрупу Γ_m, генеровану елементами $T_{ij}^{p^{m(j-i)}}$. Зрозуміло, що кожна Γ_m є підгрупою скінченного індексу в $UT_n(\mathbb{Z})$, $\Gamma_{m+1} \subset \Gamma_m$, і при цьому $\bigcap\limits_m \Gamma_m = \{I\}$.

Комутаційні співвідношення в $UT_n(\mathbb{Z})$ мають вигляд:

$$T_{ij}T_{i'j'}T_{ij}^{-1}T_{i'j'}^{-1} = \begin{cases} T_{ij'}, & \text{якщо } j = i', \\ T_{ji'}^{-1}, & \text{якщо } i = j', \\ I, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

З цих співвідношень випливає, що фундаментальна область для Γ_m може бути представлена у вигляді прямокутника

$$\rho_m = \Big\{ T_{n-1,n}^{k_{n-1,n}} \cdot \ldots \cdot T_{1n}^{k_{1n}} : \\ l_{n-1,n}(m) \le k_{n-1,n} \le L_{n-1,n}(m), \ldots, l_{1n}(m) \le k_{1n} \le L_{1n}(m) \Big\},$$

де $l_{ij}(m) = -\left[\frac{p^{m(j-i)}}{2}\right]$, $L_{ij}(m) = \left[\frac{p^{m(j-i)}+1}{2}\right]$, а $[x]$ – ціла частина числа x.

Внаслідок вибору твірних, множення в групі $UT_n(\mathbb{Z})$ має вигляд:

$$T_{n-1,n}^{k_{n-1,n}} \cdot \ldots \cdot T_{1n}^{k_{1n}} \cdot T_{n-1,n}^{q_{n-1,n}} \cdot \ldots \cdot T_{1n}^{q_{1n}} = T_{n-1,n}^{k_{n-1,n}+q_{n-1,n}+f_{n-1,n}} \cdot \ldots \cdot T_{1n}^{k_{1n}+q_{1n}+f_{1n}},$$

де $f_{n-1,n} = 0$, а для $1 \le i < j \le n$ цілозначна поліноміальна функція (див. [97]) $f_{ij} = f_{ij}(k_{i,'j'}; q_{i'',j''} | \, T_{i',j'}, T_{i'',j''} \ge T_{i,j})$ не залежить від $k_{i,'j'}$, $q_{i'',j''}$ для $T_{i',j'}, T_{i'',j''} \le T_{i,j}$.

Нехай

$$F_{i,j}(m) = \max\{|f_{i,j}(k_{1,n}, \ldots, k_{n-1,n}; q_{1,n}, \ldots, q_{n-1,n})| : \\ l_{i,j}(m) \le k_{i,j} \le L_{i,j}(m);\ -m \le q_{i,j} \le m\},$$

для $1 \le i < j \le n$. Проста перевірка показує, що

$$F_{ij}(m) \le \mathrm{const}(i,j) m p^{m(j-i-1)},$$

звідки

$$\frac{F_{i,j}(m)}{L_{i,j}(m) - l_{i,j}(m)} \to 0 \tag{4.1.2}$$

для $m \to \infty$.

Ми стверджуємо, що послідовність прямокутників ρ_m утворює праву послідовність Фьолнера. Зафіксуємо $g = T_{n-1,n}^{q_{n-1,n}} \cdot \ldots \cdot T_{1,n}^{q_{1,n}}$. Для перевірки збіжності $\frac{\#(\rho_n g \Delta \rho_n)}{\#(\rho_n)} \to 0$ досить зазначити, що $T_{n-1,n}^{k_{n-1,n}} \cdot \ldots \cdot T_{1,n}^{k_{1,n}} \cdot g =$

$T_{n-1,n}^{k_{n-1,n}+q_{n-1,n}+\xi_{n-1,n}(k_{1,n},\ldots,k_{n-1,n})} \cdot \ldots \cdot T_{1,n}^{k_{1,n}+q_{1,n}+\xi_{1,n}(k_1,\ldots,k_M)}$, де $\xi_{i,j}$ походить від $f_{i,j}$ шляхом фіксації $q_{1,n}, \ldots, q_{n-1,n}$ (зокрема, $\xi_{i,j}$ не залежить від $k_{i',j'}$ для $T_{i',j'} \leq T_{i,j}$). Наразі наше твердження є очевидним наслідком умови (4.1.2), наведеної вище. Подібний аргумент показує, що ρ_m утворюють також і ліву послідовність Фьолнера.

Нехай G – довільна зчисленна аменабельна група, (X, μ) – G-простір з інваріантною ймовірнісною мірою μ, і α – розбиття простору X зі скінченною ентропією. *Середня ентропія* $h(\alpha, G)$ визначається як

$$h(\alpha, G) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\#(\rho_n)} H\left(\bigvee_{g\in\rho_n} g\alpha\right),$$

де ρ_n – права послідовність Фьолнера в групі G. З результатів робіт [142, 158] випливає, що у випадку $G = UT_n(\mathbb{Z})$, $h(\alpha, UT_n(\mathbb{Z}))$ може бути записане у термінах "минулого" в групі $UT_n(\mathbb{Z})$ відносно лівоінваріантного відношення порядку:

$$h(\alpha, UT_n(\mathbb{Z})) = H\left(\alpha \,\middle|\, \alpha^-_{UT_n(\mathbb{Z})}\right),$$

де $\alpha^-_{UT_n(\mathbb{Z})} = \bigvee\limits_{g<e} g\alpha$.

Наступні Лема 4.1.2, Твердження 4.1.3 і Наслідок 4.1.4 незалежні від локального контексту і є чинними для довільної зчисленної аменабельної групи G, що буде застосовано у подальшому.

Для підмножини $E \subset G$ і розбиття α, ми використовуватимемо позначення α_E для розбиття $\bigvee\limits_{g\in E} g\alpha$.

Лема 4.1.2. *[67, Лема 4] Нехай G_r – підгрупа групи G скінченного індексу r, δ_r – (скінченна) підмножина в G, що перетинає кожен клас суміжності підгрупи G_r рівно один раз, і $\alpha^r = \alpha_{\delta_r}$. Тоді*

$$h(\alpha^r, G_r) = rh(\alpha, G).$$

Твердження 4.1.3. *Для $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$,*

$$h(\beta, G) \leq h(\alpha, G) + H(\beta|\alpha_G).$$

Доведення. Нехай ρ_n – права послідовність Фьолнера в групі G. Маємо:

$$H(\beta_{\rho_n}) \le H\left(\beta_{\rho_n}\alpha_{\rho_n\rho_p}\right) = H\left(\alpha_{\rho_n\rho_p}\right) + H\left(\beta_{\rho_n}\left|\alpha_{\rho_n\rho_p}\right.\right) \le$$
$$\le H\left(\alpha_{\rho_n\rho_p}\right) + \sum_{f\in\rho_n} H\left(f\beta\left|\alpha_{\rho_n\rho_p}\right.\right) \le H\left(\alpha_{\rho_n\rho_p}\right) + \sum_{f\in\rho_n} H\left(f\beta\left|\alpha_{f\rho_p}\right.\right) =$$
$$= H\left(\alpha_{\rho_n\rho_p}\right) + \#(\rho_n) H\left(\beta\left|\alpha_{\rho_p}\right.\right).$$

Внаслідок властивості Фьолнера $\frac{\#(\rho_n\rho_p)}{\#(\rho_n)} \to 1$ для $n \to \infty$. Отже, ділячи попередню нерівність на $\#(\rho_n)$ та спрямовуючи n до нескінченності, одержуємо для кожного фіксованого p

$$h(\beta, G) \le h(\alpha, G) + H\left(\beta\left|\alpha_{\rho_p}\right.\right).$$

Залишається спрямувати p до нескінченності і зазначити, що $H\left(\beta\left|\alpha_{\rho_p}\right.\right) \to H(\beta|\alpha_G)$ для одержання бажаного співвідношення. □

Наслідок 4.1.4. *Для $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$*

$$h(\alpha \vee \beta, G) \le h(\alpha, G) + H(\beta|\alpha_G).$$

Доведення. Це легко виводиться з Твердження 4.1.3 шляхом заміни там β на $\alpha \vee \beta$, з подальшим застосуванням (4.1.1). □

Знову обмежимося випадком $G = UT_n(\mathbb{Z})$.

Теорема 4.1.5. *(Формула Пінскера) Якщо $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$, то*

$$h(\alpha \vee \beta, UT_n(\mathbb{Z})) = h(\alpha, UT_n(\mathbb{Z})) + H\left(\beta\left|\beta^-_{UT_n(\mathbb{Z})} \vee \alpha_{UT_n(\mathbb{Z})}\right.\right). \qquad (4.1.3)$$

Доведення. Зазначимо, що в окремому випадку групи Гейзенберга доведення цієї формули є таким же, як і в [26]. Воно базується на Лемі 4.1.2 та Наслідку 4.1.4. Ми продемонструємо перенесення цього аргументу на випадок групи $UT_n(\mathbb{Z})$. Послідовність Фьолнера $\delta_m \subset UT_n(\mathbb{Z})$ складається з фундаментальних областей для спадаючої послідовності підгруп скінченного індексу Γ_m з тривіальним перетином. Застосовуючи Лему 4.1.2 і Наслідок 4.1.4, маємо:

$$h(\alpha \vee \beta, UT_n(\mathbb{Z})) = \frac{1}{\#\delta_m} h(\alpha_{\delta_m} \vee \beta_{\delta_m}, \Gamma_m) \leq$$
$$\leq \frac{1}{\#\delta_m} h(\alpha_{\delta_m}, \Gamma_m) + \frac{1}{\#\delta_m} H(\beta_{\delta_m} | (\alpha_{\delta_m})_{\Gamma_m}) =$$
$$= h(\alpha, UT_n(\mathbb{Z})) + \frac{1}{\#\delta_m} H\left(\beta_{\delta_m} | \alpha_{UT_n(\mathbb{Z})}\right).$$

Застосуємо умовну версію визначення середньої ентропії для одержання $\frac{1}{\#\delta_m} H\left(\beta_{\delta_m} | \alpha_{UT_n(\mathbb{Z})}\right) \to h(\beta, UT_n(\mathbb{Z}), \alpha_{UT_n(\mathbb{Z})}) = H\left(\beta \,\middle|\, \beta^-_{UT_n(\mathbb{Z})} \vee \alpha_{UT_n(\mathbb{Z})}\right)$. Отже, маємо

$$h(\alpha \vee \beta, UT_n(\mathbb{Z})) \leq h(\alpha, UT_n(\mathbb{Z})) + H\left(\beta \,\middle|\, \beta^-_{UT_n(\mathbb{Z})} \vee \alpha_{UT_n(\mathbb{Z})}\right).$$

Для одержання зворотної нерівності розглянемо співвідношення

$$\frac{1}{\#\delta_m} H(\alpha_{\delta_m} \vee \beta_{\delta_m}) = \frac{1}{\#\delta_m} H(\alpha_{\delta_m}) + \frac{1}{\#\delta_m} H(\beta_{\delta_m} | \alpha_{\delta_m}) \geq$$
$$\geq \frac{1}{\#\delta_m} H(\alpha_{\delta_m}) + \frac{1}{\#\delta_m} H\left(\beta_{\delta_m} | \alpha_{UT_n(\mathbb{Z})}\right)$$

та спрямуємо m до нескінченності, чим завершуємо доведення. □

Переходимо до опису алгебр Пінскера в окремому випадку групи Гейзенберга G. Наш аргумент припускає природне поширення, що буде подано у подальшому.

Нехай G діє на просторі Лебега $(X, \mathcal{A}, \mu)$ зі скінченною інваріантною мірою μ. Кожному вимірному розбиттю α поставимо у відповідність розбиття $\pi(\alpha)$, що визначається як найменша верхня границя всіх тих розбиттів $\beta \in \mathcal{L}$, для яких $\beta \leq \alpha_G$ і $h(\beta, G) = 0$. Зокрема, для $\alpha = \varepsilon$ маємо $\pi(\varepsilon) = \pi(G)$, розбиття Пінскера динамічної системи (X, G). Ми маємо на меті подання явного опису розбиття $\pi(\alpha)$.

Для $\alpha \in \mathcal{L}$ розглянемо

$$\widehat{\alpha} = \bigwedge_n \left(T_1^{-n} \alpha^-_{T_1} \vee T_2^{-n} (\alpha_{T_1})^-_{T_2} \vee T_3^{-n} (\alpha_{T_1 T_2})^-_{T_3}\right).$$

Аби зробити це розбиття інваріантним, покладемо $\alpha_\infty = \bigvee\limits_n \widehat{\alpha}_{\rho_n}$, де ρ_n – послідовність прямокутників в групі G як у наших попередніх розглядах, отже вони утворюють праву послідовність Фьолнера в G.

Теорема 4.1.6. *Для будь-якого розбиття $\alpha \in \mathcal{L}$ маємо $\pi(\alpha) = \alpha_\infty$.*

Лема 4.1.7. *Якщо $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$, то*

$$\lim_{n\to\infty} H\left(\alpha \left| T_3^{-n}(\beta_G^-)\alpha_G^-\right.\right) = H(\alpha|\alpha_G^-).$$

Доведення. Застосуємо формулу Пінскера (4.1.3) до α і $T_3^{-n}\beta$:

$$h(\alpha \vee T_3^{-n}\beta, G) = h(\alpha, G) + H\left(T_3^{-n}\beta \left| (T_3^{-n}\beta)_G^- \vee \alpha_G\right.\right) = \\ = h(\alpha, G) + H\left(\beta \left| \beta_G^- \vee \alpha_G\right.\right),$$

де остання рівність є наслідком очевидного співвідношення $(T_3^{-n}\beta)_G^- = T_3^{-n}\left(\beta_G^-\right)$.

З іншого боку, застосування (4.1.1) дає

$$h(\alpha \vee T_3^{-n}\beta, G) = H\left(\alpha \vee T_3^{-n}\beta \left| \alpha_G^- \vee (T_3^{-n}\beta)_G^-\right.\right) = \\ = H\left(\alpha \left| \alpha_G^- \vee T_3^{-n}\left(\beta_G^-\right)\right.\right) + H\left(T_3^{-n}\beta \left| \alpha \vee \alpha_G^- \vee T_3^{-n}\left(\beta_G^-\right)\right.\right) = \\ = H\left(\alpha \left| \alpha_G^- \vee T_3^{-n}\left(\beta_G^-\right)\right.\right) + H\left(\beta \left| T_3^{n}\left(\alpha \vee \alpha_G^-\right) \vee \beta_G^-\right.\right)$$

Легко бачити, що $T_3^n\left(\alpha \vee \alpha_G^-\right)$ – зростаюча послідовність розбиттів, чий перетин є α_G, звідки $H\left(\beta \left| T_3^n\left(\alpha \vee \alpha_G^-\right) \vee \beta_G^-\right.\right) \to H\left(\beta \left| \alpha_G \vee \beta_G^-\right.\right)$. Порівняння цих двох представлень для $h(\alpha \vee T_3^{-n}\beta, G)$ доводить наше твердження. $\Box$

Доведення Теореми 4.1.6. На початку припустимо, що $\beta \in \mathcal{L}$, і $\beta \le \alpha_\infty$. Зазначимо, що множина розбиттів, які менші від якогось $\widehat{\alpha}_{\rho_n}$, є щільною в множині розбиттів, які менші від α_∞. У цьому контексті досить показати, що $h(\beta, G) = 0$ для $\beta \in \mathcal{L}$, $\beta \le \widehat{\alpha}_{\rho_n}$. Насправді ми тут розглядаємо випадок $\beta \le \widehat{\alpha}$; загальний випадок можна розглянути у подібний спосіб. Для всіх k_1, k_2, k_3 маємо

$$H\left(\beta \left| T_1^{-k_1}\alpha_{T_1}^- \vee T_2^{-k_2}(\alpha_{T_1})_{T_2}^- \vee T_3^{-k_3}(\alpha_{T_1T_2})_{T_3}^- \vee \beta_{T_1}^- \vee (\beta_{T_1})_{T_2}^- \vee (\beta_{T_1T_2})_{T_3}^-\right.\right) = 0.$$

Нехай $k_1 \to \infty$, тоді застосування граничного співвідношення [26, (21')] для єдиного перетворення T_1 та T_1-інваріантного розбиття $\sigma = T_2^{-k_2}(\alpha_{T_1})_{T_2}^- \vee T_3^{-k_3}(\alpha_{T_1T_2})_{T_3}^- \vee (\beta_{T_1})_{T_2}^- \vee (\beta_{T_1T_2})_{T_3}^-$ дає

$$H\left(\beta \left| T_2^{-k_2}(\alpha_{T_1})_{T_2}^- \vee T_3^{-k_3}(\alpha_{T_1T_2})_{T_3}^- \vee \beta_{T_1}^- \vee (\beta_{T_1})_{T_2}^- \vee (\beta_{T_1T_2})_{T_3}^-\right.\right) = 0,$$

звідки

$$H\left(\beta\left|T_2^{-k_2}(\alpha_{T_1}^- \vee (\alpha_{T_1})_{T_2}^-) \vee T_3^{-k_3}(\alpha_{T_1T_2})_{T_3}^- \vee \beta_{T_1}^- \vee (\beta_{T_1})_{T_2}^- \vee (\beta_{T_1T_2})_{T_3}^-\right.\right) = 0.$$

Знову застосуємо аналог Леми 4.1.7 для $G = \mathbb{Z}^2$ [26] із $\sigma = T_3^{-k_3}(\alpha_{T_1T_2})_{T_3}^- \vee (\beta_{T_1T_2})_{T_3}^-$ і твірними T_1, T_2 аби одержати

$$H\left(\beta\left|T_3^{-k_3}(\alpha_{T_1T_2})_{T_3}^- \vee \beta_{T_1}^- \vee (\beta_{T_1})_{T_2}^- \vee (\beta_{T_1T_2})_{T_3}^-\right.\right) = 0,$$

звідки також маємо

$$H\left(\beta\left|T_3^{-k_3}(\alpha_{T_1}^- \vee (\alpha_{T_1})_{T_2}^- \vee (\alpha_{T_1T_2})_{T_3}^-) \vee \beta_{T_1}^- \vee (\beta_{T_1})_{T_2}^- \vee (\beta_{T_1T_2})_{T_3}^-\right.\right) = 0.$$

Отже, внаслідок Леми 4.1.7 маємо $H(\beta|\beta_G^-) = 0$, що й треба було довести.

Навпаки, нехай $\beta \in \mathcal{L}$, $\beta \leq \alpha_G$, і $h(\beta, G) = 0$. Нагадаємо, що для будь-якої підгрупи G_p скінченного індексу p, $h(\beta, G_p) \leq h(\beta^p, G_p) = ph(\beta, G) = 0$. Для заданого розбиття $\gamma \in \mathcal{L}$, подвійне застосування формули Пінскера (4.1.3) дає

$$H\left(\gamma\left|\gamma_{G_p}^-\right.\right) + H\left(\beta\left|\beta_{G_p}^- \vee \gamma_{G_p}\right.\right) = H\left(\beta\left|\beta_{G_p}^-\right.\right) + H\left(\gamma\left|\gamma_{G_p}^- \vee \beta_{G_p}\right.\right),$$

і оскільки $H\left(\beta\left|\beta_{G_p}^- \vee \gamma_{G_p}\right.\right) = H\left(\beta\left|\beta_{G_p}^-\right.\right) = 0$, одержуємо

$$H\left(\gamma\left|\gamma_{G_p}^-\right.\right) = H\left(\gamma\left|\gamma_{G_p}^- \vee \beta_{G_p}\right.\right),$$

звідки $H\left(\gamma\left|\gamma_{G_p}^-\right.\right) = H\left(\gamma\left|\gamma_{G_p}^- \vee \beta\right.\right)$.

Нехай G_p генерована T_1^n, T_2^n, T_3^n, тоді $\gamma_{G_p}^- \leq T_1^{-n}\gamma_{T_1}^- \vee T_2^{-n}(\gamma_{T_1})_{T_2}^- \vee T_3^{-n}(\gamma_{T_1T_2})_{T_3}^-$. Отже, маємо

$$H(\gamma|\beta) \geq H\left(\gamma\left|\gamma_{G_p}^- \vee \beta\right.\right) = H\left(\gamma\left|\gamma_{G_p}^-\right.\right) \geq$$
$$\geq H\left(\gamma\left|T_1^{-n}\gamma_{T_1}^- \vee T_2^{-n}(\gamma_{T_1})_{T_2}^- \vee T_3^{-n}(\gamma_{T_1T_2})_{T_3}^-\right.\right).$$

Перейдемо у цьому співвідношенні до границі з $n \to \infty$, одержуючи $H(\gamma|\beta) \geq H(\gamma|\widehat{\gamma})$. У випадку, коли $\gamma \leq \alpha_\rho$ для певного прямокутника ρ, зазначимо таке:

$$H(\gamma|\beta) \geq H(\gamma|\widehat{\gamma}) \geq H(\gamma|\widehat{\alpha}_\rho) \geq H(\gamma|\alpha_\infty).$$

Внаслідок умови $\beta \leq \alpha_G$, β може бути представлене як границя у метриці d послідовності розбиттів γ_n із $\gamma_n \leq \alpha_{\rho_n}$ для певної послідовності прямокутників ρ_n, чиїм об'єднанням є G. Отже, граничний перехід у попередній нерівності дає $0 = H(\beta|\beta) = H(\beta|\alpha_\infty)$, тобто $\beta \leq \alpha_\infty$, звідки $\pi(\alpha) \leq \alpha_\infty$. $\square$

Визначення А. Кажуть, що динамічна система (X, G) має цілком позитивну ентропію (ц.п.е.), якщо $\pi(G) = \pi(\varepsilon) = \nu$; еквівалентним чином, для будь-якого розбиття $\beta \in \mathcal{L}$, з $h(\beta, G) = 0$ випливає $\beta = \nu$.

Зафіксуємо послідовність підгруп скінченного індексу групи G, згадану у доведенні Теореми 4.1.6: для кожного $n \in \mathbb{N}$, підгрупа Γ_n генерована елементами T_1^n, T_2^n, T_3^n. Це використано у формулюванні наступного

Твердження 4.1.8. *Динамічна система (X, G) має ц.п.е. тоді й тільки тоді, коли для будь-якого розбиття $\alpha \in \mathcal{L}$ має місце $H(\alpha) = \sup\limits_{\Gamma_n} h(\alpha, \Gamma_n)$.*

Доведення. Припустимо, що (X, G) має ц.п.е. і задано скінченне розбиття α. Ми стверджуємо, що $\bigwedge\limits_{\Gamma_n} \alpha^-_{\Gamma_n} \leq \pi(G)$, тобто за наших припущень, $\alpha^-_{\Gamma_n} \to \nu$. Дійсно, нехай $\gamma \leq \bigwedge\limits_{\Gamma_n} \alpha^-_{\Gamma_n}$, тобто $H\left(\gamma \,\middle|\, \bigwedge\limits_{\Gamma_n} \alpha^-_{\Gamma_n}\right) = 0$. Оскільки $\bigwedge\limits_{\Gamma_n} \alpha^-_{\Gamma_n} \leq T_1^{-n} \alpha^-_{T_1} \vee T_2^{-n} (\alpha_{T_1})^-_{T_2} \vee T_3^{-n} (\alpha_{T_1 T_2})^-_{T_3}$, маємо також $H\left(\gamma \,\middle|\, T_1^{-n} \alpha^-_{T_1} \vee T_2^{-n} (\alpha_{T_1})^-_{T_2} \vee T_3^{-n} (\alpha_{T_1 T_2})^-_{T_3}\right) = 0$. Здійснюючи граничний перехід із $n \to \infty$, одержуємо $H\left(\gamma | \widehat{\alpha}\right) = 0$, тобто $\gamma \leq \widehat{\alpha} \leq \alpha_\infty \leq \pi(\alpha) \leq \pi(G)$, чим доведено наше твердження. З цього випливає

$$H(\alpha) \geq h(\alpha, \Gamma_n) = H\left(\alpha \,\middle|\, \alpha^-_{\Gamma_n}\right) \to H(\alpha),$$

що й треба було довести.

Навпаки, якщо $h(\alpha, G) = 0$, внаслідок Леми 4.1.2 маємо $h(\alpha, G_p) = 0$ для всіх підгруп скінченного індексу G_p, тобто $H(\alpha) = 0$, звідки одержуємо ц.п.е. $\square$

4.1.2 К-системи та інваріантні розбиття для групи Гейзенберга

Ми маємо на меті відтворити у належному вигляді теорію Дж. Конца [26] і Б. Камінського [93] у випадку скінченно-генерованої нільпотентної групи без кручень. Для спрощення запису ми наводимо наші побудови у випадку групи Гейзенберга. Як і вище, очевидна модифікація нашої техніки працює також у загальному контексті.

Нехай G – група Гейзенберга. Ми потребуємо поняття *σ-умовної ентропії* для G-інваріантного вимірного розбиття σ, що визначається як $h_\sigma(G) = \sup\limits_{\alpha \in \mathcal{L}} h(\alpha, G, \sigma)$. Тут

$$h(\alpha, G, \sigma) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\#(\rho_n)} H\left(\bigvee_{g \in \rho_n} g\alpha \middle| \sigma\right)$$

– умовна середня ентропія розбиття α. У нашому випадку впорядкованої групи G маємо $h(\alpha, G, \sigma) = H\left(\alpha \left| \alpha_G^- \vee \sigma\right.\right)$.

Під замкненням Пінскера $\overline{\sigma}$ розбиття σ відносно G матиметься на увазі перетин усіх розбиттів $\alpha \in \mathcal{L}$, для яких $h(\alpha, G, \sigma) = 0$. Зрозуміло, шо для $\sigma = \nu$ маємо $\overline{\sigma} = \pi(G)$. Нижче подано найпростіші властивості $\overline{\sigma}$:

(1) $\sigma \leq \overline{\sigma}$,

(2) $\overline{\sigma}$ є G-інваріантним,

(3) $\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\sigma}$,

(4) для будь-якого автоморфізму T, що комутує з дією групи G, маємо $\overline{T\sigma} = T\overline{\sigma}$.

Існує σ-умовна версія теореми Рохліна-Сіная стосовно існування досконалих розбиттів для єдиного автоморфізму S [152], чиє узагальнення подано нижче. А саме, маємо (див. [93, лема 1]):

Лема 4.1.9. *Існує вимірне розбиття ζ, для якого*
(i) $\sigma \leq S^{-1}\zeta \leq \zeta$,
(ii) $\bigvee\limits_{n=0}^{\infty} S^n\zeta = \varepsilon$,
(iii) $\bigwedge\limits_{n=0}^{\infty} S^{-n}\zeta = \overline{\sigma}$,
(iv) $h(\zeta, S, \sigma) = h(S, \sigma)$.

Лема 4.1.10. *Для кожного розбиття $\alpha \in \mathcal{L}$ і G-інваріантних вимірних розбиттів σ_1, σ_2 має місце $h(\alpha, G, \overline{\sigma}_1 \vee \sigma_2) = h(\alpha, G, \sigma_1 \vee \sigma_2)$.*

Доведення майже співпадає з доведенням [93, лема 2]. $\square$

Ми маємо на меті визначити спеціальні властивості інваріантності, пов'язані з лексикографічним упорядкуванням в G. З цього моменту ми заміняємо звичайний термін "G-інваріантність" ($g\zeta = \zeta$ для всіх $g \in G$) терміном "*тотальна інваріантність*".

Вимірне розбиття ζ називається *G-інваріантним*, якщо $T_1^{-1}\zeta \leq \zeta$, $T_2^{-1}\zeta_{T_1} \leq \zeta$, і $T_3^{-1}\zeta_{T_1T_2} \leq \zeta$. Зазначимо, що ζ є G-інваріантним тоді й тільки тоді, коли $T_3^{k_3}T_2^{k_2}T_1^{k_1}\zeta \leq \zeta$ для тих трійок (k_1, k_2, k_3), які лексикографічно менші від $(0, 0, 0)$. Інше важливе спостереження полягає в тому, що для G-інваріантного розбиття ζ має місце $\zeta_G^- = T_1^{-1}\zeta$.

Вимірне розбиття ζ називається *сильно інваріантним*, якщо $T_1^{-1}\zeta \leq \zeta$, $\bigwedge\limits_{n=0}^{\infty} T_1^{-n}\zeta = T_2^{-1}\zeta_{T_1}$ і $\bigwedge\limits_{n=0}^{\infty} T_2^{-n}\zeta_{T_1} = T_3^{-1}\zeta_{T_1T_2}$. Зрозуміло, що ця властивість сильніша за інваріантність.

Вимірне розбиття ζ називається *G-вичерпним*, якщо ζ сильно інваріантне і $\zeta_G = \varepsilon$.

Лема 4.1.11. *Припустимо, що вимірне розбиття ζ сильно інваріантне, $\alpha \in \mathcal{L}$, $\alpha \leq T_3^p\zeta_{T_1T_2}$ для певного додатного цілого p, і $h(\alpha, G) = 0$. Тоді $\alpha \leq \bigwedge\limits_{n=0}^{\infty} T_3^{-n}\zeta_{T_1T_2}$.*

Доведення. Спочатку доведемо наше твердження за умови $\alpha \in \mathcal{L}$, $\alpha \leq T_3^pT_2^q\zeta_{T_1}$ для певного цілого q. Внаслідок $h(\alpha, G) = 0$ і Леми 4.1.2, для підгрупи скінченного індексу G_k, генерованої T_1^k, T_2^k, T_3, маємо $h(\alpha, G_k) = 0$. Застосування умовної версії формули Пінскера (4.1.3) у випадку $G = \mathbb{Z}$, генерованої T_1^k [26], дає для будь-якого розбиття $\gamma \in \mathcal{L}$

$$H\left(\alpha\vee\gamma\left|\alpha^{-}_{T_1^k}\vee\gamma^{-}_{T_1^k}\vee\left(\alpha_{T_1^k}\right)^{-}_{T_2^k}\vee\left(\gamma_{T_1^k}\right)^{-}_{T_2^k}\vee T_3^{p-1}\zeta_{T_1T_2}\right.\right)=$$
$$=H\left(\alpha\left|\alpha^{-}_{T_1^k}\vee\left(\alpha_{T_1^k}\right)^{-}_{T_2^k}\vee\left(\gamma_{T_1^k}\right)^{-}_{T_2^k}\vee T_3^{p-1}\zeta_{T_1T_2}\right.\right)+$$
$$+H\left(\gamma\left|\gamma^{-}_{T_1^k}\vee\alpha_{T_1^k}\vee\left(\alpha_{T_1^k}\right)^{-}_{T_2^k}\vee\left(\gamma_{T_1^k}\right)^{-}_{T_2^k}\vee T_3^{p-1}\zeta_{T_1T_2}\right.\right)$$
$$=H\left(\gamma\left|\gamma^{-}_{T_1^k}\vee\left(\alpha_{T_1^k}\right)^{-}_{T_2^k}\vee\left(\gamma_{T_1^k}\right)^{-}_{T_2^k}\vee T_3^{p-1}\zeta_{T_1T_2}\right.\right)+$$
$$+H\left(\alpha\left|\alpha^{-}_{T_1^k}\vee\gamma_{T_1^k}\vee\left(\alpha_{T_1^k}\right)^{-}_{T_2^k}\vee\left(\gamma_{T_1^k}\right)^{-}_{T_2^k}\vee T_3^{p-1}\zeta_{T_1T_2}\right.\right)$$

З наших припущень щодо α і сильної інваріантності ζ випливає, що $(\alpha_{T_1T_2})^{-}_{T_3}\leq T_3^{p-1}\zeta_{T_1T_2}$, отже

$$H\left(\alpha\left|\alpha^{-}_{T_1^k}\vee\left(\alpha_{T_1^k}\right)^{-}_{T_2^k}\vee\left(\gamma_{T_1^k}\right)^{-}_{T_2^k}\vee T_3^{p-1}\zeta_{T_1T_2}\right.\right)=$$
$$=H\left(\alpha\left|\alpha^{-}_{T_1^k}\vee\gamma_{T_1^k}\vee\left(\alpha_{T_1^k}\right)^{-}_{T_2^k}\vee\left(\gamma_{T_1^k}\right)^{-}_{T_2^k}\vee T_3^{p-1}\zeta_{T_1T_2}\right.\right)=0,$$

звідки

$$H\left(\gamma\left|\gamma^{-}_{T_1^k}\vee\alpha_{T_1^k}\vee\left(\alpha_{T_1^k}\right)^{-}_{T_2^k}\vee\left(\gamma_{T_1^k}\right)^{-}_{T_2^k}\vee T_3^{p-1}\zeta_{T_1T_2}\right.\right)=$$
$$=H\left(\gamma\left|\gamma^{-}_{T_1^k}\vee\left(\alpha_{T_1^k}\right)^{-}_{T_2^k}\vee\left(\gamma_{T_1^k}\right)^{-}_{T_2^k}\vee T_3^{p-1}\zeta_{T_1T_2}\right.\right)$$

для всіх k. Якщо припустити $\gamma\leq T_3^pT_2^qT_1^r\zeta$ для певного цілого r, маємо

$$H\left(\gamma\left|\alpha\vee T_3^{p-1}\zeta_{T_1T_2}\right.\right)\geq$$
$$\geq H\left(\gamma\left|\gamma^{-}_{T_1^k}\vee\alpha_{T_1^k}\vee\left(\alpha_{T_1^k}\right)^{-}_{T_2^k}\vee\left(\gamma_{T_1^k}\right)^{-}_{T_2^k}\vee T_3^{p-1}\zeta_{T_1T_2}\right.\right)=$$
$$=H\left(\gamma\left|\gamma^{-}_{T_1^k}\vee\left(\alpha_{T_1^k}\right)^{-}_{T_2^k}\vee\left(\gamma_{T_1^k}\right)^{-}_{T_2^k}\vee T_3^{p-1}\zeta_{T_1T_2}\right.\right)\geq$$
$$\geq H\left(\gamma\left|T_3^pT_2^qT_1^{r-k}\zeta\vee T_3^pT_2^{q-k}\zeta_{T_1}\vee T_3^{p-1}\zeta_{T_1T_2}\right.\right).$$

Якщо у цьому співвідношенні спрямувати k до нескінченності та застосувати сильну інваріантність ζ, одержимо

$$H\left(\gamma \middle| \alpha \vee T_3^{p-1}\zeta_{T_1T_2}\right) \geq H\left(\gamma \middle| T_3^pT_2^{q-1}\zeta_{T_1} \vee T_3^{p-1}\zeta_{T_1T_2}\right) = H\left(\gamma \middle| T_3^pT_2^{q-1}\zeta_{T_1}\right).$$

Оскільки це виконується для класу розбиттів γ, що є d-щільним у класі розбиттів $\alpha \in \mathcal{L}$, $\alpha \leq T_3^pT_2^q\zeta_{T_1}$, ми можемо замінити γ на α в останній нерівності, одержуючи

$$H\left(\alpha \middle| T_3^pT_2^{q-1}\zeta_{T_1}\right) = 0,$$

і отже ми вивели $\alpha \leq T_3^pT_2^{q-1}\zeta_{T_1}$ з $\alpha \leq T_3^pT_2^q\zeta_{T_1}$. Повторюючи це нескінченну кількість разів, одержуємо $\alpha \leq \bigwedge\limits_q T_3^pT_2^q\zeta_{T_1} = T_3^{p-1}\zeta_{T_1T_2}$. Наразі ми можемо позбавитись від більш тонкого припущення $\alpha \leq T_3^pT_2^q\zeta_{T_1}$ порівняно з тим, яке міститься у твердженні Леми, шляхом апроксимації, оскільки $\bigvee\limits_q T_3^pT_2^q\zeta_{T_1} = T_3^p\zeta_{T_1T_2}$.

Отже, ми вивели $\alpha \leq T_3^{p-1}\zeta_{T_1T_2}$ з $\alpha \leq T_3^p\zeta_{T_1T_2}$. Застосування індукції за p дозволяє одержати бажане твердження. □

Умовна версія Леми 4.1.11 також справедлива. А саме, маємо

Лема 4.1.12. *Нехай σ – G-тотально інваріантне розбиття. Припустимо також, що вимірне розбиття ζ сильно інваріантне, $\zeta \geq \sigma$, $\alpha \in \mathcal{L}$, $\sigma \leq \alpha \leq T_3^p\zeta_{T_1T_2}$ для певного додатного цілого p і $h_\sigma(\alpha, G) = 0$. Тоді $\alpha \leq \bigwedge\limits_{n=0}^{\infty} T_3^{-n}\zeta_{T_1T_2}$.*

Доведення. Можна відтворити доведення Леми 4.1.11, замінивши функціонали вигляду $H(\cdot|\cdot)$ на $H(\cdot| \cdot \vee\sigma)$ і $\pi(G)$ на $\overline{\sigma}$. □

Лема 4.1.13. *Для кожного G-вичерпного розбиття ζ, $\bigwedge\limits_{n=0}^{\infty} T_3^{-n}\zeta_{T_1T_2} \geq \pi(G)$.*

Доведення. Нехай $\alpha \in \mathcal{L}$ і $\alpha \leq \pi(G)$, тобто $h(\alpha, G) = 0$. Припустимо також, що $\beta \in \mathcal{L}$ і при цьому $\beta \leq T_3^p\zeta_{T_1T_2}$ для певного цілого p. Позначимо через G_k підгрупу скінченного індексу, генеровану T_1^k, T_2^k, T_3^k, тоді маємо $h(\alpha, G_k) = 0$. Оскільки ця підгрупа має майже ту ж саму структуру, що й

G, можемо застосувати формулу Пінскера (4.1.3) у такий спосіб:

$$h(\alpha \vee \beta, G_k) = h(\alpha, G_k) + H\left(\beta \left| \beta^-_{G_k} \vee \alpha_{G_k}\right.\right) = h(\beta, G_k) + H\left(\alpha \left| \alpha^-_{G_k} \vee \beta_{G_k}\right.\right).$$

З огляду на те, що $h(\alpha, G_k) = H\left(\alpha \left| \alpha^-_{G_k} \vee \beta_{G_k}\right.\right) = 0$, доходимо висновку про таке: $h(\beta, G_k) = H\left(\beta \left| \beta^-_{G_k} \vee \alpha_{G_k}\right.\right)$ для всіх k, звідки

$$H(\beta|\alpha) \geq H\left(\beta \left| \beta^-_{G_k} \vee \alpha_{G_k}\right.\right) = h(\beta, G_k) \geq$$
$$\geq H\left(\beta \left| T_1^{-k+1}\beta^-_{T_1} \vee T_2^{-k+1}\left(\beta_{T_1}\right)^-_{T_2} \vee T_3^{-k+1}\left(\beta_{T_1T_2}\right)^-_{T_3}\right.\right).$$

Якщо тут спрямувати k до нескінченності, одержимо $H(\beta|\alpha) \geq H\left(\beta \left| \widehat{\beta}\right.\right)$, де $\widehat{\beta}$ – те ж саме, що й у визначенні $\pi(\beta)$. Наразі нашою метою є довести, що $\widehat{\beta} \leq \bigwedge\limits_{n=0}^{\infty} T_3^{-n}\zeta_{T_1T_2}$.

Нехай $\gamma \in \mathcal{L}$, і $\gamma \leq \widehat{\beta}$. У доведенні Теореми 4.1.6 було продемонстровано, що $\widehat{\beta} \leq \pi(G)$, тобто $h(\gamma, G) = 0$. Оскільки $\beta \leq T_3^p\zeta_{T_1T_2}$, і ζ є G-інваріантним, маємо $\widehat{\beta} \leq T_3^p\zeta_{T_1T_2}$, звідки $\gamma \leq T_3^p\zeta_{T_1T_2}$. За Лемою 4.1.11 доходимо висновку, що $\gamma \leq \bigwedge\limits_{n=0}^{\infty} T_3^{-n}\zeta_{T_1T_2}$, що й доводить наше твердження.

Це, разом з нашими попередніми розглядами, дає

$$H(\beta|\alpha) \geq H\left(\beta \left| \bigwedge_{n=0}^{\infty} T_3^{-n}\zeta_{T_1T_2}\right.\right).$$

Оскільки $\zeta_G = \varepsilon$, ми маємо зазначити, що остання нерівність виконана для β з щільної підмножини в $\mathcal{L}$, і тому вона також виконана для α. Отже, одержуємо

$$0 = H(\alpha|\alpha) \geq H\left(\alpha \left| \bigwedge_{n=0}^{\infty} T_3^{-n}\zeta_{T_1T_2}\right.\right),$$

тобто $\alpha \leq \bigwedge\limits_{n=0}^{\infty} T_3^{-n}\zeta_{T_1T_2}$, що й треба було довести. □

Ми також потребуємо умовну версію Леми 4.1.13.

Лема 4.1.14. *Нехай σ – G-тотально інваріантне розбиття. Для кожного G-вичерпного розбиття ζ, $\zeta \geq \sigma$, маємо $\bigwedge\limits_{n=0}^{\infty} T_3^{-n}\zeta_{T_1T_2} \geq \overline{\sigma}$.*

Доведення майже те ж саме, що й таке для Леми 4.1.13, з мінімальними змінами, зазначеними у доведенні Леми 4.1.12. □

Лема 4.1.15. *Існує вимірне розбиття η із властивостями:*
(a) $T_1^{-1}\eta \le \eta$, $T_2^{-1}\eta_{T_1} \le \eta$, $T_3^{-1}\eta_{T_1T_2} \le \eta$,
(b) $\eta_G = \varepsilon$,
(c) $\bigwedge\limits_{n=0}^{\infty} T_3^{-n}\overline{\eta}_{T_1T_2} \le \pi(G)$,
(d) $h(G) = H\left(\eta \left| \eta_G^-\right.\right) = H\left(\eta \left| T_1^{-1}\eta\right.\right)$.

Доведення. Нехай $\alpha_k \in \mathcal{L}$ – зростаюча послідовність, чий перетин є ε. Ми стверджуємо, що існує зростаюча послідовність додатних цілих $n_1 < n_2 < \dots$ така, що для $\xi_p = \bigvee\limits_{k=1}^{p} T_3^{-n_k}\alpha_k$ має місце

$$H\left(\xi_p \left| (\xi_p)_G^-\right.\right) - H\left(\xi_p \left| (\xi_{p+s+1})_G^-\right.\right) \le \frac{1}{p}, \qquad s \ge 0. \tag{4.1.4}$$

Для формування такої послідовності n_k досить довести, що

$$H\left(\xi_p \left| (\xi_{q-1})_G^-\right.\right) - H\left(\xi_p \left| (\xi_q)_G^-\right.\right) < \frac{1}{p}\frac{1}{2^{q-p}}, \qquad p < q. \tag{4.1.5}$$

Дійсно, беручи суму в (4.1.5) за q, одержуємо $H\left(\xi_p \left| (\xi_p)_G^-\right.\right) - H\left(\xi_p \left| (\xi_q)_G^-\right.\right) < \frac{1}{p}$, що й треба. Для одержання (4.1.5) застосовуємо індукцію. А саме, припустимо, що $n_1, \dots, n_{q-1}$ вже вибрано, тоді n_q має бути настільки великим, що (4.1.5) виконується для $p = 1, \dots, q-1$. Це можливо з огляду на Лему 4.1.7.

Нехай $\xi = \bigvee\limits_{p=1}^{\infty} \xi_p$ і $\eta = \xi \vee \xi_G^-$. Легко перевірити, що (a) і (b) виконані для η.

Доведемо, що (c) виконано для η. Оскільки $(\xi_p)_G^-$ – зростаюча послідовність розбиттів, чий перетин є $\xi_G^- = \eta_G^-$, ми можемо перейти до границі в (4.1.4) для $s \to \infty$ і одержати

$$H\left(\xi_p \left| (\xi_p)_G^-\right.\right) - H\left(\xi_p \left| \eta_G^-\right.\right) \le \frac{1}{p}, \qquad p \ge 1. \tag{4.1.6}$$

Нехай $\alpha \in \mathcal{L}$ і $\alpha \le \bigwedge\limits_{n=0}^{\infty} T_3^{-n}\overline{\eta}_{T_1T_2}$. Оскільки останнє розбиття є тотально інваріантним відносно G, маємо $\alpha_G \le \bigwedge\limits_{n=0}^{\infty} T_3^{-n}\overline{\eta}_{T_1T_2} = \bigwedge\limits_{n=0}^{\infty} \overline{T_3^{-n}\eta_{T_1T_2}}$. Тому $\alpha_G \le \overline{T_3^{-n}\eta_{T_1T_2}}$ для всіх $n \ge 1$, і отже $\alpha_G \le \overline{(\eta_{T_1T_2})_{T_3}^-}$.

З формули Пінскера (4.1.3) випливає, що

$$h(\alpha\vee\xi_p,G)=h(\xi_p,G)+H\left(\alpha\left|\alpha_G^-\vee(\xi_p)_G\right.\right)=h(\alpha,G)+H\left(\xi_p\left|(\xi_p)_G^-\vee\alpha_G\right.\right),$$

звідки

$$h(\alpha,G)=h(\xi_p,G)-H\left(\xi_p\left|(\xi_p)_G^-\vee\alpha_G\right.\right)+H\left(\alpha\left|\alpha_G^-\vee(\xi_p)_G\right.\right). \tag{4.1.7}$$

Внаслідок Леми 4.1.10

$$H\left(\xi_p\left|(\xi_p)_G^-\vee\alpha_G\right.\right)\geq H\left(\xi_p\left|(\xi_p)_G^-\vee\overline{(\eta_{T_1T_2})_{T_3}^-}\right.\right)=$$
$$=H\left(\xi_p\left|(\xi_p)_G^-\vee(\eta_{T_1T_2})_{T_3}^-\right.\right)\geq H\left(\xi_p\left|(\xi_p)_G^-\vee\eta_G^-\right.\right)=H\left(\xi_p\left|\eta_G^-\right.\right),$$

отже з (4.1.7) випливає

$$h(\alpha,G)\leq h(\xi_p,G)-H\left(\xi_p\left|\eta_G^-\right.\right)+H\left(\alpha\left|\alpha_G^-\vee(\xi_p)_G\right.\right)\leq$$
$$\leq\frac{1}{p}+H\left(\alpha\left|\alpha_G^-\vee(\xi_p)_G\right.\right).$$

Оскільки $\bigvee\limits_{p=1}^{\infty}(\xi_p)_G=\varepsilon$, ми можемо перейти до границі в останній нерівності для $p\to\infty$ і одержати $h(\alpha,G)=0$, тобто $\alpha\leq\pi(G)$.

Для доведення (d) зазначимо, що, оскільки α_k зростає до ε, $H\left(\xi_p\left|(\xi_p)_G^-\right.\right)=h(\xi_p,G)=h(\alpha_p,G)\to h(G)$. З іншого боку, оскільки ξ_p зростає до ξ, маємо також $H\left(\xi_p\left|\xi_G^-\right.\right)\to H\left(\xi\left|\xi_G^-\right.\right)$. Внаслідок (4.1.6), $H\left(\xi_p\left|(\xi_p)_G^-\right.\right)$ і $H\left(\xi_p\left|\xi_G^-\right.\right)=H\left(\xi_p\left|\eta_G^-\right.\right)$ мають одну й ту саму границю, і тому $h(G)=H\left(\xi\left|\xi_G^-\right.\right)=H\left(\eta\left|\xi_G^-\right.\right)=H\left(\eta\left|\eta_G^-\right.\right)=H\left(\eta\left|T_1^{-1}\eta\right.\right)$. □

Визначення B. Вимірне розбиття ζ називається G-досконалим, якщо

(i) $T_1^{-1}\zeta\leq\zeta$, $T_2^{-1}\zeta_{T_1}\leq\zeta$, $T_3^{-1}\zeta_{T_1T_2}\leq\zeta$,

(ii) $\zeta_G=\varepsilon$,

(iii) $\bigwedge\limits_{n=0}^{\infty}T_1^{-n}\zeta=T_2^{-1}\zeta_{T_1}$, $\bigwedge\limits_{n=0}^{\infty}T_2^{-n}\zeta_{T_1}=T_3^{-1}\zeta_{T_1T_2}$,

(iv) $\bigwedge\limits_{n=0}^{\infty}T_3^{-n}\zeta_{T_1T_2}=\pi(G)$,

(v) $h(G)=H\left(\zeta\left|\zeta_G^-\right.\right)=H\left(\zeta\left|T_1^{-1}\zeta\right.\right)$.

Теорема 4.1.16. *Для будь-якої дії групи G існує G-досконале розбиття.*

Доведення. Нехай η – вимірне розбиття, що має властивості (a) – (d) з Леми 4.1.15. З властивості (a) випливає $T_3^{-1}\overline{\eta}_{T_1T_2} \le \overline{\eta}_{T_1T_2}$. З умовної версії цієї Теореми для випадку $\mathbb{Z}^2$ генерованої T_1, T_2 на фактор-просторі $X/\overline{\eta}_{T_1T_2}$ випливає існування вимірного розбиття ζ з властивостями:

$$T_3^{-1}\overline{\eta}_{T_1T_2} \le \zeta \le \overline{\eta}_{T_1T_2}, \tag{4.1.8}$$

$$T_1^{-1}\zeta \le \zeta, \qquad T_2^{-1}\zeta_{T_1} \le \zeta, \tag{4.1.9}$$

$$\zeta_{T_1T_2} = \overline{\eta}_{T_1T_2}, \tag{4.1.10}$$

$$\bigwedge_{n=0}^{\infty} T_1^{-n}\zeta = T_2^{-1}\zeta_{T_1}, \qquad \bigwedge_{n=0}^{\infty} T_2^{-n}\zeta_{T_1} = \overline{T_3^{-1}\overline{\eta}_{T_1T_2}} = T_3^{-1}\overline{\eta}_{T_1T_2}, \tag{4.1.11}$$

$$h_{T_3^{-1}\overline{\eta}_{T_1T_2}}(\zeta, (T_1, T_2)) = h_{T_3^{-1}\overline{\eta}_{T_1T_2}}(T_1, T_2) = H\left(\zeta \left| T_1^{-1}\zeta \vee T_3^{-1}\overline{\eta}_{T_1T_2}\right.\right). \tag{4.1.12}$$

Для доведення цього необхідно відтворити доведення [93, теорема 4], з запровадженням невеликих змін, подібних до тих, що введені до доведення Леми 4.1.12 із $\sigma = T_3^{-1}\overline{\eta}_{T_1T_2}$.

Внаслідок (4.1.8) маємо $T_3^{-1}\zeta_{T_1T_2} \le T_3^{-1}\overline{\eta}_{T_1T_2} \le \zeta$; це разом із (4.1.9) дає (i). Застосування (4.1.8), (4.1.10) і (b) дозволяє одержати $\bigvee\limits_{n=0}^{\infty} T_3^{n}\zeta_{T_1T_2} \ge \bigvee\limits_{n=0}^{\infty} T_3^{n}\overline{\eta}_{T_1T_2} \ge \bigvee\limits_{n=0}^{\infty} T_3^{n}\eta_{T_1T_2} = \varepsilon$, тобто (ii) виконано. З (4.1.10), (4.1.11) випливає (iii). Отже, ми перевірили, що ζ є G-вичерпним, і тепер з Леми 4.1.13 маємо $\bigwedge\limits_{n=0}^{\infty} T_3^{-n}\zeta_{T_1T_2} \ge \pi(G)$. Крім того, з (c) випливає $\bigwedge\limits_{n=0}^{\infty} T_3^{-n}\overline{\eta}_{T_1T_2} \le \pi(G)$, отже, з огляду на (4.1.10) одержуємо (iv). Залишається перевірити (v).

Нехай $\alpha_k \in \mathcal{L}$ – зростаюча послідовність розбиттів із $\bigvee\limits_{k} \alpha_k = \zeta$. Тоді $\left(\bigvee\limits_{k} \alpha_k\right)_G^{-} = \zeta_G^{-} = T_1^{-1}\zeta$, отже

$$H\left(\alpha_k \left| T_1^{-1}\zeta\right.\right) \le H\left(\alpha_k \left| (\alpha_k)_G^{-}\right.\right) = h(\alpha_k, G) \le h(G), \qquad k \ge 1.$$

Перейдемо до границі для $k \to \infty$, одержуючи $H\left(\zeta \left| T_1^{-1}\zeta\right.\right) \le h(G)$. Перепишемо (4.1.12) у вигляді

$$H\left(\zeta \left| \zeta_{(T_1T_2)}^{-} \vee T_3^{-1}\overline{\eta}_{T_1T_2}\right.\right) = \sup_{\alpha \in \mathcal{L}} H\left(\alpha \left| \alpha_{(T_1T_2)}^{-} \vee T_3^{-1}\overline{\eta}_{T_1T_2}\right.\right). \tag{4.1.13}$$

З огляду на (4.1.8) маємо $T_3^{-1}\overline{\eta}_{T_1T_2} \le \zeta^-_{(T_1T_2)} \le \overline{\eta}_{T_1T_2}$, і тому

$$H\left(\zeta \left|\zeta^-_{(T_1T_2)} \vee T_3^{-1}\overline{\eta}_{T_1T_2}\right.\right) = H\left(\zeta \left|\zeta^-_{(T_1T_2)}\right.\right) = H\left(\zeta \left|T_1^{-1}\zeta\right.\right). \qquad (4.1.14)$$

Внаслідок Леми 4.1.10

$$H\left(\alpha \left|\alpha^-_{(T_1T_2)} \vee T_3^{-1}\overline{\eta}_{T_1T_2}\right.\right) = H\left(\alpha \left|\alpha^-_{(T_1T_2)} \vee T_3^{-1}\eta_{T_1T_2}\right.\right),$$

і тому

$$\sup_{\alpha\in\mathcal{L}} H\left(\alpha \left|\alpha^-_{(T_1T_2)} \vee T_3^{-1}\overline{\eta}_{T_1T_2}\right.\right) \ge \sup_{\substack{\alpha\in\mathcal{L}\\ \alpha\le\eta}} H\left(\alpha \left|\alpha^-_{(T_1T_2)} \vee T_3^{-1}\eta_{T_1T_2}\right.\right) \ge$$

$$\ge \sup_{\substack{\alpha\in\mathcal{L}\\ \alpha\le\eta}} H\left(\alpha \left|\eta^-_{(T_1T_2)} \vee T_3^{-1}\eta_{T_1T_2}\right.\right) = \sup_{\substack{\alpha\in\mathcal{L}\\ \alpha\le\eta}} H\left(\alpha \left|T_1^{-1}\eta\right.\right) = H\left(\eta \left|T_1^{-1}\eta\right.\right).$$

Порівняння цього результату з (d), (4.1.13), (4.1.14) дає $h(G) = H\left(\eta \left|T_1^{-1}\eta\right.\right) \le H\left(\zeta \left|T_1^{-1}\zeta\right.\right)$, що завершує доведення. □

Лема 4.1.17. *Наступні умови еквівалентні:*

(a) $h(G) = 0$,

(b) єдиним G-вичерпним розбиттям є ε,

(c) кожне G-сильно інваріантне розбиття є тотально інваріантним.

Доведення є відтворенням такого з [93, теорема 5]. □

Визначення C. Дія групи G називається K-системою (або просто G називається K-групою, якщо зрозуміло, яка саме дія групи G мається на увазі), якщо існує вимірне розбиття ζ таке, що

(i) $T_1^{-1}\zeta \le \zeta$, $T_2^{-1}\zeta_{T_1} \le \zeta$, $T_3^{-1}\zeta_{T_1T_2} \le \zeta$,

(ii) $\zeta_G = \varepsilon$,

(iii) $\bigwedge\limits_{n=0}^{\infty} T_1^{-n}\zeta = T_2^{-1}\zeta_{T_1}$, $\bigwedge\limits_{n=0}^{\infty} T_2^{-n}\zeta_{T_1} = T_3^{-1}\zeta_{T_1T_2}$,

(iv) $\bigwedge\limits_{n=0}^{\infty} T_3^{-n}\zeta_{T_1T_2} = \nu$.

Теорема 4.1.18. *G є K-групою тоді й тільки тоді, коли вона має ц.п.е.*

Доведення. Нехай G – K-група і ζ – відповідне розбиття як у Визначенні C. Зокрема ζ є G-вичерпним, отже за Лемою 4.1.13 $\pi(G) = \nu$, тобто G має ц.п.е. Зворотне твердження є легким наслідком Теореми 4.1.16. □

4.1.3 Ентропія та алгебри Пінскера для загальних нільпотентних груп без кручень

Перейдемо до опису шляхів поширення попередніх результатів на загальні нільпотентні скінченно-генеровані групи без кручень. Нехай тепер G – така група. Розглянемо верхній центральний ряд групи G. А саме, нехай Z_1 – центр групи G. Визначимо підгрупу Z_2 у такий спосіб, що $Z_2/Z_1 = center(G/Z_1)$. Продовжимо цю процедуру, вибираючи на i-му кроці підгрупу Z_i так, що $Z_i/Z_{i-1} = center(G/Z_{i-1})$. Після скінченної кількості кроків одержуємо $Z_N = G$, де N – порядок нільпотентності [113]. Отже, маємо скінченну послідовність підгруп

$$G = Z_N \supset Z_{N-1} \supset Z_{N-2} \supset \cdots \supset Z_2 \supset Z_1 \supset Z_0 = \{e\}.$$

Як показано у [97], існує послідовність твірних групи G з певними властивостями, що називаються базою Мальцева. А саме, ця послідовність твірних

$$T_1, \ldots, T_{n_1}, T_{n_1+1}, \ldots, T_{n_2}, T_{n_2+1}, \ldots, T_{n_{N-1}}, T_{n_{N-1}+1}, \ldots, T_{n_N}$$

вибирається у такий спосіб, що $n_0 = 0$, $T_{n_i+1}, \ldots, T_{n_{i+1}} \in Z_{i+1}$, і $T_k^j \notin Z_i$ для $k > n_i$, $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Визначимо лінійне відношення порядку на зазначених вище твірних, покладаючи $T_1 < T_2 < \cdots < T_M$, $(n_N = M)$, разом із відповідним лексикографічним лінійним впорядкуванням на групі G: $T_M^{j_M} \cdot \cdots \cdot T_1^{j_1} < T_M^{k_M} \cdot \cdots \cdot T_1^{k_1}$ тоді й тільки тоді, коли $(j_M, \ldots, j_1)$ лексикографічно менше від $(k_M, \ldots, k_1)$. Легка перевірка показує, що це відношення порядку є інваріантним відносно лівих трансляцій на G. Отже, маємо поняття "минулого" на групі G як множини тих елементів групи G, що менші від одиниці. Базу Мальцева використано в [97] для встановлення того, що будь-яка скінченно-генерована нільпотентна група без кручень вкладається в групу $UT_n(\mathbb{Z})$ трикутних уніпотентних матриць з цілими елементами.

Внаслідок вибору твірних множення в G може бути подано такими співвідношеннями:

$$T_M^{k_M} \cdot \cdots \cdot T_1^{k_1} \cdot T_M^{q_M} \cdot \cdots \cdot T_1^{q_1} = T_M^{k_M+q_M+f_M} \cdot \cdots \cdot T_1^{k_1+q_1+f_1},$$

де $f_M = 0$ і для $j = 1, \ldots, M-1$, цілозначна поліноміальна функція (див. [97]) $f_j = f_j(k_{j+1}, \ldots, k_M; q_{j+1}, \ldots, q_M)$ не залежить від $k_1, \ldots, k_j$, $q_1, \ldots, q_j$.

Нехай G_p – підгрупа в G індексу p. Ми розглядатимемо лише підгрупи, генеровані $T_1^{p_1}, \ldots, T_M^{p_M}$ з показниками p_i вибраними у такий спосіб, що $T_1^{p'_1}, \ldots, T_M^{p'_M}$ ніколи не генерують однакові підгрупи за умови $p'_i < p_i$ хоча б для одного i. Розглянемо простір $G_p \backslash G$ лівих класів суміжності для підгрупи G_p. Нехай $\delta_p \subset G$ – "фундаментальна область" (переріз) для цього однорідного простору, що містить одиницю групи G. Ця "фундаментальна область" δ_p може бути вибрана у вигляді прямокутника і виписана явно як $\{T_M^{q_M} \cdot \cdots \cdot T_1^{q_1} \,:\; 0 \le q_1 < p_1, \;\ldots,\; 0 \le q_M < p_M\}$. У цьому випадку індекс підгрупи G_p дорівнює $p = p_1 \cdot \cdots \cdot p_M$. Можна також перевірити, що δ_p є також перерізом для простору G/G_p правих класів суміжності для підгрупи G_p. Як і вище, для заданого розбиття α ми позначаємо через α^p розбиття $\alpha_{\delta_p} = \bigvee\limits_{g \in \delta_p} g\alpha$.

Таким чином, для заданої скінченно-генерованої нільпотентної групи G без кручень, її база Мальцева визначає ліво-інваріантне відношення порядку на G. Отже, якщо (X, μ) – G-простір з інваріантною ймовірнісною мірою μ, і α – розбиття простору X зі скінченною ентропією, ми можемо застосувати результати [142, 158] так. Середня ентропія $h(\alpha, G)$ може бути записана у термінах "минулого" в G щодо ліво-інваріантного впорядкування:

$$h(\alpha, G) = H(\alpha | \alpha_G^-),$$

де $\alpha_G^- = \bigvee\limits_{g < e} g\alpha$. Очевидна модифікація цих визначень призводить до поняття умовної ентропії $h(\alpha, G, \sigma)$, де σ – G-тотально інваріантне вимірне розбиття.

Перейдемо до поширення формули Пінскера (4.1.3) на загальні нільпотентні скінченно-генеровані групи, маючи на меті подальше застосування для опису алгебр Пінскера.

Теорема 4.1.19. *Якщо $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$ і G – скінченно-генерована нільпотен-*

тна група, то

$$h(\alpha \vee \beta, G) = h(\alpha, G) + H\left(\beta \left| \beta_G^- \vee \alpha_G\right.\right). \qquad (4.1.15)$$

Твердження 4.1.20. *Припустимо, що для аменабельної групи G з "минулим"* (4.1.15) *виконується для певного вибору "минулого" в G (еквівалентно, для конкретного ліво-інваріантного впорядкування), тоді* (4.1.15) *також має місце для будь-якого іншого "минулого" в G.*

Доведення. Зазначимо, що два з трьох членів, які складають (4.1.15), а саме, $h(\alpha \vee \beta, G)$ і $h(\alpha, G)$, не залежать від поняття "минулого". Якщо подивитись на останній член $H\left(\beta \left| \beta_G^- \vee \alpha_G\right.\right)$, легко помітити, що умовна версія результатів [142, 158] дозволяє дивитися на нього як на умовну середню ентропію $h(\beta, G, \alpha_G) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\#F_n} H\left(\beta_{F_n} \middle| \alpha_G\right)$ відносно G-тотально інваріантного розбиття α_G (тут F_n – права послідовність Фьолнера). Це робить очевидним незалежність від вибору "минулого". $\square$

Перейдемо до доведення формули (4.1.15) у випадку загальної скінченно-генерованої нільпотентної групи G без кручень. Зазначимо, що така група припускає вкладення $G \hookrightarrow UT_n(\mathbb{Z})$ [97], отже можна розглядати G як підгрупу в $UT_n(\mathbb{Z})$.

Нехай (X, μ) – простір дії групи G. Позначимо через $\sigma : G\backslash UT_n(\mathbb{Z}) \to UT_n(\mathbb{Z})$ переріз для (правого) однорідного простору відносно підгрупи G, що має властивість $\sigma([I]) = I$. Побудуємо простір $Y = X^{G\backslash UT_n(\mathbb{Z})}$ з відповідною продакт-мірою ν і розглянемо дію групи $UT_n(\mathbb{Z})$ на Y:

$$(gy)_\gamma = \sigma(\gamma) g \sigma(\gamma g)^{-1} y_{\gamma g}, \qquad y = (y_\gamma) \in Y, \quad \gamma \in G\backslash UT_n(\mathbb{Z}), \quad g \in UT_n(\mathbb{Z}).$$

Проста перевірка показує, що ця дія є коректно визначеною (зокрема, $\sigma(\gamma) g \sigma(\gamma g)^{-1} \in G$ і $(gy)_{[I]} = gy_{[I]}$ для $g \in G$).

Для заданих розбиттів α і β на X зі скінченною ентропією, побудуємо розбиття $\overline{\alpha}$ і $\overline{\beta}$ на Y. А саме, будемо казати, що $y' = (y'_\gamma)$ і $y'' = (y''_\gamma)$ лежать у тому ж самому елементі розбиття $\overline{\alpha}$, якщо $y'_{[I]}$ і $y''_{[I]}$ містяться у тому ж самому елементі розбиття α; розбиття $\overline{\beta}$ визначається у подібний спосіб.

Застосування Теореми 4.1.5 та Твердження 4.1.20 до $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ і $UT_n(\mathbb{Z})$-дії на Y дає

$$h\left(\overline{\alpha} \vee \overline{\beta}, UT_n(\mathbb{Z})\right) = h(\overline{\alpha}, UT_n(\mathbb{Z})) + H\left(\overline{\beta} \left| \overline{\beta}^-_{UT_n(\mathbb{Z})} \overline{\alpha}_{UT_n(\mathbb{Z})}\right.\right),$$

де минуле в $UT_n(\mathbb{Z})$ визначене як вище. Точніше, маємо

$$H\left(\overline{\alpha} \vee \overline{\beta} \left| \bigvee_{\substack{g \in G \\ g < I}} g\overline{\alpha} \vee \bigvee_{\substack{g \in UT_n(\mathbb{Z}) \setminus G \\ g < I}} g\overline{\alpha} \vee \bigvee_{\substack{g \in G \\ g < I}} g\overline{\beta} \vee \bigvee_{\substack{g \in UT_n(\mathbb{Z}) \setminus G \\ g < I}} g\overline{\beta}\right.\right) =$$

$$= H\left(\overline{\alpha} \left| \bigvee_{\substack{g \in G \\ g < I}} g\overline{\alpha} \vee \bigvee_{\substack{g \in UT_n(\mathbb{Z}) \setminus G \\ g < I}} g\overline{\alpha}\right.\right) +$$

$$+ H\left(\overline{\beta} \left| \bigvee_{\substack{g \in G \\ g < I}} g\overline{\beta} \vee \bigvee_{\substack{g \in UT_n(\mathbb{Z}) \setminus G \\ g < I}} g\overline{\beta} \vee \overline{\alpha}_G \vee \overline{\alpha}_{UT_n(\mathbb{Z}) \setminus G}\right.\right).$$

Важливе спостереження, що випливає з нашої побудови, полягає в тому, що для будь-яких підмножин $A, B \subset G$, $C, D \subset UT_n(\mathbb{Z}) \setminus G$ розбиття $\overline{\alpha}_A \vee \overline{\beta}_B$ і $\overline{\alpha}_C \vee \overline{\beta}_D$ є незалежними. Зазначимо також, що перетин "минулого" в $UT_n(\mathbb{Z})$ з G є "минулим" в G. Отже, якщо взяти до уваги Твердження 4.1.20, попереднє співвідношення приймає вигляд

$$H\left(\overline{\alpha} \vee \overline{\beta} \left| \overline{\alpha}^-_G \vee \overline{\beta}^-_G\right.\right) = H\left(\overline{\alpha} \left| \overline{\alpha}^-_G\right.\right) + H\left(\overline{\beta} \left| \overline{\beta}^-_G \vee \overline{\alpha}_G\right.\right),$$

де "минуле" в G визначається певною базою Мальцева. Оскільки тут усе сконцентровано в єдиному прямому множнику простору Y з індексом $[I]$, останнє співвідношення може бути переписано у вигляді

$$H\left(\alpha \vee \beta \left| \alpha^-_G \vee \beta^-_G\right.\right) = H\left(\alpha \left| \alpha^-_G\right.\right) + H\left(\beta \left| \beta^-_G \vee \alpha_G\right.\right),$$

що співпадає з нашим твердженням.

Зрештою, нагадаємо, що будь-яка скінченно-генеровна нільпотентна група G містить нормальну підгрупу скінченного індексу G_0 без кручень [97] (нехай її індекс є p, і α^p є те ж саме, що й у формулюванні Леми 4.1.2).

Застосування попереднього результату, Леми 4.1.2 та її умовної версії дає

$$h(\alpha \vee \beta, G) = \frac{1}{p} h(\alpha^p \vee \beta^p, G_0) = \frac{1}{p} h(\alpha^p, G_0) + \frac{1}{p} H\left(\beta^p \left| (\beta^p)^-_{G_0} \vee (\alpha^p)_{G_0}\right.\right) =$$
$$= h(\alpha, G) + \frac{1}{p} h(\beta^p, G_0, \alpha_G) = h(\alpha, G) + h(\beta, G, \alpha_G) =$$
$$= h(\alpha, G) + H\left(\beta \left| \beta^-_G \vee \alpha_G\right.\right). \qquad \square$$

Лема 4.1.21. *Якщо $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$, G – скінченно-генерована нільпотентна група без кручень і $T_1 < T_2 < \ldots < T_M$ – її база Мальцева, то*

$$\lim_{n \to \infty} H\left(\alpha \left| T_M^{-n}(\beta^-_G)\alpha^-_G\right.\right) = H\left(\alpha \left| \alpha^-_G\right.\right).$$

Доведення співпадає з таким щодо Леми 4.1.7, де T_3 має бути замінене на T_M. $\square$

Звичайно, аргументи, застосовані нами для опису алгебри Пінскера для дії групи Гейзенберга мають очевидне узагальнення на дію скінченно-генерованої нільпотентної групи без кручень з фіксованою базою Мальцева $T_1, T_2, \ldots, T_M$. Зазначимо лише, що в Твердженні 4.1.8 треба використати послідовність підгруп скінченного індексу Γ_p, генерованих $T_1^p, T_2^p, \ldots, T_M^p$, де p – просте число. Для p більшого ніж порядок нільпотентності групи G, кожна така підгрупа Γ_p містить лише p-і ступені елементів групи G, і при цьому $\bigwedge_p \Gamma_p$ є одиничною підгрупою [79].

Стосовно загальної нільпотентної скінченно-генерованої групи G, нагадаємо, що вона містить нормальну підгрупу G_0 скінченного індексу без кручень [97]. Ми стверджуємо, що алгебра Пінскера дії групи G співпадає з такою щодо обмеження дії на підгрупу G_0. Дійсно, нехай α – скінченне розбиття і $h(\alpha, G) = 0$. Тоді за Лемою 4.1.2

$$h(\alpha, G_0) \leq h(\alpha^p, G_0) = p h(\alpha, G) = 0,$$

де p – індекс підгрупи G_0 в G.

Навпаки, нехай δ_p – переріз в G для простору правих класів суміжності $G_0 \backslash G$ і F_n – права послідовність Фьолнера в G_0. Припустимо, що $h(\alpha, G_0) =$

0. Тоді з нормальності підгрупи G_0 в G випливає

$$h(\alpha, G) = \frac{1}{p} h(\alpha^p, G_p) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p\#F_n} H\left(\bigvee_{g\in\delta^p} \alpha_{F_n g}\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{p}\sum_{g\in\delta^p} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\#F_n} H\left(\alpha_{gg^{-1}F_n g}\right) = \frac{1}{p}\sum_{g\in\delta^p} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\#F_n} H\left(\alpha_{g^{-1}F_n g}\right) =$$

$$= h(\alpha, G_0) = 0.$$

4.1.4 Співвідношення між ентропією та спектральними властивостями дій нільпотентних груп

Ми тут обмежимось окремим випадком групи Гейзенберга G. З подальшого стане очевидним, що усе переноситься на випадок скінченно-генерованої нільпотентної групи без кручень.

Нагадаємо, що зображення групи G називається таким, що має зчисленний лебегівський спектр, якщо воно еквівалентне зчисленній прямій сумі регулярного зображення.

Лема 4.1.22. *([153]). Нехай ζ – вимірне розбиття з властивістю $T_1^{-1}\zeta \lneqq \zeta$, і при цьому простір $(X/\zeta, \mu_\zeta)$ неатомічний, тоді* $\dim(L^2(\zeta) \ominus L^2(T_1^{-1}\zeta)) = \infty$.

Теорема 4.1.23. *Якщо $h(G) > 0$, то G має зчисленний лебегівський спектр в $L^2(X, \mu) \ominus L^2(\pi(G))$.*

Доведення. Нехай ζ – G-досконале розбиття. З $\zeta_G = \varepsilon$ і $\bigwedge_n T_3^n \zeta_{(T_1,T_2)} = \pi(G)$ випливає, що

$$L^2(X, \mu) \ominus L^2(\pi(G)) = \bigoplus_{n=-\infty}^{+\infty} L^2(T_3^n \zeta_{(T_1,T_2)}) \ominus L^2(T_3^{n-1}\zeta_{(T_1,T_2)}) =$$

$$= \bigoplus_{n=-\infty}^{+\infty} U_{T_3}^n (L^2(\zeta_{(T_1,T_2)}) \ominus L^2(T_3^{-1}\zeta_{(T_1,T_2)})).$$

У подібний спосіб, з огляду на співвідношення $\bigwedge_n T_2^n \zeta_{T_1} = T_3^{-1}\zeta_{(T_1,T_2)}$ маємо

$$L^2(\zeta_{(T_1,T_2)}) \ominus L^2(T_3^{-1}\zeta_{(T_1,T_2)}) = \bigoplus_{n=-\infty}^{+\infty} L^2(T_2^n\zeta_{T_1}) \ominus L^2(T_2^{n-1}\zeta_{T_1}) =$$

$$= \bigoplus_{n=-\infty}^{+\infty} U_{T_2}^n(L^2(\zeta_{T_1}) \ominus L^2(T_2^{-1}\zeta_{T_1})),$$

і, зрештою,

$$L^2(\zeta_{T_1}) \ominus L^2(T_2^{-1}\zeta_{T_1}) = \bigoplus_{n=-\infty}^{+\infty} L^2(T_1^n\zeta) \ominus L^2(T_1^{n-1}\zeta) =$$

$$= \bigoplus_{n=-\infty}^{+\infty} U_{T_1}^n(L^2(\zeta) \ominus L^2(T_1^{-1}\zeta)).$$

Отже, одержуємо

$$L^2(X,\mu) \ominus L^2(\pi(G)) = \bigoplus_{(k,m,n)\in\mathbb{Z}^3} U_{T_3}^k U_{T_2}^m U_{T_1}^n (L^2(\zeta) \ominus L^2(T_1^{-1}\zeta)). \quad (4.1.16)$$

Ми стверджуємо, що $T_1^{-1}\zeta \lneqq \zeta$. Дійсно, якщо припустити протилежне $T_1^{-1}\zeta = \zeta$, то внаслідок властивостей (ii), (iii), (iv) досконалого розбиття маємо $\pi(G) = \varepsilon$, тобто $h(G) = 0$, що суперечить нашим припущенням щодо дії групи G. Отже $T_1^{-1}\zeta \lneqq \zeta$. Наразі з властивостей (i) і (ii) випливає, що простір $(X/\zeta, \mu_\zeta)$ є неатомічним, і тому з Леми 4.1.22 маємо $\dim(L^2(\zeta) \ominus L^2(T_1^{-1}\zeta)) = \infty$. Нехай $f_1, f_2, \ldots$ – база в $L^2(\zeta) \ominus L^2(T_1^{-1}\zeta)$. Внаслідок (4.1.16), $f_{g,i} = U_g f_i$, $1 \in \mathbb{N}$, $g \in G$, утворюють ортонормовану базу в $L^2(X,\mu) \ominus L^2(\pi(G))$, і при цьому $U_g f_{h,i} = f_{gh,i}$. Це означає, що G має зчисленний лебегівський спектр в $L^2(X,\mu) \ominus L^2(\pi(G))$. $\square$

З Теорем 4.1.18 і 4.1.23 одержуємо

Наслідок 4.1.24. *Якщо G є K-групою, вона має зчисленний лебегівський спектр.*

Наслідок 4.1.25. *Якщо G має сингулярний спектр або спектр із скінченною кратністю, то $h(G) = 0$. Зокрема, кожна група перетворень G з дискретним спектром має нульову ентропію.*

4.1.5 Досконалі розбиття і K-системи: загальний випадок

Намітимо шляхи перенесення попередніх результатів на дії скінченно-генерованої нільпотентної групи G без кручень. Ми згадуємо тут лише ті твердження, які не відтворюються дослівно.

Вимірне розбиття ζ називається G-інваріантним, якщо $T_1^{-1}\zeta \le \zeta$, $\dots$, $T_M^{-1}\zeta_{T_1\dots T_{M-1}} \le \zeta$.

Вимірне розбиття ζ називається G-сильно інваріантним, якщо $T_1^{-1}\zeta \le \zeta$, $\bigwedge\limits_{n=0}^{\infty} T_1^{-n}\zeta = T_2^{-1}\zeta_{T_1}$, $\dots$, $\bigwedge\limits_{n=0}^{\infty} T_{M-1}^{-n}\zeta_{T_1\dots T_{M-2}} = T_M^{-1}\zeta_{T_1\dots T_{M-1}}$.

Лема 4.1.26. (аналог Леми 4.1.11) *Припустимо, що вимірне розбиття ζ є сильно інваріантним, $\alpha \in \mathcal{L}$, $\alpha \le T_M^p\zeta_{T_1T_2}$ для певного додатного цілого p, і $h(\alpha, G) = 0$. Тоді $\alpha \le \bigwedge\limits_{n=0}^{\infty} T_M^{-n}\zeta_{T_1\dots T_{M-1}}$.*

Лема 4.1.27. (аналог Леми 4.1.13) *Для кожного G-вичерпного розбиття ζ маємо $\bigwedge\limits_{n=0}^{\infty} T_M^{-n}\zeta_{T_1\dots T_{M-1}} \ge \pi(G)$.*

Лема 4.1.28. (аналог Леми 4.1.15) *Існує вимірне розбиття η з властивостями:*

(a) $T_1^{-1}\eta \le \eta$, $\dots$, $T_M^{-1}\eta_{T_1\dots T_{M-1}} \le \eta$,

(b) $\eta_G = \varepsilon$,

(c) $\bigwedge\limits_{n=0}^{\infty} T_M^{-n}\overline{\eta}_{T_1\dots T_{M-1}} \le \pi(G)$,

(d) $h(G) = H\left(\eta \left| \eta_G^-\right.\right) = H\left(\eta \left| T_1^{-1}\eta\right.\right)$.

Визначення D (аналог Визначення B) *Вимірне розбиття ζ називається G-досконалим, якщо*

(i) $T_1^{-1}\zeta \le \zeta, \dots, T_M^{-1}\zeta_{T_1\dots T_{M-1}} \le \zeta$,

(ii) $\zeta_G = \varepsilon$,

(iii) $\bigwedge\limits_{n=0}^{\infty} T_1^{-n}\zeta = T_2^{-1}\zeta_{T_1}, \quad \dots \quad , \bigwedge\limits_{n=0}^{\infty} T_{M-1}^{-n}\zeta_{T_1\dots T_{M-2}} = T_M^{-1}\zeta_{T_1\dots T_{M-1}}$,

(iv) $\bigwedge\limits_{n=0}^{\infty} T_M^{-n}\zeta_{T_1\dots T_{M-1}} = \pi(G)$,

(v) $h(G) = H\left(\zeta \left| \zeta_G^-\right.\right) = H\left(\zeta \left| T_1^{-1}\zeta\right.\right).$

Визначення E (аналог Визначення C) *G називаєтьcя K-групою, якщо існує вимірне розбиття ζ таке, що*

(i) $T_1^{-1}\zeta \le \zeta, \ldots, T_M^{-1}\zeta_{T_1\ldots T_{M-1}} \le \zeta,$

(ii) $\zeta_G = \varepsilon,$

(iii) $\bigwedge\limits_{n=0}^{\infty} T_1^{-n}\zeta = T_2^{-1}\zeta_{T_1}, \qquad \ldots \qquad , \bigwedge\limits_{n=0}^{\infty} T_{M-1}^{-n}\zeta_{T_1\ldots T_{M-2}} = T_M^{-1}\zeta_{T_1\ldots T_{M-1}},$

(iv) $\bigwedge\limits_{n=0}^{\infty} T_M^{-n}\zeta_{T_1\ldots T_{M-1}} = \nu.$

Базуючись на цьому, попередні результати стосовно спектральних властивостей можуть бути дослівно переформульовані у випадку загальної скінченно-генерованої нільпотентної групи без кручень.

4.2 Коіндуковані дії та побудова небернулліївських дій з цілком позитивною ентропією

Класичний результат Д. Орнстейна [138] полягає в існуванні небернулліївських K-автоморфізмів будь-якої наперед заданої ентропії. Виникає природне припущення про існування певної відстані між класом бернуліївських дій та (більш широким) класом дій з ц.п.е. для зчисленних аменабельних груп. Ми подаємо узагальнення зазначеного вище результату Д. Орнстейна на клас зчисленних аменабельних груп, що містять елемент(и) нескінченного порядку (див. [67, 32]).

4.2.1 Ентропія дії зчисленної дискретної аменабельної групи

Нехай $(X, \mathcal{B}, \mu)$ – стандартний простір Лебега, G – зчисленна аменабельна група, яка має вільну дію на $(X, \mathcal{B}, \mu)$, що зберігає ймовірнісну міру μ.

Згідно з підходом Д. Орнстейна та Б. Вейсса [137, 191], запроваджується поняття середньої ентропії скінченного розбиття $\mathbf{P}$ простору X відносно скінченної підмножини F групи G: із позначенням $\mathbf{P}^F = \bigvee_{g \in F} g\mathbf{P}$, визначаємо

$$h(P, F) = \frac{1}{|F|} H(\mathbf{P}^F).$$

Нагадаємо, що підмножина T в G *замощує* групу G, якщо існує множина $C \subset G$ така, що CT є розбиттям групи G, тобто $G = \bigcup_{c \in C} cT$, $c_1 T \cap c_2 T = \varnothing$ для $c_1 \neq c_2$.

Далі, послідовність скінченних підмножин $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ групи G називається (лівою) *послідовністю Фьолнера* в G, якщо $\lim |gF_n \Delta F_n| / |F_n| = 0$, $\forall g \in G$. Добре відомо, що зчисленна аменабельна група G має послідовність Фьолнера (цю властивість часто приймають за визначення аменабельності).

Орнстейн та Вейсс показали, що для послідовності Фьолнера $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ в G, де кожне F_n замощує G, для кожної скінченного розбиття $\mathbf{P}$ простору X існує границя $h(\mathbf{P}, G) = \lim \frac{1}{|F_n|} H(\mathbf{P}^{F_n})$, яка не залежить від вибору послідовності Фьолнера; ця границя називається середньою ентропією процесу $(\mathbf{P}, G)$. Вона є спадаючою функцією розбиття, отже

$$h(\mathbf{P}, G) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{|F_n|} H(\mathbf{P}^{F_n}) = \inf_n \frac{1}{|F_n|} H(\mathbf{P}^{F_n}).$$

Як було встановлено в [192], будь-яка розв'язна зчисленна група має послідовність Фьолнера з певними додатковими властивостями. У загальному випадку, визначення середньої ентропії $h(\mathbf{P}, G)$ процесу $(\mathbf{P}, G)$ вимагає застосування техніки квазі-замощувань (див. [137, 120]).

Кажуть, що дія зчисленної аменабельної групи G має *цілком позитивну ентропію, ц.п.е.*, якщо $h(\mathbf{P}, G) > 0$ для будь-якого скінченного розбиття $\mathbf{P}$. *Ентропія* дії групи G визначається як $h(G) = \sup_{\mathbf{P}} h(\mathbf{P}, G)$, де супремум взятий за всіма скінченними розбиттями $\mathbf{P}$.

Нехай група G діє вільно та ергодично. Генеруюче розбиття $\mathbf{P} = (P_i)$ (тобто $\mathbf{P}^G = \varepsilon$) називають *розбиттям Бернуллі* для заданої дії групи G, якщо розбиття $g\mathbf{P}$ є (попарно) незалежними для $g \in G$, тобто

$$\mu(gP_iP_j) = \mu(P_i)\mu(P_j).$$

Якщо таке розбиття існує, дія групи G називається *дією Бернуллі* (або бернулліївською).

У подальшому ми використаємо наступний результат із [137] про так званий фактор Сіная (див. [56]).

Теорема 4.2.1. *Якщо зчисленна дискретна аменабельна група G діє вільно та ергодично на $(X, \mathcal{B}, \mu)$ з додатною ентропією $h(G)$, то для будь-якого дійсного числа $0 < h \leq h(G)$ існує G-інваріантний фактор-простір X_h простору X такий, що обмеження дії групи G на X_h є дією Бернуллі групи G з ентропією $h(G|_{X_h}) = h$.*

Інший підхід до ентропії дій зчисленних аменабельних груп подано в роботі Олан'є [134]. Ми тут пояснимо зв'язок між двома підходами.

Визначення 4.2.2. *Нехай G така, як зазначено вище, діє вільно та ергодично на $(X, \mathcal{B}, \mu)$, і $\mathbf{P}$ – скінченне розбиття простору X.*

Середня ентропія за Олан'є $h_o(\mathbf{P}, G)$ *процесу* $(\mathbf{P}, G)$ *визначається як*

$$h_o(\mathbf{P}, G) = \inf_F \frac{1}{|F|} H(\mathbf{P}^F),$$

де інфімум взятий за всіма скінченними підмножинами F групи G, див. [134, 4.3.1].

Ентропія Олан'є $h_o(G)$ *дії групи G на $(X, \mathcal{B}, \mu)$ визначається як*

$$h_o(G) = \sup_{\mathbf{P}} h_o(\mathbf{P}, G),$$

де супремум взятий за всіма скінченними розбиттями $\mathbf{P}$, див. [134, 4.3.2].

В [134, 4.3.14] доведено, що якщо $\mathbf{P}$ – генеруюче розбиття для дії групи G, то $h_o(G) = h_o(\mathbf{P}, G)$.

Наступний факт є відомим для спеціалістів.

Теорема 4.2.3. *Нехай G – зчисленна аменабельна група, що діє вільно та ергодично на $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Тоді*

$$h(G) = h_o(G),$$

де $h(G)$ – ентропія дії групи G у сенсі [137], а $h_o(G)$ – ентропія Олан'є для дії групи G.

Доведення. Див. [32]. $\square$

Наслідок 4.2.4. *Нехай G, $(X,\mathcal{B},\mu)$ – те ж саме, що й у формулюванні Теореми 4.2.3, а $\mathbf{P}$ – скінченне розбиття простору X. Тоді*

$$h_o(\mathbf{P},G) = h(\mathbf{P},G).$$

Доведення. Див. [32]. $\square$

4.2.2 Коіндукція та її властивості

Наступна конструкція дозволяє побудувати небернулліївську ц.п.е. дію групи G, базуючись на небернулліївській ц.п.е. дії її підгрупи Γ.

Визначення 4.2.5. *Нехай G – зчисленна аменабельна група, і Γ – підгрупа в G. Нехай $(X,\mathcal{B},\mu)$ – (ліва) дія групи Γ.*

Зафіксуємо переріз $s:\Gamma\backslash G\to G$ однорідного простору $\Gamma\backslash G$ з властивістю $s([e])=e$. Розглянемо прямий добуток просторів $Y=\prod\limits_{\Gamma\backslash G}(X,\mathcal{B},\mu)$ та устаткуємо Y відповідною продакт-мірою $\nu=\bigotimes\limits_{\Gamma\backslash G}\mu$. Ми записуватимемо елементи простору Y у вигляді $(y_\theta)_{\theta\in\Gamma\backslash G}$.

Визначимо дію групи G на Y:

$$(gy)_\theta = \left(s(\theta)gs(\theta g)^{-1}\right)y_{\theta g},\quad y=(y_\theta)\in Y,\ y_\theta\in X,\ \theta\in\Gamma\backslash G,\ g\in G, \tag{4.2.1}$$

де під дією групи Γ на координати точок з простору Y мається на увазі її дія на X. Ми будемо казати, що ця дія групи G **коіндукована з дії** *групи Γ. Просте обчислення показує, що ця дія є коректно визначеною; зокрема, $s(\theta)gs(\theta g)^{-1}\in\Gamma$. Зрозуміло також, що ця дія зберігає міру ν.*

Як і у випадку стандартної процедури індукування, зазначена вище дія може бути визначена незалежно від конкретного вибору перерізу. Аби побачити це, розглянемо простір

$$\widetilde{Y} = \{f:G\to(X,\mathcal{B},\mu):\ \forall\gamma\in\Gamma,\ g\in G\ f(\gamma g)=\gamma(f(g))\}$$

і визначимо дію групи G на $\widetilde{Y}$:

$$(g_0 \cdot f)(g) = f(gg_0).$$

Важливе спостереження полягає в тому, що значення відображення $f \in \widetilde{Y}$ залежать лише від його значень на перерізі. Отже, можна ототожнювати $\widetilde{Y}$ з простором

$$Y_0 = \{h : \Gamma\backslash G \to (X, \mathcal{B}, \mu)\},$$

де заданому $f \in \widetilde{Y}$ ставиться у відповідність $h \in Y_0$, яке задається як $h(\Gamma g) = f(s(\Gamma g))$. Наразі можна ототожнювати Y_0 із простором $Y = \prod\limits_{\Gamma\backslash G}(X, \mathcal{B}, \mu)$ як у Визначенні 4.2.5, і при цьому просте обчислення показує, що дія на Y задається формулою (4.2.1).

Легко перевірити, що якщо у цій схемі дія групи Γ небернулліївська, то коіндукована дія групи G також небернулліївська. Аби побачити це, ми потребуємо наступне просте твердження, що не залежить від процедури коіндукції.

Твердження 4.2.6. *Обмеження бернулліївської дії зчисленної дискретної аменабельної групи G на нескінченну підгрупу Γ також бернуллііївське.*

Доведення. Розглянемо бернулліївську дію групи G на $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Існує вимірне генеруюче розбиття ζ простору $(X, \mathcal{B}, \mu)$ таке, що сімейство розбиттів $\{g\zeta,\ g \in G\}$ є незалежним і генерує $\mathcal{B}$. Нехай $A \subset G$ – множина, що перетинає кожний клас суміжності Γg в єдиній точці. Побудуємо вимірне розбиття $\eta = \bigcup\limits_{g \in A} g\zeta$. Легко перевірити, що η є генеруючим розбиттям для дії Γ, і при цьому його зсуви на елементи групи Γ незалежні. Цим завершується доведення. □

Наслідок 4.2.7. *Нехай G і Γ – те ж саме, що й у Твердженні 4.2.6. Припустимо, що дія групи G на Y коіндукована з дії підгрупи Γ на X. Тоді дія групи G бернулліївська на (Y, ν) тоді й тільки тоді, коли дія групи Γ бернулліївська на (X, μ).*

Доведення. Розглянемо обмеження коіндукованої дії групи G на підгрупу Γ. Це обмеження має початкову дію групи Γ в якості фактор-дії, що визначається Γ-еквіваріантною проекцією $Y \to X$, $y \mapsto y_{[e]}$. Оскільки ця фактор-дія групи Γ небернулліївська, то й Γ-дія на Y також небернулліївська [137, III, §6, Theorem 4], і тому дія групи G небернулліївська внаслідок Твердження 4.2.6. Зворотне твердження є очевидним. $\square$

Твердження 4.2.8. *Нехай G й Γ – те ж саме, що й вище, і припустимо, що задана дія групи Γ на X. Розглянемо дію групи G на Y, задану формулою* (4.2.1). *Тоді $h_Y(G) = h_X(\Gamma)$, де $h_X(\Gamma)$ – ентропія дії групи Γ на просторі X.*

Доведення. Нехай $s : \Gamma\backslash G \to G$ – переріз для природної проекції $\pi : G \to \Gamma\backslash G$ із властивістю $s([e]) = e$, де e – одиниця групи G. Нехай ξ' – скінченне розбиття простору X і ξ – його підняття до розбиття простору Y шляхом ототожнення X із фактором простору Y, що відповідає відображенню $Y \to X$, $y \mapsto y_{[e]}$. Зрозуміло, що ξ є генеруючим розбиттям щодо дії групи G на Y, якщо ξ' – генератор для дії групи Γ на X. Застосовуючи Визначення 4.2.2, одержуємо:

$$h_o(\xi, G) = \inf_F \frac{1}{|F|} H\left(\bigvee_{g\in F} g\xi\right) = \inf_F \frac{1}{|F|} H\left(\bigvee_{\theta\in\pi(F)} \bigvee_{g\in F\cap\pi^{-1}(\theta)} g\xi\right) =$$

$$= \inf_F \frac{1}{|F|} \sum_{\theta\in\pi(F)} H\left(\bigvee_{g\in F\cap\pi^{-1}(\theta)} g\xi\right) =$$

$$= \inf_F \frac{1}{|F|} \sum_{\theta\in\pi(F)} \left|F\cap\pi^{-1}(\theta)\right| \frac{1}{\left|F_n\cap\pi^{-1}(\theta)\right|} H\left(\bigvee_{g\in F\cap\pi^{-1}(\theta)} s(\theta)^{-1} g\xi\right) \geq$$

$$\geq \inf_F \frac{1}{|F|} \sum_{\theta\in\pi(F)} \left|F\cap\pi^{-1}(\theta)\right| h_o(\xi', \Gamma) = h_o(\xi', \Gamma),$$

де F – скінченна підмножина групи G, і при цьому взято до уваги вибір розбиття ξ, той факт, що $s(\theta)^{-1}g \in \Gamma$ для $\pi(g) = \theta$, і Визначення 4.2.2.

Отже $h_o(\xi, G) \geq h_o(\xi', \Gamma)$. З іншого боку, внаслідок властивостей розбиття ξ (див. Визначення 4.2.2) маємо

$$h_o(\xi, G) = \inf_{F\subset G} \frac{1}{|F|} H\left(\bigvee_{g\in F} g\xi\right) \le \inf_{F\subset\Gamma} \frac{1}{|F|} H\left(\bigvee_{g\in F} g\xi\right) =$$

$$= \inf_{F\subset\Gamma} \frac{1}{|F|} H\left(\bigvee_{g\in F} g\xi'\right) = h_o(\xi', \Gamma),$$

де інфімум взято за всіма скінченними підмножинами F. Отже $h_o(\xi, G) \le h_o(\xi', \Gamma)$, звідки $h_o(\xi, G) = h_o(\xi', \Gamma)$. Оскільки $h(\xi, G) = h_o(\xi, G)$ і $h(\xi', \Gamma) = h_o(\xi', \Gamma)$ за Наслідком 4.2.4, маємо $h(\xi, G) = h(\xi', \Gamma)$ для будь-якого скінченного розбиття ξ' простору X.

Нехай $h_X(\Gamma) < \infty$. Тоді існує скінченне генеруюче розбиття ξ' простору X для дії групи Γ на X таке, що $h_X(\Gamma) = h(\xi', \Gamma)$ [154]. Але ξ – генеруюче розбиття для коіндукованої дії групи G на Y за нашою побудовою, звідки $h(\xi, G) = h_Y(G)$, і $h_X(\Gamma) = h_Y(G)$ у цьому випадку.

Якщо $h_X(\Gamma) = \infty$, тоді $h_X(\Gamma) = \sup\limits_{\xi'} h(\xi', \Gamma) = \sup_\xi h(\xi, G) \le h_Y(G)$, звідки $h_Y(G) = \infty$. □

Припустимо, що зчисленна аменабельна група Γ діє вільно на $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Нагадаємо, що σ-підалгебра $\Pi(\Gamma)$ в $\mathcal{B}$ називається *(під)алгеброю Пінскера* дії групи Γ на (X, μ), див. [57, 31], якщо $\Pi(\Gamma)$ – максимальна Γ-інваріантна підалгебра в $\mathcal{B}$ така, що для будь-якого скінченного розбиття $\mathbf{P}$ простору X із $\Pi(\Gamma)$ має місце $h(\mathbf{P}, G) = 0$. Алгебра $\Pi(\Gamma)$ називається *тривіальною*, якщо вона містить лише X і пусту множину. Зрозуміло, що якщо $\Pi(\Gamma)$ тривіальна, то Γ має ц.п.е. на $(X, \mathcal{B}, \mu)$.

Наслідок 4.2.9. *Нехай G, Γ, (X, μ) і (Y, ν) – те ж саме, що й у Твердженні 4.2.8. Нехай* $\Pi(\Gamma)$ *– алгебра Пінскера дії групи* Γ *на* (X, μ)*, а* $\Pi(G)$ *– алгебра Пінскера дії групи G на (Y, ν). Якщо* $\Pi(\Gamma)$ *нетривіальна, то й* $\Pi(G)$ *також нетривіальна. Інакше кажучи, якщо коіндукована дія групи G на (Y, ν) має ц.п.е., то й дія групи* Γ *на (X, μ) мусить мати ц.п.е.*

Доведення. Це безпосередньо випливає з доведення Твердження 4.2.8. □

4.2.3 Властивість змішування Рудольфа-Вейса і цілком позитивна ентропія

Нехай K – скінченна підмножина в G. Скінченна підмножина $S \subset G$ називається K-**розлогою**, якщо для всіх $s_1 \neq s_2$ з S має місце $s_1^{-1}s_2 \notin K$. Наступне Визначення було запроваджене Б. Вейссом [191].

Визначення 4.2.10. *Вільна дія аменабельної зчисленної групи G на просторі Лебега (X, μ) називається* **рівномірно змішуючою**, *якщо для будь-якого скінченного розбиття ξ простору X і будь-якого $\varepsilon > 0$ існує скінченна підмножина $K \subset G$ така, що для будь-якої скінченної підмножини S в G, яка є K-розлогою, має місце*

$$H(\xi) - \frac{1}{|S|} H\left(\bigvee_{g \in S} g\xi\right) < \varepsilon.$$

Зазначимо, що для групи $\mathbb{Z}$ рівномірне змішування у цьому сенсі еквівалентне поняттю рівномірного змішування у термінології роботи [56], і K-змішування у термінології роботи [109].

Теорема 4.2.11. *Нехай G – зчисленна аменабельна група, (X, μ) – вільний лебегівський G-простір. Припустимо, що дія групи G рівномірно змішуюча. Тоді ця дія має ц.п.е.*

Доведення. Нехай G, (X, μ), ξ, K і ε – те ж саме, що й у Визначенні 4.2.10, і припустимо, що $0 < \varepsilon < H(\xi)/2$. Зафіксуємо скінченну підмножину $F \subset G$ і розглянемо скінченну підмножину $S \subset F$, яка є K-розлогою. Якщо не існує $f \in F$ такого, що f не міститься в S, але $S \cup \{f\}$ теж K-розлога, ми називатимемо S *максимальною K-розлогою підмножиною* в F. Зрозуміло, що будь-яка K-розлога підмножина $S' \subset F$ міститься у максимальній K-розлогій підмножині $S \subset F$. Крім того, зрозуміло, що K-розлога підмножина S є максимальною тоді й тільки тоді, коли довільний $f \in F$ або міститься в S, або має вигляд $f = ks$, де $s \in S$ і $k \in K$. Це дає такі оцінки для $|S|$: $|S| \leq |F|$, $|F| \leq |S| \cdot (|K|+1)$. Звідси маємо

$$\frac{1}{|F|} H\left(\bigvee_{f\in F} f\xi\right) \geq \frac{1}{|S|\cdot(|K|+1)} H\left(\bigvee_{f\in S} f\xi\right) \geq \frac{1}{(|K|+1)}(H(\xi)-\varepsilon) \geq$$
$$\geq \frac{H(\xi)}{2(|K|+1)}.$$

Безпосередньо з Визначення 4.2.2 випливає, що

$$h_o(\xi, G) = \inf_F \frac{1}{|F|} H\left(\bigvee_{f\in F} g\xi\right) \geq \frac{H(\xi)}{2(|K|+1)} > 0,$$

де інфімум взятий за всіма скінченними підмножинами F в G. Оскільки $h(\xi, G) = h_o(\xi, G)$ з огляду на Наслідок 4.2.4, маємо

$$h(\xi, G) > \frac{H(\xi)}{2(|K|+1)} > 0. \qquad \square$$

Звідси легко виводиться

Наслідок 4.2.12. *Вільна дія зчисленної аменабельної групи G на просторі Лебега (X, μ) має ц.п.е. тоді й тільки тоді, коли для будь-якого скінченного розбиття ξ і будь-якого $\varepsilon > 0$ існує скінченна підмножина $K \subset G$ така, що для будь-якої множини S, яка є K-розлогою,*

$$\left|\frac{1}{|S|} H\left(\bigvee_{g\in S} g\xi\right) - H(\xi)\right| < \varepsilon.$$

Теорема 4.2.11 дозволяє підсилити Теорему 4 з [57], де вона була встановлена для скінченного I (див. формулювання).

Теорема 4.2.13. *Нехай Γ – зчисленна дискретна аменабельна група.*

Нехай I – скінченна чи зчисленна множина, і для кожного $i \in I$ нехай $(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$ – простір з мірою, на якому група Γ має дію з ц.п.е. α_i.

Нехай $(Y, \nu) = \prod\limits_{i\in I}(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$, і α – продакт-дія групи Γ на (Y, ν):

$$\alpha(\gamma)y = ((\alpha_i(\gamma)x_i))_{i\in I}, \qquad \gamma \in \Gamma,$$

де $y = (x_i) \in Y$, $x_i \in X_i$, $i \in I$. Тоді α є дією з ц.п.е. групи Γ на (Y, ν).

Доведення. Встановлений у [57] факт про те, що Теорема виконується для скінченного I, означає, що будь-яке розбиття, вимірне лише щодо скінченної кількості прямих множників, задовольняє змішуючу властивість з Теореми 4.2.11. Але такі розбиття утворюють щільний клас у повній продакт-алгебрі, і тому зчисленна продакт-дія також має ц.п.е. $\square$

Наслідок 4.2.14. *Нехай G, Γ, (X,μ) і (Y,ν) – такі ж, як у Визначенні 4.2.5. Припустимо, що G абелева і Γ нескінченна. Якщо Γ має дію з ц.п.е. на (X,μ), то Γ діє ергодично на (Y,ν).*

Доведення. Якщо G абелева, то $s(\theta) = s(\theta\gamma)$ для будь-якого $\gamma \in G$, і $s(\theta)\gamma s(\theta\gamma) = \gamma$. Тому $(\gamma y)_\theta = \gamma y_\theta$. Наразі наше твердження стає очевидним з огляду на Теорему 4.2.13. $\square$

4.2.4 Існування небернулліївських дій з цілком позитивною ентропією

Ми маємо на меті довести, що процедура коіндукування, застосована до небернулліївської групової дії з ц.п.е., також дає небернулліївську дію з ц.п.е. Це дасть можливість використати відому для групи $\mathbb{Z}$ версію бажаного результату для його поширення на групи, що мають $\mathbb{Z}$ в якості підгрупи. З огляду на Твердження 4.2.8 і наслідок 4.2.7, проблема зводится до встановлення за наших умов ц.п.е. для коіндукованої дії.

Лема 4.2.15. *Нехай ξ і η – скінченні розбиття простору X, $\eta < \xi$, і $S \subset G$ – скінченна підмножина. Тоді*

$$H(\eta) - \frac{1}{|S|} H\left(\bigvee_{g\in S} g\eta\right) \le H(\xi) - \frac{1}{|S|} H\left(\bigvee_{g\in S} g\xi\right).$$

Доведення. Нехай $S = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$. Послідовне застосування співвідношення $H(Q \vee P|Z) = H(Q|Z) + H(P|Q \vee Z)$ дає

$$|S|\cdot H(\xi)-H\left(\bigvee_{g\in S} g\xi\right)=|S|\cdot H(\xi\vee\eta)-\sum_{i=1}^{n} H\left(\xi\vee\eta\left|\bigvee_{j=1}^{i-1} g_i^{-1}g_j\xi\right.\right)=$$

$$=\left(|S|\cdot H(\eta)-\sum_{i=1}^{n} H\left(\eta\left|\bigvee_{j=1}^{i-1} g_i^{-1}g_j\xi\right.\right)\right)+$$

$$+\left(|S|\cdot H(\xi|\eta)-\sum_{i=1}^{n} H\left(\xi\left|\eta\vee\bigvee_{j=1}^{i-1} g_i^{-1}g_j\xi\right.\right)\right)\geq$$

$$\geq\left(|S|\cdot H(\eta)-\sum_{i=1}^{n} H\left(\eta\left|\bigvee_{j=1}^{i-1} g_i^{-1}g_j\eta\right.\right)\right)+$$

$$+\left(|S|\cdot H(\xi|\eta)-\sum_{i=1}^{n} H\left(\xi\left|\eta\vee\bigvee_{j=1}^{i-1} g_i^{-1}g_j\xi\right.\right)\right).$$

Оскільки $|S|\cdot H(\xi|\eta)-\sum\limits_{i=1}^{n} H\left(\xi\left|\eta\vee\bigvee\limits_{j=1}^{i-1} g_i^{-1}g_j\xi\right.\right)\geq 0$, одержуємо

$$|S|\cdot H(\xi)-H\left(\bigvee_{g\in S} g\xi\right)\geq|S|\cdot H(\eta)-\sum_{i=1}^{n} H\left(\eta\left|\bigvee_{j=1}^{i-1} g_i^{-1}g_j\eta\right.\right)=$$

$$=|S|\cdot H(\eta)-H\left(\bigvee_{g\in S} g\eta\right),$$

що зрозумілим чином є еквівалентом нашого твердження. □

Наступна основна Теорема використовує позначення та термінологію Визначення 4.2.5.

Теорема 4.2.16. *Нехай G – зчисленна аменабельна група і Γ – нескінченна підгрупа в G. Припустимо, що Γ має вільну дію на просторі Лебега (X,μ). Тоді коіндукована дія групи G на (Y,ν) має ц.п.е. тоді й тільки тоді, коли дія групи Γ на (X,μ) має ц.п.е. Ця дія групи G на (Y,ν) бернуллiївська тоді й тільки тоді, коли дія групи Γ на (X,μ) бернуллiївська.*

Доведенню цієї Теореми передують Визначення і дві Леми.

Визначення 4.2.17. *Нехай $P \subset \Gamma\backslash G$. Тоді $X^P = \prod\limits_P (X, \mathcal{B}, \mu)$ може розглядатися як фактор-простір простору $Y = \prod\limits_{\Gamma\backslash G} (X, \mathcal{B}, \mu)$, що відповідає проекції $\tau : Y \to X^P$:*

$$\tau(x)_\gamma = x_\gamma \quad \text{для} \quad x \in Y,\ \gamma \in P.$$

Будемо казати, що розбиття η простору Y **підпорядковано** *підмножині індексів P, якщо η зводиться до розбиття фактор-простору X^P у тому сенсі, що існує розбиття η' простору X^P таке, що $\eta = \tau^{-1}(\eta')$.*

Припустимо заданим скінченне розбиття ξ простору Y. Виберемо переріз s і скінченну підмножину $K \subset G$ у такий спосіб, що $K^{-1} \subset s(\Gamma\backslash G)$ (і отже K^{-1} перетинає кожен правий клас суміжності не більше як один раз).

Далі, нехай d – метрика Рохліна для розбиттів зі скінченною енропією [153, розділ 6]. (Вона позначається через d_{ent} в [56].) Для кожного $\varepsilon > 0$ можна вибрати скінченну підмножину K як зазначено вище, і скінченне розбиття $\widetilde{\eta}$ простору Y такі, що $\widetilde{\eta}$ підпорядковано $s^{-1}(K^{-1})$, і крім того $d(\xi, \widetilde{\eta}) < \varepsilon/6$.

Тепер, нехай η_0 – скінченне розбиття простору Y, підпорядковане $\{s^{-1}(e)\}$ і вибране у такий спосіб, що для певного розбиття $\eta \preceq \overline{\eta} = \bigvee\limits_{k\in K} k\eta_0$ має місце $d(\widetilde{\eta}, \eta) < \varepsilon/6$. Отже $d(\xi, \eta) < \varepsilon/3$.

Оскільки дія групи Γ на просторі X має ц.п.е., ми можемо знайти скінченну підмножину $J \subset \Gamma$ таку, що $e \in J$ і для будь-якої скінченної J-розлогої підмножини $S \subset \Gamma$

$$H(\eta_0) - \frac{1}{|S|} H\left(\bigvee_{g\in S} g\eta_0\right) < \varepsilon/3|K|. \tag{4.2.2}$$

Це безпосередньо випливає з Наслідка 4.2.12, див. також [157, теорема 2.3].

Лема 4.2.18. *Нехай Q – скінченна KJK^{-1}-розлога підмножина в G. Тоді $|QK| = |Q| \cdot |K|$, і при цьому QK є J-розлогою.*

Доведення. Легко перевірити, що QK є J-розлогою. Нехай $q_i \in Q$ і $k_i \in K$, $i = 1, 2$, тоді $q_1 k_1 = q_2 k_2$ у тому й тільки тому випадку, коли $q_1 = q_2$ і $k_1 = k_2$, оскільки $e \in J$. Але з цього випливає $|QK| = |Q| \cdot |K|$. $\square$

Лема 4.2.19. *Нехай J таке, як вище. Тоді для будь-якої скінченної KJK^{-1}-розлогої підмножини $Q \subset G$*

$$H(\eta) - \frac{1}{|Q|} H\left(\bigvee_{g\in Q} g\eta\right) < \varepsilon/3. \tag{4.2.3}$$

Доведення. Внаслідок Леми 4.2.15, досить перевірити (4.2.3), у якому η замінено на $\overline{\eta}$ визначене вище.

Нехай $\pi : G \to G/\Gamma$ – природна проекція. З нашого вибору підмножини K випливає, що вона перетинає кожен лівий клас суміжності не більше одного разу, і тому ми можемо вибрати переріз $s' : G/\Gamma \to G$ для π у такий спосіб, що $s'(k\Gamma) = k$ для всіх $k \in K$. Наразі, для $Q \subset G$ скінченної і KJK^{-1}-розлогої ми можемо використати (4.2.2) разом з незалежністю комнонент, що відповідають різним елементам з G/Γ для одержання

$$|Q| \cdot H(\overline{\eta}) - H\left(\bigvee_{g\in Q} g\overline{\eta}\right) = |Q| \cdot |K| \cdot H(\eta_0) - H\left(\bigvee_{g\in Q}\bigvee_{k\in K} gk\eta_0\right) =$$

$$= |QK| \cdot H(\eta_0) - H\left(\bigvee_{\theta\in G/\Gamma}\ \bigvee_{\substack{(g,k)\in Q\times K\\ \pi(gk)=\theta}} gk\eta_0\right) =$$

$$= |QK| \cdot H(\eta_0) - \sum_{\theta\in G/\Gamma} H\left(\bigvee_{\substack{(g,k)\in Q\times K\\ \pi(gk)=\theta}} s'(\theta)^{-1} gk\eta_0\right) <$$

$$< |QK| \cdot H(\eta_0) - \sum_{\theta\in G/\Gamma} |QK \cap \pi^{-1}(\theta)|(H(\eta_0) - \varepsilon/3|K|) =$$

$$= |QK|\varepsilon/3|K| = |Q| \cdot |K| \cdot \varepsilon/3|K| = \frac{|Q|\cdot\varepsilon}{3}.$$

Звідси маємо

$$H(\overline{\eta}) - \frac{1}{|Q|} H\left(\bigvee_{g\in Q} g\overline{\eta}\right) < \varepsilon/3,$$

і тому (4.2.3) випливає з Леми 4.2.15. □

Доведення Теореми 4.2.16. З Твердження 4.2.6 і Наслідку 4.2.7 випливає, що коіндукована дія групи G бернулліївська тоді й тільки тоді, коли дія групи Γ бернулліївська.

Припустимо, що коіндукована дія групи G має ц.п.е. на (Y, ν); тоді дія групи Γ на (X, μ) також має ц.п.е. за Наслідком 4.2.9.

Тепер припустимо, що дія групи Γ має ц.п.е. на (X, μ). Ми доведемо, що дія групи G на (Y, ν) має ц.п.е. Внаслідок Теореми 4.2.11, досить показати, що коіндукована дія групи G на просторі Y має властивість рівномірного змішування (див. Визначення 4.2.10).

Нагадаємо, що для будь-якого розбиття ξ простору Y і довільного $\varepsilon > 0$ існує скінченне розбиття η простору Y таке, що $d(\xi, \eta) < \varepsilon/3$. Тому, стандартні властивості метрики Рохліна дають такі оцінки:

$$|H(\xi) - H(\eta)| < d(\xi, \eta) < \varepsilon/3,$$

$$\left| \frac{1}{|Q|} H\left(\bigvee_{g\in Q} g\xi\right) - \frac{1}{|Q|} H\left(\bigvee_{g\in Q} g\eta\right) \right| < d(\xi, \eta) < \varepsilon/3.$$

Тут Q – скінченна KJK^{-1}-розлога підмножина в G як у формулюванні Леми 4.2.19. Внаслідок (4.2.3) і цих двох оцінок маємо

$$\left| H(\xi) - \frac{1}{|Q|} H\left(\bigvee_{g\in Q} g\xi\right) \right| < \varepsilon. \tag{4.2.4}$$

Отже ми довели, що для будь-якого скінченного розбиття ξ простору Y і будь-якого $\varepsilon > 0$ існує скінченна підмножина KJK^{-1} в G така, що для будь-якої скінченної KJK^{-1}-розлогої підмножини Q нерівність (4.2.4) має місце. Це означає, що коіндукована дія групи G на просторі Y рівномірно змішуюча. □

Наслідок 4.2.20. *Припустимо, що зчисленна аменабельна група G містить елемент нескінченного порядку. Тоді G має небернулліївську дію з ц.п.е.*

Доведення. Це є наслідком Теореми 4.2.16 і того факту, що (див. [138, 136, 49, 135, 91, 80]) група $\mathbb{Z}$ має небернулліївську дію з ц.п.е. $\square$

Наслідок 4.2.21. *Припустимо, що G така, як у формулюванні Наслідку 4.2.20. Для заданого $t \in (0, \infty]$ існує небернулліївська дія з ц.п.е. α_t групи G така, що $h(\alpha_t) = t$.*

Доведення. Дійсно, для кожного t існує небернулліївський K-автоморфізм S_t такий, що $h(S_t) = t$. Це випливає з [49, наслідок 3]. Нехай α_t – дія групи G, коіндукована з S_t. Тоді α_t – дія групи G з ц.п.е. внаслідок Теореми 4.2.16, і при цьому $h(\alpha_t) = h(S_t) = t$ (див. Твердження 4.2.8). $\square$

Каліков довів [91], що існують небернулліївські K-автоморфізми S такі, що S і S^{-1} ізоморфні. Ми маємо можливість використати коіндукцію та її властивості для узагальнення цього результату на будь-яку абелеву групу, що містить $\mathbb{Z}$ як підгрупу.

Наслідок 4.2.22. *Нехай G – зчисленна абелева група, що містить $\mathbb{Z}$ як підгрупу. Тоді існує небернулліївська дія U групи G з ц.п.е. така, що дії $h \mapsto U_h$ і $h \mapsto U_{h^{-1}}$ ізоморфні.*

Доведення. Припустимо, що S діє на просторі Лебега (X, μ). Неважко перевірити, що існує $V \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ такий, що $VSV^{-1} = S^{-1}$. Ми подаємо схему доведення цього Твердження для випадку $G = \mathbb{Z}^2$. Загальний випадок може бути розглянутий у подібний спосіб. За Визначенням 4.2.5, простір Лебега (Y, ν) має вигляд $(Y, \nu) = \prod_{\mathbb{Z}}(X, \mu)$, і якщо $y \in Y$, то $y = (y_i)$, $i \in \mathbb{Z}$, $y_i \in X$. Маємо

$$(T_1 y)_i = y_{i+1} \qquad (T_2 y)_i = Sy_i, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Покладаючи $(Wy)_i = Vy_i$, $i \in \mathbb{Z}$, маємо $WT_2W^{-1} = T_2^{-1}$ і $WT_1W^{-1} = T_1$. Легко побачити, що існує перетворення J простору (Y, ν) таке, що $JT_1J = T_1^{-1}$, $J^2 = I$, $JW = WJ$ і $JT_2 = T_2J$. $\square$

Висновки до розділу 4

Як відомо, важливою умовою на зчисленну групу, за якою її дії на просторі з мірою припускають помірковану ентропійну теорію (принаймні у розумінні ентропії, близькому до класичного), є аменабельність такої групи. Але група $\mathbb{Z}$, з дій якої свого часу починалося вивчення ентропії динамічних систем, має ще одну змістовну властивість: вона є впорядкованою групою. Завдяки цій властивості, середня ентропія розбиття для дії цієї групи припускає опис у термінах "минулого" щодо даного розбиття. Цей факт є ключовим засобом у вивченні ентропійних властивостей відповідних динамічних систем, зокрема в описі алгебр Пінскера, спектральних властивостей та властивостей K-систем.

Серед зчисленних аменабельних груп властивість впорядкованості мають скінченно-генеровані нільпотентні групи без кручень. Такі групи стали об'єктом вивчення у цій роботі.

На основі доведеної у роботі формули Пінскера для середньої ентропії перетину розбиттів, подано опис алгебр Пінскера для зазначених вище груп. Розглянуто розбиття з різноманітними властивостями інваріантності: інваріантні, сильно інваріантні, тотально інваріантні, вичерпні, досконалі. У термінах таких розбиттів подано опис K-систем як таких, що мають цілком позитивну ентропію.

Зазначені вище типи розбиттів використано для доведення того факту, що динамічна система з додатною ентропією має зчисленний лебегівський спектр в ортогональному додатку до L^2-простору над алгеброю Пінскера.

Ще одним об'єктом вивчення у роботі є співвідношення властивостей бернуллиівості та цілком позитивної ентропії для дій зчисленних аменабельних груп. Бернуллиївські дії мають ц.п.е., і класичний результат полягає в наявності певної відстані між цими властивостями для дій групи $\mathbb{Z}$. А саме, існують небернуліївські перетворення з цілком позитивною ентропією.

З метою узагальнення цього класичного результату на більш широкий клас зчисленних аменабельних груп, у роботі розглянуто так звані коіндуковані дії і вивчено їх властивості. Процедура коіндукування дозволяє будувати дію групи за дією її підгрупи (зі скінченною інваріантною мірою), і при цьому, як встановлено у роботі, зберігаються властивості бернуллієвості та ц.п.е.

З огляду на названий вище класичний результат щодо групи $\mathbb{Z}$, у роботі доведено, що зчисленна аменабельна група, яка містить елемент нескінченного порядку, має небернулліївську дію з ц.п.е.

Залишається невирішеним питання про існування небернулліївських дій з ц.п.е. для зчисленних груп, всі елементи яких мають скінченні порядки.

РОЗДІЛ 5
ЗОБРАЖЕННЯ КВАНТОВИХ АЛГЕБР

5.1 Квантовий аналог функтора Бернштейна

Розглядаються запроваджені Неппом та Воганом [104] алгебри Гекке у квантовому контексті. Це дозволяє побудувати квантовий аналог функтора Бернштейна, див. [171].

5.1.1 Категорія $C(\mathfrak{l},\mathfrak{l})_q$ і алгебра $R(\mathfrak{l})_q$

У подальшому основним полем буде вважатися $\mathbb{C}$.

Нехай $\mathbf{a} = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, \ldots, l$, – матриця Картана простої комплексної алгебри Лі рангу l. Її універсальна огортуюча алгебра – це алгебра з одиницею U, визначена своїми твірними $\{H_i, E_i, F_i\}_{i,j=1,2,\ldots,l}$ і добре відомими співвідношеннями [88, стор. 51].

Елементи $H_1, H_2, \ldots, H_l$ є базою картанівської підалгебри $\mathfrak{h}$, а лінійні функціонали $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$, які визначені через $\alpha_j(H_i) = a_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots, l$, утворюють систему простих коренів простої алгебри Лі що розглядається.

Існує єдиний набір взаємно простих додатних цілих $d_1, d_2, \ldots, d_l$ таких, що $d_i a_{ij} = d_j a_{ji}$, $i, j = 1, 2, \ldots, l$. Білінійна форма на $\mathfrak{h}^*$, задана через $(\alpha_i, \alpha_j) = d_i a_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots, l$, є позитивно визначеною.

Нагадаємо визначення квантової універсальної огортуючої алгебри U_q, запровадженої В. Дрінфельдом та М. Джімбо у набагато більш загальному контексті, ніж це потрібно для наших завдань. Ми вважаємо, що параметр деформації q лежить усередині $(0, 1)$. Причина для настільки жорстких вимог щодо q стане зрозумілим нижче при дослідженні можливості унітаризації модулів Хариш-Чандри над U_q.

Алгебра з одиницею U_q визначається твірними K_i, K_i^{-1}, E_i, F_i, $i = 1, 2, \ldots, l$, і співвідношеннями

$$K_i K_j = K_j K_i, \qquad K_i K_i^{-1} = K_i^{-1} K_i = 1,$$

$$K_iE_j = q_i^{a_{ij}}E_jK_i, \qquad K_iF_j = q^{-a_{ij}}F_jK_i,$$
$$E_iF_j - F_jE_i = \delta_{ij}(K_i - K_i^{-1})/(q_i - q_i^{-1}),$$
$$\sum_{s=0}^{1-a_{ij}}(-1)^s \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ s \end{bmatrix}_{q_i} E_i^{1-a_{ij}-s}E_jE_i^s = 0,$$
$$\sum_{s=0}^{1-a_{ij}}(-1)^s \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ s \end{bmatrix}_{q_i} F_i^{1-a_{ij}-s}F_jF_i^s = 0,$$

де

$$q_i = q^{d_i}, \qquad 1 \le i \le l,$$
$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_q = \frac{[m]_q!}{[n]_q![m-n]_q!}, \qquad [n]_q! = [n]_q \dots [2]_q[1]_q, \qquad [n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}.$$

Існує едина структура алгебри Хопфа на U_q [88, Глава 4] така, що

$$\triangle(E_i) = E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i, \qquad \triangle(F_i) = F_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes F_i, \qquad \triangle(K_i) = K_i \otimes K_i,$$
$$S(E_i) = -K_i^{-1}E_i, \qquad S(F_i) = -F_iK_i, \qquad S(K_i) = K_i^{-1},$$
$$\varepsilon(E_i) = \varepsilon(F_i) = 0, \qquad \varepsilon(K_i) = 1,$$

де $\triangle$, S, ε – комноження, антипод і коодиниця, відповідно.

Кожна підмножина $\mathbb{L} \subset \{1, 2, \dots, l\}$ визначає підалгебру Хопфа $U_q\mathfrak{l} \subset U_q$, генеровану $K_i^{\pm 1}$, $i = 1, 2, \dots, l$; $E_j, F_j, \quad j \in \mathbb{L}$.

Для спрощення, введемо позначення $P = \mathbb{Z}^l$, $P_+ = \mathbb{Z}_+^l$, $P_{++} = \mathbb{N}^l$ та

$$P_+^{\mathbb{L}} = \{\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l) \in P | \ \lambda_i \ge 0 \ \text{ для } \ i \in \mathbb{L}\}.$$

Розглянемо $U_q\mathfrak{l}$-модуль V. Кожному $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l) \in P$ поставимо у відповідність ваговий підпростір

$$V_\mu = \{v \in V | \ K_iv = q_i^{\mu_i}v, \quad i = 1, 2, \dots, l\}.$$

Визначення 5.1.1. *$U_q\mathfrak{l}$-модуль V, разом з відповідним зображенням $U_q\mathfrak{l}$, називається* **ваговим**, *якщо* $V = \bigoplus_{\mu \in P} V_\mu$.

Скінченновимірні $U_q\mathfrak{l}$-модулі звуться $U_q\mathfrak{l}$-модулями класу I [88].

Приклад. Розглянемо $U_q\mathfrak{l}$-модуль Верма $M(\mathfrak{l},\lambda)$ зі старшою вагою $\lambda \in P_+^{\mathbb{L}}$. Це модуль, що визначається твірною $v(\mathfrak{l},\lambda)$ і співвідношеннями

$$E_j v(\mathfrak{l},\lambda) = 0, \quad j \in \mathbb{L}; \qquad K_i^{\pm 1} v(\mathfrak{l},\lambda) = q_i^{\pm\lambda_i} v(\mathfrak{l},\lambda), \quad i = 1,2,\ldots,l.$$

Легко довести, що його підмодуль $K(\mathfrak{l},\lambda)$, генерований $F_j^{\lambda_j+1} v(\mathfrak{l},\lambda)$, $j \in \mathbb{L}$, є єдиним підмодулем скінченної ковимірності. Зокрема, фактор-модуль $L(\mathfrak{l},\lambda) = M(\mathfrak{l},\lambda)/K(\mathfrak{l},\lambda)$ є простим (див. [88]).

Вимірності вагових підпросторів $U_q\mathfrak{l}$-модулів $L(\mathfrak{l},\lambda)$ співпадають з їх класичними значеннями [88]. Вагові скінченновимірні $U_q\mathfrak{l}$-модулі є цілком звідними, а їх незвідні підмодулі ізоморфні $L(\mathfrak{l},\lambda)$, $\lambda \in P_+^{\mathbb{L}}$. Центр $U_q\mathfrak{l}$ припускає простий опис у термінах ізоморфізму Хариш-Чандри [88, стор. 109] і розділяє прості вагові скінченновимірні $U_q\mathfrak{l}$-модулі [88, стор. 125]. Іншими словами, для будь-яких $\lambda_1, \lambda_2 \in P_+^{\mathbb{L}}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, існує такий елемент z центра $Z(U_q\mathfrak{l})$ алгебри $U_q\mathfrak{l}$, що $z|_{L(\mathfrak{l},\lambda_1)} \neq z|_{L(\mathfrak{l},\lambda_2)}$.

Модуль V над $U_q\mathfrak{l}$ називається локально скінченновимірним, якщо $\dim(U_q\mathfrak{l}\, v) < \infty$ для всіх $v \in V$. Запровадимо позначення $C(\mathfrak{l},\mathfrak{l})_q$ для повної підкатегорії вагових локально скінченновимірних $U_q\mathfrak{l}$-модулів.

Негайний наслідок зазначених вище властивостей $U_q\mathfrak{l}$-модулів $L(\mathfrak{l},\lambda)$, $M(\mathfrak{l},\lambda)$ полягає в тому, що кожен $U_q\mathfrak{l}$-модуль $V \in C(\mathfrak{l},\mathfrak{l})_q$ припускає єдиний розклад у пряму суму $V = \bigoplus\limits_{\lambda \in P_+^{\mathbb{L}}} V_\lambda$ його підмодулів, що є кратними модулів $L(\mathfrak{l},\lambda)$, $\lambda \in P_+^{\mathbb{L}}$. Ця сума пряма, оскільки $Z(U_q\mathfrak{l})$ розділяє прості скінченновимірні вагові $U_q\mathfrak{l}$-модулі.

Нехай $\mathrm{End}\, L(\mathfrak{l},\lambda)$ – алгебра всіх лінійних відображень векторного простору $L(\mathfrak{l},\lambda)$. Розглянемо $U_q\mathfrak{l}$-модуль $L^{\mathrm{univ}} = \bigoplus\limits_{\lambda \in P_+^{\mathbb{L}}} L(\mathfrak{l},\lambda)$ і проекцію P_λ в L^{univ} на ізотипічну компоненту $L(\mathfrak{l},\lambda)$ паралельно сумі всіх інших ізотипічних компонент. Алгебра $\mathrm{End}\, L^{\mathrm{univ}}$ всіх лінійних відображень простору L^{univ} є $U_q\mathfrak{l}$-модульною алгеброю. (Тобто, якщо $\xi \in U_q\mathfrak{l}$ і $\triangle\xi = \sum\limits_i \xi_i' \otimes \xi_i''$, то $(\xi A)v = \sum\limits_i \xi_i' A S(\xi_i'')v$, $v \in L^{\mathrm{univ}}$, $A \in \mathrm{End}\, L^{\mathrm{univ}}$, де $\triangle$ і S – відповідно комноження і антипод в $U_q\mathfrak{l}$.) Природній гомоморфізм $U_q\mathfrak{l} \to \mathrm{End}\, L^{\mathrm{univ}}$ є ін'єктивним [88, стор. 76 – 77], що дозволяє ототожнювати $U_q\mathfrak{l}$ з її образом в $\operatorname{End} L^{\mathrm{univ}}$. Розглянемо наступні $U_q\mathfrak{l}$-модульні підалгебри в $\operatorname{End} L^{\mathrm{univ}}$:

$$R(\mathfrak{l})_q \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigoplus_{\lambda \in P_+^{\mathbb{L}}} \operatorname{End} L(\mathfrak{l}, \lambda), \qquad F(\mathfrak{l})_q \stackrel{\mathrm{def}}{=} R(\mathfrak{l})_q \oplus U_q\mathfrak{l}.$$

Легко довести, що $R(\mathfrak{l})_q \cap U_q\mathfrak{l} = 0$. Дійсно, $U_q\mathfrak{l}$ не має дільників нуля [22], в той час як ізоморфізм Хариш-Чандри постачає для будь-якого $a \in R(\mathfrak{l})_q$ ненульовий елемент $z \in Z(U_q\mathfrak{l})$ такий, що $za = 0$.

Очевидно, $R(\mathfrak{l})_q$ є двостороннім ідеалом в $F(\mathfrak{l})_q$, генерованим проекціями P_λ.

$R(\mathfrak{l})_q$ не має одиниці, але він має виділену апроксимативну одиницю. А саме, кожна скінченна підмножина $\Lambda \subset P_+^{\mathbb{L}}$ визначає ідемпотент $\chi_\Lambda = \sum\limits_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda$ в $R(\mathfrak{l})_q$. Очевидно, $\chi_{\Lambda_1}\chi_{\Lambda_2} = \chi_{\Lambda_2}\chi_{\Lambda_1} = \chi_{\Lambda_1 \cap \Lambda_2}$, і для будь-якого $r \in R(\mathfrak{l})_q$ існує скінченна підмножина $\Lambda \subset P_+^{\mathbb{L}}$ така, що $\chi_\Lambda r = r\chi_\Lambda = r$. Нехтуючи точністю термінології, можна сказати, що в $F(\mathfrak{l})_q$

$$\lim_{\Lambda \uparrow P_+^{\mathbb{L}}} \chi_\Lambda = 1.$$

Кажуть, що модуль V над $R(\mathfrak{l})_q$ має апроксимативну одиницю, якщо для кожного $v \in V$ існує скінченна підмножина $\Lambda \subset P_+^{\mathbb{L}}$ така, що $\chi_\Lambda v = v$.

Ми покажемо, що повна підкатегорія $R(\mathfrak{l})_q$-модулів з апроксимативною одиницею канонічно ізоморфна $C(\mathfrak{l}, \mathfrak{l})_q$.

Твердження 5.1.2.

1. Для будь-якого $R(\mathfrak{l})_q$-модуля V з апроксимативною одиницею і будь-яких $\xi \in F(\mathfrak{l})_q$, $v \in V$, існує границя

$$\xi v \stackrel{\mathrm{def}}{=} \lim_{\Lambda \uparrow P_+^{\mathbb{L}}} (\xi \chi_\Lambda) v \tag{5.1.1}$$

у тому сенсі, що $(\xi\chi_\Lambda)v$ є однаковими для досить великих Λ.

2. Співвідношення (5.1.1) *устатковує V структурою $F(\mathfrak{l})_q$-модуля і визначає функтор з категорії $R(\mathfrak{l})_q$-модулів з апроксимативною одиницею в категорію $C(\mathfrak{l}, \mathfrak{l})_q$.*

3. Цей функтор є ізоморфізмом категорій.

Доведення. Кожен $R(\mathfrak{l})_q$-модуль V з апроксимативною одиницею припускає вкладення в $R(\mathfrak{l})_q$-модуль з апроксимативною одиницею, що є кратним L^{univ}. З цього випливають перші два твердження, оскільки вони легко перевіряються для L^{univ}.

Кожен $U_q\mathfrak{l}$-модуль, кратний L^{univ}, є також $F(\mathfrak{l})_q$-модулем. Це дозволяє побудувати обернений функтор, вкладаючи кожний $U_q\mathfrak{l}$-модуль $V \in C(\mathfrak{l},\mathfrak{l})_q$ в $U_q\mathfrak{l}$-модуль, кратний L^{univ}. Звідси випливає третє твердження. $\square$

Зазначимо, що дія $P_\lambda \in R(\mathfrak{l})_q$ на вектор $v \in V \in C(\mathfrak{l},\mathfrak{l})_q$ може бути описана без посилання на вкладення в $U_q\mathfrak{l}$-модуль, кратний L^{univ}. А саме, для будь-якого $\lambda \in P_+^{\mathbb{L}}$ існує послідовність $z_1(\lambda), z_2(\lambda), \dots$ елементів центру алгебри $U_q\mathfrak{l}$ така, що $P_\lambda v = \lim\limits_{n\to\infty} z_n(\lambda)v$ для всіх $v \in V \in C(\mathfrak{l},\mathfrak{l})_q$. Аби побачити це, зазначимо, що для будь-якої скінченної підмножини $\lambda \in \Lambda \subset P_+^{\mathbb{L}}$ існує такий $z \in Z(U_q\mathfrak{l})$, що $z|_{L(\mathfrak{l},\mu)} = 0$ для $\mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\}$ і при цьому $z|_{L(\mathfrak{l},\lambda)} = 1$. Залишається вибрати послідовність $\Lambda_n \uparrow P_+^{\mathbb{L}}$.

5.1.2 Категорія $\boldsymbol{C(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q}$ і алгебра $\boldsymbol{R(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q}$

Нехай $\mathbb{G} \supset \mathbb{L}$ – пара підмножин в $\{1,2,\dots,l\}$ і $U_q\mathfrak{g} \supset U_q\mathfrak{l}$ – відповідна пара підалгебр Хопфа в U_q.

Розглянемо категорію всіх $U_q\mathfrak{g}$-модулів і її повну підкатегорію $C(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$, утворену ваговими $U_q\mathfrak{l}$-локально скінченновимірними $U_q\mathfrak{g}$-модулями V:

$$\dim(U_q\mathfrak{l}\, v) < \infty, \qquad v \in V.$$

Перейдемо до опису алгебри $F(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$, що є важливим засобом вивчення $U_q\mathfrak{g}$-модулів категорії $C(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$. У простому окремому випадку $\mathbb{G} = \mathbb{L}$, $C(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q = C(\mathfrak{l},\mathfrak{l})_q$, $F(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$ буде канонічно ізоморфна $F(\mathfrak{l})_q$. Точніше кажучи, ми побудуємо $F(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$ разом з вкладеннями $U_q\mathfrak{g} \hookrightarrow F(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$, $F(\mathfrak{l})_q \hookrightarrow F(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$, які мають такі властивості:

(F1) Діаграма

$$\begin{tikzcd} U_q\mathfrak{l} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & U_q\mathfrak{g} \arrow[d, hook] \\ F(\mathfrak{l})_q \arrow[r, hook] & F(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q \end{tikzcd}$$

є комутативною (у подальшому $U_q\mathfrak{g}$ і $F(\mathfrak{l})_q$ будемо ототожнювати з їх образами відносно вкладень в $F(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$), і підалгебри $U_q\mathfrak{g}$ і $F(\mathfrak{l})_q$ генерують алгебру $F(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$.

(F2) Апроксимативна одиниця $\{\chi_\Lambda\}$ алгебри $R(\mathfrak{l})_q$ є також апроксимативною одиницею двостороннього ідеалу $R(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$ в $F(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$, генерованого $R(\mathfrak{l})_q$.

(F3) Для будь-якого $R(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$-модуля V з апроксимативною одиницею і будь-яких $\xi \in F(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$, $v \in V$ існує границя

$$\xi v \stackrel{\mathrm{def}}{=} \lim_{\Lambda\uparrow P_+^{\mathbb{L}}} (\xi\chi_\Lambda)v, \tag{5.1.2}$$

і при цьому (5.1.2) устатковує V структурою $F(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$-модуля.

Перетин ядер усіх таких зображень $F(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$ є $\{0\}$.

(F4) Функтор з категорії $R(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$-модулів з апроксимативною одиницею в $C(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$, визначений через (5.1.2), є ізоморфізмом категорій.

Ми покажемо, що алгебра $F(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$ і вкладення $U_q\mathfrak{g} \hookrightarrow F(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$, $F(\mathfrak{l})_q \hookrightarrow F(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$ визначаються (F1) – (F4) суттєво єдиним способом (тобто існує єдиний ізоморфізм алгебр, що шанує вкладення.)

Кожному $U_q\mathfrak{l}$-модулю V поставимо у відповідність $U_q\mathfrak{g}$-модуль $P(V) = U_q\mathfrak{g}\otimes_{U_q\mathfrak{l}}V$. Наступний результат добре відомий у класичному випадку $q = 1$ [104]. Він доведений у Додатку A.3 (див. Наслідок A.3.3).

Лема 5.1.3.

1. Якщо $V \in C(\mathfrak{l},\mathfrak{l})_q$, то $P(V)$ є проективним об'єктом в $C(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$.

2. Для будь-якого $V \in C(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$ відображення

$$P(V) \mapsto V, \qquad \xi\otimes v \mapsto \xi v, \qquad \xi \in U_q\mathfrak{g}, \quad v \in V,$$

є сюр'єктивним морфізмом $U_q\mathfrak{g}$-модулів.

Проективні об'єкти $P(V)$ категорії $C(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$ називаються *стандартними проективними об'єктами.*

Розглянемо $U_q\mathfrak{g}$-модуль $V^{\mathrm{univ}} = P(L^{\mathrm{univ}})$.

Наслідок 5.1.4. *В категорії $U_q\mathfrak{l}$-модулів*

$$V^{\mathrm{univ}} = \bigoplus_{\lambda \in P_+^{\mathbb{L}}} V_\lambda^{\mathrm{univ}},$$

де $U_q\mathfrak{l}$-модулі $V_\lambda^{\mathrm{univ}}$ кратні $L(\mathfrak{l}, \lambda)$.

Наслідок 5.1.5. *Для будь-якого модуля $M \in C(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})_q$ існує сюр'єктивний морфізм $\widetilde{V}^{\mathrm{univ}} \to M$ в категорії $C(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})_q$, де $\widetilde{V}^{\mathrm{univ}}$ – модуль, кратний V^{univ}.*

Запровадимо позначення $\mathcal{P}_\lambda$ для проекції в V^{univ} на $U_q\mathfrak{l}$-ізотипічну компоненту $V_\lambda^{\mathrm{univ}}$ паралельно сумі всіх інших $U_q\mathfrak{l}$-ізотипічних компонент.

Категорія $C(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})_q$ і категорія $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})_q$-модулів з апроксимативною одиницею замкнуті відносно операцій утворення прямих сум, переходу до підмодулів та фактор-модулів. Це дозволяє, використовуючи Лему 5.1.3 і Наслідок 5.1.5, довести наступне твердження, з якого випливає єдиність для $F(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})_q$ і вкладень $U_q\mathfrak{g} \hookrightarrow F(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})_q$, $F(\mathfrak{l})_q \hookrightarrow F(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})_q$.

Твердження 5.1.6. *Розглянемо алгебру $F(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})_q$ і вкладення $U_q\mathfrak{g} \hookrightarrow F(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})_q$, $F(\mathfrak{l})_q \hookrightarrow F(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})_q$ з властивостями (F1) – (F4).*

1. Зображення $U_q\mathfrak{g}$ в V^{univ} визначає зображення $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})_q$ з апроксимативною одиницею і точне зображення $F(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})_q$ в V^{univ}.

2. Образ $F(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})_q$ відносно вкладення в $\operatorname{End} V^{\mathrm{univ}}$ є підалгеброю, генерованою елементами $U_q\mathfrak{g} \subset \operatorname{End} V^{\mathrm{univ}}$ і проекціями $\mathcal{P}_\lambda$, $\lambda \in P_+^{\mathbb{L}}$.

Перейдемо до побудови алгебри $F(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})_q$. У подальшому ми будемо ототожнювати алгебри $U_q\mathfrak{g}$, $F(\mathfrak{l})_q$ з їх образами відносно вкладень в $\operatorname{End} V^{\mathrm{univ}}$. Це обґрунтовано тим, що зображення $U_q\mathfrak{g}$ в V^{univ} є точним, оскільки для будь-якого вагового скінченновимірного $U_q\mathfrak{g}$-модуля W існує сюр'єктивний морфізм $U_q\mathfrak{g}$-модулів $V^{\mathrm{univ}} \to W$ (Наслідок 5.1.5). Зображення $F(\mathfrak{l})_q$ в V^{univ} є точним, оскільки $L^{\mathrm{univ}} \hookrightarrow V^{\mathrm{univ}}$. Зокрема, $P_\lambda \mapsto \mathcal{P}_\lambda$, $\lambda \in P_+^{\mathbb{L}}$.

Наступна допоміжна Лема доведена у Додатку А.3.

Лема 5.1.7. *Для будь-яких $\xi \in U_q\mathfrak{g}$, $\lambda \in P_+^{\mathbb{L}}$, існує єдина скінченна підмножина $\Lambda \subset P_+^{\mathbb{L}}$ така, що*

$$\xi \mathcal{P}_\lambda = \chi_\Lambda \xi \mathcal{P}_\lambda, \qquad \mathcal{P}_\lambda \xi = \mathcal{P}_\lambda \xi \chi_\Lambda.$$

Розглянемо найменшу підалгебру $F(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q \subset \operatorname{End} V^{\mathrm{univ}}$, що містить усі елементи з $U_q\mathfrak{g}$ і всі проекції $\mathcal{P}_\lambda$, $\lambda \in P_+^{\mathbb{L}}$.

Теорема 5.1.8. *Алгебра $F(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$ разом із вкладеннями $U_q\mathfrak{g} \hookrightarrow F(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$, $F(\mathfrak{l})_q \hookrightarrow F(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$, задовольняє (F1) – (F4).*

Доведення. (F1) зрозумілим чином задовольняється.

Доведемо, що $\{\chi_\Lambda\}$ – ліва апроксимативна одиниця в $R(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$. Кожний $a \in R(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$ має вигляд $a = \sum\limits_{i=1}^{N(a)} \xi_i \mathcal{P}_{\lambda_i} \eta_i$, де $\xi_i \in U_q\mathfrak{g}$, $\eta_i \in F(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$, $\lambda_i \in P_+^{\mathbb{L}}$. Внаслідок Леми 5.1.7, для певної скінченної підмножини $\Lambda \subset P_+^{\mathbb{L}}$ і всіх $i = 1, 2, \ldots, N(a)$ маємо $\chi_\Lambda \xi_i \mathcal{P}_{\lambda_i} = \xi_i \mathcal{P}_{\lambda_i}$. Тому $\chi_\Lambda a = a$. Можна довести у подібний спосіб, що $\{\chi_\Lambda\}$ – права апроксимативна одиниця в $R(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$. Отже, (F2) задовольняється.

Розглянемо $R(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$-модуль V з апроксимативною одиницею. Для будь-якого вектора $v \in V$ існує скінченна підмножина $\Lambda \subset P_+^{\mathbb{L}}$ така, що $\chi_\Lambda v = v$. Отже, для всіх $\Lambda' \supset \Lambda$

$$(\xi\chi_{\Lambda'})v = (\xi\chi_{\Lambda'})\chi_\Lambda v = (\xi\chi_{\Lambda'}\chi_\Lambda)v = (\xi\chi_\Lambda)v,$$

і тому маємо коректно визначений елемент $\xi v \stackrel{\mathrm{def}}{=} \lim\limits_{\Lambda \uparrow P_+^{\mathbb{L}}} (\xi\chi_\Lambda)v$. Легко довести, що $(\xi\eta)v = \xi(\eta v)$ для кожного $\xi, \eta \in F(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$, $v \in V$. Дійсно, існують скінченні підмножини $\Lambda', \Lambda'' \subset P_+^{\mathbb{L}}$ такі, що $\chi_{\Lambda'} v = v$, $\chi_{\Lambda''}\eta\chi_{\Lambda'} = \eta\chi_{\Lambda'}$, оскільки $\eta\chi_{\Lambda'} \in R(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$ і $\{\chi_\Lambda\}$ – апроксимативна одиниця. Тому

$$(\xi\eta)v = \lim_{\Lambda \uparrow P_+^{\mathbb{L}}} (\xi\eta\chi_\Lambda)v = \xi(\eta\chi_{\Lambda'})v = (\xi\chi_{\Lambda''})(\eta\chi_{\Lambda'})v = \lim_{\Lambda \uparrow P_+^{\mathbb{L}}} (\xi\chi_\Lambda)(\eta\chi_{\Lambda'})v =$$
$$= \xi(\eta\chi_{\Lambda'}v) = \xi(\eta v).$$

Звідси маємо, що V – $F(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$-модуль, і перша з умов в (F3) задовольняється. Друга умова, що потребує існування точного зображення, розглянутого вище, зрозумілим чином виконана.

Одержані $F(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$-модулі є локально $U_q\mathfrak{l}$-скінченновимірними

$$\dim(U_q\mathfrak{l}\, v) = \dim U_q\mathfrak{l}(\chi_{\Lambda'} v) = \dim(U_q\mathfrak{l}\, \chi_{\Lambda'})v \le \dim R(\mathfrak{l})_q v < \infty$$

і ваговими. Отже, побудовано функтор з категорії $R(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$-модулів з апроксимативною одиницею в $C(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$. Побудуємо обернений функтор.

Нехай $V \in C(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$ і $V = \bigoplus\limits_{\mu \in P_+^{\mathbb{L}}} V_\mu$ – розклад V в суму $U_q\mathfrak{l}$-ізотипічних компонент. Нехай π – зображення $U_q\mathfrak{g}$ в V, і позначимо через Π_λ проекцію в V на ізотипічну компоненту модуля V_λ паралельно $\bigoplus\limits_{\substack{\mu \in P_+^{\mathbb{L}} \\ \mu \neq \lambda}} V_\mu$.

Досить довести існування і єдиність розширення $\widetilde{\pi}$ зображення π на $F(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$, що має наступні властивості:

i) $\widetilde{\pi}(\mathcal{P}_\lambda) = \Pi_\lambda$, $\lambda \in P_+^{\mathbb{L}}$,

ii) $\widetilde{\pi}|_{R(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q}$ – зображення $R(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$ з апроксимативною одиницею,

iii) $\pi(\xi)v = \lim\limits_{\Lambda \uparrow P_+^{\mathbb{L}}} \widetilde{\pi}(\xi\chi_\Lambda)v$, $v \in V$, $\xi \in U_q\mathfrak{g}$.

Єдиність такого розширення є очевидною. Для доведення існування ми розглянемо послідовно такі випадки:

1. $V = V^{\mathrm{univ}}$;
2. $V = \widetilde{V}^{\mathrm{univ}}$, де $\widetilde{V}^{\mathrm{univ}}$ – $U_q\mathfrak{g}$-модуль, кратний V^{univ};
3. V – підмодуль в $\widetilde{V}^{\mathrm{univ}}$;
4. V – стандартний проективний об'єкт в $C(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$;
5. (загальний випадок) $V \in C(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$.

У випадку 1) бажане твердження випливає з визначення $R(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$. Перехід від 1) до 2) і до 3) є очевидним. Аби перейти від 3) до 4), досить використати той факт, що кожний $U_q\mathfrak{g}$-модуль $P(V)$, $V \in C(\mathfrak{l},\mathfrak{l})_q$, вкладається в $U_q\mathfrak{g}$-модуль $\widetilde{V}^{\mathrm{univ}}$, кратний V^{univ}, оскільки кожний локально скінченновимірний $U_q\mathfrak{l}$-модуль вкладається в $U_q\mathfrak{l}$-модуль $\widetilde{L}^{\mathrm{univ}}$, кратний L^{univ}, і $P(\widetilde{L}^{\mathrm{univ}}) = \widetilde{V}^{\mathrm{univ}}$. Нарешті, аби перейти від 4) до 5), можна застосувати існування сюр'єктивного морфізму $P(V) \to V$ в категорії $C(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$. $\square$

Нагадаємо, що група Вейля W генерована простими віддзеркаленнями $s_1, s_2, \ldots, s_l$ і діє на решітці P.

Твердження 5.1.9.

1. Існує єдине одновимірне зображення $\widetilde{\varepsilon}$ алгебри $F(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$, для якого

$$\widetilde{\varepsilon}(\xi)=\varepsilon(\xi),\quad \xi\in U_q\mathfrak{g},\qquad \widetilde{\varepsilon}(P_\lambda)=\begin{cases}1, & \lambda=0,\\ 0, & \lambda\in P_+^{\mathbb{L}}\setminus\{0\}.\end{cases}$$

2. Існує єдиний анти-автоморфізм $\widetilde{S}$ алгебри $F(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$ такий, що

$$\widetilde{S}(\xi)=S(\xi),\quad \xi\in U_q\mathfrak{g};\qquad \widetilde{S}(P_\lambda)=P_{-w_0^{\mathbb{L}}\lambda},\quad \lambda\in P_+^{\mathbb{L}},$$

де $w_0^{\mathbb{L}}$ – найдовший елемент групи Вейля $W_{\mathbb{L}}\subset W$, генерованої простими віддзеркаленнями s_i, $i\in\mathbb{L}$.

Доведення. Єдиність $\widetilde{\varepsilon}$ і $\widetilde{S}$ очевидна. Існування $\widetilde{\varepsilon}$ було продемонстровано в доведенні Теореми 5.1.8. Перейдемо до доведення існування $\widetilde{S}$. У окремому випадку $\mathbb{G}=\mathbb{L}$ це є наслідком визначення алгебри $F(\mathfrak{l})_q\hookrightarrow \operatorname{End}L^{\mathrm{univ}}$ і добре відомого ізоморфізму [19, стор. 168]

$$L(\mathfrak{l},\lambda)^*\xrightarrow{\sim}L(\mathfrak{l},-w_0^{\mathbb{L}}\lambda),\qquad v(\mathfrak{l},\lambda)\mapsto v(\mathfrak{l},w_0^{\mathbb{L}}\lambda).$$

Для переходу від окремого випадку $\mathbb{G}=\mathbb{L}$ до загального випадку $\mathbb{G}\supset\mathbb{L}$ розглянемо алгебру $F(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q^{\mathrm{op}}$, що відрізняється від $F(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$ заміною комноження на протилежне. $U_q\mathfrak{g}$ вкладається в $F(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q^{\mathrm{op}}$:

$$U_q\mathfrak{g}\hookrightarrow F(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q^{\mathrm{op}},\qquad \xi\mapsto S(\xi).$$

Алгебра $F(\mathfrak{l})_q$ також вкладається в $F(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q^{\mathrm{op}}$:

$$U_q\mathfrak{l}\hookrightarrow F(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q^{\mathrm{op}},\quad \xi\mapsto S(\xi);\qquad P_\lambda\mapsto P_{-w_0^{\mathbb{L}}\lambda}.$$

Легко перевірити (F1) – (F4) для цієї пари вкладень. Залишається використати єдиність такої пари, Твердження 5.1.6. □

Категорія $C(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$ канонічно ізоморфна категорії $R(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$-модулів з апроксимативною одиницею. Далі ми будемо ототожнювати ці категорії.

Розглянемо підалгебру Хопфа $U_q\mathfrak{q}_{\mathbb{L}}^+\subset U_q\mathfrak{g}$, генеровану E_i для $i\in\mathbb{G}$, F_j для $j\in\mathbb{L}$, $K_m^{\pm1}$ для $m=1,2,\ldots,l$, а також підалгебру Хопфа $U_q\mathfrak{q}_{\mathbb{L}}^-\subset U_q\mathfrak{g}$, генеровану E_i для $i\in\mathbb{L}$, F_j для $j\in\mathbb{G}$, $K_m^{\pm1}$ для $m=1,2,\ldots,l$.

Наступне твердження добре відоме у класичному випадку $q=1$ (див. [104, стор. 90]).

Твердження 5.1.10. *Лінійні відображення*

$$U_q\mathfrak{g} \otimes_{U_q\mathfrak{l}} R(\mathfrak{l})_q \to R(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q, \qquad \xi\otimes r \mapsto \xi r, \tag{5.1.3}$$

$$R(\mathfrak{l})_q \otimes_{U_q\mathfrak{l}} U_q\mathfrak{g} \to R(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q, \qquad r\otimes \xi \mapsto r\xi,$$

є біективними.

Доведення. Внаслідок Твердження 5.1.9, досить розглянути лінійне відображення (5.1.3). Доведемо його сюр'єктивність. Зазначимо, що для будь-якого $\lambda \in P_+^{\mathbb{L}}$ і будь-якої скінченної підмножини $\Lambda \subset P_+^{\mathbb{L}}$, що містить λ, існує такий елемент z центру $Z(U_q\mathfrak{l})$ алгебри $U_q\mathfrak{l}$, що $P_\lambda = z\chi_\Lambda$. З іншого боку, для будь-яких $\lambda \in P_+^{\mathbb{L}}$, $\xi \in U_q\mathfrak{g}$ існують такі скінченні підмножини $\Lambda', \Lambda'' \ni \lambda$, що

$$P_\lambda\xi = P_\lambda\xi\chi_{\Lambda'}, \qquad \xi\chi_{\Lambda'} = \chi_{\Lambda''}\xi\chi_{\Lambda'}.$$

Тому $P_\lambda\xi = (P_\lambda\chi_{\Lambda''})\xi\chi_{\Lambda'} = z\chi_{\Lambda''}\xi\chi_{\Lambda'} = z\xi\chi_{\Lambda'}$. Отже, для будь-якого $\xi \in U_q\mathfrak{g}$ і будь-якої скінченної підмножини $\Lambda \subset P_+^{\mathbb{L}}$ існують такі $\widetilde{\xi} \in U_q\mathfrak{g}$ і скінченна підмножина $\widetilde{\Lambda} \subset P_+^{\mathbb{L}}$, що $\chi_\Lambda\xi = \widetilde{\xi}\chi_{\widetilde{\Lambda}}$. Це може бути використано для доведення сюр'єктивності лінійного відображення (5.1.3).

Доведемо його ін'єктивність. Можна використати добре відомі результати щодо баз у квантових універсальних огортуючих алгебрах [88, Глава 8] для виведення розкладу $U_q\mathfrak{g} = U_q\mathfrak{q}_{\mathbb{L}}^- \otimes_{U_q\mathfrak{l}} U_q\mathfrak{q}_{\mathbb{L}}^+$. З цього розкладу і Леми А.3.1 випливає, що $U_q\mathfrak{g}$ – вільний правий $U_q\mathfrak{l}$-модуль. Виберемо вільну базу $\{e_i\}$. Нехай a – ненульовий елемент в $U_q\mathfrak{g} \otimes_{U_q\mathfrak{l}} R(\mathfrak{l})_q$. Він має вигляд

$$a = \sum_i e_i \otimes r_i, \qquad r_i \in R(\mathfrak{l})_q.$$

Нехай $\widetilde{a}$ – образ a відносно відображення (5.1.3). Ми розглядаємо його як елемент $\operatorname{End} V^{\mathrm{univ}}$. Досить довести, що обмеження лінійного відображення $\widetilde{a}$ на підпростір $\{1\otimes v|\ v \in L^{\mathrm{univ}}\}$ є ненульовим. Легко перевірити, що $\widetilde{a}(1\otimes v) = \sum\limits_i e_i \otimes r_i v$ для будь-якого $v \in L^{\mathrm{univ}}$. Залишається використати наш вибір $\{e_i\}$ і той факт, що зображення $U_q\mathfrak{l}$ в L^{univ} є точним. $\square$

5.1.3 Функтори ind і Π

Розглянемо дві пари підмножин $\mathbb{L} \subset \mathbb{G} \subset \{1, 2, \dots, l\}$, $\mathbb{L}_1 \subset \mathbb{G}_1 \subset \{1, 2, \dots, l\}$, де $\mathbb{L}_1 \subset \mathbb{L}$, $\mathbb{G}_1 \subset \mathbb{G}$. Зрозумілим чином, маємо вкладення відповідних підалгебр Хопфа $U_q\mathfrak{l}_1 \subset U_q\mathfrak{l}$, $U_q\mathfrak{g}_1 \subset U_q\mathfrak{g}$.

$R(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})_q$ становить лівий ідеал в $F(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})_q$ і отже є лівим $U_q\mathfrak{g}_1$-модулем. Ми стверджуємо, що $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})_q$ – лівий $R(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{l}_1)_q$-модуль з апроксимативною одиницею. Дійсно, $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})_q$ – лівий $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})_q$-модуль з апроксимативною одиницею, а отже й $U_q\mathfrak{g}$-модуль категорії $C(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})_q$, заданий (5.1.1). Оскільки $U_q\mathfrak{l}_1 \subset U_q\mathfrak{l}$, $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})_q$ також належить категорії $C(\mathfrak{g}, \mathfrak{l}_1)_q$. Нарешті, з огляду на $U_q\mathfrak{g}_1 \subset U_q\mathfrak{g}$, ми знаходимося у категорії $C(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{l}_1)_q$, що еквівалентно нашому твердженню. У подібний спосіб можна довести, що $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})_q$ – правий $R(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{l}_1)_q$-модуль. (Як це можна побачити з доведення, $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})_q$ є $R(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{l}_1)_q$-бімодулем.)

Визначимо функтор $P^{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}_{\mathfrak{g}_1,\mathfrak{l}_1}$ з категорії $C(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{l}_1)_q$ в категорію $C(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})_q$, задаючи його на об'єктах з $C(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{l}_1)_q$ так:

$$P^{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}_{\mathfrak{g}_1,\mathfrak{l}_1}(Z) = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})_q \otimes_{R(\mathfrak{g}_1,\mathfrak{l}_1)_q} Z.$$

Дія на морфізми визначається очевидним способом.

$C(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{l}_1)_q$ має досить багато проективних об'єктів, і функтор $P^{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}_{\mathfrak{g}_1,\mathfrak{l}_1}$ є коваріантним і точним справа (див. [104, стор. 840]). Тому маємо коректно визначені похідні функтори: $\left(P^{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}_{\mathfrak{g}_1,\mathfrak{l}_1}\right)_j$, $j \in \mathbb{Z}_+$, з категорії $C(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{l}_1)_q$ в категорію $C(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})_q$.

Розглянемо два окремі випадки: $\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{l}$ і $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}$. Розпочнемо з першого. Нехай $\mathrm{ind}^{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}_{\mathfrak{g}_1,\mathfrak{l}}$ – функтор з категорії $C(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{l})_q$ в категорію $C(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})_q$, визначений на об'єктах так:

$$\mathrm{ind}^{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}_{\mathfrak{g}_1,\mathfrak{l}}(Z) = U_q\mathfrak{g} \otimes_{U_q\mathfrak{g}_1} Z.$$

Дія на морфізми визначається в очевидний спосіб. Як і в класичному випадку $q = 1$, можна побудувати ізоморфізм функторів $P^{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}_{\mathfrak{g}_1,\mathfrak{l}}$ і $\mathrm{ind}^{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}_{\mathfrak{g}_1,\mathfrak{l}}$. Опишемо коротко цю побудову. Функтор $\mathrm{ind}^{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}_{\mathfrak{g}_1,\mathfrak{l}}$ є лівим спряженим функтором до функтору забуття $\mathcal{F}^{\mathfrak{g}_1,\mathfrak{l}}_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}} : C(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})_q \to C(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{l})_q$, що визначається вкладенням $U_q\mathfrak{g}_1 \to U_q\mathfrak{g}$. З іншого боку, $P^{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}_{\mathfrak{g}_1,\mathfrak{l}}$ є лівим спряженим функтором до функтору $(\mathcal{F}^\vee)^{\mathfrak{g}_1,\mathfrak{l}}_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}$, що буде визначений нижче (див. [104, твердження 2.34]).

Функтор $(\mathcal{F}^\vee)^{\mathfrak{g}_1,\mathfrak{l}}_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}} : C(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q \to C(\mathfrak{g}_1,\mathfrak{l})_q$ визначається на об'єктах категорії $C(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$ так:

$$(\mathcal{F}^\vee)^{\mathfrak{g}_1,\mathfrak{l}}_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}(X) = \mathrm{Hom}_{R(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q}(R(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q, X)_{\mathfrak{l}}.$$

Структура $U_q\mathfrak{g}_1$-модуля на $\mathrm{Hom}_{R(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q}(R(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q, X)$ запроваджується через структуру правого $U_q\mathfrak{g}_1$-модуля на $R(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$, а індекс $\mathfrak{l}$ позначає виділення максимального підмодуля категорії $C(\mathfrak{g}_1,\mathfrak{l})_q$. Дія $(\mathcal{F}^\vee)^{\mathfrak{g}_1,\mathfrak{l}}_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}$ на морфізми визначається в очевидний спосіб. Залишається побудувати ізоморфізм функторів $\mathcal{F}^{\mathfrak{g}_1,\mathfrak{l}}_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{F}^\vee)^{\mathfrak{g}_1,\mathfrak{l}}_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}$ (див. [104, твердження 2.33]). Нехай $X \in C(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$ і $x \in X$. Кожному x поставимо у відповідність морфізм $R(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$-модулів:

$$R(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q \to X, \qquad r \mapsto rx.$$

Можна перевірити, що відображення $X \to \mathrm{Hom}_{R(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q}(R(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q, X)$, що виникає у такий спосіб, є морфізмом $U_q\mathfrak{g}_1$-модулів і задає ізоморфізм функторів.

Важливий наслідок полягає в тому, що для будь-якого $V \in C(\mathfrak{l},\mathfrak{l})_q$ стандартний проективний об'єкт $P(V)$ категорії $C(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$ канонічно ізоморфний $P^{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}_{\mathfrak{l},\mathfrak{l}}(V)$.

В другому окремому випадку $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}$ функтор, про який там йдеться, називається *функтором Бернштейна* і позначається через $\Pi^{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}_1}$:

$$\Pi \equiv \Pi^{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}_1}(Z) = R(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q \otimes_{R(\mathfrak{g},\mathfrak{l}_1)_q} Z, \qquad Z \in C(\mathfrak{g}_1,\mathfrak{l}_1)_q.$$

У класичному випадку $q = 1$ похідні функтори Π_j дуже важливі у побудові модулів Хариш-Чандри, що припускають унітаризацію, за допомогою когомологічної індукції [104]. Перейдемо до опису квантового аналогу цього методу.

5.1.4 Квантовий аналог когомологічної індукції

У подальшому ми вважаємо, що $\mathbb{G} = \{1, 2, \dots, l\}$, і отже $U_q\mathfrak{g} = U_q$.

Нагадаємо (див. [76, 108]) визначення пар $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$, що задіяні в побудові обмежених симетричних областей через вкладення Хариш-Чандри. Тут $\mathfrak{g}$ може бути простою комплексною алгеброю Лі, відмінною від G_2, F_4, E_8. Підалгебра Хопфа $U_q\mathfrak{k} \subset U_q\mathfrak{g}$ генерована E_i, F_i, $i \in \mathbb{K}$; $K_j^{\pm 1}$, $j = 1, 2, \dots, l$, де $\mathbb{K} = \{1, 2, \dots, l\} \setminus \{l_0\}$. Ми вважаємо також, що простий корень α_{l_0} має коефіцієнт 1 у розкладі старшої ваги

$$\delta = \sum_{i=1}^{l} n_i \alpha_i, \qquad n_{l_0} = 1. \tag{5.1.4}$$

У подальшому позначення $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ буде стосуватися лише таких пар.

Аби пояснити значення умови (5.1.4), облаштуємо алгебру Лі $\mathfrak{g}$ градуюванням: $\deg E_{l_0} = 1$, $\deg F_{l_0} = -1$, $\deg H_{l_0} = 0$, $\deg E_j = \deg F_j = \deg H_j = 0$ для $j \neq l_0$. Автоморфізм θ алгебри Лі $\mathfrak{g}$, заданий через $\theta(\xi) = (-1)^{\deg \xi} \xi$, відіграє роль картанівської інволюції. З умови (5.1.4) випливає, що

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{p}^- \oplus \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}^+, \qquad \mathfrak{p}^\pm = \{\xi \in \mathfrak{g} |\ \deg \xi = \pm 1\}.$$

Варто відзначити, що розглянуті нами пари $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ є комплексифікаціями пар $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{k}_0)$, де $\mathfrak{g}_0$ – піалгебра Лі групи автоморфізмів незвідної обмеженої симетричної області, а $\mathfrak{k}_0$ – алгебра Лі стабілізатора точки цієї області [76].

Устаткуємо $U_q\mathfrak{g}$ структурою $*$-алгебри Хопфа, задавши інволюцію $*$:

$$E_j^* = \begin{cases} -K_j F_j, & j = l_0 \\ K_j F_j, & j \neq l_0 \end{cases}; \qquad F_j^* = \begin{cases} -E_j K_j^{-1}, & j = l_0 \\ E_j K_j^{-1}, & j \neq l_0 \end{cases};$$

$$(K_j^{\pm 1})^* = K_j^{\pm 1}, \qquad j = 1, 2, \dots, l.$$

Кажуть, що модуль V над $*$-алгеброю Хопфа A *припускає унітаризацію*, якщо на ньому існує позитивно визначена інваріантна форма $(\cdot, \cdot)$:

$$(av_1, v_2) = (v_1, a^* v_2), \qquad a \in A, \quad v_1, v_2 \in V.$$

Когомологічна індукція є одним із засобів побудови модулів категорії $C(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$, що припускають унітаризацію, у випадку $q = 1$. Опишемо q-аналог цього методу.

Нехай $\mathbb{L} \subset \{1, 2, \dots, l\}$, $\mathbb{L} \not\subset \mathbb{K}$, і $U_q\mathfrak{l}$ – підалгебра Хопфа, що відповідає підмножині $\mathbb{L}$. Очевидно, $U_q\mathfrak{l}$ успадковує структуру $*$-алгебри Хопфа. Ми маємо на меті одержувати $U_q\mathfrak{g}$-модуль категорії $C(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})_q$, що припускає унітаризацію, за заданим $U_q\mathfrak{l}$-модулем категорії $C(\mathfrak{l},\mathfrak{l}\cap\mathfrak{k})_q$ із цією ж властивістю. (Тут $U_q(\mathfrak{l}\cap\mathfrak{k})$ – підалгебра Хопфа, що відповідає підмножині $\mathbb{L}\cap\mathbb{K}$.)

Якщо $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_l)\in P$ і $\lambda_j=0$ для всіх $j\in\mathbb{L}$, маємо коректно визначений одновимірний $U_q\mathfrak{l}$-модуль $\mathbb{C}_\lambda$:

$$E_j\mathbf{1}=F_j\mathbf{1}=0,\quad j\in\mathbb{L};\qquad K_j^{\pm1}\mathbf{1}=q_j^{\pm\lambda_j}\mathbf{1},\quad j=1,2,\dots,l.$$

Як важливий приклад такого лінійного функціоналу, варто згадати різність $\rho_\mathfrak{u}=\rho-\rho_\mathfrak{l}$ між напів-сумою ρ позитивних коренів алгебри Лі $\mathfrak{g}$ і напів-сумою $\rho_\mathfrak{l}$ позитивних коренів алгебри Лі $\mathfrak{l}$:

$$\rho_\mathfrak{u}(H_j)=\begin{cases}1, & j\notin\mathbb{L},\\ 0, & j\in\mathbb{L}.\end{cases}$$

Кожен $U_q\mathfrak{l}$-модуль $Z\in C(\mathfrak{l},\mathfrak{l}\cap\mathfrak{k})_q$ визначає $U_q\mathfrak{l}$-модуль $Z^\#=Z\otimes\mathbb{C}_{2\rho_\mathfrak{u}}\in C(\mathfrak{l},\mathfrak{l}\cap\mathfrak{k})_q$. Устаткуємо його структурою $U_q\mathfrak{q}_\mathbb{L}^-$-модуля через сюр'єктивний морфізм алгебр $U_q\mathfrak{q}_\mathbb{L}^-\to U_q\mathfrak{l}$:

$$F_i\mapsto\begin{cases}F_i, & i\in\mathbb{L},\\ 0, & i\in\{1,2,\dots,l\}\setminus\mathbb{L},\end{cases}$$

$$E_j\mapsto E_j,\qquad K_j^{\pm1}\mapsto K_j^{\pm1},\quad j\in\{1,2,\dots,l\}.$$

Узагальнений модуль Верма $\operatorname{ind}_{\mathfrak{q}_\mathbb{L}^-}^\mathfrak{g}Z^\#\stackrel{\mathrm{def}}{=}U_q\mathfrak{g}\otimes_{U_q\mathfrak{q}_\mathbb{L}^-}Z^\#$ належить до категорії $C(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$, що є наслідком Леми A.3.1 з Додатку A.3. Тому рівність

$$\mathcal{L}_j(Z)=\left(\Pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}\cap\mathfrak{k}}^{\mathfrak{g},\mathfrak{k}}\right)_j\left(\operatorname{ind}_{\mathfrak{q}_\mathbb{L}^-}^\mathfrak{g}(Z^\#)\right)$$

визначає функтори $\mathcal{L}_j$, $j\in\mathbb{Z}_+$, з категорії $C(\mathfrak{l},\mathfrak{l}\cap\mathfrak{k})_q$ в категорію $C(\mathfrak{g},\mathfrak{k})_q$.

У класичному випадку $q=1$ за певних припущень домінантності щодо Z, єдиними ненульовими модулями $\mathcal{L}_s(Z)$ є ті, де $s=\frac{1}{2}(\dim\mathfrak{k}-\dim(\mathfrak{k}\cap\mathfrak{l}))$ [104, стор. 369]. Отже, окремий інтерес становить розгляд $U_q\mathfrak{g}$-модулів

$$A_\mathfrak{q}(\lambda)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\mathcal{L}_s(\mathbb{C}_\lambda),\qquad s=\frac{1}{2}(\dim\mathfrak{k}-\dim(\mathfrak{k}\cap\mathfrak{l})),$$

де $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_l)\in P$ і $\lambda_j=0$ для $j\in\mathbb{L}$.

5.2 Диференціальні числення на квантових передоднорідних векторних просторах

Розглядаються диференціальні числення над квадратичними алгебрами, що виникають при вивченні квантових обмежених симетричних областей. З'ясовано вимірності однорідних компонент градуйованих векторних просторів k-форм. Доведено, що дуальний комплекс де Рама ізоморфний квантовому аналогу узагальненої резольвенти Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда, див. [172].

5.2.1 $U_q\mathfrak{g}$-модульна алгебра $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$

Розглянемо просту комплексну алгебру Лі $\mathfrak{g}$ з твірними Шевалле $\{H_i, E_i, F_i\}_{i=1,2,\ldots,l}$. Нехай $\{\alpha_j\}_{j=1,2,\ldots,l}$ – відповідна система простих коренів і $\mathbf{a} = (a_{ij})_{i,j=1,2,\ldots,l}$ – матриця Картана: $a_{ij} = \alpha_j(H_i)$. Максимальний корень алгебри $\mathfrak{g}$ є лінійною комбінацією її простих коренів

$$\sum_{j=1}^{l} n_j \alpha_j, \qquad n_j \in \mathbb{Z}_+. \tag{5.2.1}$$

Зафіксуємо простий корень α_{l_0}, присутній у цій сумі з коефіцієнтом 1: $n_{l_0} = 1$. Таблиці в [18] дозволяють відокремити всі такі прості корені.

Нехай H_0 – лінійна комбінація твірних $H_1, H_2, \ldots, H_l$, визначена так:

$$\alpha_j(H_0) = \begin{cases} 2, & j = l_0 \\ 0, & j \neq l_0. \end{cases}$$

Запровадимо позначення $\mathfrak{p}^-$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{p}^+$ для власних підпросторів операторів ad_{H_0}, що пов'язані з власними числами $-2, 0, 2$, відповідно. Отже, маємо розклад $\mathfrak{g} = \mathfrak{p}^- \oplus \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}^+$, у якому $\mathfrak{p}^\pm$ є комутативними алгебрами Лі. Вони називаються *передоднорідними векторними просторами комутативного параболічного типу* [156].

Ми зацікавлені у квантовому аналозі алгебри диференціальних форм із поліноміальними коефіцієнтами на векторному просторі $\mathfrak{p}^-$.

Нехай Q – решітка коренів, P – решітка ваг і $s = \mathrm{card}(P/Q)$. Будемо вважати $\mathbb{C}(q^{\frac{1}{s}})$, поле раціональних функцій змінної $q^{\frac{1}{s}}$, основним полем. Всі алгебри, що розглядаються, містять одиницю.

Розглянемо квантову універсальну огортуючу алгебру Дрінфельда-Джімбо $U_q\mathfrak{g}$. Вона визначається своїми твірними $\{K_i^{\pm 1}, E_i, F_i\}_{i=1,2,\ldots,l}$ та добре відомими співвідношеннями. Вона є алгеброю Хопфа, див. пункт 5.1.1, [88, стор. 52].

Як і в [174], ми починаємо побудову із визначення $U_q\mathfrak{g}$-модульної алгебри $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$, яка є квантовим аналогом алгебри поліномів на $\mathfrak{p}^-$. Нехай $\{d_j\}_{j=1,2,\ldots,l}$ – взаємно прості числа, що симетризують матрицю Картана $(d_i a_{ij} = d_j a_{ji})$; покладемо $q_j = q^{d_j}$. Всі $U_q\mathfrak{g}$-модулі, що будуть розглядатися, є ваговими:

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}^l} V_\lambda, \qquad V_\lambda = \left\{ v \in V \;\middle|\; K_j^{\pm 1} v = q_j^{\pm \lambda_j} v,\ j = 1, 2, \ldots, l \right\}.$$

Це дозволяє визначити лінійні оператори $\{H_j\}_{j=1,2,\ldots,l}$, (отже й H_0) через $H_j|_{V_\lambda} = \lambda_j$, $\lambda \in \mathbb{Z}^l$, а також облаштувати V градуюванням

$$V = \bigoplus_r V[r], \qquad V[r] = \{v \in V |\, H_0 v = 2rv\}.$$

У подальшому всі $U_q\mathfrak{g}$-модулі будуть розглядатися з цим градуюванням; за визначенням ми покладаємо $V^* = \bigoplus_r V[r]^*$ у категорії градуйованих векторних просторів.

Ми потребуємо узагальнені модулі Верма $N(\mathfrak{q}^+, \lambda)$. Нехай $U_q\mathfrak{q}^+$ – підалгебра Хопфа, генерована твірними $\{K_i^{\pm 1}, E_i, F_i\}_{i \neq l_0} \cup \{K_{l_0}^{\pm 1}, E_{l_0}\}$, і $\mathcal{P}_+ = \mathbb{Z}_+^{l_0 - 1} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+^{l - l_0} \hookrightarrow P$, $\lambda \in \mathcal{P}_+$. Розглянемо простий скінченновимірний $U_q\mathfrak{q}^+$-модуль $L(\mathfrak{q}^+, \lambda)$ зі старшою вагою λ, разом із індукованим $U_q\mathfrak{g}$-модулем $N(\mathfrak{q}^+, \lambda) = U_q\mathfrak{g} \otimes_{U_q\mathfrak{q}^+} L(\mathfrak{q}^+, \lambda)$. Легко показати (див. [118]), що $N(\mathfrak{q}^+, \lambda)$ має опис у термінах твірної $v(\mathfrak{q}^+, \lambda)$ і співвідношень

$$E_i v(\mathfrak{q}^+, \lambda) = 0, \qquad K_i^{\pm 1} v(\mathfrak{q}^+, \lambda) = q_i^{\pm \lambda_i} v(\mathfrak{q}^+, \lambda), \qquad i = 1, 2, \ldots, l,$$

$$F_j^{\lambda_j + 1} v(\mathfrak{q}^+, \lambda) = 0, \qquad j \neq l_0.$$

Нехай $U_q\mathfrak{g}^{\mathrm{cop}}$ – алгебра Хопфа, що відрізняється від $U_q\mathfrak{g}$ заміною її комноження на протилежне. Морфізм

$$\triangle_0 : N(\mathfrak{q}^+, 0) \to N(\mathfrak{q}^+, 0) \otimes N(\mathfrak{q}^+, 0), \qquad \triangle_0 : v(\mathfrak{q}^+, 0) \mapsto v(\mathfrak{q}^+, 0) \otimes v(\mathfrak{q}^+, 0)$$

у тензорній категорії $U_q\mathfrak{g}^{\mathrm{cop}}$-модулів устатковує узагальнений модуль Верма $N(\mathfrak{q}^+, 0)$ структурою $U_q\mathfrak{g}^{\mathrm{cop}}$-модульної коалгебри. Дуальний градуйований векторний простір $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$ є $U_q\mathfrak{g}$-модульною алгеброю, яка становить q-аналог алгебри поліномів на $\mathfrak{p}^-$.

Можна довести, що $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$ є квадратичною алгеброю, див. Твердження 5.2.18. Варто відзначити, що роботи Джозефа та його команди (див., наприклад, [99]) вивчають ширший клас $U_q\mathfrak{g}$-модульних алгебр.

5.2.2 Коваріантні диференціальні числення

У класичному випадку $q = 1$ лінійне відображення, спряжене до морфізму узагальнених модулів Верма, виявляється коваріантним диференціальним оператором на $\mathfrak{p}^-$ [73]. Як і в [174], ми використовуємо міркування дуальності у квантовому випадку для побудови диференціального числення першого порядку над $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$. Нагадаємо визначення [103].

Нехай F – алгебра. *Диференціальним численням першого порядку над* F називається F-бімодуль M, разом із лінійним відображенням $d : F \to M$ із властивостями

1. для всіх $f_1, f_2 \in F$
$$d(f_1 \cdot f_2) = df_1 \cdot f_2 + f_1 \cdot df_2; \tag{5.2.2}$$

2. M є лінійною оболонкою векторів $f_1 \cdot df_2 \cdot f_3$, де $f_1, f_2, f_3 \in F$.

Нехай A – алгебра Хопфа і F – A-модульна алгебра. Диференціальне числення першого порядку (M, d) над F називається *коваріантним*, якщо M є A-модульним F-бімодулем, а d є морфізмом A-модулів.

Нашим завданням є побудова диференціального числення першого порядку над $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$. Для будь-якої ваги $\lambda \in \mathcal{P}_+$ узагальнений модуль Верма

$N(\mathfrak{q}^+, \lambda)$ є $U_q\mathfrak{g}^{\mathrm{cop}}$-модульним $N(\mathfrak{q}^+, 0)$-бікомодулем:

$$N(\mathfrak{q}^+, \lambda) \to N(\mathfrak{q}^+, 0) \otimes N(\mathfrak{q}^+, \lambda), \quad v(\mathfrak{q}^+, \lambda) \mapsto v(\mathfrak{q}^+, 0) \otimes v(\mathfrak{q}^+, \lambda),$$
$$N(\mathfrak{q}^+, \lambda) \to N(\mathfrak{q}^+, \lambda) \otimes N(\mathfrak{q}^+, 0), \quad v(\mathfrak{q}^+, \lambda) \mapsto v(\mathfrak{q}^+, \lambda) \otimes v(\mathfrak{q}^+, 0).$$

Тому дуальний градуйований векторний простір є $U_q\mathfrak{g}$-модульним $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$-бімодулем. Зокрема,

$$\Lambda^1(\mathfrak{p}^-)_q \stackrel{\mathrm{def}}{=} N(\mathfrak{q}^+, -\alpha_{l_0})^*$$

є $U_q\mathfrak{g}$-модульним $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$-модулем. Він є q-аналогом простору 1-форм з поліноміальними коефіцієнтами.

Ми називаємо диференціалом лінійний оператор, спряжений до такого морфізму узагальнених модулів Верма:

$$N(\mathfrak{q}^+, -\alpha_{l_0}) \to N(\mathfrak{q}^+, 0), \qquad v(\mathfrak{q}^+, -\alpha_{l_0}) \mapsto F_{l_0} v(\mathfrak{q}^+, 0).$$

З наших визначень випливає (5.2.2), разом із твердженням про те, що диференціал $d : \mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q \to \Lambda^1(\mathfrak{p}^-)_q$ є морфізмом $U_q\mathfrak{g}$-модулів. У подальшому буде показано, що $\Lambda^1(\mathfrak{p}^-)_q$ є лінійною оболонкою векторів $\{f_1 \cdot df_2 \cdot f_3 | \, f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q\}$.

Розглянемо градуйовану алгебру $\Omega = \bigoplus\limits_{i \in \mathbb{Z}_+} \Omega_i$ разом із лінійним відображенням ступеню 1 $d : \Omega \to \Omega$. Пара (Ω, d) називається *градуйованою диференціальною алгеброю*, якщо $d^2 = 0$ і

$$d(\omega' \cdot \omega'') = d\omega' \cdot \omega'' + (-1)^n \omega' \cdot d\omega'', \qquad \omega' \in \Omega_n, \, \omega'' \in \Omega.$$

Диференціальним численням над алгеброю F називається градуйована алгебра (Ω, d) така, що $\Omega_0 = F$ і Ω генерована $\Omega_0 \oplus d\Omega_0$.

Припустимо диференціальне числення першого порядку (M, d) над F заданим. Внаслідок визначення, відповідне універсальне диференціальне числення $(\Omega^{\mathrm{univ}}, d^{\mathrm{univ}})$ над цією алгеброю повинне мати такі властивості:

1. $\Omega_1^{\mathrm{univ}} = M$;

2. $d^{\mathrm{univ}}|_F = d$;

3. для будь-якого диференціального числення (Ω', d') над F, що задовольняє двом попереднім вимогам, ($\Omega'_1 = M$, $d'|_F = d$), існує гомоморфізм диференціальних градуйованих алгебр $\Omega^{\mathrm{univ}} \to \Omega'$, що є тотожнім за обмеження на $\Omega_0^{\mathrm{univ}} \oplus \Omega_1^{\mathrm{univ}}$.

Розглянемо алгебру Хопфа A і A-модульну алгебру F. Диференціальне числення (Ω, d) називається *коваріантним*, якщо Ω є A-модульною алгеброю, а d є ендоморфізмом A-модуля Ω. Як відомо [103, стор. 463–464], існує єдине з точністю до ізоморфізму диференціальне числення; воно є коваріантним, якщо таким є відповідне диференціальне числення першого порядку.

Зауваження. Розглянуте нами поняття коваріантності є більш загальним, ніж таке в [103], де всі $U_q\mathfrak{g}$-модулі вважаються $U_q\mathfrak{g}$-скінченними. Ця відмінність не впливає на доведення коваріантності універсального огортуючого диференціального числення, викладеного в [103, стор. 464].

У подальшому ми одержуємо низку результатів стосовно універсального диференціального числення $(\Lambda(\mathfrak{p}^-)_q, d)$, що відповідає диференціальному численню першого порядку $\left(\Lambda^1(\mathfrak{p}^-)_q, d\right)$. Зокрема, ми покажемо, що вимірності однорідних компонент вагових $U_q\mathfrak{g}$-модулів $\Lambda^j(\mathfrak{p}^-)_q$ є такими ж, як і у класичному випадку $q = 1$.

5.2.3 ПБВ-бази і універсальна R-матриця

Нагадаємо стандартні позначення і деякі добре відомі результати.

Нехай $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{n}^+$, $\mathfrak{n}^-$ – підалгебри Лі в $\mathfrak{g}$, генеровані твірними $\{H_i\}_{i=1,2,\ldots,l}$, $\{E_i\}_{i=1,2,\ldots,l}$ і $\{F_i\}_{i=1,2,\ldots,l}$, відповідно. У подібний спосіб, нехай $U_q\mathfrak{h}$, $U_q\mathfrak{n}^+$, $U_q\mathfrak{n}^-$ – підалгебри алгебри $U_q\mathfrak{g}$, генеровані твірними $\{K_i^{\pm 1}\}_{i=1,2,\ldots,l}$, $\{E_i\}_{i=1,2,\ldots,l}$ і $\{F_i\}_{i=1,2,\ldots,l}$, відповідно. Лінійні відображення

$$
\begin{aligned}
&U_q\mathfrak{n}^- \otimes U_q\mathfrak{h} \otimes U_q\mathfrak{n}^+ \to U_q\mathfrak{g}, \qquad && u^- \otimes u^0 \otimes u^+ \mapsto u^- u^0 u^+,\\
&U_q\mathfrak{n}^+ \otimes U_q\mathfrak{h} \otimes U_q\mathfrak{n}^- \to U_q\mathfrak{g}, \qquad && u^+ \otimes u^0 \otimes u^- \mapsto u^+ u^0 u^-
\end{aligned}
$$

є ізоморфізмами векторних просторів [88, стор. 66].

Ми побудуємо бази векторних просторів $U_q\mathfrak{h}$, $U_q\mathfrak{n}^\pm$, разом із відповідними базами для $U_q\mathfrak{g}$, подібними до баз Пуанкаре-Біркгофа-Вітта. Зрозуміло, що елементи $K_1^{j_1}K_2^{j_2}\dots K_l^{j_l}$, де $j_1, j_2, \dots, j_l \in \mathbb{Z}$, утворюють базу в $U_q\mathfrak{h}$. Залишається побудувати бази в $U_q\mathfrak{n}^+$, $U_q\mathfrak{n}^-$.

Очевидно, $\mathfrak{h}^* \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}^l$, $\lambda \mapsto (\lambda(H_1), \lambda(H_2), \dots, \lambda(H_l))$. Множина фундаментальних ваг $\{\overline{\omega}_j\}_{j=1,2,\dots,l}$ утворює стандартну базу в $\mathbb{C}^l$, і прості корені мають вигляд $\alpha_j = \sum\limits_{i=1}^{l} a_{ij}\overline{\omega}_i$. Оберемо невироджену інваріантну форму на $\mathfrak{g}$ у такий спосіб, що $(\alpha_i, \alpha_j) = d_i a_{ij}$, $i, j = 1, 2, \dots, l$. За цим маємо $(\overline{\omega}_i, \alpha_j) = d_i \delta_{ij}$.

Розклад $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ визначає відповідний розклад $\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$ для множини коренів алгебри Лі $\mathfrak{g}$.

Група Вейля W генерована простими віддзеркаленнями $s_i : \lambda \mapsto \lambda - \lambda(H_i)\alpha_i$, $i = 1, 2, \dots, l$, в $\mathfrak{h}^*$. W є групою Кокстера з визначальними співвідношеннями

$$s_i^2 = 1, \qquad (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1, \qquad i \neq j.$$

Оберемо зведений розклад $w_0 = s_{i_1} s_{i_2} s_{i_3} \dots s_{i_M}$ для найдовшого елемента w_0 групи W. Йому відповідає лінійне впорядкування на Φ^+:

$$\beta_1 = \alpha_{i_1}, \qquad \beta_2 = s_{i_1}(\alpha_{i_2}), \qquad \dots, \qquad \beta_M = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_{M-1}}(\alpha_{i_M}).$$

Для одержання q-аналогів кореневих векторів $E_{\beta_1}, E_{\beta_2}, \dots, E_{\beta_M}$, що відповідають цим кореням, ми використовуємо автоморфізми $T_1, T_2, \dots, T_l$ алгебри $U_q\mathfrak{g}$, запроваджені Люстигом. Їх дія на твірних визначається так:

$$\begin{gathered} T_i(K_j) = K_j K_i^{-a_{ij}}, \\ T_i(E_i) = -F_i K_i, \qquad T_i(F_i) = -K_i^{-1} E_i, \\ T_i(E_j) = \sum_{r+s=-a_{ij}} \frac{(-1)^s q_i^{-r}}{[s]_{q_i}! [r]_{q_i}!} E_i^s E_j E_i^r, \qquad i \neq j, \\ T_i(F_j) = \sum_{r+s=-a_{ij}} \frac{(-1)^s q_i^{r}}{[s]_{q_i}! [r]_{q_i}!} F_i^r F_j F_i^s, \qquad i \neq j. \end{gathered} \tag{5.2.3}$$

Тут $[n]_q! = [1]_q [2]_q \cdots [n]_q$, $[n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$. Внаслідок (5.2.3), T_i переставляє вагові підпростори: $T_i(U_q\mathfrak{g})_\lambda = (U_q\mathfrak{g})_{s_i(\lambda)}$, де

$$(U_q\mathfrak{g})_\lambda = \left\{ \xi \in U_q\mathfrak{g} \,\middle|\, K_i \xi K_i^{-1} = q_i^{\lambda_i}\xi \right\}, \qquad \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l) \in \mathbb{Z}^l.$$

Люстигом було доведено, що ці автоморфізми задовольняють співвідношенням кос:

$$\underbrace{T_i T_j T_i \cdots}_{m_{ij}} = \underbrace{T_j T_i T_j \cdots}_{m_{ij}}, \qquad i \neq j$$

(число множників з кожного боку дорівнює m_{ij}).

Визначимо "q-аналоги кореневих векторів" так:

$$E_{\beta_k} = \begin{cases} T_{i_1} T_{i_2} T_{i_3} \dots T_{i_{k-1}}(E_{i_k}), & k \geq 2 \\ E_{i_1}, & k = 1 \end{cases},$$

$$F_{\beta_k} = \begin{cases} T_{i_1} T_{i_2} T_{i_3} \dots T_{i_{k-1}}(F_{i_k}), & k \geq 2 \\ F_{i_1}, & k = 1 \end{cases}.$$

Наступний результат також належить Люстигу.

Твердження 5.2.1. *Мономи* $E_{\beta_1}^{j_1} E_{\beta_2}^{j_2} \dots E_{\beta_M}^{j_M}$, $j_1, j_2, \dots j_M \in \mathbb{Z}_+$, *утворюють базу в* $U_q\mathfrak{n}^+$, *а мономи* $F_{\beta_M}^{j_M} F_{\beta_{M-1}}^{j_{M-1}} \dots F_{\beta_1}^{j_1}$, $j_1, j_2, \dots j_M \in \mathbb{Z}_+$, *утворюють базу в* $U_q\mathfrak{n}^-$.

Наведемо комутаційні співвідношення, одержані Левендорським [21, стор. 261].

Твердження 5.2.2.

1. *Для всіх* $i < j$

$$E_{\beta_i} E_{\beta_j} - q^{(\beta_i, \beta_j)} E_{\beta_j} E_{\beta_i} = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}_+^M} C'_{\mathbf{m}}(q) \cdot E^{\mathbf{m}},$$

$$F_{\beta_i} F_{\beta_j} - q^{-(\beta_i, \beta_j)} F_{\beta_j} F_{\beta_i} = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}_+^M} C''_{\mathbf{m}}(q) \cdot F^{\mathbf{m}},$$

де $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_M)$, $E^{\mathbf{m}} = E_{\beta_1}^{m_1} E_{\beta_2}^{m_2} \dots E_{\beta_M}^{m_M}$, $F^{\mathbf{m}} = F_{\beta_M}^{m_M} F_{\beta_{M-1}}^{m_{M-1}} \dots F_{\beta_1}^{m_1}$. *Коефіцієнти* $C'_{\mathbf{m}}(q)$, $C''_{\mathbf{m}}(q)$ *можуть бути ненульовими лише якщо* $m_1 = m_2 = \ldots = m_i = 0$ *і* $m_j = m_{j+1} = \ldots = m_M = 0$.

2. $C'_{\mathbf{m}}(q)$, $C''_{\mathbf{m}}(q) \in \mathbb{Q}(q)$, *і ці функції не мають полюсів в* $(0,1]$.

Наслідок 5.2.3. *Алгебра* $U_q\mathfrak{g}$ *є областю цілісності.*

Наслідок 5.2.4. *Мономи* $E_{\beta_M}^{j_M} E_{\beta_{M-1}}^{j_{M-1}} \dots E_{\beta_1}^{j_1}$, $j_1, j_2, \dots j_M \in \mathbb{Z}_+$, *утворюють базу в* $U_q\mathfrak{n}^+$, *а мономи* $F_{\beta_1}^{j_1} F_{\beta_2}^{j_2} \dots F_{\beta_M}^{j_M}$, $j_1, j_2, \dots j_M \in \mathbb{Z}_+$, *утворюють базу в* $U_q\mathfrak{n}^-$.

Розглянемо алгебри Хопфа $U_q\mathfrak{b}^+$, $U_q\mathfrak{b}^-$, генеровані твірними $\{K_i^{\pm 1}, E_i\}_{i=1,2,\dots,l}$ і $\{K_i^{\pm 1}, F_i\}_{i=1,2,\dots,l}$, відповідно. $U_q\mathfrak{g}$-модулі, що розглядаються у цьому підрозділі, є ваговими і $U_q\mathfrak{b}^+$-скінченними: $\dim(U_q\mathfrak{b}^+ \cdot v) < \infty$ для кожного вектора v.

Наївна перестановка тензорних множників

$$\sigma_{V',V''} : V' \otimes V'' \to V'' \otimes V', \qquad \sigma_{V',V''} : v' \otimes v'' \mapsto v'' \otimes v'$$

взагалі не є морфізмом $U_q\mathfrak{g}$-модулів. В. Г. Дрінфельд запровадив поняття універсальної R-матриці і застосував його для визначення лінійних відображень $\check{R}_{V',V''} : V' \otimes V'' \to V'' \otimes V'$, що відіграють роль перестановок $\sigma_{V',V''}$ в теорії $U_q\mathfrak{g}$-модулів: $\check{R}_{V',V''}$ є оборотним і виявляється морфізмом $U_q\mathfrak{g}$-модулів.

Твердження 5.2.5. *Нехай* V', V'', W', W'' *– вагові* $U_q\mathfrak{b}^+$*-скінченні* $U_q\mathfrak{g}$*-модулі і* $f' : V' \to W'$, $f'' : V'' \to W''$ *– морфізми* $U_q\mathfrak{g}$*-модулів.*

1. Лінійне відображення $\check{R}_{V',V''}$ *є оборотним морфізмом* $U_q\mathfrak{g}$*-модулів.*

2. $(f'' \otimes f') \cdot \check{R}_{V',V''} = \check{R}_{W',W''} \cdot (f' \otimes f'')$.

Твердження 5.2.6. *Нехай* V, V', V'' *– вагові* $U_q\mathfrak{b}^+$*-скінченні* $U_q\mathfrak{g}$*-модулі.*

1. $\check{R}_{V' \otimes V'', V} = \left(\check{R}_{V',V} \otimes \mathrm{id}_{V''}\right)\left(\mathrm{id}_{V'} \otimes \check{R}_{V'',V}\right)$,

2. $\check{R}_{V, V' \otimes V''} = \left(\mathrm{id}_{V'} \otimes \check{R}_{V,V''}\right)\left(\check{R}_{V,V'} \otimes \mathrm{id}_{V''}\right)$,

3. $\check{R}_{V,\mathbb{C}} = \check{R}_{\mathbb{C},V} = \mathrm{id}_V$.

Нагадаємо явний вигляд для $\check{R}_{V',V''}$. Ми застосуємо q-аналоги кореневих векторів E_{β_i}, F_{β_i}, $i = 1, 2, \dots, M$. Нехай

$$\exp_q(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{1-q}{1-q^j} \right) t^i, \qquad q_\beta = q^{\frac{(\beta,\beta)}{2}}, \quad \beta \in \Phi^+.$$

Розглянемо добуток

$$R = \overset{\curvearrowleft}{\prod_{\beta\in\Phi^+}} \exp_{q_\beta^2}\left(\left(q_\beta^{-1} - q_\beta\right) E_\beta \otimes F_\beta\right) q^{-t_0}, \tag{5.2.4}$$

де $t_0 \in \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$ визначається співвідношенням

$$(\lambda, \mu) = \lambda \otimes \mu(t_0), \qquad \lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*,$$

а множники записано у порядку спадання індексів коренів β:

$$\exp_{q^2_{\beta_M}}\left(\left(q_{\beta_M}^{-1} - q_{\beta_M}\right) E_{\beta_M} \otimes F_{\beta_M}\right) \dots \exp_{q^2_{\beta_1}}\left(\left(q_{\beta_1}^{-1} - q_{\beta_1}\right) E_{\beta_1} \otimes F_{\beta_1}\right) q^{-t_0}.$$

ТВЕРДЖЕННЯ 5.2.7 ([101, 117]). *Нехай V', V'' – вагові $U_q\mathfrak{b}^+$-скінченні $U_q\mathfrak{g}$-модулі і $R_{V',V''} : V' \otimes V'' \to V' \otimes V''$ – лінійне відображення, що визначене правою частиною* (5.2.4). *Тоді*

$$\check{R}_{V',V''} = \sigma_{V',V''} \cdot R_{V',V''}.$$

Зазначимо, що $t_0 = \sum\limits_k \frac{I_k \otimes I_k}{(I_k, I_k)}$ для будь-якої ортогональної бази $\{I_j\}_{j=1,2,\dots,l}$ простору $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{h}^*$.

Нагадаємо відомості про модулі Верма та скінченновимірні вагові $U_q\mathfrak{g}$-модулі (вони називаються $U_q\mathfrak{g}$-модулями типу 1). Зазначимо, що

$$P \cong \mathbb{Z}^l, \qquad P_+ \cong \mathbb{Z}_+^l, \qquad Q = \bigoplus_{i=1}^l \mathbb{Z}\alpha_i, \qquad Q_+ = \bigoplus_{i=1}^l \mathbb{Z}_+\alpha_i.$$

Нехай $\lambda \in P$. Як і в класичному випадку $q = 1$, модуль Верма $M(\lambda)$ може бути описаний у термінах його твірної $v(\lambda)$ та співвідношень

$$E_i v(\lambda) = 0, \qquad K_i^{\pm 1} v(\lambda) = q_i^{\pm\lambda_i} v(\lambda), \qquad i = 1, 2, \dots, l. \tag{5.2.5}$$

Вагові вектори $v_J(\lambda) = F_{\beta_M}^{j_M} F_{\beta_{M-1}}^{j_{M-1}} \dots F_{\beta_1}^{j_1} v(\lambda)$, $J = (j_1, j_2, \dots, j_M) \in \mathbb{Z}_+^M$, утворюють базу векторного простору $M(\lambda)$. Тому $M(\lambda)$ – ваговий $U_q\mathfrak{g}$-модуль, в якому вимірності вагових підпросторів такі ж, як і в класичному випадку $q = 1$.

Модуль Верма $M(\lambda)$ містить найбільший власний підмодуль $K(\lambda)$; очевидно, що фактор-модуль $L(\lambda) = M(\lambda)/K(\lambda)$ є простим.

$L(\lambda)$ скінченновимірний тоді й тільки тоді, коли $\lambda \in P_+$. У цьому випадку $L(\lambda)$ є єдиним власним скінченновимірним фактор-модулем, і при цьому $L(\lambda)$ має опис у термінах його твірної $v(\lambda)$, співвідношень (5.2.5), разом із додатковими співвідношеннями $F_i^{\lambda_i+1}v(\lambda) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, l$.

Прості вагові $U_q\mathfrak{g}$-модулі $L(\lambda)$, $\lambda \in P_+$, попарно неізоморфні, і кожний простий ваговий сінченновимірний $U_q\mathfrak{g}$-модуль ізоморфний одному з них.

Твердження 5.2.8 (див. [88], стор. 76–77). *Для будь-якого ненульового елементу $\xi \in U_q\mathfrak{g}$ існує $\lambda \in P_+ \cap Q$ така, що $\xi L(\lambda) \neq 0$.*

Твердження 5.2.9 ([88], стор. 81). *Сімейство ваг для $L(\lambda)$ та їх кратності залишаються незмінними при переході від $U\mathfrak{g}$ до $U_q\mathfrak{g}$, тобто від класичного випадку до квантового.*

Твердження 5.2.10 ([88], стор. 82). *Кожен ваговий скінченновимірний $U_q\mathfrak{g}$-модуль є напівпростим.*

З цих результатів випливає, що $L(\lambda) \otimes L(\mu) \approx \sum\limits_{\nu \in P_+} c_{\lambda\mu}^{\nu} L(\nu)$ для всіх $\lambda, \mu \in P_+$, і при цьому кратності $c_{\lambda\mu}^{\nu}$ модуля $L(\nu)$ в $L(\lambda) \otimes L(\mu)$ є такими ж, як і в класичному випадку $q = 1$.

Нехай $P_{\lambda\mu}^{\nu}$ – проекція в $L(\lambda) \otimes L(\mu)$ на ізотипічну компоненту, що є кратною $L(\nu)$, паралельно сумі всіх інших ізотипічних компонент.

Твердження 5.2.11 ([34], стор. 39). *Для всіх $\lambda, \mu \in P_+$*

$$\check{R}_{L(\mu),L(\lambda)} \check{R}_{L(\lambda),L(\mu)} = \bigoplus_{\nu \in P_+} q^{(\lambda,\lambda+2\rho)+(\mu,\mu+2\rho)-(\nu,\nu+2\rho)} P_{\lambda\mu}^{\nu}. \tag{5.2.6}$$

Нижче подано схему стандартного методу зведення деяких задач щодо $U_q\mathfrak{g}$-модулів до проблем класичної теорії $U\mathfrak{g}$-модулів.

Головне спостереження полягає в тому, що багато властивостей $U_q\mathfrak{g}$-модулів можуть бути сформульовані і доведені в термінах їх виділених підмодулів над кільцем $\mathcal{A} = \mathbb{Q}[q^{1/s}, q^{-1/s}]$ поліномів Лорана змінної $q^{1/s}$ з раціональними коефіцієнтами. Дійсно, розглянемо $\mathcal{A}$-підалгебру $U_{\mathcal{A}}$ в $U_q\mathfrak{g}$, генеровану $K_i^{\pm 1}$, E_i, F_i, $h_i = \frac{K_i - K_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}$, $i = 1, 2, \ldots, l$. Як відомо з [22], перелік визначальних співвідношень між цими твірними може бути виведений зі стандартного переліку сіпввідношень для $U_q\mathfrak{g}$ шляхом заміни в останніх співвідношення $E_iF_j - F_jE_i = \delta_{ij}\frac{K_i - K_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}$ на $E_iF_j - F_jE_i = \delta_{ij}h_i$ та додавання співвідношення

$$(q_i - q_i^{-1})h_i = K_i - K_i^{-1}, \qquad i = 1, 2, \dots, l.$$

Зрозуміло, що $\mathcal{A}$-підалгебра $U_{\mathcal{A}}$ успадковує структуру алгебри Хопфа.

Розглянемо гомоморфізми $j : U_{\mathcal{A}} \to U\mathfrak{g}$, $i : U_{\mathcal{A}} \to U_q\mathfrak{g}$, задані через

$$j(K_i^{\pm 1}) = 1, \qquad j(E_i) = E_i, \qquad j(F_i) = F_i, \qquad j(h_i) = H_i,$$

$$i(K_i^{\pm 1}) = K_i^{\pm 1}, \qquad i(E_i) = E_i, \qquad i(F_i) = F_i, \qquad i(h_i) = \frac{K_i - K_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}},$$

де $i = 1, 2, \dots, l$.

Перший гомоморфізм дає можливість застосовувати класичну теорію $U\mathfrak{g}$-модулів до вивчення $U_{\mathcal{A}}$-модулів, а другий дає можливість перенесення результатів щодо $U_{\mathcal{A}}$-модулів на $U_q\mathfrak{g}$-модулі.

5.2.4 Твірні та визначальні співвідношення для алгебри $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$

Головні результати цього пункту одержано Гекенбергером і Колбом в [75]. Допоміжні результати цього пункту є новими і будуть використані у подальшому.

Розпочнемо з добре відомих властивостей групи Вейля W. Нехай $\mathbb{S} = \{1, 2, \dots, l\} \setminus \{l_0\}$ і $W_{\mathbb{S}} \subset W$ – підгрупа, генерована простими віддзеркаленнями s_i, $i \in \mathbb{S}$. Далі, визначимо

$$W^{\mathbb{S}} = \{w \in W |\, l(vw) \geq l(w) \text{ для всіх } v \in W_{\mathbb{S}}\}.$$

Костантом було показано [110], що будь-який елемент $w \in W$ припускає єдиний розклад вигляду $w = w_{\mathbb{S}} \cdot w^{\mathbb{S}}$, де $w_{\mathbb{S}} \in W_{\mathbb{S}}$, $w^{\mathbb{S}} \in W^{\mathbb{S}}$, і $l(w) = l(w_{\mathbb{S}}) + l(w^{\mathbb{S}})$. Зокрема, такий розклад має місце для найдовшого елементу w_0 групи Вейля W:

$$w_0 = w_{0,\mathbb{S}} \cdot w_0^{\mathbb{S}}, \qquad l(w_0) = l(w_{0,\mathbb{S}}) + l(w_0^{\mathbb{S}}).$$

За таких позначень, $w_{0,\mathbb{S}}$ є найдовшим елементом підгрупи $W_{\mathbb{S}}$. Зафіксуємо зведені розклади

$$w_{0,\mathbb{S}} = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_{M'}}, \qquad w_0^{\mathbb{S}} = s_{i_{M'+1}} s_{i_{M'+2}} \dots s_{i_M}.$$

Їх конкатенація $w_0 = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_M}$ утворює зведений розклад для w_0.

Використаємо його для побудови бази в $U_q\mathfrak{g}$. Алгебра $U_q\mathfrak{g}$ є вільним правим $U_q\mathfrak{q}^+$-модулем із базою $F_{\beta_M}^{j_M} F_{\beta_{M-1}}^{j_{M-1}} \dots F_{\beta_{M'+1}}^{j_{M'+1}}$, $(j_M, j_{M-1}, \dots, j_{M'+1}) \in \mathbb{Z}_+^{M-M'}$. Отже, маємо

Твердження 5.2.12. *Нехай $\lambda \in \mathcal{P}_+$ і $\{v_1, v_2, \dots, v_d\}$ – база векторного простору $L(\mathfrak{q}^+, \lambda)$. Тоді однорідні елементи*

$$F_{\beta_M}^{j_M} F_{\beta_{M-1}}^{j_{M-1}} \dots F_{\beta_{M'+1}}^{j_{M'+1}} v_i, \qquad j_k \in \mathbb{Z}_+, \quad i \in \{1, 2, \dots, d\}, \tag{5.2.7}$$

утворюють базу градуйованого векторного простору $N(\mathfrak{q}^+, \lambda)$.

Однорідність елементів (5.2.7) випливає з того, що F_β – вагові вектори $U_q\mathfrak{g}$-модуля $U_q\mathfrak{g}$, чиї ваги є такими ж, як і у класичному випадку.

Нехай $U_q\mathfrak{k} \subset U_q\mathfrak{g}$ – підалгебра Хопфа, генерована твірними $\{E_i, F_i\}_{i \neq l_0} \cup \{K_j^{\pm 1}\}_{j=1,2,\dots,l}$.

Наслідок 5.2.13. *Однорідні компоненти градуйованого векторного простору $N(\mathfrak{q}^+, \lambda)$ є скінченновимірними ваговими $U_q\mathfrak{k}$-модулями. Кратності ваг для цих $U_q\mathfrak{k}$-модулів і їх вимірності є такими ж, як і в класичному випадку $q = 1$.*

Алгебра $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$ є областю цілісності, і однорідна компонента $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,1}$ генерує $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$, див. [75]. Ми знайдемо співвідношення між цими твірними.

Визначення множення $m : \mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q \to \mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$, $m : f_1 \otimes f_2 \mapsto f_1 f_2$, має наслідком співвідношення

$$\varphi\psi = m\check{R}_{\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q, \mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q}(\varphi \otimes \psi), \qquad \varphi, \psi \in \mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q. \tag{5.2.8}$$

Це має розглядатися як комутативність для $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$ у сплетеній тензорній категорії вагових $U_q\mathfrak{b}^-$-скінченних $U_q\mathfrak{g}$-модулів (див. Додаток A.4 та [139]).

Нехай $\mathcal{L}$ – ядро лінійного відображення

$$\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,1} \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,1} \to \mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,2}, \qquad \varphi \otimes \psi \mapsto \varphi\psi - m\check{R}_{\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q, \mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q}(\varphi \otimes \psi).$$

У класичному граничному випадку $q = 1$ це є підпростором усіх антисиметричних тензорів.

Нехай $U_q\mathfrak{k}_{\mathrm{ss}} \subset U_q\mathfrak{g}$ – підалгебра Хопфа, генерована твірними $\{K_j^{\pm 1}, E_j, F_j\}_{j \neq l_0}$. Внаслідок (5.2.8) $m\mathcal{L} = 0$. Іншими словами, елементи $\mathcal{L}$ є квадратичними співвідношеннями. Ми подамо опис цього підпростору у термінах морфізму $U_q\mathfrak{k}$-модулів $\widetilde{R}_{\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,1}, \mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,1}} : \mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,1} \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,1} \to \mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,1} \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,1}$, що визначається дією універсальної R-матриці алгебри Хопфа $U_q\mathfrak{k}_{\mathrm{ss}}$ із подальшою "наївною" перестановкою тензорних множників.

Ми передбачаємо здійснення численних переходів між квантовим та класичним випадками. Буде зручним тимчасово замінити основне поле $\mathbb{C}(q^{\frac{1}{s}})$ полем комплексних чисел, натомість припускаючи, що $q \in (0, 1)$. Такі q не є коренями з одиниці.

Твердження 5.2.14. *Існує єдине від'ємне власне число лінійного оператора $\widetilde{R}_{\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,1}, \mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,1}}$. Це власне число дорівнює $-q^{\frac{4}{(H_0, H_0)}}$, а його кратність дорівнює $\frac{\dim \mathfrak{p}^-(\dim \mathfrak{p}^- - 1)}{2}$.*

Доведення. Оскільки $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,1}$ генерує алгебру $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$ і $\dim \mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,2} = \frac{\dim \mathfrak{p}^-(\dim \mathfrak{p}^- + 1)}{2}$, маємо

$$\dim \mathcal{L} \leq \frac{\dim \mathfrak{p}^-(\dim \mathfrak{p}^- - 1)}{2}.$$

Тому бажане твердження є наслідком наступних лем.

Лема 5.2.15. *$\mathcal{L}$ містить всі власні вектори оператора $\widetilde{R}_{\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,1}, \mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,1}}$ з від'ємними власними числами.*

Лема 5.2.16. *Вимірність власного підпростору оператора $\widetilde{R}_{\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,1}, \mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,1}}$, що відповідає власному числу $-q^{\frac{4}{(H_0, H_0)}}$, не менша, ніж $\frac{\dim \mathfrak{p}^-(\dim \mathfrak{p}^- - 1)}{2}$.*

Доведення Леми 5.2.15. Нехай $\mathcal{L}'$ – спектральний підпростір оператора $\widetilde{R}_{\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,1}, \mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,1}}$, що відповідає негативній напівосі $(-\infty, 0)$. Зрозуміло, що $\mathcal{L}$ і $\mathcal{L}'$ – $U_q\mathfrak{k}$-підмодулі, отже досить довести, що $\mathcal{L} \supset \mathcal{L}'$. У класичному випадку $q = 1$ кратності простих вагових $U\mathfrak{k}$-модулів в $(\mathfrak{p}^-)^* \otimes (\mathfrak{p}^-)^*$ не перевищують 1, оскільки вагові підпростори $U\mathfrak{k}$-модуля $\mathfrak{p}^-$ одновимірні [194]. Отже, з огляду на Твердження 5.2.9, ці кратності дорівнюють 1 також і в квантовому випадку. Тому підпростори $\mathcal{L}$ і $\mathcal{L}'$ визначаються відповідним $U_q\mathfrak{k}$-спектром, тобто множинами старших ваг своїх простих $U_q\mathfrak{k}$-підмодулів.

У випадку $q = 1$ ці множини старших ваг співпадають. Залишається дослідити їх залежність від $q \in (0, 1]$. Внаслідок (5.2.6), спектр $\widetilde{R}_{\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,1}, \mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,1}}$ міститься на дійсній осі і не містить 0. Отже, аналітична залежність спектрального проектора, що відповідає негативній напівосі, є наслідком аналітичної залежності самого оператора $\widetilde{R}_{\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,1}, \mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,1}}$.

Дослідимо залежність від q операторів E_j, F_j, $j \neq l_0$, $\quad H_i$, $i = 1, 2, \ldots, l$, що діють в $\mathcal{L}$, і оператора $\widetilde{R}_{\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,1}, \mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,1}}$. Для цього оберемо базу вагових векторів в $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$, що є дуальною до бази, поданої в Твердженні 5.2.12. У такий же спосіб одержуємо бази в $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,1}$, $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,1} \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,1}$, $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,2}$. Бажане твердження $\mathcal{L} \supset \mathcal{L}'$ випливає з того факту, що матричні елементи операторів m і $\widetilde{R}_{\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,1}, \mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,1}}$ відносно зазначених вище баз залежать аналітично від $q \in (0, 1]$. $\square$

Доведення Леми 5.2.16. Розглянемо підпростір

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \left\{ a \in N(\mathfrak{q}^+, -\alpha_{l_0})_{-1} \otimes N(\mathfrak{q}^+, -\alpha_{l_0})_{-1} \;\middle|\; \check{R}_{N(\mathfrak{q}^+, -\alpha_{l_0}), N(\mathfrak{q}^+, -\alpha_{l_0})} a = -a \right\}.$$

Досить довести нерівність

$$\dim \widetilde{\mathcal{L}} \geq \frac{\dim \mathfrak{p}^-(\dim \mathfrak{p}^- - 1)}{2}. \tag{5.2.9}$$

Дійсно, обмеження $\check{R}$ лінійного відображення $\check{R}_{N(\mathfrak{q}^+, -\alpha_{l_0}), N(\mathfrak{q}^+, -\alpha_{l_0})}$ на підпростір $N(\mathfrak{q}^+, -\alpha_{l_0})_{-1} \otimes N(\mathfrak{q}^+, -\alpha_{l_0})_{-1}$ відрізняється від $\widetilde{R}_{\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,1}, \mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,1}}$ лише скалярним множником $q^{-\frac{4}{(H_0, H_0)}}$ (при порівнянні універсальних R-матриць для алгебр Хопфа $U_q\mathfrak{g}$ і $U_q\mathfrak{k}_{\mathrm{ss}}$ ми використовуємо зведений розклад для $w_0 \in W$ наведений вище).

Для доведення (5.2.9), розглянемо морфізми $U_q\mathfrak{g}$-модулів

$$N(\mathfrak{q}^+, w\rho - \rho) \to N(\mathfrak{q}^+, -\alpha_{l_0}) \otimes N(\mathfrak{q}^+, -\alpha_{l_0}), \qquad w \in W^{\mathbb{S}} \;\&\; l(w) = 2,$$

і образи однорідних компонент $N(\mathfrak{q}^+, w^{-1}\rho - \rho)_{-2}$. Досить довести, що сума образів має вимірність $\dim \mathfrak{p}^-(\dim \mathfrak{p}^- - 1)/2$, і лінійне відображення $\check{R}_{N(\mathfrak{q}^+,-\alpha_{l_0}),N(\mathfrak{q}^+,-\alpha_{l_0})}$, обмежене на кожен з них, є -1.

Ми потребуємо наступний результат Костанта [110, стор. 359–360], [151, стор. 348], з $r = 2$.

Лема 5.2.17. *Розглянемо $U\mathfrak{k}$-модуль $(\mathfrak{p}^-)^{\wedge r}$, $r = 1, 2, \ldots, \dim \mathfrak{p}^-$. Його ізотипічні компоненти є простими $U\mathfrak{k}$-модулями з одновимірними ваговими підпросторами, і множиною ваг*

$$\left\{ w\rho - \rho \,\middle|\, w \in W^{\mathbb{S}} \ \&\ l(w) = r \right\}.$$

Аналогічний результат також має місце для $q \in (0, 1)$, оскільки кратності у розкладах тензорних добутків залишаються незмінними при переході від класичного випадку $q = 1$ до квантового випадку [88]. З цього випливає бажана оцінка для вимірності суми однорідних компонент $N(\mathfrak{q}^+, w\rho - \rho)_{-2}$. Залишається показати, що лінійне відображення $\check{R}_{N(\mathfrak{q}^+,-\alpha_{l_0}),N(\mathfrak{q}^+,-\alpha_{l_0})}$, обмежене на образ будь-якого морфізму $U_q\mathfrak{g}$-модулів

$$N(\mathfrak{q}^+, w\rho - \rho) \to N(\mathfrak{q}^+, -\alpha_{l_0}) \otimes N(\mathfrak{q}^+, -\alpha_{l_0}), \qquad w \in W^{\mathbb{S}} \ \&\ l(w) = 2,$$

є -1. Досить довести, що це ± 1, оскільки завдяки неперервній залежності від q ми залишаємось у спектральному підпросторі, що відповідає ненегативній частині спектру.

Розглянемо ближче (5.2.6). З доведення цього співвідношення, викладеного в [34, стор. 239], випливає, що лінійне відображення $\check{R}_{N(\mathfrak{q}^+,\mu),N(\mathfrak{q}^+,\lambda)}\check{R}_{N(\mathfrak{q}^+,\lambda),N(\mathfrak{q}^+,\mu)}$, обмежене на образ морфізму $N(\mathfrak{q}^+, \nu) \to N(\mathfrak{q}^+, \lambda) \otimes N(\mathfrak{q}^+, \mu)$, є множенням на скаляр

$$q^{(\mu,\mu+2\rho)+(\lambda,\lambda+2\rho)-(\nu,\nu+2\rho)} = q^{(\mu+\rho,\mu+\rho)+(\lambda+\rho,\lambda+\rho)-(\nu+\rho,\nu+\rho)-(\rho,\rho)}.$$

Підставляючи у праву частину $\lambda = \mu = -\alpha_{l_0}$, $\nu = w\rho - \rho$, одержуємо 1, оскільки ваги $-\alpha_{l_0} = \rho$, $\nu + \rho$, ρ належать тій самій орбіті групи W, і тому мають однакову довжину. $\square$

Твердження 5.2.18. *$\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$ є квадратичною алгеброю з простором твірних $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,1}$ і простором співвідношень $\mathcal{L}$.*

Доведення. Розглянемо квадратичну алгебру $F = T(\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,1})/(\mathcal{L})$, із простором твірних $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,1}$ і простором співвідношень $\mathcal{L}$. Природний гомоморфізм градуйованих алгебр $\mathfrak{I}: F \to \mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$ є сюр'єктивним, оскільки $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,1}$ генерує $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$. Ін'єктивність $\mathfrak{I}$ є наслідком того факту, що вимірності градуйованих компонент співпадають:

$$\dim \mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,j} = \binom{j + \dim \mathfrak{p}^- - 1}{\dim \mathfrak{p}^- - 1}, \quad \dim F_j = \binom{j + \dim \mathfrak{p}^- - 1}{\dim \mathfrak{p}^- - 1}. \qquad (5.2.10)$$

Перша рівність у (5.2.10) виводится розглядом мономіальної бази (5.2.7) в $N(\mathfrak{q}^+, 0)$, а друга – мономіальної бази в F, описаної нижче.

Як і в класичному випадку $q = 1$, ваги $U_q\mathfrak{k}$-модуля $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,1}$ мають вигляд $-\alpha_{l_0} - \sum\limits_{i \neq l_0} n_i \alpha_i$, і всі вагові підпростори одновимірні. Запровадимо лінійне впорядкування на множині ваг цього $U_q\mathfrak{k}$-модуля, що відповідає лексикографічному впорядкуванню на множині строк $(-n_1, -n_2, \cdots, -n_{l_0-1}, -1, -n_{l_0+1}, \cdots, -n_l)$, утворених коефіцієнтами розкладу на прості корені. Оберемо базу $\{z_1, z_2, \cdots, z_{\dim \mathfrak{p}^-}\}$ вагових векторів в $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,1}$, дуальну до мономіальної бази в $N(\mathfrak{q}^+, 0)_{-1}$, і визначимо впорядкування на її елементах, що відповідає зростанню ваг. З огляду на (5.2.4), легко довести, що тензори $z_i \otimes z_j + q^{-\frac{4}{(H_\mathbb{S}, H_\mathbb{S})}} \sum\limits_{k<m} \widetilde{R}_{ij}^{km} z_k \otimes z_m$, $i > j$, утворюють некомутативну базу Грьобнера, тому

$$\left\{ z_1^{j_1} z_2^{j_2} z_3^{j_3} \ldots z_{\dim \mathfrak{p}^-}^{j_{\dim \mathfrak{p}^-}} \,\middle|\, j_1 < j_2 < \ldots < j_{\dim \mathfrak{p}^-} \right\} \qquad (5.2.11)$$

утворюють базу в F [10]. □

Зауваження. У базі (5.2.11), дія твірних E_i, F_i, $K_i^{\pm 1}$ задається матрицями, чиї елементи належать полю раціональних функцій $\mathbb{Q}(q)$ і не мають полюсів в точках $q \in (0, 1]$. Це є наслідком визначень і Твердження 5.2.2.

5.2.5 Диференціальне числення першого порядку

У пункті 5.2.2 визначено $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$-бімодуль $\Lambda^1(\mathfrak{p}^-)_q$ 1-форм на квантовому векторному просторі $\mathfrak{p}^-$, разом із диференціалом $d : \mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q \to \Lambda^1(\mathfrak{p}^-)_q$. Нижче подано опис $\Lambda^1(\mathfrak{p}^-)_q$ у термінах твірних і співвідношень;

звідки, зокрема, випливає, що $\Lambda^1(\mathfrak{p}^-)_q$ є лінійною оболонкою множини $\{f_1 df_2 f_3 |\, f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q\}$.

Подивимось на проблему у більш загальному контексті. Ми побудуємо квантові аналоги пошарових лінійних функцій на просторах голоморфних векторних розшарувань. У випадку дотичного розшарування для $\mathfrak{p}^-$ у такий спосіб виникають 1-форми.

Нехай $\lambda \in \mathcal{P}_+$. Розглянемо такі морфізми:

$$\begin{aligned}\triangle^+_{\mathrm{left},\lambda} :& N(\mathfrak{q}^+, \lambda) \to N(\mathfrak{q}^+, 0) \otimes N(\mathfrak{q}^+, \lambda),\\ \triangle^+_{\mathrm{right},\lambda} :& N(\mathfrak{q}^+, \lambda) \to N(\mathfrak{q}^+, \lambda) \otimes N(\mathfrak{q}^+, 0)\end{aligned}$$

в категорії $U_q\mathfrak{g}^{\mathrm{cop}}$-модулів, визначених своєю дією на твірні:

$$\begin{aligned}\triangle^+_{\mathrm{left},\lambda} :& v(\mathfrak{q}^+, \lambda) \to v(\mathfrak{q}^+, 0) \otimes v(\mathfrak{q}^+, \lambda),\\ \triangle^+_{\mathrm{right},\lambda} :& v(\mathfrak{q}^+, \lambda) \to v(\mathfrak{q}^+, \lambda) \otimes v(\mathfrak{q}^+, 0).\end{aligned}$$

Наступні співвідношення є безпосередніми наслідками визначень:

$$(\mathrm{id} \otimes \triangle^+_{\mathrm{left},\lambda})\triangle^+_{\mathrm{left},\lambda} = (\triangle^+ \otimes \mathrm{id})\triangle^+_{\mathrm{left},\lambda}, \tag{5.2.12}$$

$$(\triangle^+_{\mathrm{right},\lambda} \otimes \mathrm{id})\triangle^+_{\mathrm{right},\lambda} = (\mathrm{id} \otimes \triangle^+)\triangle^+_{\mathrm{right},\lambda} \tag{5.2.13}$$

$$(\varepsilon^+ \otimes \mathrm{id})\triangle^+_{\mathrm{left},\lambda} = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon^+)\triangle^+_{\mathrm{right},\lambda} = \mathrm{id}, \tag{5.2.14}$$

$$(\mathrm{id} \otimes \triangle^+_{\mathrm{right},\lambda})\triangle^+_{\mathrm{left},\lambda} = (\triangle^+_{\mathrm{left},\lambda} \otimes \mathrm{id})\triangle^+_{\mathrm{right},\lambda}. \tag{5.2.15}$$

Зокрема, останнє співвідношення випливає з

$$\begin{aligned}(\mathrm{id} \otimes \triangle^+_{\mathrm{right},\lambda})\triangle^+_{\mathrm{left},\lambda} v(\mathfrak{q}^+, \lambda) &= v(\mathfrak{q}^+, 0) \otimes v(\mathfrak{q}^+, \lambda) \otimes v(\mathfrak{q}^+, 0),\\ (\triangle^+_{\mathrm{left},\lambda} \otimes \mathrm{id})\triangle^+_{\mathrm{right},\lambda} v(\mathfrak{q}^+, \lambda) &= v(\mathfrak{q}^+, 0) \otimes v(\mathfrak{q}^+, \lambda) \otimes v(\mathfrak{q}^+, 0).\end{aligned}$$

Розглянемо категорію градуйованих векторних просторів і дуальний до $N(\mathfrak{q}^+, \lambda)$ простір $\Gamma(\mathfrak{p}^-, \lambda)_q$ у цій категорії. Облаштуємо цей простір структурою $U_q\mathfrak{g}$-модуля, разом з лівою та правою діями алгебри $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$:

$$m_{\mathrm{left},\lambda} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\triangle^+_{\mathrm{left},\lambda})^*, \qquad m_{\mathrm{right},\lambda} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\triangle^+_{\mathrm{right},\lambda})^*.$$

Співвідношення (5.2.12) – (5.2.15) мають наслідком таке

Твердження 5.2.19. *Для будь-якого $\lambda \in \mathcal{P}_+$ градуйований векторний простір $\Gamma(\mathfrak{p}^-, \lambda)_q$ є $U_q\mathfrak{g}$-модульним $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$-бімодулем.*

Нехай $N(\mathfrak{q}^+, \lambda)_{\text{highest}}$ – найвища однорідна компонента градуйованого векторного простору $N(\mathfrak{q}^+, \lambda)$ і P_{highest} – проекція в $N(\mathfrak{q}^+, \lambda)$ на підпростір $N(\mathfrak{q}^+, \lambda)_{\text{highest}}$ паралельно сумі всіх інших однорідних компонент.

Лема 5.2.20. *Лінійні відображення*

$$(\mathrm{id} \otimes P_{\text{highest}})\triangle^+_{\text{left},\lambda} : N(\mathfrak{q}^+, \lambda) \to N(\mathfrak{q}^+, 0) \otimes N(\mathfrak{q}^+, \lambda)_{\text{highest}},$$
$$(P_{\text{highest}} \otimes \mathrm{id})\triangle^+_{\text{right},\lambda} : N(\mathfrak{q}^+, \lambda) \to N(\mathfrak{q}^+, \lambda)_{\text{highest}} \otimes N(\mathfrak{q}^+, 0)$$

ін'єктивні.

Доведення. Використаємо ті ж позначення, що й у формулюванні Твердження 5.2.12. Ін'єктивність зазначених лінійних відображень випливає з того Твердження, ізоморфізму $N(\mathfrak{q}^+, \lambda)_{\text{highest}} \cong L(\mathfrak{q}^+, \lambda)$ і того факту, що для будь-якого вагового вектора $v \in N(\mathfrak{q}^+, \lambda)_{\text{highest}}$

$$(\mathrm{id} \otimes P_{\text{highest}})\triangle^+_{\text{left},\lambda}\left(F^{j_M}_{\beta_M} F^{j_{M-1}}_{\beta_{M-1}} \dots F^{j_{M'+1}}_{\beta_{M'+1}} v\right) =$$
$$= \mathrm{const}' \cdot F^{j_M}_{\beta_M} F^{j_{M-1}}_{\beta_{M-1}} \dots F^{j_{M'+1}}_{\beta_{M'+1}} v(\mathfrak{q}^+, 0) \otimes v,$$

$$(P_{\text{highest}} \otimes \mathrm{id})\triangle^+_{\text{right},\lambda}\left(F^{j_M}_{\beta_M} F^{j_{M-1}}_{\beta_{M-1}} \dots F^{j_{M'+1}}_{\beta_{M'+1}} v\right) =$$
$$= \mathrm{const}'' \cdot v \otimes F^{j_M}_{\beta_M} F^{j_{M-1}}_{\beta_{M-1}} \dots F^{j_{M'+1}}_{\beta_{M'+1}} v(\mathfrak{q}^+, 0),$$

з ненульовими скалярними множниками const', const''. □

Твердження 5.2.21. *1. Бімодуль $\Gamma(\mathfrak{p}^-, \lambda)_q$ над $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$ є вільним лівим і вільним правим $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$-модулем.*

2. Для найнижчої однорідної компоненти $\Gamma(\mathfrak{p}^-, \lambda)_{q,\text{lowest}}$ модуля $\Gamma(\mathfrak{p}^-, \lambda)_q$ мають місце такі ізоморфізми $U_q\mathfrak{k}$-модулів:

$$\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q \otimes \Gamma(\mathfrak{p}^-, \lambda)_{q,\text{lowest}} \xrightarrow{\approx} \Gamma(\mathfrak{p}^-, \lambda)_q, \qquad f \otimes v \mapsto fv, \tag{5.2.16}$$
$$\Gamma(\mathfrak{p}^-, \lambda)_{q,\text{lowest}} \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q \xrightarrow{\approx} \Gamma(\mathfrak{p}^-, \lambda)_q, \qquad v \otimes f \mapsto vf. \tag{5.2.17}$$

Доведення. Перше твердження випливає з другого. Морфізми $U_q\mathfrak{k}$-модулів (5.2.16), (5.2.17) є морфізмами градуйованих векторних просторів.

Внаслідок Твердження 5.2.12 з міркувань дуальності виводимо, що вимірності відповідних однорідних компонент скінченні та рівні. Отже, (5.2.16), (5.2.17) є взаємно-однозначними, оскільки вони є сюр'єктивними, що в свою чергу є наслідком Леми 5.2.14. □

Зрозуміло, що $\Gamma(\mathfrak{p}^-,\lambda)_q$ не є вільним $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$-бімодулем. Ми знайдемо співвідношення між твірними з $\Gamma(\mathfrak{p}^-,\lambda)_{q,\mathrm{lowest}}$. Оскільки $\Gamma(\mathfrak{p}^-,\lambda)_q$ – $U_q\mathfrak{g}$-модуль з молодшою вагою, існує коректно визначений морфізм $U_q\mathfrak{g}$-модулів

$$\check{R}_{0,\lambda}\stackrel{\mathrm{def}}{=}\check{R}_{\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q,\Gamma(\mathfrak{p}^-,\lambda)_q}:\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q\otimes\Gamma(\mathfrak{p}^-,\lambda)_q\to\Gamma(\mathfrak{p}^-,\lambda)_q\otimes\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q.$$

Твердження 5.2.22.

1. $m_{\mathrm{left},\lambda}=m_{\mathrm{right},\lambda}\cdot\check{R}_{0,\lambda}$; $\quad m_{\mathrm{right},\mu}=m_{\mathrm{left},\mu}\cdot\check{R}_{\mu,0}$.

2. $\check{R}_{0,\lambda}:\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,1}\otimes\Gamma(\mathfrak{p}^-,\lambda)_{q,\mathrm{lowest}}\to\Gamma(\mathfrak{p}^-,\lambda)_{q,\mathrm{lowest}}\otimes\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,1}$.

Доведення. Перше ствердження в 1) можна одержати переходом до спряжених операторів. Дійсно, воно еквівалентне тотожності морфізмів $U_q\mathfrak{g}^{\mathrm{cop}}$-модулів:

$$\left(\check{R}_{0,\lambda}\right)^*\triangle^+_{\mathrm{right},\lambda}=\triangle^+_{\mathrm{left},\lambda}. \tag{5.2.18}$$

В свою чергу, (5.2.18) випливає з того факту, що вектор $v(\mathfrak{q}^+,\lambda)$ генерує $U_q\mathfrak{g}^{\mathrm{cop}}$-модуль $N(\mathfrak{q}^+,\lambda)$, разом зі співвідношеннями

$$\triangle^+_{\mathrm{right},\lambda}v(\mathfrak{q}^+,\lambda)=v(\mathfrak{q}^+,\lambda)\otimes v(\mathfrak{q}^+,0),\quad \triangle^+_{\mathrm{left},\lambda}v(\mathfrak{q}^+,\lambda)=v(\mathfrak{q}^+,0)\otimes v(\mathfrak{q}^+,\lambda),$$
$$\check{R}^*_{0,\lambda}v(\mathfrak{q}^+,\lambda)\otimes v(\mathfrak{q}^+,0)=v(\mathfrak{q}^+,0)\otimes v(\mathfrak{q}^+,\lambda).$$

Друге твердження в 1) доводиться у подібний спосіб. Твердження 2) є наслідком того факту, що $\check{R}_{0,\lambda}$ – морфізм $U_q\mathfrak{g}$-модулів, і тому комутує з лінійним відображенням $H_0\otimes 1+1\otimes H_0$. □

Наслідок 5.2.23. *Нехай* $\{z_i\}$ *– база скінченновимірного векторного простору* $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,1}$ *і* $\{\gamma_i\}$ *– база скінченновимірного векторного простору* $\Gamma(\mathfrak{p}^-,\lambda)_{q,\mathrm{lowest}}$. *Існує єдина матриця* $(\check{R}^{km}_{ij}(\lambda))$ *така, що*

$$\check{R}_{0,\lambda}(z_i\otimes\gamma_j)=\sum_{k,m}\check{R}^{km}_{ij}(\lambda)\gamma_k\otimes z_m,$$

де $i,m\in\{1,2,\dots,\dim\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,1}\}$, $j,k\in\{1,2,\dots,\dim\Gamma(\mathfrak{p}^-,\lambda)_{q,\mathrm{lowest}}\}$.

Зауваження. Віднайдення функцій $\check{R}_{ij}^{km}(\lambda)$ здається складною проблемою, оскільки їх визначення спирається на дії універсальної R-матриці в тензорних добутках нескінченно-вимірних $U_q\mathfrak{g}$-модулів. Ми покажемо, що насправді це не становить проблеми. Як і в пункті 5.2.4, розглянемо підалгебру Хопфа $U_q\mathfrak{k}_{\mathrm{ss}} \subset U_q\mathfrak{g}$, генеровану твірними $K_i^{\pm 1}$, E_i, F_i з $i \neq l_0$. Дія універсальної R-матриці алгебри Хопфа $U_q\mathfrak{g}$ на вектори з $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,1} \otimes \Gamma(\mathfrak{p}^-, \lambda)_{q,\mathrm{lowest}}$ відрізняється від дії універсальної R-матриці алгебри Хопфа $U_q\mathfrak{k}_{\mathrm{ss}}$ лише множником

$$\mathrm{const} = q_{l_0}^{\frac{(\lambda, \overline{\omega}_{l_0})}{(\overline{\omega}_{l_0}, \overline{\omega}_{l_0})}}. \qquad (5.2.19)$$

Для доведення (5.2.19) досить використати (5.2.4), зведений розклад для w_0 як у пункті 5.2.4 і співвідношення

$$(\alpha_{l_0}, \lambda) = (\alpha_{l_0}|_{\mathfrak{h}\cap\mathfrak{k}}, \lambda|_{\mathfrak{h}\cap\mathfrak{k}}) + \frac{(\alpha_{l_0}, \overline{\omega}_{l_0})(\overline{\omega}_{l_0}, \lambda)}{(\overline{\omega}_{l_0}, \overline{\omega}_{l_0})}, \qquad (\alpha_{l_0}, \overline{\omega}_{l_0}) = d_{l_0},$$

що дозволяє порівняти картанівські множники q^{-t_0}.

Наступне Твердження випливає з Тверджень 5.2.15, 5.2.16.

Твердження 5.2.24. *Множина* $\{\gamma_j\}_{j=1,2,\ldots,\dim\Gamma(\mathfrak{p}^-,\lambda)_{q,\mathrm{lowest}}}$ *генерує* $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$*-бімодуль* $\Gamma(\mathfrak{p}^-, \lambda)_q$*, і*

$$z_i \gamma_j = \sum_{k,m} \check{R}_{ij}^{km}(\lambda)\, \gamma_k z_m$$

є визначальними співвідношеннями.

Наслідок 5.2.25. *Для всіх* $i, j \in \{1, 2, \ldots, \dim\mathfrak{p}^-\}$ *маємо*

$$z_i dz_j = \sum_{k,m=1}^{\dim\mathfrak{p}^-} \check{R}_{ij}^{km}\, dz_k z_m, \qquad (5.2.20)$$

де $\check{R}_{ij}^{km} = \check{R}_{ij}^{km}(-\alpha_{l_0})$*, і це становить перелік визначальних співвідношень між твірними* $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$*-бімодуля* $\Lambda^1(\mathfrak{p}^-)_q$*.*

5.2.6 Універсальне огортуюче диференціальне числення

У пункті 5.2.2 було згадано, що кожне диференціальне числення першого порядку визначає універсальне диференціальне числення. Ось деякі приклади.

Приклад. (Немає співвідношень.) Розглянемо векторний простір V і побудуємо диференціальне числення над його тензорною алгеброю $T(V)$. Виберемо векторний простір V', ізоморфний V, разом з ізоморфізмом $d : V \to V'$. Устаткуємо тензорну алгебру $\Omega' = T(V \oplus V')$ градуюванням $\deg(v) = 0$, $v \in V$; $\deg(v') = 1$, $v' \in V'$. Зрозуміло, що $\Omega' = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_+} \Omega'_j$, де $\Omega'_j = \{t \in \Omega' | \deg t = j\}$. Визначимо лінійний оператор d' в Ω' за допомогою рекурсії: $d'1 = 0$,

$$\begin{aligned} d'v &= dv, \quad v \in V; & d'v' &= 0, \quad v' \in V', \\ d'(v \otimes t) &= dv \otimes t + v \otimes d't, & v &\in V, \quad t \in \Omega', \\ d'(v' \otimes t) &= -v' \otimes d't, & v' &\in V', \quad t \in \Omega'. \end{aligned}$$

Пара $(\Omega'_1, d'|_{\Omega'_0})$ є диференціальним численням першого порядку над тензорною алгеброю $T(V)$, а пара (Ω', d') – його універсальне огортуюче диференціальне числення.

Приклад. (Є співвідношення між координатами.) Розглянемо двосторонній ідеал $J_0 = \bigoplus_{j \geq 2}(J_0 \cap V^{\otimes j})$ в тензорній алгебрі $T(V) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_+} V^{\otimes j}$. Побудуємо диференціальне числення над алгеброю $F = T(V)/J_0$. Нехай J_F – двосторонній ідеал в Ω', генерований J_0 і $d'J_0$. Алгебра $\Omega^F = \Omega'/J_F$ успадковує градуювання: $\Omega^F = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_+} \Omega^F_j$.

Зрозуміло, що $V \hookrightarrow F$. Оскільки $d'J_F \subset J_F$, диференціал d' переноситься на $\Omega^F = \Omega'/J_F$. Отже, маємо лінійне відображення d_F і диференціальне числення (Ω^F, d^F) над алгеброю $F = \Omega^F_0$. Воно є універсальним огортуючим диференціальним численням, що відповідає диференціальному численню першого порядку $(\Omega^F_1, d^F|_F)$, і є добре відомим у теорії квантових груп [103, стор. 462].

Приклад (*). (Є співвідношення між координатами і диференціалами.)

Вище подано опис вільного диференціального числення першого порядку над алгеброю $F = T(V)/J_F$. Перейдемо до більш реалістичного прикладу шляхом запровадження R-матричних комутаційних співвідношень між елементами $v \in V$ і $v' \in V'$. Розглянемо оборотне лінійне відображення $\check{\mathcal{R}} : V \otimes V' \to V' \otimes V$. Нехай J_1 – підбімодуль F-бімодуля Ω_1^F, генерований

$$\left\{ vv' - v'v \,\middle|\, v \otimes v' = \check{\mathcal{R}}(v \otimes v'), \quad v \in V,\ v' \in V' \right\} \subset \Omega_1^F. \qquad (5.2.21)$$

Факторизація $(\Omega_1^F, d^F|_F)$ за ідеалом J_1 призводить до диференціцального числення першого порядку над F. Для одержання відповідного універсального огортуючого диференціального числення розглянемо однорідний двосторонній ідеал J_M в Ω^F, генерований J_1, $d^F J_1$, та профакторизуємо Ω^F за ідеалом J_M. Диференціал переноситься на Ω^F/J_M, оскільки $d^F J_M \subset J_M$.

Пункти 5.2.5, 5.2.2 постачають диференціальне числення першого порядку $(\Lambda^1(\mathfrak{p}^-)_q, d)$ над алгеброю $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$, разом із відповідним універсальним огортуючим диференціальним численням $(\Lambda(\mathfrak{p}^-)_q, d)$.

Легко одержати його опис у термінах твірних та співвідношень, з огляду на результати пункту 5.2.5 і Приклад (*). Для цього досить додати до переліку співвідношень $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$-бімодуля $\Lambda^1(\mathfrak{p}^-)_q$ співвідношення, що виводяться з (5.2.20) диференціюванням із застосуванням правила Лейбниця:

$$dz_i \wedge dz_j = -\sum_{k,m=1}^{\dim \mathfrak{p}^-} \check{R}_{ij}^{km}\, dz_k \wedge dz_m.$$

Доведемо, що $\Lambda^j(\mathfrak{p}^-)_q$ – вільний лівий $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$-модуль рангу $\binom{\dim \mathfrak{p}^-}{j}$ і вільний правий $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$-модуль рангу $\binom{\dim \mathfrak{p}^-}{j}$, як і у випадку $q = 1$.

Зазначимо, що лінійна оболонка j-форм з постійними коефіцієнтами

$$dz_{i_1} \wedge dz_{i_2} \wedge \ldots \wedge dz_{i_j}, \qquad i_1, i_2, \ldots, i_j \in \{1, 2, \ldots, \dim \mathfrak{p}^-\},$$

є $U_q\mathfrak{k}$-модулем. Він буде позначатися через $\Lambda^j(\mathfrak{p}^-)_q^{\mathrm{const}}$.

Твердження 5.2.26. *Існують ізоморфізми $U_q\mathfrak{k}$-модулів*

$$\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q \otimes \Lambda^j(\mathfrak{p}^-)_q^{\mathrm{const}} \xrightarrow{\approx} \Lambda^j(\mathfrak{p}^-)_q, \qquad f \otimes \omega \mapsto f\omega,$$
$$\Lambda^j(\mathfrak{p}^-)_q^{\mathrm{const}} \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q \xrightarrow{\approx} \Lambda^j(\mathfrak{p}^-)_q, \qquad \omega \otimes f \mapsto \omega f.$$

Доведення. Досить застосувати Твердження 5.2.15 і визначення $\Lambda(\mathfrak{p}^-)_q$. $\square$

Перейдемо до обчислення $\dim \Lambda^j(\mathfrak{p}^-)_q^{\mathrm{const}}$.

Лема 5.2.27. *Вимірність векторного простору $\Lambda^2(\mathfrak{p}^-)_q^{\mathrm{const}}$ не перевищує свого значення у класичному випадку $q = 1$:*

$$\dim \Lambda^2(\mathfrak{p}^-)_q^{\mathrm{const}} \leq \frac{\dim \mathfrak{p}^-(\dim \mathfrak{p}^- - 1)}{2}. \qquad (5.2.22)$$

Доведення. При виведенні (5.2.22) можна замінити основне поле $\mathbb{C}(q^{\frac{1}{s}})$ на основне поле $\mathbb{C}$ за умови, що $q \in (0,1)$ є трансцендентним. Розглянемо лінійне відображення

$$\widetilde{R} : dz_i \otimes dz_j \mapsto \sum_{k,m=1}^{\dim \mathfrak{p}^-} \check{R}_{ij}^{km} dz_k \otimes dz_m$$

в $\Lambda^1(\mathfrak{p}^-)_q^{\mathrm{const}} \otimes \Lambda^1(\mathfrak{p}^-)_q^{\mathrm{const}}$. Існує природний ізоморфізм

$$\Lambda^2(\mathfrak{p}^-)_q^{\mathrm{const}} \cong \left\{ v \in \Lambda^1(\mathfrak{p}^-)_q^{\mathrm{const}} \otimes \Lambda^1(\mathfrak{p}^-)_q^{\mathrm{const}} \,\middle|\, \widetilde{R} v = -v \right\}.$$

Легко показати, що всі власні числа цього лінійного відображення є дійсними та ненульовими. Доведення зводиться до заміни універсальної R-матриці алгебри Хопфа $U_q\mathfrak{g}$ універсальною R-матрицею алгебри Хопфа $U_q\mathfrak{k}_{\mathrm{ss}}$, із подальшим застосуванням (5.2.6). Можна вважати, що база $\{z_i\}$ векторного простору $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,1}$ вибрана як у пункті 5.2.4. За такого вибору функції $\check{R}_{ij}^{km}$ змінної q є аналітичними на $(0,1]$, і тому є неперервними для $0 < q \leq 1$. Отже, для всіх $q \in (0,1]$ кількість від'ємних власних чисел оператора $\widetilde{R}$ з урахуванням кратностей становить $\frac{\dim \mathfrak{p}^-(\dim \mathfrak{p}^- - 1)}{2}$. Тому вимірність власного підпростору, що відповідає власному числу -1, не перевищує $\frac{\dim \mathfrak{p}^-(\dim \mathfrak{p}^- - 1)}{2}$. $\square$

Зворотна до (5.2.22) нерівність буде встановлена, коли буде доведено, що -1 є власним числом оператора $\widetilde{R}$ кратності не меншої, ніж $\frac{\dim \mathfrak{p}^-(\dim \mathfrak{p}^- - 1)}{2}$. Досить одержати таку оцінку для спряженого лінійного відображення. Це останнє може ототожнюватись з обмеженням $\check{R}_{-\alpha_{l_0}, -\alpha_{l_0}}$ на тензорний добуток найвищих однорідних компонент $N(\mathfrak{q}^+, -\alpha_{l_0})_{-1} \otimes N(\mathfrak{q}^+, -\alpha_{l_0})_{-1}$. Бажана нерівність випливає з (5.2.9). Отже, доведена

Лема 5.2.28. *Вимірність векторного простору $\Lambda^2(\mathfrak{p}^-)_q^{\mathrm{const}}$ не менша від її значення для $q = 1$:*

$$\dim \Lambda^2(\mathfrak{p}^-)_q^{\mathrm{const}} \geq \frac{\dim \mathfrak{p}^-(\dim \mathfrak{p}^- - 1)}{2}.$$

Перейдемо до диференціальних форм вищих порядків.

Лема 5.2.29. *Для всіх $j \geq 3$*

$$\dim \Lambda^j(\mathfrak{p}^-)_q^{\mathrm{const}} \leq \binom{\dim \mathfrak{p}^-}{j}. \tag{5.2.23}$$

Доведення. Розглянемо базу вагових векторів $\{z_1, z_2, \ldots, z_{\dim \mathfrak{p}^-}\}$ для $U_q\mathfrak{k}$-модуля $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,1}$, побудовану у заключній частині пункту 5.2.4. Запровадимо лексикографічне впорядкування на множині $\{dz_i \otimes dz_k\}_{i,k=1,2,\ldots,\dim \mathfrak{p}^-}$. Дія універсальної R-матриці алгебри Хопфа $U_q\mathfrak{k}$ відносно цієї бази задається трикутною матрицею з додатними елементами на головній діагоналі (див. (5.2.4)). Отже, лише члени $dz_k \otimes dz_m$ із $k \leq m$ складають внесок до правої частини

$$dz_i \otimes dz_j = -\sum_{k,m=1}^{\dim \mathfrak{p}^-} \check{R}_{ij}^{km} dz_k \otimes dz_m, \qquad i \geq j, \tag{5.2.24}$$

і кожен елемент $\Lambda^j(\mathfrak{p}^-)_q^{\mathrm{const}}$ належить лінійній оболонці форм

$$dz_{i_1} \wedge dz_{i_2} \wedge \cdots \wedge dz_{i_j}, \qquad 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_j \leq \dim \mathfrak{p}^-. \qquad \square$$

Зауваження. Відокремлена база

$$\{dz_1, dz_2, \ldots, dz_{\dim \mathfrak{p}^-}\} \subset \Lambda^1(\mathfrak{p}^-)_q^{\mathrm{const}},$$

побудована у доведенні Леми 5.2.29, може бути використана для ототожнення тензорної алгебри $T((\mathfrak{p}^-)^*)$ із вільною некомутативною алгеброю $\mathbb{C}\langle dz_1, dz_2, \ldots, dz_{\dim \mathfrak{p}^-}\rangle$. Розглянемо двосторонній ідеал I вільної алгебри, генерованої множиною G різниць між лівими та правими частинами (5.2.24). Ці останні співвідношення відіграють роль "правил підстановки" у заключній частині доведення Леми 5.2.29: ліва частина, у разі з'явлення, замінюється на праву частину.

Доведення наступної Леми відтворює таке для подібного результату з роботи Гекенбергера та Колба про комплекс де Рама [74].

Лема 5.2.30. *Для всіх $j \geq 3$*

$$\dim \Lambda^j(\mathfrak{p}^-)_q^{\mathrm{const}} \geq \binom{\dim \mathfrak{p}^-}{j}. \tag{5.2.25}$$

Доведення. Якщо (5.2.25) виконується для $j = 3$, то, внаслідок діамантової леми [10], G є базою Грьобнера для двостороннього ідеалу I. У цьому контексті бажана нерівність має місце також для всіх $j \geq 3$. Це означає, що можна обмежитись окремим випадком $j = 3$ у доведенні Леми 5.2.30.

Ми будемо ототожнювати $(\mathfrak{p}^-)^*$ із $\Lambda^1(\mathfrak{p}^-)_q^{\mathrm{const}}$, і запровадимо позначення $(\mathfrak{p}^-)^{*\wedge 2}$ для підпростору розв'язків (5.2.24) в $(\mathfrak{p}^-)^{*\otimes 2}$. Внаслідок Лем 5.2.27 і 5.2.28

$$\dim(\mathfrak{p}^-)^{*\otimes 2} = \frac{\dim \mathfrak{p}^-(\dim \mathfrak{p}^- - 1)}{2}. \tag{5.2.26}$$

Розглянемо підпростори $L_1 = (\mathfrak{p}^-)^{*\otimes 2} \otimes (\mathfrak{p}^-)^*$, $L_2 = (\mathfrak{p}^-)^* \otimes (\mathfrak{p}^-)^{*\otimes 2}$ векторного простору $(\mathfrak{p}^-)^{*\otimes 3}$, разом із комплексом лінійних відображень

$$0 \to L_1 \cap L_2 \to L_1 \oplus L_2 \xrightarrow{j} (\mathfrak{p}^-)^{*\otimes 3} \to \mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,3} \to 0,$$
$$j : v_1 \oplus v_2 \mapsto v_1 - v_2, \qquad v_j \in L_j \subset (\mathfrak{p}^-)^{*\otimes 3},$$

що є точним в усіх членах, за виключенням, можливо, $(\mathfrak{p}^-)^{*\otimes 3}$. Після підрахунку ейлерової характеристики цього комплексу доходимо висновку, що

$$-\dim(L_1 \cap L_2) + \dim(L_1 \oplus L_2) - \dim\left((\mathfrak{p}^-)^{*\otimes 3}\right) + \dim \mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_{q,3} \leq 0.$$

Використовуючи рівності (5.2.26), (5.2.10), одержуємо

$$\dim(L_1 \cap L_2) \geq n^2(n-1) - n^3 + \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6},$$

де $n = \dim \mathfrak{p}^- = \dim(\mathfrak{p}^-)^*$. З опису універсального диференціального числення як у Прикладі 5.2.21 маємо

$$\dim \Lambda^3(\mathfrak{p}^-)_q^{\mathrm{const}} \geq \dim(L_1 \cap L_2) \geq \binom{\dim \mathfrak{p}^-}{3}. \qquad \square$$

Наступне Твердження випливає з Лем цього пункту.

Твердження 5.2.31. *Однорідні компоненти* $\Lambda^j(\mathfrak{p}^-)_q$ *диференціальної градуйованої алгебри* $\Lambda(\mathfrak{p}^-)_q$ *є нульовими для* $j > \dim\mathfrak{p}^-$. *Кожна з цих компонент є вільним лівим і вільним правим* $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$*-модулем рангу* $\binom{\dim\mathfrak{p}^-}{j}$.

Наступне твердження добре відоме у класичному випадку $q = 1$ і може бути доведене зведенням до цього випадку.

Твердження 5.2.32. *В* $\Lambda(\mathfrak{p}^-)_q$ *має місце* $\operatorname{Ker} d = \operatorname{Im} d$.

Доведення. Розглянемо мономіальні бази (5.2.11) в $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$ і

$$\{dz_{i_1}\wedge dz_{i_2}\wedge\cdots\wedge dz_{i_k}|\, k\in\mathbb{Z}_+,\quad 1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le\dim\mathfrak{p}^-\}$$

в $\Lambda(\mathfrak{p}^-)_q^{\mathrm{const}}$, зазначені вище. Використовуючи ці бази, разом із ізоморфізмом векторних просторів $\Lambda(\mathfrak{p}^-)_q \cong \mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q\otimes\Lambda(\mathfrak{p}^-)_q^{\mathrm{const}}$, одержуємо мономіальну базу в $\Lambda(\mathfrak{p}^-)_q$.

Матричні елементи для d відносно цієї бази є раціональними функціями з $\mathbb{Q}(q)$, що не мають полюсів в $(0,1]$, див. (5.2.4) і Твердження 5.2.2. Співвідношення $d^2 = 0$ для трансцендентних q випливає з того факту, що воно має місце для $q = 1$. Дійсно, устаткуємо алгебру $\Lambda(\mathfrak{p}^-)_q$ градуюванням $\deg(z_j) = \deg(dz_j) = 1$, $j = 1,2,\ldots,\dim\mathfrak{p}^-$. Зазначимо, що d зберігає ступінь однорідності диференціальних форм, і однорідні компоненти $\Lambda(\mathfrak{p}^-)_q$ є скінченновимірними. Залишається використати наступне добре відоме твердження.

Нехай $A(q)$ – матриця з елементами з $\mathbb{Q}(q)$, що задовольняє умові $A(q)^2 = 0$. Відповідна операторнозначна функція на відкритій за Зариським підмножині задовольняє $\dim\operatorname{Ker} A(q) = \dim\operatorname{Im} A(q)$. Дійсно, функція $\dim\operatorname{Ker} A(q) - \dim\operatorname{Im} A(q)$ має значення в $\mathbb{Z}_+$ і є напівнеперервною згори, бо $\dim\operatorname{Ker} A(q)$ і $-\dim\operatorname{Im} A(q)$ є напівнеперервною згори. □

5.2.7 БГГ-резольвента тривіального $U_q\mathfrak{g}$-модуля

У цьому пункті викладено добре відомі результати [46, розділ 4.5], [125]. Нехай $\lambda\in\mathbb{Z}^l$. Модуль Верма $M(\lambda)$ зі старшою вагою λ генерований вектором старшої ваги $v(\lambda)$ і має опис у термінах таких співвідношень:

$$E_i v(\lambda) = 0, \qquad K_i^{\pm 1} v(\lambda) = q_i^{\pm \lambda_i} v(\lambda), \quad i = 1, 2, \ldots, l.$$

Афінна дія групи Вейля W визначається формулою $w \cdot \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho$, де ρ – напівсума додатних коренів.

Ненульовий вектор $v \in M(\lambda)$ називається сингулярним, якщо він є ваговим і $E_i v = 0$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, l$. Існує взаємно-однозначна відповідність між сингулярними векторами ваги μ в $M(\lambda)$ і ненульовими морфізмами модулів Верма $M(\mu) \to M(\lambda)$. Кожний ненульовий морфізм модулів Верма є ін'єктивним і $\dim \mathrm{Hom}_{U_q\mathfrak{g}}(M(\mu), M(\lambda)) \leq 1$, оскільки подібний результат має місце у класичному випадку $q = 1$. Деталі цього аргументу містяться в [46, розділ 4.5].

Наступне твердження добре відоме у класичному випадку $q = 1$ [29] і є простим наслідком визначень.

Лема 5.2.33. (див. [29, твердження 7.1.15]) *Якщо* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l) \in \mathbb{R}^l$ *і* $\lambda_i \in \mathbb{Z}_+$ *для певного* $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$, *то вектор* $v_i = F_i^{\lambda_i + 1} v(\lambda) \in M(\lambda)$ *є сингулярним із вагою* $s_i \cdot \lambda$.

Застосування цієї Леми при відтворенні аргументу з [29] дає

Твердження 5.2.34. ([29, твердження 7.6.8]) *Для будь-якого* $w \in W$

$$\dim \mathrm{Hom}_{U_q\mathfrak{g}}(M(w \cdot 0), M(0)) = 1.$$

У подальшому ми фіксуємо вкладення $i_w : M(w \cdot 0) \hookrightarrow M(0)$, тобто сингулярні вектори, що є образами $v(w \cdot 0)$ при вкладенні i_w. Виберемо ці сингулярні вектори у такий спосіб, що коефіцієнти їх розкладу у базі $F_{\beta_1}^{j_1} F_{\beta_2}^{j_2} \ldots F_{\beta_M}^{j_M} v(0)$, $j_1, j_2, \ldots j_M \in \mathbb{Z}_+$, належать полю $\mathbb{Q}(q)$ і не мають полюсів у $q = 1$. Формули для сингулярних векторів модулів Верма одержані в [125, 47, 84], а також в [30]; формули для проекторів на підпростори сингулярних векторів із фіксованою вагою одержані Толстим [183].

Як показано в [46, розділ 4.5], [125], БГГ-резольвента тривіального

$U_q\mathfrak{g}$-модуля $\mathbb{C}$ має такий же вигляд, як і в класичному випадку $q = 1$:

$$\ldots \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{C} \longrightarrow 0, \qquad C_j = \bigoplus_{\{w \in W \mid l(w)=j\}} M(w \cdot 0). \quad (5.2.27)$$

Тут $\epsilon : M(0) \to \mathbb{C}$, $\epsilon : v(0) \mapsto 1$ – очевидний сюр'єктивний морфізм $U_q\mathfrak{g}$-модулів.

Побудова диференціалів d_j використовує часткове впорядкування на групі Вейля W, *порядок Брюа.* Нагадаємо визначення [83].

Розглянемо орієнтований граф $\mathbb{G}$, чиїми вершинами є елементи W, а ребрами є такі впорядковані пари $w' \to w''$ вершин, що $l(w'') = l(w') + 1$ і $w'' = w's_\gamma$, де s_γ – віддзеркалення, яке відповідає кореню $\gamma \in \Phi$. За визначенням, $w' \leq w''$ тоді й тільки тоді, коли існує шлях з w' до w''. Це часткове впорядкування називається *порядком Брюа.*

Зазначене вище впорядкування залишається незмінним, якщо в його визначенні замінити $w'' = w's_\gamma$ на $w'' = s_\gamma w'$ [83, стор. 119].

Крім того, якщо замінити у визначенні графу $\mathbb{G}$ рівність $l(w'') = l(w') + 1$ на нерівність $l(w'') > l(w')$, одержимо інше, але еквівалентне визначення порядку Брюа [83, стор. 118, 122].

Ми подамо опис порядку Брюа у термінах зведених розкладів для елементів групи Вейля W.

Твердження 5.2.35. *([83, стор. 120]) Нехай*

$$w = s_1 s_2 \cdots s_{l(w)} \quad (5.2.28)$$

– зведений розклад елемента $w \in W$. Множина $\{w' \in W \mid w' \leq w \;\&\; w' \neq w\}$ співпадає з множиною елементів, що виникають шляхом видалення деяких (можливо, всіх) множників у правій частині (5.2.28)*:*

$$w' = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_r}, \qquad 1 \leq i(1) < i(2) < \ldots < i(r) \leq l(w).$$

Наступний добре відомий результат встановлює відповідність між порядком Брюа на W і стандартним впорядкуванням на підмножині $\{w \cdot 0 | w \in W\}$ решітки ваг $P \cong \mathbb{Z}^l$.

Лема 5.2.36 (див. [29], твердження 7.7.2). *Нехай $w \in W$, $\gamma \in \Phi$. Тоді*

i) $(s_\gamma w) \cdot 0 = w \cdot 0 - n\gamma$, де n – ненульове ціле;

ii) якщо $l(s_\gamma w) > l(w)$, то $(s_\gamma w) \cdot 0 < w \cdot 0$;

iii) якщо $l(s_\gamma w) < l(w)$, то $(s_\gamma w) \cdot 0 > w \cdot 0$.

Розглянемо морфізми $U_q\mathfrak{g}$-модулів $i_{w_1,w_2} : M(w_1 \cdot 0) \to M(w_2 \cdot 0)$, $w_1, w_2 \in W$, для яких $i_{w_2} i_{w_1,w_2} = i_{w_1}$.

Існування та єдиність i_{w_1,w_2} за умови $i_{w_1} M(w_1 \cdot 0) \subset i_{w_2} M(w_2 \cdot 0)$ є очевидними. Включення має місце тоді й тільки тоді, коли $w_1 \geq w_2$. Цей факт може бути встановлений у той же спосіб, що й у класичному випадку $q = 1$: досить відтворити доведення з [29], Леми 7.6.10, 7.6.11, в якому посилання на лему 7.6.9 треба замінити посиланням на таке твердження.

Лема 5.2.37.

1. *Для будь-яких $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$, $u \in U_q\mathfrak{n}^-$ існує таке $N \in \mathbb{N}$, що $F_i^N u \in U_q\mathfrak{n}^- \cdot F_i$.*
2. *Для будь-яких $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$, $u \in U_q\mathfrak{n}^-$ існує таке $N \in \mathbb{N}$, що $uF_i^N \in F_i \cdot U_q\mathfrak{n}^-$.*

Доведення. Розпочнемо з першого твердження. Його досить довести в окремому випадку $u = F_j$, де $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$, оскільки F_j генерують $U_q\mathfrak{n}^-$. Більш того, можна вважати $j \neq i$. З визначальних співвідношень між F_i, F_j в $U_q\mathfrak{g}$ випливає, що $F_i^{1-a_{ij}} F_j$ є лінійною комбінацією $F_i^{1-a_{ij}-k} F_j F_i^k$, де $1 \leq k \leq 1 - a_{ij}$. Покладемо $N = 1 - a_{ij}$.

Друге твердження доводиться у подібний спосіб. $\square$

Ця Лема означає, що мультиплікативна підмножина $F_i^{\mathbb{Z}_+}$ в $U_q\mathfrak{n}^-$ задовольняє правій і лівій умовам Оре.

Лема 5.2.38 ([11]). *Розглянемо описаний вище орієнтований граф $\mathbb{G}$.*

1. *Нехай $w, w'' \in W$, $w \leq w''$ і $l(w'') = l(w) + 2$. Тоді кількість таких $w' \in W$, що існують ребра $w \to w'$, $w' \to w''$, дорівнює 0 або 2 (в останньому випадку маємо четвірку елементів групи Вейля W, що називають квадратом).*

2. *Кожному ребру $w' \to w$ можна поставити у відповідність число $\epsilon(w, w') = \pm 1$ у такий спосіб, що добуток чисел, які відповідають ребрам кожного квадрату, дорівнює -1.*

Диференціал $d_j : C_j \to C_{j-1}$ визначається так:

$$d_j|_{M(w\cdot 0)} = \bigoplus_{\{w'\in W \mid w'\to w\}} \epsilon(w, w') i_{w,w'}. \tag{5.2.29}$$

Зрозуміло, що $d_j \circ d_{j-1} = 0$ для всіх $j \in \mathbb{N}$. Крім того, підмодуль $\operatorname{Ker} \epsilon$ модуля Верма $M(0)$ генерований $F_i v(0)$, $i = 1, 2, \ldots, l$. Отже, $\operatorname{Im} d_1 = \operatorname{Ker} \epsilon$, і (5.2.29) є комплексом (поширеним ϵ) в категорії $U_q\mathfrak{g}$-модулів. Його точність для трансцендентних q випливає з результату Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда і точності подібного комплекса у класичному випадку $q = 1$. Дійсно, вагові підпростори модулів Верма скінченновимірні, і у базах, описаних у пункті 5.2.3, матричні елементи лінійних відображень $d_j|_{M(w\cdot 0)}$ належать полю $\mathbb{Q}(q)$ раціональних функцій і не мають полюсів у точці $q = 1$.

Як і в класичному випадку $q = 1$, (5.2.27) є резольвентою тривіального $U_q\mathfrak{g}$-модуля в категорії $\mathcal{O}$, повній підкатегорії скінченно-генерованих вагових $U_q\mathfrak{b}^+$-скінченних модулів.

Зауваження ($\square$). При побудові БГГ-резольвенти була використана функція на множині ребер орієнтованого графа $\mathbb{G}$ зі значеннями ± 1 і така, що добуток її значень на ребрах кожного квадрату дорівнює -1. Легко показати за допомогою аргументу, подібного до такого з [151, стор. 355, 356], що функція з такими властивостями істотно єдина. Точніше, для будь-яких двох таких функцій $\epsilon(w_1, w)$, $\varepsilon(w_1, w)$

$$\epsilon(w_1, w) = \gamma(w_1)^{-1} \varepsilon(w_1, w) \gamma(w) \tag{5.2.30}$$

де $\gamma : W \to \{+1, -1\}$. Дійсно, для кожного $w \in W^{(k)}$, $k \geq 1$, зафіксуємо такий $w' \in W^{(k-1)}$, що $w' \to w$ і $w = w' s_\alpha$ для певного простого кореня α. Визначимо функцію $\gamma(w)$ рекурсією:

$$\gamma(e) = 1, \qquad \gamma(w) = \gamma(w') \frac{\epsilon(w', w)}{\varepsilon(w', w)}.$$

(5.2.30) може бути доведене індукцією за k, що використовує властивості $\epsilon(w_1, w)$, $\varepsilon(w_1, w)$ (Лема 5.2.38 і лема 11.3 з [11]). Внаслідок (5.2.30), БГГ-резольвенти, що відповідають $\epsilon(w, w')$ і $\varepsilon(w, w')$, ізоморфні в категорії комплексів $U_q\mathfrak{g}$-модулів. Можна скористатися сімейством лінійних відображень $\mu_k : C_k \to C_k$, де $\mu_k|_{M(w\cdot 0)} = \gamma(w)\,\mathrm{id}_{M(w\cdot 0)}$, як ізоморфізмом комплексів.

5.2.8 Узагальнена БГГ-резольвента

Доведення деяких результатів цього пункту не використовують припущення $\mathbb{S} = \{1, 2, \ldots, l\} \backslash \{l_0\}$, але ці результати мають місце для будь-якої підмножини $\mathbb{S} \subset \{1, 2, \ldots, l\}$ і відповідних алгебр Хопфа $U_q\mathfrak{k}$, $U_q\mathfrak{q}^+$, решітки $\mathcal{P}_+$ і узагальнених модулів Верма $N(\mathfrak{q}^+, \lambda)$, $\lambda \in \mathcal{P}_+$, див. [151]. Такими є Твердження 5.2.12 і Твердження цього пункту.

Ми побудуємо резольвенту тривіального модуля $\mathbb{C}$ в категорії $\mathcal{O}_{\mathbb{S}}$, повній підкатегорії, утвореній $U_q\mathfrak{k}$-скінченними $U_q\mathfrak{g}$-модулями категорії $\mathcal{O}$. При цьому будуть використані ідеї робіт [119] та [151], де цю задачу було вирішено у класичному випадку $q = 1$.

Нехай $\lambda \in \mathcal{P}_+$ і p_λ – канонічний ендоморфізм $U_q\mathfrak{g}$-модулів

$$p_\lambda : M(\lambda) \to N(\mathfrak{q}^+, \lambda), \qquad p_\lambda : v(\lambda) \mapsto v(\mathfrak{q}^+, \lambda).$$

Нехай $\lambda, \mu \in \mathcal{P}_+$ і $f : M(\lambda) \to M(\mu)$ – ненульовий морфізм $U_q\mathfrak{g}$-модулів. Якщо існує морфізм $U_q\mathfrak{g}$-модулів $\widehat{f} : N(\mathfrak{q}^+, \lambda) \to N(\mathfrak{q}^+, \mu)$ такий, що $\widehat{f} p_\lambda = p_\mu f$, він єдиний і називається стандартним морфізмом, що відповідає f.

Наступний результат є q-аналогом [119, твердження 3.1], і може бути доведений у такий же спосіб, що й згаданий результат Леповського.

Твердження 5.2.39. *Нехай $\lambda \in P$, $\mu \in \mathcal{P}_+$, і $f : M(\lambda) \to M(\mu)$ – морфізм модулів Верма. Якщо $p_\mu f \neq 0$, то $\lambda \in \mathcal{P}_+$ і існує стандартний морфізм узагальнених модулів Верма $\widehat{f} : N(\mathfrak{q}^+, \lambda) \to N(\mathfrak{q}^+, \mu)$.*

Підмножина $W^{\mathbb{S}}$ була використана у пункті 5.2.4, і граф $\mathbb{G}$ з W як множиною вершин був важливим об'єктом попереднього пункту. Ми покажемо, що перехід до узагальнених модулів Верма (як і до узагальненої

БГГ-резольвенти) зводиться до заміни цього графу його підграфом, визначеним множиною вершин $W^{\mathbb{S}}$.

Як відомо з [119, стор. 502], $w \cdot \mu \in \mathcal{P}_+$ для будь-яких $\mu \in P_+$ і $w \in W^{\mathbb{S}}$. Подібно до (5.2.27), розглянемо комплекс $U_q\mathfrak{g}$-модулів

$$0 \longrightarrow C^{\mathbb{S}}_{l(w_0^{\mathbb{S}})} \xrightarrow{d_{l(w_0^{\mathbb{S}})}} \ldots \xrightarrow{d_2} C^{\mathbb{S}}_1 \xrightarrow{d_1} C^{\mathbb{S}}_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{C} \longrightarrow 0, \tag{5.2.31}$$

де $\epsilon : N(\mathfrak{q}^+, 0) \to \mathbb{C}$, $\epsilon : v(\mathfrak{q}^+, 0) \mapsto 1$ – очевидний ендоморфізм,

$$C^{\mathbb{S}}_j = \bigoplus_{\{w \in W^{\mathbb{S}} \,|\, l(w)=j\}} N(\mathfrak{q}^+, w \cdot 0),$$

і $w_0^{\mathbb{S}}$ – найдовший елемент в $W^{\mathbb{S}}$.

Визначимо диференціали d_j як у (5.2.29):

$$d_j|_{N(\mathfrak{q}^+, w \cdot 0)} = \bigoplus_{\{w' \in W^{\mathbb{S}} |\, w' \to w\}} \epsilon(w, w')\widetilde{i}_{w,w'},$$

де

$$\widetilde{i}_{w,w'} : N(\mathfrak{q}^+, w \cdot 0) \to N(\mathfrak{q}^+, w' \cdot 0), \quad \widetilde{i}_{w,w'} : v(\mathfrak{q}^+, w \cdot 0) \mapsto p_{w' \cdot 0} i_{w,w'} v(w \cdot 0).$$

Співвідношення $d_j \circ d_{j+1} = 0$ випливає з подібного співвідношення для (5.2.27), разом із наступним твердженням, чиє доведення подібне до доведення з [119, стор. 503].

Лема 5.2.40. *Нехай $w, w' \in W^{\mathbb{S}}$ і $l(w) = l(w') + 1$. Ненульовий морфізм $U_q\mathfrak{g}$-модулів $N(\mathfrak{q}^+, w \cdot 0) \to N(\mathfrak{q}^+, w' \cdot 0)$ існує тоді й тільки тоді, коли $w' \to w$.*

Точність (5.2.31) може бути доведена у такий же спосіб, що й (5.2.27) у пункті 5.2.7, тобто шляхом посилання на точність узагальненої БГГ-резольвенти у класичному випадку $q = 1$ (див. [119, 151]).

Як було показано у пункті 5.2.5, дуальний до $N(\mathfrak{q}^+, \lambda)$ градуйований векторний простір є *градуйованим* $U_q\mathfrak{g}$-модульним $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$-бімодулем.

Переходячи в (5.2.31) до дуальних *градуйованих* векторних просторів і спряжених лінійних відображень, одержуємо комплекс $U_q\mathfrak{g}$-модульних $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$-бімодулів

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \left(C^{\mathbb{S}}_0\right)^* \xrightarrow{d_1} \left(C^{\mathbb{S}}_1\right)^* \xrightarrow{d_2} \ldots \xrightarrow{d_{l(w_0^{\mathbb{S}})}} \left(C^{\mathbb{S}}_{l(w_0^{\mathbb{S}})}\right)^* \longrightarrow 0. \tag{5.2.32}$$

Твердження 5.2.41. *Комплекс $U_q\mathfrak{g}$-модульних $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$-бімодулів* (5.2.32) *є точним.*

Варто зазначити, що при побудові комплексу $U_q\mathfrak{g}$-модульних $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$-бімодулів (5.2.32) було неявно використано конкретний вибір функції $\epsilon(w, w')$ на множині ребер графу $\mathbb{G}$. З розглядів попереднього пункту випливає, що клас ізоморфізму в категорії комплексів $U_q\mathfrak{g}$-модульних $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$-бімодулів не залежить від цього вибору.

5.2.9 Комплекс де Рама

У цьому пункті ми повертаємось до припущення $\mathbb{S} = \{1, 2, \ldots, l\} \setminus \{l_0\}$, де α_{l_0} – простий корінь, чий коефіцієнт у розкладі (5.2.1) дорівнює 1.

Продовжимо вивчення диференціального числення $(\Lambda(\mathfrak{p}^-)_q, d)$, побудованого у пункті 5.2.6.

Розпочнемо з класичного випадку $q = 1$. Розглянемо комплекс градуйованих $U\mathfrak{g}$-модулів, дуальний до комплексу де Рама

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \Lambda^0(\mathfrak{p}^-) \xrightarrow{d_1} \Lambda^1(\mathfrak{p}^-) \xrightarrow{d_2} \ldots \longrightarrow \Lambda^{\dim \mathfrak{p}^-}(\mathfrak{p}^-) \longrightarrow 0.$$

Відомо, що цей комплекс ізоморфний узагальненій БГГ-резольвенті. Для доведення цього треба використати результати Роха-Каріді [151, стор. 364], Лему 5.2.17 та дуальність відносного комплекса Кошуля і комплекса де Рама диференціальних форм з поліноміальними коефіцієнтами. Ця дуальність добре відома, і була обговорена у випадку диференціальних форм з коефіцієнтами в алгебрі формальних рядів в нулі в [11].

Перейдемо до квантових аналогів. Розглянемо універсальне огортуюче диференціальне числення $(\Lambda(\mathfrak{p}^-)_q, d)$ (див. пункт 5.2.6), лінійні відображення $d_j = d|_{\Lambda^{j-1}(\mathfrak{p}^-)_q}$ і комплекс де Рама

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \Lambda^0(\mathfrak{p}^-)_q \xrightarrow{d_1} \Lambda^1(\mathfrak{p}^-)_q \xrightarrow{d_2} \ldots \xrightarrow{d_{\dim \mathfrak{p}^-}} \Lambda^{\dim \mathfrak{p}^-}(\mathfrak{p}^-)_q \longrightarrow 0. \quad (5.2.33)$$

Розглянемо комплекс у категорії градуйованих $U_q\mathfrak{g}$-модулів, що є дуальним до (5.2.33), і доведемо, що він ізоморфний комплексу (5.2.31).

Лема 5.2.42. *У категорії вагових $U_q\mathfrak{g}$-модулів*

$$\left(\Lambda^k(\mathfrak{p}^-)_q\right)^* \approx \bigoplus_{\{w\in W^{\mathbb{S}} \mid l(w)=k\}} N(\mathfrak{q}^+, w\cdot 0), \qquad k=1,2,\dots \dim\mathfrak{p}^-.$$

Доведення. Використаємо той факт, що це твердження має місце для $q=1$. Оберемо базу вагових мономів в $N(\mathfrak{q}^+, w\cdot 0)$, $\left(\Lambda^k(\mathfrak{p}^-)_q\right)^*$, як це було зроблено у пунктах 5.2.4, 5.2.6. Ваги векторів такої бази залишаються незмінними при квантуванні. Це дозволяє скористатися Твердженням 5.2.2, результатами пункту 5.2.6, і властивістю універсальності для узагальнених модулів Верма для доведення існування таких морфізмів $U_q\mathfrak{g}$-модулів

$$\mathcal{J}_k(q) : \bigoplus_{\{w\in W^{\mathbb{S}} \mid l(w)=k\}} N(\mathfrak{q}^+, w\cdot 0) \to \left(\Lambda^k(\mathfrak{p}^-)_q\right)^*,$$

що, по-перше, їх матричні елементи відносно обраних баз є раціональними функціями з $\mathbb{Q}(q)$ без полюсів при $q=1$, і, по-друге, лінійне відображення $\mathcal{J}_k(q)$ є взаємно-однозначним при $q=1$. Оскільки однорідні компоненти згаданих $U_q\mathfrak{g}$-модулів є скінченновимірними, морфізм $U_q\mathfrak{g}$-модулів $\mathcal{J}_k(q)$ взаємно-однозначний. □

Переходячи в (5.2.33) до дуальних градуйованих векторних просторів і спряжених лінійних відображень, одержуємо комплекс

$$0 \longrightarrow C^{\mathbb{S}}_{l\left(w_0^{\mathbb{S}}\right)} \xrightarrow{\delta_{\dim\mathfrak{p}^-}} \dots \xrightarrow{\delta_2} C^{\mathbb{S}}_1 \xrightarrow{\delta_1} C^{\mathbb{S}}_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{C} \longrightarrow 0, \tag{5.2.34}$$

де ϵ – очевидний ендоморфізм, $\delta_j = d_j^*$ і

$$C^{\mathbb{S}}_j = \bigoplus_{\{w\in W^{\mathbb{S}} \mid l(w)=j\}} N(\mathfrak{q}^+, w\cdot 0).$$

Лема 5.2.43. *Морфізми узагальнених модулів Верма $N(\mathfrak{q}^+, w'\cdot 0) \to N(\mathfrak{q}^+, w''\cdot 0)$ в (5.2.34) є стандартними.*

Доведення. Ми одержимо бажані морфізми $U_q\mathfrak{g}$-модулів $M(w'\cdot 0) \to M(w''\cdot 0)$ з міркувань дуальності. По-перше, визначимо $U_q\mathfrak{g}$-модульну алгебру Λ і вкладення $U_q\mathfrak{g}$-модульних алгебр $\Lambda(\mathfrak{p}^-)_q \hookrightarrow \Lambda$.

Модуль Верма $M(0)$ з нульовою старшою вагою є градуйованою $U_q\mathfrak{g}^{\mathrm{cop}}$-модульною коалгеброю. Дуальна градуйована $U_q\mathfrak{g}$-модульна алгебра

$\mathbb{C}[\mathfrak{n}^-]_q$ є квантовим аналогом алгебри поліномів на векторному просторі $\mathfrak{n}^-$. Покладемо

$$\Lambda \overset{\text{def}}{=} \mathbb{C}[\mathfrak{n}^-]_q \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q} \Lambda(\mathfrak{p}^-)_q.$$

Устаткуємо Λ структурою $U_q\mathfrak{g}$-модульної алгебри і покажемо, що лінійне відображення $\Lambda(\mathfrak{p}^-)_q \to \Lambda$, $\omega \mapsto 1 \otimes \omega$, є вкладенням $U_q\mathfrak{g}$-модульних алгебр.

Використаємо поняття дислективного модуля над комутативною алгеброю в сплетеній тензорній категорії, див. Додаток до цього підрозділу.

Нехай $\mathcal{C}^-$ – повна підкатегорія вагових $U_q\mathfrak{b}^-$-скінченновимірних $U_q\mathfrak{g}$-модулів. Це абелева сплетена тензорна категорія. Алгебра $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$ є комутативною в $\mathcal{C}^-$, і $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$-бімодулі $\Lambda(\mathfrak{p}^-)_q$ і $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^-]_q$ є дислективними модулями над $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$. Внаслідок Твердження A.4.3, категорія дислективних модулів над $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$ є абелевою сплетеною тензорною категорією, в якій тензорним добутком є $\otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q}$. Це дозволяє облаштувати $\Lambda = \mathbb{C}[\mathfrak{n}^-]_q \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q} \Lambda(\mathfrak{p}^-)_q$ структурою $U_q\mathfrak{g}$-модульної алгебри

$$\Lambda \otimes \Lambda \to \Lambda \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q} \Lambda \to \Lambda$$

у стандартний для теорії квантових груп спосіб [124, стор. 438]. За такого підходу $\Lambda(\mathfrak{p}^-)_q \hookrightarrow \Lambda$ і

$$\Lambda = \bigoplus_{j=0}^{\dim \mathfrak{p}^-} \Lambda^j, \qquad \Lambda^j = \mathbb{C}[\mathfrak{n}^-]_q \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q} \Lambda^j(\mathfrak{p}^-)_q.$$

Доведемо, що в категорії $U_q\mathfrak{g}$-модулів

$$\Lambda^j \approx \bigoplus_{\{w \in W^{\mathrm{S}} \mid l(w)=j\}} M(w \cdot 0)^*. \tag{5.2.35}$$

Дійсно, в категорії вагових $U_q\mathfrak{h}$-модулів

$$\mathbb{C}[\mathfrak{n}^-]_q \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q} N(\mathfrak{q}^+, w \cdot 0)^* \cong \mathbb{C}[\mathfrak{n}^-]_q \otimes (N(\mathfrak{q}^+, w \cdot 0)^*)_{\text{lowest}},$$

де $(N(\mathfrak{q}^+, w \cdot 0)^*)_{\text{lowest}}$ – найнижча однорідна компонента градуйованого векторного простору $N(\mathfrak{q}^+, w \cdot 0)^*$. Отже, існує молодша вага серед ваг $U_q\mathfrak{g}$-модуля $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^-]_q \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q} N(\mathfrak{q}^+, w \cdot 0)^*$, і відповідний власний підпростір є одновимірним. Внаслідок властивості універсальності модуля Верма $M(w \cdot$

0) існує ненульовий морфізм $U_q\mathfrak{g}$-модулів

$$M(w\cdot 0)\to\left(\mathbb{C}[\mathfrak{n}^-]_q\otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q}N(\mathfrak{q}^+,w\cdot 0)^*\right)^*.$$

Цей морфізм єдиний з точністю до скалярного множника. Використовуючи міркування дуальності, одержуємо морфізм $U_q\mathfrak{g}$-модулів

$$\mathbb{C}[\mathfrak{n}^-]_q\otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q}\Lambda^j(\mathfrak{p}^-)_q\to\bigoplus_{\{w^{-1}\in W^{\mathbb{S}}|\ l(w)=j\}}M(w\cdot 0)^*. \tag{5.2.36}$$

Він є взаємно-однозначним. Дійсно, це так у випадку $q=1$, і тому досить довести ізоморфізм вагових $U_q\mathfrak{h}$-модулів з (5.2.36). Залишається використати ізоморфізм вагових $U_q\mathfrak{h}$-модулів

$$\mathbb{C}[\mathfrak{n}^-]_q\approx M(\mathfrak{k},0)^*\otimes\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q,\qquad M(w\cdot 0)^*\approx M(\mathfrak{k},0)^*\otimes N(\mathfrak{q}^+,w\cdot 0)^*, \tag{5.2.37}$$

де $M(\mathfrak{k},0)$ – модуль Верма з нульовою старшою вагою над алгеброю $U_q\mathfrak{k}$. Ізоморфізми (5.2.37) виводяться використанням баз Пуанкаре-Біркгофа-Вітта. Отже, маємо ізоморфізм (5.2.35).

Для завершення доведення Леми, поширимо ендоморфізм $d:\Lambda(\mathfrak{p}^-)_q\to\Lambda(\mathfrak{p}^-)_q$ $U_q\mathfrak{g}$-модуля $\Lambda(\mathfrak{p}^-)_q$ до ендоморфізма $d_{\mathrm{ext}}:\Lambda\to\Lambda$ $U_q\mathfrak{g}$-модуля Λ. Скористаємось диференціальним численням першого порядку $(M(-\alpha_{l_0})^*,d_{\mathfrak{p}^-})$ над алгеброю $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^-]_q$, який можна одержати як у пункті 5.2.5 з міркувань дуальності з морфізму $U_q\mathfrak{g}$-модулів

$$M(-\alpha_{l_0})\to M(0),\qquad v(-\alpha_{l_0})\mapsto F_{l_0}v(0).$$

Згаданий вище ізоморфізм $U_q\mathfrak{g}$-модульних $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^-]_q$-бімодулів $\Lambda^1\approx M(-\alpha_{l_0})^*$ визначається з точністю до скалярного множника, який може бути обраний у такий спосіб, що відповідний оператор $d_{\mathfrak{p}^-}:\mathbb{C}[\mathfrak{n}^-]_q\to\Lambda^1$ задовольняє

$$d_{\mathfrak{p}^-}\varphi=d\varphi,\qquad\varphi\in\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q. \tag{5.2.38}$$

Ми одержуємо бажане поширення d_{ext} диференціалу d, покладаючи $d_{\mathrm{ext}}(f\omega)=(d_{\mathfrak{p}^-}f)\omega+fd\omega$ для всіх $f\in\mathbb{C}[\mathfrak{n}^-]_q\subset\Lambda$, $\omega\in\Lambda(\mathfrak{p}^-)_q\subset\Lambda$. Це поширення є коректно визначеним завдяки властивості універсальності тензорного добутку в категорії $\mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$-бімодулів, разом із співвідношенням

$$(d_{\mathfrak{p}^-}(f\varphi))\omega+f\varphi d\omega=(d_{\mathfrak{p}^-}f)\varphi\omega+fd(\varphi\omega),$$

де $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{n}^-]_q$, $\omega \in \Lambda(\mathfrak{p}^-)_q$, $\varphi \in \mathbb{C}[\mathfrak{p}^-]_q$. Це співвідношення є простим наслідком (5.2.38).

З визначення випливає, що d_{ext} є морфізмом $U_q\mathfrak{g}$-модулів, чиє обмеження на $\Lambda(\mathfrak{p}^-)_q \subset \Lambda$ співпадає з диференціалом d. $\square$

Твердження 5.2.44. *В категорії $U_q\mathfrak{g}$-модулів комплекс* (5.2.34) *ізоморфний узагальненій резольвенті Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда.*

Доведення. Внаслідок Лем 5.2.42, 5.2.43 порівнювані комплекси можна вважати такими, що складаються з тих самих $U_q\mathfrak{g}$-модулів, а їх диференціали мають подібний вигляд

$$d_j|_{N(\mathfrak{q}^+, w\cdot 0)} = \bigoplus_{\{w' \in W^{\mathbb{S}} |\ w' \to w\}} \epsilon(w, w')\widetilde{i}_{w,w'}$$

і відрізняються лише значеннями скалярних множників $\epsilon(w, w')$. Але, з огляду на міркування пункту 5.2.7 (див. Зауваження $\square$) стає зрозумілим, що заміна скалярних множників призводить до заміни комплексу $U_q\mathfrak{g}$-модулів ізоморфним комплексом. $\square$

5.3 Теорія функцій на q-аналозі комплексного гіперболічного простору

5.3.1 Попередні відомості

Розглянемо групу $SU_{n,m}$ псевдо-унітарних матриць розміру $(n+m) \times (n+m)$, що зберігають таку форму на $\mathbb{C}^{n+m}$:

$$[x, y] = -x_1\bar{y}_1 - \ldots - x_n\bar{y}_n + x_{n+1}\bar{y}_{n+1} + \ldots + x_{n+m}\bar{y}_{n+m}.$$

З цим пов'язаний многовид $\widehat{\mathcal{H}}_{n,m} = \{x \in \mathbb{C}^{n+m} |\ [x, x] > 0\}$ і його проективізація $\mathcal{H}_{n,m}$. Останній многовид ізоморфний однорідному простору $SU_{n,m}/S(U_{n,m-1} \times U_1)$, тобто комплексному гіперболічному простору. Існує великий обсяг літератури, присвячений вивченню цих псевдо-ермітових просторів рангу 1, зокрема гармонічному аналізу на них (див. роботи Дж. Фаро [43], В. Молчанова [128, 129], Г. ван Дійка і Ю. Шаршова [28]).

Ми вивчаємо основи теорії функцій на квантових аналогах комплексних гіперболічних просторів $\mathcal{H}_{n,m}$ і відповідних ізотропних конусів $\Xi_{n,m} = \{x \in \mathbb{C}^{n+m} | \, [x, x] = 0\}$ (див. [13]).

Нехай $q \in (0,1)$. Алгебра Хопфа $U_q\mathfrak{sl}_N$ задається своїми твірними K_i, K_i^{-1}, E_i, F_i, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, і співвідношеннями:

$$K_iK_j = K_jK_i, \qquad K_iK_i^{-1} = K_i^{-1}K_i = 1,$$

$$K_iE_i = q^2E_iK_i, \qquad K_iF_i = q^{-2}F_iK_i,$$

$$K_iE_j = q^{-1}E_jK_i, \qquad K_iF_j = qF_jK_i, \qquad |i-j| = 1,$$

$$K_iE_j = E_jK_i, \qquad K_iF_j = F_jK_i, \qquad |i-j| > 1,$$

$$E_iF_j - F_jE_i = \delta_{ij}\frac{K_i - K_i^{-1}}{q - q^{-1}},$$

$$E_i^2E_j - (q+q^{-1})E_iE_jE_i + E_jE_i^2 = 0, \qquad |i-j| = 1,$$

$$F_i^2F_j - (q+q^{-1})F_iF_jF_i + F_jF_i^2 = 0, \qquad |i-j| = 1,$$

$$E_iE_j - E_jE_i = F_iF_j - F_jF_i = 0, \qquad |i-j| \neq 1.$$

Комноження Δ, антипод S і коодиниця ε визначаються на твірних так:

$$\Delta(E_i) = E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i, \quad \Delta(F_i) = F_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes F_i, \quad \Delta(K_i) = K_i \otimes K_i,$$

$$S(E_i) = -K_i^{-1}E_i, \qquad S(F_i) = -F_iK_i, \qquad S(K_i) = K_i^{-1},$$

$$\varepsilon(E_i) = \varepsilon(F_i) = 0, \qquad \varepsilon(K_i) = 1,$$

див. [88, глава 4].

Ми також потребуємо алгебру Хопфа $\mathbb{C}[SL_N]_q$ матричних елементів скінченновимірних вагових $U_q\mathfrak{sl}_N$-модулів. Нагадаємо, що $\mathbb{C}[SL_N]_q$ може бути визначена твірними t_{ij}, $i, j = 1, \ldots, N$, (матричними елементами векторного зображення у ваговій базі) і співвідношеннями

$$\begin{aligned}
&t_{ij'}t_{ij''} = qt_{ij''}t_{ij'}, && j' < j'',\\
&t_{i'j}t_{i''j} = qt_{i''j}t_{i'j}, && i' < i'',\\
&t_{ij}t_{i'j'} = t_{i'j'}t_{ij}, && i < i' \;\&\; j > j',\\
&t_{ij}t_{i'j'} = t_{i'j'}t_{ij} + (q-q^{-1})t_{ij'}t_{i'j}, && i < i' \;\&\; j < j',
\end{aligned}$$

разом з ще одним співвідношенням

$$\det_q \mathbf{t} = 1,$$

де $\det_q \mathbf{t}$ – q-детермінант матриці $\mathbf{t} = (t_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$:

$$\det_q \mathbf{t} = \sum_{s \in S_N} (-q)^{l(s)} t_{1s(1)} t_{2s(2)} \dots t_{Ns(N)},$$

із $l(s) = \mathrm{card}\{(i,j) | i < j \ \&\ s(i) > s(j)\}$.

Нехай також $U_q\mathfrak{su}_{n,m}$, $m+n = N$, позначає $*$-алгебру Хопфа $(U_q\mathfrak{sl}_N, *)$, задану так:

$$(K_j^{\pm 1})^* = K_j^{\pm 1}, \qquad E_j^* = \begin{cases} K_j F_j, & j \neq n, \\ -K_j F_j, & j = n, \end{cases} \qquad F_j^* = \begin{cases} E_j K_j^{-1}, & j \neq n, \\ -E_j K_j^{-1}, & j = n, \end{cases}$$

де $j = 1, \dots, N-1$ [150, 169].

5.3.2 $*$-алгебра $\mathrm{Pol}\,(\mathcal{H}_{n,m})_q$

Нехай $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, і $N \overset{\mathrm{def}}{=} n + m$. Нагадаємо, що класичний комплексний гіперболічний простір $\mathcal{H}_{n,m}$ може бути одержаний проективізацією області

$$\widehat{\mathcal{H}}_{n,m} = \left\{ (t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{C}^N \;\middle|\; -\sum_{j=1}^{n} |t_j|^2 + \sum_{j=n+1}^{N} |t_j|^2 > 0 \right\}.$$

Ми перейдемо від класичного випадку $q = 1$ до квантового $0 < q < 1$. Розглянемо добре відомий [150] q-аналог псевдо-ермітового простору. Нехай $\mathrm{Pol}\left(\widehat{\mathcal{H}}_{n,m}\right)_q$ позначає $*$-алгебру з одиницею і твірними $t_1, t_2, \dots, t_N$ та комутаційними співвідношеннями:

$$\begin{aligned}
& t_i t_j = q t_j t_i, \qquad i < j \\
& t_i t_j^* = q t_j^* t_i, \qquad i \neq j \\
& t_i t_i^* = t_i^* t_i + (q^{-2} - 1) \sum_{k=i+1}^{N} t_k t_k^*, \qquad i > n \\
& t_i t_i^* = t_i^* t_i + (q^{-2} - 1) \sum_{k=i+1}^{n} t_k t_k^* - (q^{-2} - 1) \sum_{k=n+1}^{N} t_k t_k^*, \qquad i \leq n.
\end{aligned} \tag{5.3.1}$$

Варто зазначити, що елемент $c = -\sum_{j=1}^{n} t_j t_j^* + \sum_{j=n+1}^{N} t_j t_j^*$ є центральним в $\mathrm{Pol}\left(\widehat{\mathcal{H}}_{n,m}\right)_q$. Крім того, c не є дільником нуля в $\mathrm{Pol}\left(\widehat{\mathcal{H}}_{n,m}\right)_q$. Це дозволяє вкласти $*$-алгебру $\mathrm{Pol}\left(\widehat{\mathcal{H}}_{n,m}\right)_q$ в її локалізацію $\mathrm{Pol}\left(\widehat{\mathcal{H}}_{n,m}\right)_{q,c}$ відносно мультиплікативної системи $c^{\mathbb{N}}$.

$*$-алгебра $\mathrm{Pol}\left(\widehat{\mathcal{H}}_{n,m}\right)_{q,c}$ припускає таке біградуювання:

$$\deg t_j = (1,0), \qquad \deg t_j^* = (0,1), \qquad j = 1,2\ldots,N.$$

Запровадимо позначення

$$\mathrm{Pol}(\mathcal{H}_{n,m})_q = \left\{ f \in \mathrm{Pol}\left(\widehat{\mathcal{H}}_{n,m}\right)_{q,c} \middle| \deg f = (0,0) \right\}.$$

Ця $*$-алгебра $\mathrm{Pol}(\mathcal{H}_{n,m})_q$ буде зватися алгеброю регулярних функцій на квантовому гіперболічному просторі.

Ми устаткуємо $*$-алгебру $\mathrm{Pol}(\mathcal{H}_{n,m})_q$ структурою $U_q\mathfrak{su}_{n,m}$-модульної алгебри [21]. Для цього ми вкладемо її в $U_q\mathfrak{su}_{n,m}$-модульну $*$-алгебру $\mathrm{Pol}\left(\widetilde{X}\right)_q$ "регулярних функцій на квантовому головному однорідному просторі", який побудовано в [169].

Нагадаємо, що $\mathrm{Pol}\left(\widetilde{X}\right)_q \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\mathbb{C}[SL_N]_q, *)$, де $\mathbb{C}[SL_N]_q$ – добре відома алгебра регулярних функцій на квантовій групі SL_N, а інволюція $*$ задана так:

$$t_{ij}^* = \mathrm{sign}[(i-m-1/2)(n-j+1/2)](-q)^{j-i} \det\nolimits_q T_{ij}.$$

Тут $\det_q$ – квантовий детермінант [21], а матриця T_{ij} одрежана з матриці $T = (t_{kl})$ видаленням її i-ї строки і j-го стовпця.

З $\det_q T = 1$ випливає, що

$$-\sum_{j=1}^{n} t_{1j} t_{1j}^* + \sum_{j=n+1}^{N} t_{1j} t_{1j}^* = 1.$$

Отже, відображення $J : t_j \mapsto t_{1j}$, $j = 1,2,\ldots,N$, припускає єдине продовження до гомоморфізму $*$-алгебр $J : \mathrm{Pol}\left(\widehat{\mathcal{H}}_{n,m}\right)_{q,c} \to \mathrm{Pol}\left(\widetilde{X}\right)_q$. Його образ буде позначатися $\mathrm{Pol}\left(\widetilde{\mathcal{H}}_{n,m}\right)_q$. Легко перервірити, що $*$-алгебра $\mathrm{Pol}(\mathcal{H}_{n,m})_q$

вкладається у такий спосіб в $\mathrm{Pol}\left(\widetilde{\mathcal{H}}_{n,m}\right)_q$, і її образ є в точності підалгебра в $\mathrm{Pol}\left(\widetilde{\mathcal{H}}_{n,m}\right)_q$, генерована $t_{1j}t_{1k}^*$, $j,k=1,2,\ldots,N$. У подальшому ми будемо ототожнювати $\mathrm{Pol}(\mathcal{H}_{n,m})_q$ з її образом відносно відображеня J.

Зауваження.

1. $\mathrm{Pol}(\mathcal{H}_{n,m})_q$ може бути охарактеризована двома способами. По-перше,
$$\mathrm{Pol}(\mathcal{H}_{n,m})_q=\left\{f\in\mathrm{Pol}\left(\widetilde{X}\right)_q\,\middle|\,\triangle_L(f)=1\otimes f\right\}.$$
Тут $\triangle_L$ є кодією $\triangle_L:\mathrm{Pol}\left(\widetilde{X}\right)_q\to\mathbb{C}[\mathfrak{s}(\mathfrak{u}_1\times\mathfrak{u}_{N-1})]_q\otimes\mathrm{Pol}\left(\widetilde{X}\right)_q$, $\triangle_L: t_{ij}\mapsto\sum\limits_{k=1}^{N}\pi(t_{ik})\otimes t_{kj}$, і $\pi:\mathrm{Pol}\left(\widetilde{X}\right)_q\to\mathbb{C}[\mathfrak{s}(\mathfrak{u}_1\times\mathfrak{u}_{N-1})]_q$ – відображення факторизації відносно двостороннього ідеалу в $\mathrm{Pol}\left(\widetilde{X}\right)_q$, генерованого t_{1k}, t_{k1}, $k=2,3,\ldots,N$, див. [103, 11.6.2, 11.6.4].

2. Інша характеризація полягає в тому, що $\mathrm{Pol}(\mathcal{H}_{n,m})_q$ – підалгебра $U_q\mathfrak{s}(\mathfrak{u}_1\times\mathfrak{u}_{N-1})$-інваріантів щодо лівої дії в $\mathrm{Pol}\left(\widetilde{X}\right)_q$. Остання дія є дуальною до кодії $\triangle_L$ як у [103, 1.3.5, твердження 15]. Для доведення еквівалентності треба взяти до уваги $U_q\mathfrak{s}(\mathfrak{u}_1\times\mathfrak{u}_{N-1})$-інваріантність $t_{1j}t_{1k}^*$ і порівняти вимірності градуйованих компонент алгебр $\mathrm{Pol}\left(\widehat{\mathcal{H}}_{n,m}\right)_q$ і $\mathbb{C}[GL_N]_q^{U_q\mathfrak{s}(\mathfrak{u}_1\times\mathfrak{u}_{N-1})}$.

Ми будемо використовувати позначення t_j замість t_{1j} для твірних $*$-алгебри $\mathrm{Pol}\left(\widetilde{\mathcal{H}}_{n,m}\right)_q$.

Нехай I_φ, $\varphi\in\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, – $*$-автоморфізм $*$-алгебри $\mathrm{Pol}\left(\widetilde{\mathcal{H}}_{n,m}\right)_q$, визначений на твірних $\{t_j\}_{j=1,\ldots,N}$ так:
$$I_\varphi: t_j\mapsto e^{i\varphi}t_j. \tag{5.3.2}$$

Тоді ще один опис $\mathrm{Pol}(\mathcal{H}_{n,m})_q$ є таким:
$$\mathrm{Pol}(\mathcal{H}_{n,m})_q\overset{\mathrm{def}}{=}\left\{f\in\mathrm{Pol}\left(\widetilde{\mathcal{H}}_{n,m}\right)_q\,\middle|\,I_\varphi(f)=f\quad\text{для всіх}\quad\varphi\right\}.$$

Наведемо явні формули для дії $U_q\mathfrak{su}_{n,m}$ на $\mathrm{Pol}\left(\widetilde{\mathcal{H}}_{n,m}\right)_q$:

$$E_j t_i = \begin{cases} q^{-1/2} t_{i-1}, & j+1 = i, \\ 0, & \text{в інших випадках}, \end{cases}$$

$$F_j t_i = \begin{cases} q^{1/2} t_{i+1}, & j = i, \\ 0, & \text{в інших випадках}, \end{cases} \tag{5.3.3}$$

$$K_j^{\pm 1} t_i = \begin{cases} q^{\pm 1} t_i, & j = i, \\ q^{\mp 1} t_i, & j+1 = i, \\ t_i, & \text{в інших випадках}, \end{cases}$$

$$E_j t_i^* = \begin{cases} -q^{-3/2} t_{i+1}^*, & j = i \; \& \; i \neq n, \\ q^{-3/2} t_{i+1}^*, & j = i \; \& \; i = n, \\ 0, & \text{в інших випадках}, \end{cases}$$

$$F_j t_i^* = \begin{cases} -q^{3/2} t_{i-1}^*, & j+1 = i \; \& \; i \neq n+1, \\ q^{3/2} t_{i-1}^*, & j+1 = i \; \& \; i = n+1, \\ 0, & \text{в інших випадках}, \end{cases} \tag{5.3.4}$$

$$K_j^{\pm 1} t_i^* = \begin{cases} q^{\mp 1} t_i^*, & j = i, \\ q^{\pm 1} t_i^*, & j+1 = i, \\ t_i, & \text{в інших випадках}. \end{cases}$$

5.3.3 $*$-алгебра $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{n,m})_q$ фінітних функцій

Побудуємо точне $*$-зображення T алгебри $\mathrm{Pol}(\mathcal{H}_{n,m})_q$ у передгільбертовому просторі $\mathcal{H}$ (метод побудови T добре відомий; див., наприклад, [169]).

Простір $\mathcal{H}$ є лінійною оболонкою своєї ортонормованої бази $\{e(i_1, i_2, \ldots, i_{N-1}) \,|\, i_1, \ldots, i_n \in -\mathbb{Z}_+; \; i_{n+1}, \ldots, i_{N-1} \in \mathbb{N}\}$.

$*$-зображення T є обмеженням на $\mathrm{Pol}(\mathcal{H}_{n,m})_q$ $*$-зображення алгебри $\mathrm{Pol}\left(\widetilde{\mathcal{H}}_{n,m}\right)$, заданого так:

$$
\begin{aligned}
&T(t_j)e(i_1,\ldots,i_{N-1}) = q^{\sum\limits_{k=1}^{j-1} i_k}\Big(q^{2(i_j-1)}-1\Big)^{1/2} e(i_1,\ldots,i_j-1,\ldots,i_{N-1}),\\
&T(t_j^*)e(i_1,\ldots,i_{N-1}) = q^{\sum\limits_{k=1}^{j-1} i_k}\big(q^{2i_j}-1\big)^{1/2} e(i_1,\ldots,i_j+1,\ldots,i_{N-1}),
\end{aligned}
\tag{5.3.5}
$$

для $j \le n$,

$$
\begin{aligned}
&T(t_j)e(i_1,\ldots,i_{N-1}) = q^{\sum\limits_{k=1}^{j-1} i_k}\Big(1-q^{2(i_j-1)}\Big)^{1/2} e(i_1,\ldots,i_j-1,\ldots,i_{N-1}),\\
&T(t_j^*)e(i_1,\ldots,i_{N-1}) = q^{\sum\limits_{k=1}^{j-1} i_k}\big(1-q^{2i_j}\big)^{1/2} e(i_1,\ldots,i_j+1,\ldots,i_{N-1}),
\end{aligned}
\tag{5.3.6}
$$

для $n < j < N$, і зрештою,

$$
\begin{aligned}
T(t_N)e(i_1,\ldots,i_{N-1}) &= q^{\sum\limits_{k=1}^{N-1} i_k} e(i_1,\ldots,i_{N-1}),\\
T(t_N^*)e(i_1,\ldots,i_{N-1}) &= q^{\sum\limits_{k=1}^{N-1} i_k} e(i_1,\ldots,i_{N-1}).
\end{aligned}
\tag{5.3.7}
$$

Визначимо елементи $\{x_j\}_{j=1,\ldots,N}$:

$$
x_j \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \sum\limits_{k=j}^{N} t_k t_k^*, & j > n,\\ -\sum\limits_{k=j}^{n} t_k t_k^* + \sum\limits_{k=n+1}^{N} t_k t_k^*, & j \le n. \end{cases}
\tag{5.3.8}
$$

Зрозуміло, що $x_1 = 1$, $x_i x_j = x_j x_i$,

$$
t_j x_k = \begin{cases} q^2 x_k t_j, & j < k,\\ x_k t_j, & j \ge k, \end{cases}
\tag{5.3.9}
$$

і тому

$$
t_j^* x_k = \begin{cases} q^{-2} x_k t_j^*, & j < k,\\ x_k t_j^*, & j \ge k. \end{cases}
\tag{5.3.10}
$$

Вектори $e(i_1,\ldots,i_{N-1})$ є спільними власними векторами для операторів $T(x_j)$, $j = 1,2,\ldots,N$:

$$
\begin{aligned}
&T(x_1) = I,\\
&T(x_j)e(i_1,\ldots,i_{N-1}) = q^{2\sum\limits_{k=1}^{j-1} i_k} e(i_1,\ldots,i_{N-1}).
\end{aligned}
\tag{5.3.11}
$$

Сумісний спектр операторів $T(x_j)$, $j = 1, 2, \ldots, N$, що попарно комутують, є таким:

$$\mathfrak{M} = \Big\{(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N \big| \\ x_i/x_j \in q^{2\mathbb{Z}} \;\&\; 1 = x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_{n+1} > x_{n+2} > \ldots > x_N > 0\Big\}.$$

Твердження 5.3.1. *T є точним зображенням* $\mathrm{Pol}(\mathcal{H}_{n,m})_q$.

Доведення. Досить перевірити точність (не обмеженого) зображення T алгебри $\mathrm{Pol}\left(\widetilde{\mathcal{H}}_{n,m}\right)_q$. Досить зрозумілим є те, що довільний елемент $\mathrm{Pol}\left(\widetilde{\mathcal{H}}_{n,m}\right)_q$ може бути записаний у вигляді скінченної суми

$$f = \sum_{(i_1,\ldots,i_N,j_1,\ldots,j_N):\; i_k j_k = 0} t_1^{i_1} \ldots t_n^{i_n} t_{n+1}^{*i_{n+1}} \ldots t_N^{*i_N} f_{IJ}(x_2, \ldots, x_N) t_N^{j_N} \ldots t_{n+1}^{j_{n+1}} t_n^{*j_n} \ldots t_1^{*j_1},$$

де $f_{IJ}(x_2, \ldots, x_N)$ – поліноми, $I = (i_1, \ldots, i_N)$, $J = (j_1, \ldots, j_N)$. Внаслідок визначення T кожен член

$$t_1^{i_1} \ldots t_n^{i_n} t_{n+1}^{*i_{n+1}} \ldots t_N^{*i_N} f_{IJ}(x_2, \ldots, x_N) t_N^{j_N} \ldots t_{n+1}^{j_{n+1}} t_n^{*j_n} \ldots t_1^{*j_1}$$

переводить базовий вектор $e(k_1, \ldots, k_{N-1})$ в множений на скаляр вектор бази $e(k_1 + j_1 - i_1, \ldots, k_n + j_n - i_n, k_{n+1} - j_{n+1} + i_{n+1}, \ldots, k_{N-1} - j_{N-1} + i_{N-1})$. Крім того, множини індексів $(k_1 + j_1 - i_1, \ldots, k_{N-1} - j_{N-1} + i_{N-1})$ векторів-образів бази є різними для різних мономів, якщо індекси першого монома $e(k_1, \ldots, k_{N-1})$ мають досить великі модулі. Отже, для доведення нашого твердження досить довільно вибрати член суми f і знайти перший вектор бази $e(k_1, \ldots, k_{N-1})$ у такий спосіб, що обраний член не анігілює (зображенням T) вектор $e(k_1, \ldots, k_{N-1})$.

Розглянемо вектор бази $e(k_1, \ldots, k_{N-1})$, де $|k_s| > j_s$ для всіх $s = 1, \ldots, N-1$. Тоді

$$T\left(t_N^{j_N} \ldots t_{n+1}^{j_{n+1}} t_n^{*j_n} \ldots t_1^{*j_1}\right) e(k_1, \ldots, k_{N-1}) = \\ \mathrm{const} \cdot e(k_1 + j_1, \ldots, k_n + j_n, k_{n+1} - j_{n+1}, \ldots, k_{N-1} - j_{N-1}),$$

де $\mathrm{const} \neq 0$.

Крім того, $T(f_{IJ}(x_2, \ldots, x_N))$ діє множенням вектора бази на значення полінома $p\left(q^{2k_1}, \ldots, q^{2k_{N-1}}\right)$ (згідно з (5.3.11)), де $p(u_1, u_2, \ldots, u_{N-1}) = f_{IJ}(u_1, u_1u_2, \ldots, u_1u_2\cdots u_{N-1})$, і тому p – ненульовий поліном. Простий аргумент дозволяє знайти $k_1, \ldots, k_{N-1}$ такі, що $|k_s| > j_s$ і $p\left(q^{2k_1}, \ldots, q^{2k_{N-1}}\right) \neq 0$. Це доводить наше твердження. $\square$

Нехай P – ортогональна проекція $\mathcal{H}$ на лінійну оболонку векторів $\{e(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, i_{n+1}, \ldots, i_{N-1}) |\; i_{n+1}, \ldots, i_{N-1} \in \mathbb{N}\}$. Зрозуміло, що $\mathrm{Pol}(\mathcal{H}_{n,m})_q$ не містить елементу f_0 такого, що $T(f_0) = P$. Ми додамо елемент f_0 з цією властивістю.

Розглянемо $*$-алгебру $\mathrm{Fun}\left(\widetilde{\mathcal{H}}_{n,m}\right) \supset \mathrm{Pol}\left(\widetilde{\mathcal{H}}_{n,m}\right)$, одержану з $\mathrm{Pol}\left(\widetilde{\mathcal{H}}_{n,m}\right)$ додаванням елементу f_0 до переліку твірних і поданих нижче співвідношень до переліку співвідношень.

$$
\begin{aligned}
&t_j^* f_0 = f_0 t_j = 0, \qquad j \leq n,\\
&x_{n+1} f_0 = f_0 x_{n+1} = f_0,\\
&f_0^2 = f_0^* = f_0,\\
&t_j f_0 = f_0 t_j; \qquad t_j^* f_0 = f_0 t_j^*, \qquad j \geq n+1.
\end{aligned}
\tag{5.3.12}
$$

Співвідношення $I_\varphi f_0 = f_0$ дозволяє продовжити $*$-автоморфізм I_φ (5.3.2) алгебри $\mathrm{Pol}\left(\widetilde{\mathcal{H}}_{n,m}\right)$ до $*$-автоморфізму алгебри $\mathrm{Fun}\left(\widetilde{\mathcal{H}}_{n,m}\right)$. Нехай

$$
\mathrm{Fun}(\mathcal{H}_{n,m}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left\{ f \in \mathrm{Fun}\left(\widetilde{\mathcal{H}}_{n,m}\right) \middle|\; I_\varphi f = f \right\}.
$$

Очевидно, існує єдине продовження $*$-зображення T до $*$-зображення $*$-алгебри $\mathrm{Fun}(\mathcal{H}_{n,m})$ таке, що $T(f_0) = P$.

Наші подальші розгляди суттєво використовують двосторонній ідеал $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{n,m})_q$ в алгебрі $\mathrm{Fun}(\mathcal{H}_{n,m})$, генерований f_0. Ми називаємо цей ідеал алгеброю фінітних функцій на квантовому гіперболічному просторі.

Теорема 5.3.2. *Зображення T алгебри $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{n,m})_q$ є точним.*

Доведення. Очевидно, кожен $f \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_{n,m})_q$ має єдиний розклад

$$f = \sum_{\substack{(i_1\ldots,i_N,j_1\ldots j_N):\\ i_1+\ldots+i_n+j_{n+1}+\ldots+j_N=\\ =j_1+\ldots+j_n+i_{n+1}+\ldots+i_N}} t_1^{i_1}\ldots t_n^{i_n}t_{n+1}^{*i_{n+1}}\ldots t_N^{*i_N}f_0t_N^{j_N}\ldots t_{n+1}^{j_{n+1}}t_n^{*j_n}\ldots t_1^{*j_1}.$$

Безпосереднє застосування комутаційних співвідношень (5.3.12) дозволяє переписати цей розклад у вигляді

$$f = \sum_{\substack{(i_1\ldots,i_N,j_1\ldots j_N):\ i_kj_k=0\ \&\\ i_1+\ldots+i_n+j_{n+1}+\ldots+j_N=\\ =j_1+\ldots+j_n+i_{n+1}+\ldots+i_N}} t_1^{i_1}\ldots t_n^{i_n}t_{n+1}^{*i_{n+1}}\ldots t_N^{*i_N}f_{IJ}t_N^{j_N}\ldots t_{n+1}^{j_{n+1}}t_n^{*j_n}\ldots t_1^{*j_1}, \quad (5.3.13)$$

де

$$f_{IJ} = \sum_K p_K(x_{n+2},\ldots,x_{N-1})t_1^{k_1}t_2^{k_2}\ldots t_n^{k_n}f_0(t_n^*)^{k_n}\ldots(t_2^*)^{k_2}(t_1^*)^{k_1} \qquad (5.3.14)$$

для певних ненульових поліномів p_K.

Розглянемо вектор бази $e(a_1,\ldots,a_{N-1})$. Кожен член з (5.3.13) переводить $e(a_1,\ldots,a_{N-1})$ в домножений на скаляр вектор $e(a_1+j_1-i_1,\ldots,a_n+j_n-i_n,a_{n+1}-j_{n+1}+i_{n+1},\ldots,a_{N-1}-j_{N-1}+i_{N-1})$ (ненульовий за коректного визначення). Внаслідок наших припущень щодо елементів, які утворюють I та J, підмножина ненульових векторів, зазначена вище, є лінійно незалежною. Отже, досить довільно вибрати член в (5.3.13) і довести, що він не анігілює певний вектор бази.

Виберемо довільно член

$$p_K(x_{n+2},\ldots,x_{N-1})t_1^{k_1}t_2^{k_2}\ldots t_n^{k_n}f_0(t_n^*)^{k_n}\ldots(t_2^*)^{k_2}(t_1^*)^{k_1}$$

з (5.3.14). Наразі

$$T(f_0(t_n^*)^{k_n}\ldots(t_2^*)^{k_2}(t_1^*)^{k_1})T(t_N^{j_N}\ldots t_{n+1}^{j_{n+1}}t_n^{*j_n}\ldots t_1^{*j_1})e(a_1,\ldots,a_{N-1}) =$$
$$= \mathrm{const}\cdot e(0,\ldots,0,a_{n+1}-j_{n+1},\ldots,a_{N-1}-j_{N-1}).$$

Тут $\mathrm{const} = 0$ за винятком випадку, коли $a_s + k_s + j_s = 0$ для $s = 1, \ldots, n$ і $a_s > j_s$ для $s = n+1, \ldots, N-1$. Покладемо $a_s = -k_s - j_s$ для $s = 1, \ldots, n$.

Тепер розглянемо дію $T(p_K(x_{n+2}, \ldots, x_{N-1}))$ на вектори вигляду $e(-k_1, \ldots, -k_n, a_{n+1} - j_{n+1}, \ldots, a_{N-1} - j_{N-1})$ із $a_s > j_s$ для $s = n+1, \ldots, N-1$. Аргумент, подібний до того, що був застосований в останньому абзаці доведення Твердження 5.3.1, дозволяє вибрати $a_{n+1}, \ldots, a_{N-1}$ у такий спосіб, що $T\left(t_1^{i_1} \ldots t_n^{i_n} t_{n+1}^{*i_{n+1}} \ldots t_N^{*i_N} f_{IJ} t_N^{j_N} \ldots t_{n+1}^{j_{n+1}} t_n^{*j_n} \ldots t_1^{*j_1}\right)$ не анігілює $e(a_1, \ldots, a_{N-1})$. Це доводить наше твердження. $\square$

Зауваження.

i) З огляду на (5.3.12), f_0 може тлумачитись як функція від x_{n+1}:

$$f_0 = f_0(x_{n+1}) = \begin{cases} 1, & x_{n+1} = 1, \\ 0, & x_{n+1} \in q^{-2\mathbb{N}}. \end{cases} \qquad (5.3.15)$$

(Нагадаємо, що $\operatorname{spec} x_{n+1} = q^{-2\mathbb{Z}_+}$). Отже, f_0 є q-аналогом характеристичної функції підмноговиду

$$\left\{ (t_1, \ldots, t_N) \in \mathbb{C}^N \middle|\ t_1 = t_2 = \ldots = t_n = 0 \right\} \cap \mathcal{H}_{n,m}.$$

ii) Нехай $f(x_{n+1})$ – поліном. Внаслідок (5.3.8), (5.3.9) маємо

$$\sum_{i=1}^{n} t_i f(x_{n+1}) t_i^* = f(q^2 x_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} t_i t_i^* = f\left(q^2 x_{n+1}\right)(x_{n+1} - 1). \qquad (5.3.16)$$

Це обчислення, разом з (5.3.15), дозволяє розглянути елемент $f_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} t_i f_0 t_i^*$ як функцію від x_{n+1} таку, що

$$f_1(x_{n+1}) = \begin{cases} q^{-2} - 1, & x_{n+1} = q^{-2}, \\ 0, & x_{n+1} = 1 \text{ або } x_{n+1} \in q^{-2\mathbb{N}-2}. \end{cases}$$

Отже, послідовне застосування (5.3.16) призводить до такого висновку: $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{n,m})_q$ містить *всі* фінітні функції від x_{n+1} (тобто такі функції f, що $f(q^{-n}) = 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, окрім скінченної їх кількості).

Облаштуємо $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{n,m})_q$ структурою $U_q\mathfrak{su}_{n,m}$-модульної алгебри. Для цього досить описати дію операторів $\{E_j, F_j, K_j\}_{j=1,\ldots,N-1}$ на f_0. Ось цей опис:

$$E_n f_0 = -\frac{q^{-1/2}}{q^{-2}-1} t_n f_0 t_{n+1}^*, \tag{5.3.17}$$

$$F_n f_0 = -\frac{q^{3/2}}{q^{-2}-1} t_{n+1} f_0 t_n^*, \tag{5.3.18}$$

$$K_n f_0 = f_0, \tag{5.3.19}$$

$$E_j f_0 = F_j f_0 = (K_j - 1) f_0 = 0, \qquad j \neq n. \tag{5.3.20}$$

Зауваження. Аби переконатися, що ця структура $U_q\mathfrak{su}_{n,m}$-модульної алгебри на $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{n,m})_q$ є коректно визначеною, досить використати аргумент, що міститься в [169]. Тут ми обмежимось поясненням мотивів, що призводять до (5.3.17) – (5.3.20). Застосування (5.3.3), (5.3.4) і (5.3.8) дозволяє дійти висновку, що для будь-якого поліному $f(t)$

$$E_n f(x_{n+1}) = q^{-1/2} t_n \frac{f(q^{-2}x_{n+1}) - f(x_{n+1})}{q^{-2}x_{n+1} - x_{n+1}} t_{n+1}^*, \tag{5.3.21}$$

$$F_n f(x_{n+1}) = q^{3/2} t_{n+1} \frac{f(q^{-2}x_{n+1}) - f(x_{n+1})}{q^{-2}x_{n+1} - x_{n+1}} t_n^*, \tag{5.3.22}$$

$$E_j f = F_j f = (K_j - 1) f = 0 \ \text{ для } \ j \neq n, \ j = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{5.3.23}$$

Послідовне застосування (5.3.21) – (5.3.23) до неполіноміальної функції f_0 (5.3.15) дає (5.3.17) – (5.3.20).

5.3.4 Інваріантний інтеграл

Нехай $\nu_q : \mathcal{D}(\mathcal{H}_{n,m})_q \to \mathbb{C}$ – лінійний функціонал:

$$\nu_q(f) = \mathrm{Tr}(T(f) \cdot Q) = \int\limits_{\mathcal{H}_{n,m}} f d\nu_q, \tag{5.3.24}$$

де $Q : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ – лінійний оператор, заданий на елементах бази $e(i_1, \ldots, i_{N-1})$ так:

$$Qe(i_1, \ldots, i_{N-1}) = \mathrm{const} \cdot q^{2\sum\limits_{j=1}^{N-1}(N-j)i_j} e(i_1, \ldots, i_{N-1}), \qquad \mathrm{const} > 0. \tag{5.3.25}$$

Отже, $Q = \mathrm{const} \cdot T(x_2 \cdot \ldots \cdot x_N)$; це є наслідком (5.3.11).

Теорема 5.3.3. *Функціонал ν_q, заданий* (5.3.24), *є коректно визначеним, позитивним і $U_q\mathfrak{su}_{n,m}$-інваріантним.*

Доведення. Внаслідок (5.3.1), (5.3.8), (5.3.9), будь-який елемент f алгебри $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{n,m})_q$ може бути записаний єдиним способом у вигляді

$$f = \sum_{\substack{(i_1\dots,i_N,j_1\dots j_N):\ i_kj_k=0\ \&\\ i_1+\dots+i_n+j_{n+1}+\dots+j_N=\\ =j_1+\dots+j_n+i_{n+1}+\dots+i_N}} t_1^{i_1}\dots t_n^{i_n}t_{n+1}^{*i_{n+1}}\dots t_N^{*i_N}f_{IJ}(x_2,\dots,x_N)t_N^{j_N}\dots t_{n+1}^{j_{n+1}}t_n^{*j_n}\dots t_1^{*j_1} \quad (5.3.26)$$

де $f_{IJ}(x_2,\dots,x_N)$ – поліном від $x_2,\dots,x_n,x_{n+2},\dots,x_N$ і *фінітна* функція від x_{n+1}, тобто $f_{IJ}(x_2,\dots,x_N)$ має вигляд

$$\sum_{\text{finite sum}} \alpha_{\mathbb{K}}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}f_{\mathbb{K}}(x_{n+1})x_{n+2}^{k_{n+2}}\cdots x_N^{k_N}, \qquad \alpha_{\mathbb{K}}\in\mathbb{C}, \quad (5.3.27)$$

і $f_{\mathbb{K}}(q^{-2l})\neq 0$ для скінченної кількості $l\in\mathbb{Z}_+$. Тоді, за нашим визначенням,

$$\nu_q : f\mapsto \text{const}\cdot \sum_{\substack{(i_1\dots,i_n)\in(-\mathbb{Z}_+)^n\\ (i_{n+1},\dots,i_{N-1})\in\mathbb{N}^{m-1}}} f_{00}\left(q^{2i_1},q^{2i_1+2i_2},\dots,q^{2i_1+\dots+2i_{N-1}}\right)\cdot$$
$$\cdot\, q^{2(N-1)i_1+2(N-2)i_2+\dots+2i_{N-1}}, \quad (5.3.28)$$

і ряд у правій частині (5.3.28) збігається для f вигляду (5.3.27).

Позитивність лінійного функціоналу ν_q означає $\nu_q(f^*f)>0$ для $f\neq 0$. Це випливає з явної формули (5.3.28) і *точності* $*$-зображення T алгебри $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{n,m})_q$ (див. пункт 5.3.3).

Залишається встановити $U_q\mathfrak{su}_{n,m}$-інваріантність ν_q. Бажана інваріантність еквівалентна

$$\nu_q(E_jf)=0, \qquad \nu_q(F_jf)=0 \quad (5.3.29)$$

для будь-якого $f\in\mathcal{D}(\mathcal{H}_{n,m})_q$ і $j=1,2,\dots,N-1$. Зазначимо, що ν_q є дійсним функціоналом, тобто $\nu_q(f^*)=\overline{\nu_q(f)}$. Останнє співвідношення випливає з самоспряженості оператора $Q:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ у визначенні ν_q. Це дозволяє звести доведення (5.3.29) до доведення його скороченої версії

$$\nu_q(E_jf)=0, \qquad j=1,2,\dots,N-1. \quad (5.3.30)$$

Ми встановимо (5.3.30) для $j \le n$; для інших j доведення аналогічне. Крім того, для функції f вигляду

$$f = t_1^{i_1} \dots t_n^{i_n} t_{n+1}^{*i_{n+1}} \dots t_N^{*i_N} f_{IJ}(x_2, \dots, x_N) t_N^{j_N} \dots t_{n+1}^{j_{n+1}} t_n^{*j_n} \dots t_1^{*j_1}$$

де $i_k j_k = 0$ для $k = 1, 2, \dots, N$, маємо $\nu_q(E_j f) = 0$, якщо $I \ne (0, \dots, \underset{(j+1)\text{-те місце}}{0, 1, 0}, \dots, 0)$ і $J \ne (0, \dots, \underset{j\text{-те місце}}{0, 1, 0}, \dots, 0)$ (якщо $j < n$) або $I \ne (0, 0, \dots, 0)$ і $J \ne (0, \dots, \underset{j\text{-те}\,(j+1)\text{-те місця}}{0, 1, 1, 0}, \dots, 0)$ (if $j = n$). Отже, маємо перевірити, що $\nu_q\left(E_j\left(t_{j+1} f(x_2, \dots, x_N) t_j^*\right)\right) = 0$.

Безпосереднє обчислення показує, що для $j \le n$

$$\begin{aligned} & E_j(t_{j+1} f(x_2, \dots, x_N) t_j^*) = \\ & \quad = q^{-1/2} \left[q^2 f(x_2, \dots, x_j, q^2 x_{j+1}, \dots, q^2 x_N)(x_{j+1} - x_j) \frac{q^{-2} x_{j+2} - x_{j+1}}{(1 - q^2) x_{j+1}} \right. \\ & \quad \left. - f(x_2, \dots, x_{j+1}, q^2 x_{j+2}, \dots, q^2 x_N)(x_{j+2} - x_{j+1}) \frac{q^{-2} x_{j+1} - x_j}{(1 - q^2) x_{j+1}} \right]. \end{aligned} \tag{5.3.31}$$

1. Нехай $j = n$. Тоді

$$\begin{aligned} & \nu_q\left(E_j\left(t_{j+1} f(x_2, \dots, x_N) t_j^*\right)\right) = \\ & = \text{const'} \cdot \sum_{\substack{(i_1 \dots, i_n) \in (-\mathbb{Z}_+)^n \\ (i_{n+1}, \dots, i_{N-1}) \in \mathbb{N}^{m-1}}} \left[f\left(q^{2i_1}, \dots, q^{2i_1 + \dots + 2i_{n-1}}, q^{2i_1 + \dots + 2i_n + 2}, \dots, q^{2i_1 + \dots + 2i_{N-1} + 2}\right) \cdot \right. \\ & \qquad \cdot \frac{q^2\left(q^{2i_1 + \dots + 2i_n} - q^{2i_1 + \dots + 2i_{n-1}}\right)\left(q^{2i_1 + \dots + 2i_{n+1} - 2} - q^{2i_1 + \dots + 2i_n}\right)}{q^{2i_1 + \dots + 2i_n}} - \\ & \qquad - f\left(q^{2i_1}, \dots, q^{2i_1 + \dots + 2i_n}, q^{2i_1 + \dots + 2i_{n+1} + 2}, \dots, q^{2i_1 + \dots + 2i_{N-1} + 2}\right) \cdot \\ & \left. \cdot \frac{\left(q^{2i_1 + \dots + 2i_{n+1}} - q^{2i_1 + \dots + 2i_n}\right)\left(q^{2i_1 + \dots + 2i_n - 2} - q^{2i_1 + \dots + 2i_{n-1}}\right)}{q^{2i_1 + \dots + 2i_n}} \right] q^{2(N-1)i_1 + \dots + 2i_{N-1}} = \end{aligned}$$

$$= \mathrm{const}' \cdot \sum_{\substack{(i_1 \ldots, i_n) \in (-\mathbb{Z}_+)^n \\ (i_{n+1}, \ldots, i_{N-1}) \in \mathbb{N}^{m-1}}} \left[f\left(q^{2i_1}, \ldots, q^{2i_1+\ldots+2i_{n-1}}, q^{2i_1+\ldots+2i_n+2}, \ldots, q^{2i_1+\ldots+2i_{N-1}+2}\right) \cdot \right.$$

$$\cdot\, q^2 \left(q^{2i_n} - 1\right)\left(q^{2i_{n+1}-2} - 1\right) -$$

$$- f\left(q^{2i_1}, \ldots, q^{2i_1+\ldots+2i_n}, q^{2i_1+\ldots+2i_{n+1}+2}, \ldots, q^{2i_1+\ldots+2i_{N-1}+2}\right) \cdot$$

$$\left. \cdot \left(q^{2i_{n+1}} - 1\right)\left(q^{2i_n-2} - 1\right) \right] q^{2i_1+\ldots+2i_{n-1}} q^{2(N-1)i_1+\ldots+2i_{N-1}}.$$

Розглянемо внутрішню суму (за i_n і i_{n+1}). Для скорочення запису, ми позначимо $f\left(q^{2i_1}, \ldots, q^{2i_1+\ldots+2i_{n-1}}, q^{2i_1+\ldots+2i_n+2}, \ldots, q^{2i_1+\ldots+2i_{N-1}+2}\right)$ через $\psi_{i_n+1, i_{n+1}}$.

$$\sum_{\substack{i \in -\mathbb{Z}_+ \\ j \in \mathbb{N}}} \left[\psi_{i+1,j} \cdot q^2 \left(1 - q^{2i}\right)\left(1 - q^{2j-2}\right) - \psi_{i,j+1} \cdot \left(1 - q^{2i-2}\right)\left(1 - q^{2j}\right)\right] \cdot$$

$$\cdot\, q^{2(N-n)i+2(N-n-1)j} =$$

$$= \sum_{i \in -\mathbb{Z}_+,\, j \in \mathbb{N}} \psi_{i+1,j} \cdot \left(1 - q^{2i}\right)\left(1 - q^{2j-2}\right) q^{2(N-n)i+2(N-n-1)j+2}$$

$$- \sum_{i \in -\mathbb{Z}_+,\, j \in \mathbb{N}} \psi_{i,j+1} \cdot \left(1 - q^{2i-2}\right)\left(1 - q^{2j}\right) q^{2(N-n)i+2(N-n-1)j}$$

$$= q^{-2(N-n-1)} \sum_{i \le 1, j \in \mathbb{N}} \psi_{i,j} \left(1 - q^{2i-2}\right)\left(1 - q^{2j-2}\right) q^{2(N-n)i+2(N-n-1)j} -$$

$$- q^{-2(N-n-1)} \sum_{i \in -\mathbb{Z}_+, j \ge 2} \psi_{i,j} \left(1 - q^{2i-2}\right)\left(1 - q^{2j-2}\right) q^{2(N-n)i+2(N-n)j} = 0.$$

Це завершує доведення у даному випадку.

2. Нехай $j < n$.

$$\sum_{i,j\in-\mathbb{Z}_+}\left[\psi_{i+1,j}\cdot q^2\left(1-q^{2i}\right)\left(1-q^{2j-2}\right)-\psi_{i,j+1}\cdot\left(1-q^{2i-2}\right)\left(1-q^{2j}\right)\right]\cdot$$

$$\cdot\, q^{2(N-n)i+2(N-n-1)j}=$$

$$=q^{-2(N-n-1)}\sum_{i\le 1,j\in-\mathbb{Z}_+}\psi_{i,j}\left(1-q^{2i-2}\right)\left(1-q^{2j-2}\right)q^{2(N-n)i+2(N-n-1)j}-$$

$$-\,q^{-2(N-n-1)}\sum_{i\in-\mathbb{Z}_+,j\le 1}\psi_{i,j}\left(1-q^{2i-2}\right)\left(1-q^{2j-2}\right)q^{2(N-n)i+2(N-n)j}=0.$$

Теорему доведено. □

Зауваження. Варто вибрати const в (5.3.25) у такий спосіб, що $\nu_q(f_0)=1$. Це дозволяє знайти константу явно:

$$\mathrm{const}=q^{-(N-n)(N-n-1)}\prod_{j=n+1}^{N-1}\left(1-q^{2(N-j)}\right).$$

5.3.5 Квантовий однорідний простір $\Xi_{n,m}$

Нехай $\mathrm{Pol}\left(\widetilde{\Xi}_{n,m}\right)_q$ позначає факторалгебру алгебри $\mathrm{Pol}(\widehat{\mathcal{H}}_{n,m})_q$ за ідеалом $\mathrm{Pol}(\widehat{\mathcal{H}}_{n,m})_q\cdot c$ (нагадаємо, що c належить центру $\mathrm{Pol}(\widehat{\mathcal{H}}_{n,m})_q$). Це є q-аналогом алгебри поліномів на ізотропному конусі. Визначимо автоморфізм I_φ, $\varphi\in\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, алгебри $\mathrm{Pol}\left(\widetilde{\Xi}_{n,m}\right)_q$:

$$I_\varphi(t_j)=e^{i\varphi}t_j,\qquad I_\varphi(t_j^*)=e^{-i\varphi}t_j^*.$$

Внаслідок визначення маємо

$$\mathrm{Pol}(\Xi_{n,m})_q=\left\{f\in\mathrm{Pol}\left(\widetilde{\Xi}_{n,m}\right)_q\,\middle|\,I_\varphi(f)=f\ \text{ для будь-якого }\ \varphi\right\}.$$

Ми побудуємо $*$-зображення T_0 $*$-алгебри $\mathrm{Pol}\left(\widetilde{\Xi}_{n,m}\right)_q$ у передгільбертовому просторі $\mathcal{H}_0$ у такий спосіб, що обмеження T_0 на підалгебру $\mathrm{Pol}(\Xi_{n,m})_q$ є точним $*$-зображенням $\mathrm{Pol}(\Xi_{n,m})_q$.

Нехай $\{e(i_1,i_2,\ldots,i_{N-1})|\ i_1\in\mathbb{Z};\ i_2,\ldots,i_n\in-\mathbb{Z}_+;\ i_{n+1},\ldots,i_{N-1}\in\mathbb{N}\}$ – ортонормована база простору $\mathcal{H}_0$. Тоді T_0 визначається так:

$$\begin{aligned}T_0(t_1)e(i_1,\ldots,i_{N-1})&=q^{i_1-1}e(i_1-1,\ldots,i_{N-1}),\\T_0(t_1^*)e(i_1,\ldots,i_{N-1})&=q^{i_1}e(i_1+1,\ldots,i_{N-1}),\end{aligned}\tag{5.3.32}$$

$$T_0(t_j)e(i_1,\ldots,i_{N-1}) = q^{\sum\limits_{k=1}^{j-1} i_k}\left(q^{2(i_j-1)}-1\right)^{1/2} e(i_1,\ldots,i_j-1,\ldots,i_{N-1}),$$

$$T_0(t_j^*)e(i_1,\ldots,i_{N-1}) = q^{\sum\limits_{k=1}^{j-1} i_k}\left(q^{2i_j}-1\right)^{1/2} e(i_1,\ldots,i_j+1,\ldots,i_{N-1}), \qquad (5.3.33)$$

для $\quad 1 < j \le n,$

$$T_0(t_j)e(i_1,\ldots,i_{N-1}) = q^{\sum\limits_{k=1}^{j-1} i_k}\left(1-q^{2(i_j-1)}\right)^{1/2} e(i_1,\ldots,i_j-1,\ldots,i_{N-1}),$$

$$T_0(t_j^*)e(i_1,\ldots,i_{N-1}) = q^{\sum\limits_{k=1}^{j-1} i_k}\left(1-q^{2i_j}\right)^{1/2} e(i_1,\ldots,i_j+1,\ldots,i_{N-1}), \qquad (5.3.34)$$

для $\quad n < j < N,$

$$\begin{aligned} T_0(t_N)e(i_1,\ldots,i_{N-1}) &= q^{\sum\limits_{k=1}^{N-1} i_k} e(i_1,\ldots,i_{N-1}), \\ T_0(t_N^*)e(i_1,\ldots,i_{N-1}) &= q^{\sum\limits_{k=1}^{N-1} i_k} e(i_1,\ldots,i_{N-1}), \end{aligned} \qquad (5.3.35)$$

Запровадимо позначення

$$\xi_j = \begin{cases} \sum\limits_{k=j}^{N} t_k t_k^*, & j > n, \\ -\sum\limits_{k=j}^{n} t_k t_k^* + \sum\limits_{k=n+1}^{N} t_k t_k^*, & j \le n. \end{cases}$$

Очевидно, $\xi_1 = 0$, а елементи $\xi_2,\ldots,\xi_N$ задовольняють (5.3.9) – (5.3.10), де x_k замінено на ξ_k. Сумісним спектром операторів $\{T_0(\xi_j)\}_{j=\overline{1,N}}$, що попарно комутують, є множина

$$\mathfrak{M}_0 = \left\{(\xi_1,\ldots,\xi_N) \in \mathbb{R}^N \right| \\ \left.\xi_j \in q^{2\mathbb{Z}},\ j > 1\ \&\ 0 = \xi_1 \le \xi_2 \le \ldots \le \xi_{n+1} > \xi_{n+2} > \ldots > \xi_N > 0\right\}.$$

Подібно до випадку $\mathrm{Pol}(\mathcal{H}_{n,m})_q$, будь-який елемент з $\mathrm{Pol}(\Xi_{n,m})_q$ може бути записаний у вигляді

$$f = \sum_{\substack{IJ=0 \\ \text{скінченна сума} \\ i_1+\ldots+i_n+j_{n+1}+\ldots+j_N= \\ =i_{n+1}+\ldots+i_N+j_1+\ldots+j_n}} t_1^{i_1}\ldots t_n^{i_n} t_{n+1}^{*i_{n+1}}\ldots t_N^{*i_N} f_{IJ}(\xi_2,\ldots,\xi_N) t_N^{j_N}\ldots t_{n+1}^{j_{n+1}} t_n^{*j_n}\ldots t_1^{*j_1},$$

де f_{IJ} – поліноми від $\xi_2, \ldots, \xi_N$, і цей розклад є єдиним.

$*$-алгебра $\mathrm{Pol}\left(\widetilde{\Xi}_{n,m}\right)_q$ є $U_q\mathfrak{su}_{n,m}$-модульною алгеброю. А саме, дія $U_q\mathfrak{su}_{n,m}$ на твірні t_j, t_j^* алгебри $\mathrm{Pol}\left(\widetilde{\Xi}_{n,m}\right)_q$ визначається (5.3.3) – (5.3.4). Це визначення є коректним завдяки тому факту, що елемент c коваріантної алгебри $\mathrm{Pol}(\widetilde{\mathcal{H}}_{n,m})_q$ є $U_q\mathfrak{su}_{n,m}$-інваріантним. Отже, $*$-алгебра $\mathrm{Pol}(\Xi_{n,m})_q$ є також $U_q\mathfrak{su}_{n,m}$-модульною алгеброю. Такі ж обчислення, як і у випадку $\mathrm{Pol}(\mathcal{H}_{n,m})_q$, показують, що для будь-якого поліному $f(t)$

$$\begin{aligned} E_n f(\xi_{n+1}) &= q^{-1/2} t_n \frac{f(q^{-2}\xi_{n+1}) - f(\xi_{n+1})}{q^{-2}\xi_{n+1} - \xi_{n+1}} t_{n+1}^*, \\ F_n f(\xi_{n+1}) &= q^{3/2} t_{n+1} \frac{f(q^{-2}\xi_{n+1}) - f(\xi_{n+1})}{q^{-2}\xi_{n+1} - \xi_{n+1}} t_n^*, \end{aligned} \tag{5.3.36}$$
$$(K_n - 1) f(\xi_{n+1}) = E_j f(\xi_{n+1}) = F_j f(\xi_{n+1}) = (K_j - 1) f(\xi_{n+1}) = 0, \quad j \neq n.$$

Тепер (5.3.9), (5.3.10) і (5.3.36) дозволяють розглянути коваріантну $*$-алгебру $\mathcal{D}(\Xi_{n,m})$ фінітних функцій на квантовому однорідному просторі $\Xi_{n,m}$. Вона утворена елементами вигляду (5.3.26) із ξ_k замість x_k, де $f_{IJ}(\xi_2, \ldots, \xi_N)$ – поліноми від $\xi_2, \ldots, \xi_n, \xi_{n+2}, \ldots, \xi_N$ і фінітні функції від ξ_{n+1} (тобто f_{IJ} мають вигляд (5.3.27), де $f_{\mathbb{K}}(q^{2l}) \neq 0$ для скінченної кількості $l \in \mathbb{Z}$).

Теорема 5.3.4. *T_0 може бути поширене до точного $*$-зображення $*$-алгебри $\mathcal{D}(\Xi_{n,m})$.*

Зауваження. Алгебра $\mathrm{Pol}(\mathcal{H}_{n,m})_q$ має той же перелік твірних, що й $\mathrm{Pol}(\widetilde{\Xi})_q$, в той час як перелік співвідношень різниться заміною $c - 1 = 0$ на $c = 0$. Крім того, відмінності між формулами (5.3.5) – (5.3.7) і (5.3.32) – (5.3.35) досить невеликі для того, аби дозволити застосування одного й того ж аргументу для доведення Теорем 5.3.4 і 5.3.2.

Тепер побудуємо інваріантний інтеграл на $\mathcal{D}(\Xi_{n,m})$. Позначимо через ν_q^0 лінійний функціонал $\nu_q^0 : \mathcal{D}(\Xi_{n,m}) \to \mathbb{C}$, що заданий так:

$$\nu_q^0(f) = \mathrm{Tr}(T_0(f) \cdot Q_0) \quad \left(= \int\limits_{\Xi_{n,m}} f d\nu_q^0 \right), \tag{5.3.37}$$

де $Q_0 : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0$ – таке лінійне відображення:

$$Q_0 e(i_1, \ldots, i_{N-1}) = \mathrm{const} \cdot q^{2\sum\limits_{j=1}^{N-1}(N-j)i_j} e(i_1, \ldots, i_{N-1}). \tag{5.3.38}$$

Теорема 5.3.5. *Функціонал ν_q^0 є коректно визначеним, позитивним і $U_q\mathfrak{su}_{n,m}$-інваріантним.*

Доведення. З визначення випливає, що

$$\nu_q^0(f) = \mathrm{const} \sum_{\substack{i_1 \in \mathbb{Z} \\ (i_2 \ldots, i_n) \in (-\mathbb{Z}_+)^{n-1} \\ (i_{n+1}, \ldots, i_{N-1}) \in \mathbb{N}^{m-1}}} f_{00}\left(q^{2i_1}, q^{2i_1+2i_2}, \ldots, q^{2i_1+\ldots+2i_{N-1}}\right) q^{2i_1(N-1)+\ldots+2i_{N-1}}. \tag{5.3.39}$$

Тут f_{00} – функція з розкладу (5.3.26) елемента f.

Для доведення коректності визначення (5.3.37) для ν_q^0, наразі досить показати, що рід у правій частині (5.3.39) збігається абсолютно, якщо f_{00} задовольняє умові $f_{00}\left(\xi_2, \ldots, \xi_n, q^{2l}, \xi_{n+2}, \ldots, \xi_N\right) = 0$ для $l \neq l_0$. Нехай f_{00} – така функція. Тоді

$$\sum_{\substack{i_1 \in \mathbb{Z} \\ (i_2 \ldots, i_n) \in (-\mathbb{Z}_+)^{n-1} \\ (i_{n+1}, \ldots, i_{N-1}) \in \mathbb{N}^{m-1}}} f_{00}\left(q^{2i_1}, q^{2i_1+2i_2}, \ldots, q^{2i_1+\ldots+2i_n} q^{2i_1+\ldots+2i_{N-1}}\right) q^{2i_1(N-1)+\ldots+2i_{N-1}} =$$

$$= \sum_{\substack{(i_2 \ldots, i_n) \in (-\mathbb{Z}_+)^{n-1} \\ (i_{n+1}, \ldots, i_{N-1}) \in \mathbb{N}^{m-1}}} f_{00}\left(q^{2l_0-2i_2-\ldots-2i_n}, q^{2l_0-2i_3-\ldots-2i_n}, \ldots, q^{2l_0-2i_n}, q^{2l_0}, q^{2l_0+2i_{n+1}}, \ldots\right) \cdot$$

$$\cdot q^{2l_0(N-1)} \cdot q^{2i_1(N-1)+\ldots+2i_{N-1}} \cdot q^{-2i_2-4i_3-\ldots-2(n-1)i_n} \cdot$$

$$\cdot q^{2i_{n+1}(m-1)+i_{n+2}(m-2)+\ldots+2i_{N-1}}. \tag{5.3.40}$$

Мається на увазі, що тільки члени з $i_1 + \ldots + i_n = l_0$ можуть бути ненульовими; також використано наступну очевидну рівність:

$$q^{2(N-1)i_1+\ldots+2i_{N-1}} = q^{2i_1} \cdot q^{2i_1+2i_2} \cdot \ldots \cdot q^{2i_1+\ldots+2i_{N-1}}.$$

Наразі для встановлення збіжності ряда (5.3.40) досить нагадати, що f_{00} є поліномом від $\xi_2, \ldots, \xi_n, \xi_{n+2}, \ldots, \xi_N$.

Позитивна визначенність ν_q^0 може бути доведена так же, як це було зроблено у пункті 5.3.4 для ν_q.

Перейдемо до доведення інваріантності ν_q^0. Для цього ми потребуємо відтворення доведення подібного факту для ν_q майже дослівно, включно з обчисленнями для випадків 1 і 2. Але тепер маємо розглянути ще один випадок:

3. Нехай $j = 1$, тоді (див. (5.3.31))

$$E_1(t_2 f(\xi_2, \ldots, \xi_N) t_1^*) =$$
$$= q^{-1/2}\left[f(q^2\xi_2, \ldots, q^2\xi_N) \frac{\xi_2(\xi_3 - q^2\xi_2)}{(1-q^2)\xi_2} - f(\xi_2, q^2\xi_3, \ldots, q^2\xi_N) \frac{q^{-2}\xi_2(\xi_3 - \xi_2)}{(1-q^2)\xi_2} \right]$$
$$= \frac{q^{-1/2}}{1-q^2}\left[f(q^2\xi_2, \ldots, q^2\xi_N)(\xi_3 - q^2\xi_2) - q^{-2} f(\xi_2, q^2\xi_3, \ldots, q^2\xi_N)(\xi_3 - \xi_2) \right].$$

Тепер покажемо, що $\nu_q^0(E_1(t_2 f(\xi_2, \ldots, \xi_N) t_1^*)) = 0$. Дійсно,

$$\nu_q^0(E_1(t_2 f(\xi_2, \ldots, \xi_N) t_1^*)) =$$
$$= \mathrm{const}' \sum_{\substack{i_1 \in \mathbb{Z} \\ (i_2 \ldots, i_n) \in (-\mathbb{Z}_+)^{n-1} \\ (i_{n+1}, \ldots, i_{N-1}) \in \mathbb{N}^{m-1}}} \left[f\left(q^{2i_1+2}, q^{2i_1+2i_2+2}, \ldots, q^{2i_1+\ldots+2i_{N-1}+2}\right)\left(q^{2i_2-2} - 1\right) q^{2i_1+2} - \right.$$
$$\left. - f\left(q^{2i_1}, q^{2i_1+2i_1+2}, \ldots, q^{2i_1+\ldots+2i_{N-1}+2}\right) q^{-2}\left(q^{2i_2} - 1\right) q^{2i_1}\right] \cdot$$
$$\cdot\, q^{2i_1(N-1)+\ldots+2i_{N-1}}. \quad (5.3.41)$$

Позначимо $f(q^{2i_1+2}, q^{2i_1+2i_2+2}, \ldots, q^{2i_1+\ldots+2i_{N-1}+2})$ через ψ_{i_1+1,i_2}. Обчислимо внутрішню суму за i_1 і i_2 у правій частині (5.3.41).

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}, j \in -\mathbb{Z}_+} \left[q^2 \psi_{i+1,j}(q^{2j-2} - 1) - q^{-2}\psi_{i,j+1}(q^{2j} - 1) \right] \cdot q^{2iN} q^{2j(N-2)} =$$
$$= \sum_{i \in \mathbb{Z}, j \in -\mathbb{Z}_+} \psi_{i,j}(q^{2j-2} - 1) \cdot q^{2iN+2jN-4j-2N+2} -$$
$$- \sum_{i \in \mathbb{Z}, j \leq 1} \psi_{i,j}(q^{2j-2} - 1) \cdot q^{2iN+2j(N-2)-2N+2} = 0. \ \square$$

Зауваження. Тут const вибрана в (5.3.38) у такий спосіб, що має місце $\nu_q^0(f_0) = 1$. Це дозволяє знайти цю константу явно:

$$\mathrm{const} = q^{-(N-n)(N-n-1)} \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 - q^{2j}\right) \prod_{j=1}^{N-n-1} \left(1 - q^{2j}\right).$$

5.3.6 Основні неунітарна та унітарна серії зображень $U_q\mathfrak{su}_{n,m}$, пов'язані з простором $\Xi_{n,m}$

Елемент ξ_{n+1} квазі-комутує з усіма твірними алгебри $\mathrm{Pol}(\Xi_{n,m})_q$. Отже, $(\xi_{n+1})^{\mathbb{Z}_+}$ – множина Оре, і можна розглянути локалізацію $\mathrm{Pol}(\Xi_{n,m})_{q,\xi_{n+1}}$ алгебри $\mathrm{Pol}(\Xi_{n,m})_q$ відносно мультиплікативної системи $(\xi_{n+1})^{\mathbb{Z}_+}$. Зрозуміло, що структура $U_q\mathfrak{su}_{n,m}$-модульної алгебри продовжується на локалізацію у єдиний спосіб.

Позначимо через γ автоморфізм алгебри $\mathrm{Pol}\left(\widetilde{\Xi}_{n,m}\right)_q$, заданий на твірних через $t_j \mapsto qt_j$, $t_j^* \mapsto qt_j^*$. Зазначимо, що γ є коректно визначеним завдяки однорідності визначальних співвідношень для $\mathrm{Pol}\left(\widetilde{\Xi}_{n,m}\right)_q$. Зрозуміло, що $\gamma(\xi_{n+1}) = q^2\xi_{n+1}$, і це дозволяє продовжити γ до автоморфізма алгебри $\mathrm{Pol}(\Xi_{n,m})_{q,\xi_{n+1}}$, який комутує з дією алгебри $U_q\mathfrak{su}_{n,m}$. Останнє можна вивести з (5.3.3), (5.3.4) і (5.3.36).

Визначимо $*$-алгебру $\mathcal{E}(\Xi_{n,m})_q$ елементів вигляду

$$f = \sum_{\substack{IJ=0 \\ \text{скінченна сума} \\ i_1+\ldots+i_n+j_{n+1}+\ldots+j_N= \\ =i_{n+1}+\ldots+i_N+j_1+\ldots+j_n}} t_1^{i_1}\ldots t_n^{i_n} t_{n+1}^{*i_{n+1}}\ldots t_N^{*i_N} f_{IJ}(\xi_2,\ldots,\xi_N) t_N^{j_N}\ldots t_{n+1}^{j_{n+1}} t_n^{*j_n}\ldots t_1^{*j_1},$$

де

$$f_{IJ}(\xi_2,\ldots,\xi_N) = \sum_{\substack{\text{скінченна сума} \\ k_2,\ldots,k_n,k_{n+2},\ldots,k_N\in\mathbb{Z}_+ \\ k_{n+1}\in\mathbb{C}}} \alpha_{\mathbb{K}}\xi_2^{k_2}\xi_3^{k_3}\ldots\xi_N^{k_N}.$$

Тут $\alpha_{\mathbb{K}} \in \mathbb{C}$ і структура алгебри задана в (5.3.9), (5.3.10).

Для заданого $s \in \mathbb{C}$, нехай $\mathcal{E}_s(\Xi_{n,m})_q$ – підпростір в $\mathcal{E}(\Xi_{n,m})_q$, утворений елементами, які мають "ступінь однорідності", що дорівнює $s-N+1$, тобто $\gamma(f) = q^{s-N+1} \cdot f$. Отже, $\mathcal{E}_s(\Xi_{n,m})_q$ – $U_q\mathfrak{su}_{n,m}$-підмодуль в $\mathcal{E}(\Xi_{n,m})_q$. Ми називаємо ці підмодулі модулями основної неунітарної серії, пов'язаної з $\Xi_{n,m}$.

Побудуємо інваріантний інтеграл на $\mathcal{E}_{-N+1}(\Xi_{n,m})_q$.

Зазначимо, що $\mathcal{D}(\Xi_{n,m})_q$ може бути наділений структурою коваріантного $\mathcal{E}(\Xi_{n,m})_q$-бімодуля, використовуючи співвідношення (5.3.9), (5.3.10).

Нехай $\chi_l \in \mathcal{D}(\Xi_{n,m})_q$ – функція від ξ_{n+1} така, що $\chi_l(q^{2k}) = \delta_{kl}$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

Лема 5.3.6. *Для будь-якого $f \in \mathcal{E}_{-N+1}(\Xi_{n,m})_q$ інтеграл*

$$b_q^{(l)}(f) \overset{\mathrm{def}}{=} \int\limits_{\Xi_{n,m}} f \cdot \chi_l d\nu_q^0 \tag{5.3.42}$$

не залежить від l.

Доведення.

$$b_q^{(l)}(f) = \mathrm{const} \sum_{\substack{i_1 \in \mathbb{Z} \\ (i_2 \ldots, i_n) \in (-\mathbb{Z}_+)^{n-1} \\ (i_{n+1}, \ldots, i_{N-1}) \in \mathbb{N}^{m-1}}} f_{00}(q^{2i_1}, q^{2i_1+2i_2}, \ldots, q^{2i_1+\ldots+2i_{N-1}}) \cdot$$
$$\cdot \chi_l(q^{2i_1+\ldots+2i_{N-1}}) q^{2i_1(N-1)+\ldots+2i_{N-1}} =$$
$$= \mathrm{const} \sum_{\substack{(i_2 \ldots, i_n) \in (-\mathbb{Z}_+)^{n-1} \\ (i_{n+1}, \ldots, i_{N-1}) \in \mathbb{N}^{m-1}}} f_{00}(q^{2l-2i_2-\ldots-2i_n}, q^{2l-2i_3-\ldots-2i_n}, \ldots, q^{2l-2i_n}, q^{2l}, q^{2l+2i_{n+1}}, \ldots) \cdot$$
$$\cdot q^{2l(N-1)} \cdot q^{-2i_2-4i_3-\ldots-2(n-1)i_n+2i_{n+1}(m-1)+2i_{n+2}(m-2)+\ldots+2i_{N-1}}. \tag{5.3.43}$$

Зрозуміло, що з $f \in \mathcal{E}_{-N+1}(\Xi_{n,m})_q$ випливає

$$\gamma(f_{00}(\xi_2, \ldots, \xi_N)) = q^{-2N+2} f_{00}(\xi_2, \ldots, \xi_N),$$

або, що є еквівалентним,

$$f_{00}(q^2\xi_2, \ldots, q^2\xi_N) = q^{-2N+2} f_{00}(\xi_2, \ldots, \xi_N),$$

і отже права частина (5.3.43) може бути переписана так:

$$\mathrm{const} \sum_{\substack{(i_2 \ldots, i_n) \in (-\mathbb{Z}_+)^{n-1} \\ (i_{n+1}, \ldots, i_{N-1}) \in \mathbb{N}^{m-1}}} q^{2l(N-1)} f_{00}(q^{-2i_2 - \ldots - 2i_n}, q^{-2i_3 - \ldots - 2i_n}, \ldots, q^{-2i_n}, 1, q^{2i_{n+1}}, \ldots) \cdot$$

$$\cdot\, q^{2l(N-1)} \cdot q^{-2i_2 - 4i_3 - \ldots - 2(n-1)i_n + 2i_{n+1}(m-1) + 2i_{n+2}(m-2) + \ldots + 2i_{N-1}} =$$

$$= \mathrm{const} \sum_{\substack{(i_2 \ldots, i_n) \in (-\mathbb{Z}_+)^{n-1} \\ (i_{n+1}, \ldots, i_{N-1}) \in \mathbb{N}^{m-1}}} f_{00}(q^{-2i_2 - \ldots - 2i_n}, q^{-2i_3 - \ldots - 2i_n}, \ldots, q^{-2i_n}, 1, q^{2i_{n+1}}, \ldots) \cdot$$

$$\cdot\, q^{-2i_2 - 4i_3 - \ldots - 2(n-1)i_n + 2i_{n+1}(m-1) + 2i_{n+2}(m-2) + \ldots + 2i_{N-1}}. \ \square$$

Запровадимо позначення $b_q(f)$ або $\int f db_q$ для лінійного функціоналу (5.3.42) на $\mathcal{E}_{-N+1}(\Xi_{n,m})_q$. Внаслідок доведення Леми 5.3.6 маємо

$$b_q(f) = (q^{-2} - 1)^N \cdot$$

$$\cdot \sum_{\substack{(j_1 \ldots, j_{n-1}) \in (-\mathbb{Z}_+)^{n-1} \\ (i_1, \ldots, i_{m-1}) \in \mathbb{N}^{m-1}}} f_{00}\left(q^{2j_1 + \ldots + 2j_{n-1}}, q^{2i_2 + \ldots + 2j_{n-1}}, \ldots, q^{-2j_{n-1}},\right.$$

$$\left. 1, q^{2i_1}, q^{2i_1 + 2i_2}, \ldots, q^{2i_1 + \ldots, 2i_{m-1}}\right) \cdot$$

$$\cdot\, q^{2j_1 + 4j_2 + \ldots + 2(n-1)j_{n-1}} \cdot q^{2(m-1)i_1 + 2(m-2)i_2 + \ldots + 2i_{m-1}}.$$

Теорема 5.3.7. *b_q є інваріантним інтегралом на $\mathcal{E}_{-N+1}(\Xi_{n,m})_q$.*

Доведення. Внаслідок (5.3.36), функції від ξ_{n+1} є $U_q\mathfrak{s}(\mathfrak{u}_n \times \mathfrak{u}_m)$-інваріантними. Отже b_q – $U_q\mathfrak{s}(\mathfrak{u}_n \times \mathfrak{u}_m)$-інваріантний функціонал (див. Теорему 5.3.5). Залишається довести, що $b_q\,(F_n f) = b_q\,(E_n f) = 0$ для $f \in \mathcal{E}_{-N+1}(\Xi_{n,m})_q$. Доведемо лише одну з цих двох рівностей, наприклад, $b_q(E_n f) = \int\limits_{\Xi_{n,m}} E_n f \cdot \chi_l d\nu_q^0 = 0$.

Внаслідок інваріантності ν_q^0 і того факту, що $\mathcal{D}(\Xi_{n,m})_q$ – коваріантний $\mathcal{E}(\Xi_{n,m})_q$-бімодуль, маємо

$$b_q(E_n f) = -q^{-1} \int f \cdot E_n \chi_l d\nu_q^0, \qquad f \in \mathcal{E}_{-N+1}(\Xi_{n,m})_q,$$

(тут застосовано інтегрування за частинами, див. [21, Глава 4]). Внаслідок (5.3.36) маємо

$$-q^{-1}\int f\cdot E_n\chi_l d\nu_q^0 = -q^{-1}\int f\cdot q^{-1/2}t_n\frac{\chi_l(q^{-2}\xi_{n+1})-\chi_l(\xi_{n+1})}{(q^{-2}-1)\xi_{n+1}}t_{n+1}^* d\nu_q^0 =$$
$$= -\frac{q^{-3/2}}{(q^{-2}-1)}\int f\cdot t_n\frac{\chi_{l+1}(\xi_{n+1})-\chi_l(\xi_{n+1})}{\xi_{n+1}}t_{n+1}^* d\nu_q^0 =$$
$$= -\frac{q^{-3/2}}{(q^{-2}-1)}\operatorname{Tr}\left[T_0\left(f\cdot t_n\frac{\chi_{l+1}-\chi_l}{\xi_{n+1}}t_{n+1}^*\right)Q_0\right] =$$
$$= -\frac{q^{-3/2}}{(q^{-2}-1)}(q^{-2}-1)^N\operatorname{Tr}\left[T_0\left(f\cdot t_n\frac{\chi_{l+1}-\chi_l}{\xi_{n+1}}t_{n+1}^*\xi_2\xi_3\ldots\xi_N\right)\right] =$$
$$= \mathrm{const}(q,n,N)\operatorname{Tr}\left[T_0\left(f\cdot t_n\frac{\chi_{l+1}-\chi_l}{\xi_{n+1}}\xi_2\xi_3\ldots\xi_N t_{n+1}^*\right)\right] =$$
$$= \mathrm{const}(q,n,N)\operatorname{Tr}\left[T_0\left(t_{n+1}^* f\cdot t_n\frac{1}{\xi_{n+1}}(\chi_{l+1}-\chi_l)\xi_2\xi_3\ldots\xi_N\right)\right] =$$
$$= \mathrm{const}'(q,n,N)\operatorname{Tr}\left[T_0\left(t_{n+1}^* f\cdot t_n\frac{1}{\xi_{n+1}}(\chi_{l+1}-\chi_l)Q_0\right)\right] =$$
$$= \mathrm{const}'(q,n,N)\int t_{n+1}^* f\cdot t_n\frac{1}{\xi_{n+1}}(\chi_{l+1}-\chi_l)d\nu_1^0. \quad (5.3.44)$$

Якщо $f\in\mathcal{E}_{-N+1}(\Xi_{n,m})_q$, маємо $t_{n+1}^* f\cdot t_n\frac{1}{\xi_{n+1}}\in\mathcal{E}_{-N+1}(\Xi_{n,m})_q$. Отже, остання формула в (5.3.44) може бути переписана так:

$$\mathrm{const}'(q,n,N)\left(\int t_{n+1}^* f\cdot t_n\frac{1}{\xi_{n+1}}\chi_{l+1}d\nu_1^0-\int t_{n+1}^* f\cdot t_n\frac{1}{\xi_{n+1}}\chi_l d\nu_1^0\right) =$$
$$= \mathrm{const}'(q,n,N)\left(b_q^{(l+1)}\left(t_{n+1}^* f\cdot t_n\frac{1}{\xi_{n+1}}\right)-b_q^l\left(t_{n+1}^* f\cdot t_n\frac{1}{\xi_{n+1}}\right)\right).$$

Внаслідок Леми 5.3.6, остання різниця дорівнює нулю. □

Якщо $f_1\in\mathcal{E}_s(\Xi_{n,m})_q$ і $f_2\in\mathcal{E}_{-s}(\Xi_{n,m})_q$, тоді $f_1\cdot f_2\in\mathcal{E}_{-N+1}(\Xi_{n,m})_q$. Наразі застосування стандартного аргументу (див., наприклад, [21, Глава 4]), що встановлює відповідність між інваріантними інтегралами і інваріантними спарюваннями, дає

Наслідок 5.3.8. *Спарювання $\mathcal{E}_s(\Xi_{n,m})_q\times\mathcal{E}_{-s}(\Xi_{n,m})_q\to\mathbb{C}$,*

$$(f_1,f_2)\mapsto\langle f_1,f_2\rangle\stackrel{\mathrm{def}}{=}\int f_1f_2\,db_q,$$

є $U_q\mathfrak{su}_{n,m}$-інваріантним.

Зрозуміло, що інволюція $*$-алгебри $\mathcal{E}(\Xi_{n,m})_q$ відображає $\mathcal{E}_{i\lambda}(\Xi_{n,m})_q$ на $\mathcal{E}_{-i\lambda}(\Xi_{n,m})_q$ для $\lambda \in \mathbb{R}$.

Твердження 5.3.9. *Півторалінійна форма*

$$(f_1, f_2) = \int f_2^* f_1 db_q, \qquad f_1, f_2 \in \mathcal{E}_{i\lambda}(\Xi_{n,m})_q, \tag{5.3.45}$$

є інваріантною і позитивно визначеною.

Доведення. Інваріантність безпосередньо випливає з Наслідку 5.3.8 (стандартні аргументи з [21, Глава 4] мають бути знову тут застосовані).

Аби переконатися, що форма (5.3.45) позитивно визначена, треба згадати, що інтеграл ν_q^0 є позитивно визначеним (Теорема 5.3.5), і використати такі обчислення:

$$(f, f) = \int f^* f db_q = \int\limits_{\Xi_{n,m}} f^* f \chi_l d\nu_q^0 = \mathrm{Tr}\left(T_0\left(f^* f \chi_l\right) Q_0\right) =$$
$$= \mathrm{Tr}\left(T_0\left(f^* f \chi_l \chi_l\right) Q_0\right) = \mathrm{Tr}\left(T_0\left(f^* f \chi_l \cdot \mathrm{const} \cdot \xi_2 \ldots \xi_N \chi_l\right)\right) =$$
$$= \mathrm{Tr}\left(T_0\left(\chi_l f^* f \chi_l\right) Q_0\right) = \mathrm{Tr}\left(T_0\left(\chi_l^* f^* f \chi_l\right) Q_0\right) = \int\limits_{\Xi_{n,m}} (f\chi_l)^* f \chi_l d\nu_q^0.$$

Тут $f \in \mathcal{E}_{i\lambda}(\Xi_{n,m})_q$, $\lambda \in \mathbb{Z}$, і використано очевидні співвідношення $\chi_l^2 = \chi_l$, $\chi_l^* = \chi_l$, $\chi_l \xi_k = \xi_k \chi_l$. $\square$

Отже, $\mathcal{E}_{i\lambda}(\Xi_{n,m})_q$, $\lambda \in \mathbb{R}$ – унітарні $U_q\mathfrak{su}_{n,m}$-модулі. Вони будуть називатися модулями основної унітарної серії, пов'язаної з $\Xi_{n,m}$.

Подивимось на структуру $\mathcal{E}_\lambda(\Xi_{n,m})_q$ як $U_q(\mathfrak{sl}_n \times \mathfrak{sl}_m)$-модуля. Нехай $L^{(n)}(\lambda)$ – скінченновимірний простий $U_q\mathfrak{sl}_n$-модуль із старшою вагою λ. Також нехай ϖ_j, $j = 1, \ldots, n-1$, – фундаментальні ваги алгебри Лі $\mathfrak{sl}_n$.

Нагадаємо, що якщо A – алгебра Хопфа і V_1 – A-модуль, і B – алгебра Хопфа і V_2 – B-модуль, то $V_1 \boxtimes V_2$ позначає їхній тензорний добуток, облаштований структурою $A \otimes B$-модуля природним способом.

Теорема 5.3.10. *$U_q(\mathfrak{sl}_n \times \mathfrak{sl}_m)$-модуль $\mathcal{E}_{2s}(\Xi_{n,m})_q$ розкладається в пряму суму без кратностей простих підмодулів*

$$L^{(n)}(k\omega_1 + l\omega_{n-1}) \boxtimes L^{(m)}(l'\omega_1 + k'\omega_{m-1}),$$

де $k, l, k', l' \geq 0$*,* $k + l' = k' + l$*. Кожен такий підмодуль генерований старшим ваговим вектором вигляду*

$$t_1^k t_N^{*k'} \xi_{n+1}^{(s-k'-l)} t_{n+1}^{l'} t_n^{*l}.$$

Доведення. Для скорочення запису ми доведемо твердження в окремому випадку $s = (N-1)/2$, інші випадки розглядаються у подібний спосіб. Кожен елемент $f \in \mathcal{E}_{N-1}(\Xi_{n,m})_q$ має такий розклад:

$$f = \sum_{\substack{\text{скінченна сума} \\ i_1+...+i_n+j_{n+1}+...+j_N= \\ =i_{n+1}+...+i_N+j_1+...+j_n=\lambda}} t_1^{i_1} \dots t_n^{i_n} t_{n+1}^{*i_{n+1}} \dots t_N^{*i_N} \cdot \xi_{n+1}^{-\lambda} \cdot t_N^{j_N} \dots t_{n+1}^{j_{n+1}} t_n^{*j_n} \dots t_1^{*j_1}.$$

Очевидно, в усіх таких розкладах $\lambda \in \mathbb{Z}_+$. Для кожного фіксованого розкладу f розглянемо найбільше λ серед усіх членів, і далі позначимо через $\lambda(f)$ найменше λ серед усіх таких розкладів f. Розглянемо фільтрацію

$$\mathcal{E}_{N-1}(\Xi_{n,m})_q = \bigcup_{a=0}^{\infty} \mathcal{E}_{N-1}(\Xi_{n,m})_{q,a},$$

де

$$\mathcal{E}_{N-1}(\Xi_{n,m})_{q,a} = \{f \in \mathcal{E}_{N-1}(\Xi_{n,m})_q |\ \lambda(f) \leq a\}.$$

Зі зрозумілих причин, $t_1^k t_N^{*k'} \xi_{n+1}^{((N-1)/2-k'-l)} t_{n+1}^{l'} t_n^{*l}$ генерує $U_q(\mathfrak{sl}_\mathfrak{n} \times \mathfrak{sl}_\mathfrak{m})$-модуль, ізоморфний $L^{(n)}(k\omega_1 + l\omega_{n-1}) \boxtimes L^{(m)}(l'\omega_1 + k'\omega_{m-1})$. Також, дія алгебри $U_q(\mathfrak{sl}_\mathfrak{n} \times \mathfrak{sl}_\mathfrak{m})$ не збільшує $\lambda(f)$, тому $L^{(n)}(k\omega_1 + l\omega_{n-1}) \boxtimes L^{(m)}(l'\omega_1 + k'\omega_{m-1}) \subset \mathcal{E}_{N-1}(\Xi_{n,m})_{q,a}$, якщо $k + l' \leq a$. Той факт, що пряма сума усіх таких модулів вичерпує $\mathcal{E}_{N-1}(\Xi_{n,m})_{q,a}$, може бути виведений обчисленням вимірностей. Дійсно, ми маємо перевірити, що

$$\dim \mathcal{E}_{N-1}(\Xi_{n,m})_{q,a} \leq \sum_{k+l' \leq a} \dim \left(L^{(n)}(k\omega_1 + l\omega_{n-1}) \boxtimes L^{(m)}(l'\omega_1 + k'\omega_{m-1}) \right).$$

Внаслідок співвідношення $\xi_1 = 0$ в $\mathcal{E}(\Xi_{n,m})_q$, вимірність $\mathcal{E}_{N-1}(\Xi_{n,m})_{q,a}$ задовольняє такій нерівності:

$$\dim \mathcal{E}_{N-1}(\Xi_{n,m})_{q,a} \leq (C_{a+N-1}^{N-1})^2.$$

Досить перевірити нерівність

$$(C_{a+N-1}^{N-1})^2 \leq \sum_{k+l' \leq a} \dim \left(L^{(n)}(k\omega_1 + l\omega_{n-1}) \boxtimes L^{(m)}(l'\omega_1 + k'\omega_{m-1}) \right)$$

у класичному випадку. За класичного контексту це можна зробити індукцією за a. $\square$

Нашим завданням є встановлення необхідних умов, за яких $\mathcal{E}_s(\Xi_{n,m})_q$ еквівалентні як $U_q\mathfrak{sl}_N$-модулі.

Спеціальна конструкція кожному скінченновимірному зображенню V алгебри $U_q\mathfrak{sl}_N$ ставить у відповідність центральний елемент C_V певного розширення алгебри $U_q^{\mathrm{ext}}\mathfrak{sl}_N \supset U_q\mathfrak{sl}_N$ [103]. Внаслідок цього, сімейство констант $C_{L(\omega_p)}$, $p = 1, \dots, N$, утворює інваріант ізоморфізму для $\mathcal{E}_{2s}(\Xi_{n,m})_q$ як $U_q\mathfrak{sl}_N$-модулів.

Змістовна властивість елементів C_V полягає в тому, що їх дія на модулі Верма $M(\lambda)$ зі старшою вагою λ задається константою [34] (див. також [185, твердження 3.1.22] в окремому випадку $q \in (0, 1)$):

$$C_V|_{M(\lambda)} = \sum_{\mu \in P} (\dim V_\mu) q^{-2(\mu, \lambda + \rho)},$$

де P – решітка ваг для $U_q\mathfrak{sl}_N$, V_μ – підпростір μ-вагових векторів в V, і ρ – напівсума позитивних коренів для $U_q\mathfrak{sl}_N$. Тому така ж формула може бути застосована для будь-якого $U_q\mathfrak{sl}_N$-модуля зі старшою вагою λ.

Проста перевірка з огляду на (5.3.3), (5.3.4) і (5.3.36) показує, що для $s = k \in \mathbb{Z}_+$ вектори $t_1^k t_N^{*k} \in \mathcal{E}_{2s}(\Xi_{n,m})_q$ є також $U_q\mathfrak{sl}_N$-сингулярними (анігілюються E_n), і тому генерують прості $U_q\mathfrak{sl}_N$-підмодулі зі старшими вагами $k(\omega_1 + \omega_{N-1})$ для всіх $k \in \mathbb{Z}_+$.

Безпосереднє обчислення тих констант дає такий результат. Нехай e_p – елементарні симетричні поліноми ступеню p від N змінних. Тоді

$$C_{L(\omega_p)}|_{M(k(\omega_1 + \omega_{N-1}))} = e_p \left(q^{-2k-N+1}, q^{-N+3}, q^{-N+5}, \dots, q^{N-5}, q^{N-3}, q^{2k+N-1} \right).$$

З іншого боку, можна легко побачити з визначень, що матричні елементи дій $U_q\mathfrak{sl}_N$ на $\mathcal{E}_{2k}(\Xi_{n,m})_q$ відносно певної ПБВ-бази є поліномами Лорана від q^{2k}.

Отже, з міркувань аналітичного продовження, набір констант

$$e_p \left(q^{-2s-N+1}, q^{-N+3}, q^{-N+5}, \dots, q^{N-5}, q^{N-3}, q^{2s+N-1} \right), \qquad p = 1, \dots, N,$$

реалізується як дія центральних елементів $C_{L(\omega_p)}$ на певних ненульових простих підмодулях $U_q\mathfrak{sl}_N$-модулів $\mathcal{E}_{2s}(\Xi_{n,m})_q$.

Звідси, для ізоморфних $\mathcal{E}_{2s}(\Xi_{n,m})_q$ і $\mathcal{E}_{2s'}(\Xi_{n,m})_q$, останні набори повинні співпадати. З цього випливає, що набір констант

$$q^{-2s-N+1}, q^{-N+3}, q^{-N+5}, \ldots, q^{N-5}, q^{N-3}, q^{2s+N-1}$$

має також співпадати, тобто для заданої пари s, s' або $q^{-2s-N+1} = q^{-2s'-N+1}$, або $q^{-2s-N+1} = q^{2s'+N-1}$. Ми одержуємо

Твердження 5.3.11. *Для $s \in \mathbb{C}$, множина тих s', для яких $\mathcal{E}_{2s'}(\Xi_{n,m})_q$ ізоморфний $\mathcal{E}_{2s}(\Xi_{n,m})_q$ як $U_q\mathfrak{sl}_N$-модулі, є підмножиною в*

$$\left\{ s + \frac{\pi i n}{\ln q} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -(s+N-1) + \frac{\pi i n}{\ln q} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

5.4 Квантовий аналог інтеграла Пуассона і рівнянь Хуа

Ми вивчаємо квантовий аналог інтегрального оператора Пуассона, пов'язаного з межею Шилова квантової матричної кулі, і квантовий аналог рівнянь Хуа. Подано необхідну умову на функцію для приналежності до образу квантового інтегралу Пуассона, див. [12].

5.4.1 Класичні об'єкти і попередні відомості

Нагадаємо, що обмежена область $\mathbb{D}$ у скінченновимірному векторному просторі називається симетричною, якщо кожна точка $p \in \mathbb{D}$ є ізольованою фіксованою точкою біголоморфного інволютивного автоморфізму $\varphi_p : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $\varphi_p \circ \varphi_p = \mathrm{id}$.

Устаткуємо векторний простір лінійних відображень в $\mathbb{C}^n$ і канонічно ізоморфний векторний простір Mat_n комплексних матриць розміру $n \times n$ операторними нормами. Як відомо [76], одинична куля $\mathbb{D} = \{\mathbf{z} \in \mathrm{Mat}_n \,|\, \mathbf{z}\mathbf{z}^* < 1\}$ є обмеженою симетричною областю.

Позначимо через $S(\mathbb{D})$ межу Шилова області $\mathbb{D}$, $S(\mathbb{D}) = \{\mathbf{z} \in \mathrm{Mat}_n \,|\, I - \mathbf{z}\mathbf{z}^* = 0\} \cong U_n$. Добре відомо, що і $\mathbb{D}$, і $S(\mathbb{D})$ – однорідні простори групи

$SU_{n,n}$. Розглянемо функцію на $\mathbb{D} \times S(\mathbb{D})$, задану так:

$$P(\mathbf{z}, \zeta) = \frac{\det(1 - \mathbf{z}\mathbf{z}^*)^n}{|\det(1 - \zeta^*\mathbf{z})|^{2n}}, \qquad \mathbf{z} \in \mathbb{D},\ \zeta \in S(\mathbb{D}). \tag{5.4.1}$$

Вона називається ядром Пуассона [81], пов'язаним з межею Шилова.

Загальна концепція границь ермітових симетричних просторів некомпактного типу та відповідних ядер Пуассона викладено в [107, 106].

Ядро Пуассона, разом з $S(U_n \times U_n)$-інваріантним інтегралом $\int\limits_{U_n} \cdot d\nu(\zeta)$ на U_n, дозволяють визначити інтегральний оператор Пуассона

$$\mathcal{P} : f(\zeta) \mapsto \int\limits_{U_n} P(\mathbf{z}, \zeta) f(\zeta) d\nu(\zeta), \qquad \mathbf{z} \in \mathbb{D},\ \zeta \in S(\mathbb{D}).$$

Він сплітає дії групи $SU_{n,n}$ у просторах неперервних функцій на області $\mathbb{D}$ і на межі Шилова $S(\mathbb{D})$. Тим не менше, не будь-яка неперервна функція на $\mathbb{D}$ може бути одержана шляхом застосування інтегрального оператора Пуассона до неперервної функції на межі Шилова $S(\mathbb{D})$.

Хуа [81] одержав перші результати щодо диференціальних рівнянь, розв'язки яких включають функції вигляду $\mathcal{P}(f)$. Пізніший результат Джонсона та Кораньї [89] подає систему диференціальних рівнянь, що складають повну характеризацію таких функцій. Їхня версія рівнянь Хуа виглядає так:

$$\sum_{i,j,k=1}^{n} \left(\delta_{ij} - \sum_{c=1}^{n} z_i^c \overline{z}_j^c\right)\left(\delta_{k\alpha} - \sum_{c=1}^{n} \overline{z}_c^k z_c^\alpha\right) \frac{\partial^2}{\partial \overline{z}_j^k \partial z_i^a} u(\mathbf{z}) = 0,$$
$$\sum_{i,j,k=1}^{n} \left(\delta_{ai} - \sum_{c=1}^{n} z_a^c \overline{z}_i^c\right)\left(\delta_{jk} - \sum_{c=1}^{n} \overline{z}_c^j z_c^k\right) \frac{\partial^2}{\partial \overline{z}_i^j \partial z_\alpha^k} u(\mathbf{z}) = 0$$

для $a, \alpha = 1, \ldots, n$.

Це може бути представлено у вигляді

$$\left.\sum_{c=1}^{n} \frac{\partial^2 u(g \cdot \mathbf{z})}{\partial z_c^\beta \partial \overline{z}_c^\alpha}\right|_{\mathbf{z}=0} = 0, \qquad g \in SU_{n,n}, \quad \alpha, \beta \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{5.4.2}$$

Відомо, що ядро Пуассона (5.4.1) як функція $\mathbf{z}$ є розв'язком поданої вище системи рівнянь. Доводячи це, можна обмежитись окремим випадком $g = 1$, оскільки $P(g\mathbf{z}, \zeta) = \mathrm{const}(g, \zeta) P(\mathbf{z}, g^{-1}\zeta)$, див. [89, стор. 597].

Залишається зазначити, що співвідношення

$$\sum_{c=1}^{n} \frac{\partial^2 P}{\partial z_c^\beta \partial \overline{z}_c^\alpha}\Bigg|_{\mathbf{z}=0} = 0, \qquad \zeta \in U_n, \quad \alpha, \beta \in \{1, 2, \ldots, n\} \tag{5.4.3}$$

випливають з (5.4.1).

Отже, у класичному випадку інтегральний оператор Пуассона, застосований до функції на межі Шилова, є розв'язком (5.4.2). Нашим завданням є одержати квантовий аналог цього добре відомого результату.

5.4.2 Формулювання основного результату

Необхідні відомості з теорії функцій на квантовій матричній кулі містяться в Додатку А.5.

Ми маємо намір визначити ядро Пуассона (5.4.1) шляхом подання переліку певних істотних властивостей відповідного інтегрального оператора. Для цього ми використаємо нормалізовану $S(U_n \times U_n)$-інваріантну міру на $S(\mathbb{D})$ для інтегрування на межі Шилова. Головною властивістю ядра Пуассона є те, що інтегральний оператор з цим ядром є морфізмом $SU_{n,n}$-модуля функцій на $S(\mathbb{D})$ в $SU_{n,n}$-модуль функцій на $\mathbb{D}$, який переводить 1 в 1.

Отже, у квантовому випадку інтегральний оператор Пуассона, якого ми потребуємо, має бути морфізмом $U_q\mathfrak{su}_{n,n}$-модуля $\mathbb{C}[S(\mathbb{D})]_q$ в $U_q\mathfrak{su}_{n,n}$-модуль $\mathcal{D}(\mathbb{D})'_q$, що переводить 1 в 1.

Нагадаємо, що кожна $u \in \mathcal{D}(\mathbb{D})'_q$ має вигляд $u = \sum\limits_{j,k=0}^{\infty} u_{j,k}$, $u_{j,k} \in \mathbb{C}[\mathrm{Mat}_n]_{q,j}\mathbb{C}[\overline{\mathrm{Mat}}_n]_{q,-k}$, і при цьому множина $\left\{z_b^\beta (z_a^\alpha)^*\right\}_{a,b,\alpha,\beta=1,2,\ldots,n}$ є базою векторного простору $\mathbb{C}[\mathrm{Mat}_n]_{q,1}\mathbb{C}[\overline{\mathrm{Mat}}_n]_{q,-1}$. Це дозволяє запровадити змішані часткові похідні в нулі, лінійні функціонали $\dfrac{\partial^2}{\partial z_b^\beta \partial (z_a^\alpha)^*}\Bigg|_{\mathbf{z}=0}$ такі, що

$$u_{1,1} = \sum_{a,b,\alpha,\beta=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_b^\beta \partial (z_a^\alpha)^*}\Bigg|_{\mathbf{z}=0} \right) z_b^\beta \, (z_a^\alpha)^*, \qquad u \in \mathcal{D}(\mathbb{D})'_q.$$

Тепер ми в змозі одержати квантовий аналог рівнянь Хуа.

Теорема 5.4.1. *Якщо $u \in \mathcal{D}(\mathbb{D})'_q$ належить до образу інтегрального оператора Пуассона на квантовій кулі в $n \times n$-матрицях, тоді*

$$\sum_{c=1}^{n} q^{2c} \frac{\partial^2(\xi u)}{\partial z_c^\beta \partial (z_c^\alpha)^*}\bigg|_{\mathbf{z}=0} = 0 \qquad (5.4.4)$$

для всіх $\xi \in U_q\mathfrak{sl}_{2n}$, $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n$.

Система рівнянь (5.4.4) є q-аналогом системи (5.4.2).

5.4.3 Ядро Пуассона

Необхідні попередні відомості містяться у Додатках A.6 і A.7.

У цьому пункті ми побудуємо морфізм $U_q\mathfrak{su}_{n,n}$-модуля $\mathbb{C}[S(\mathbb{D})]_q$ в $U_q\mathfrak{su}_{n,n}$-модуль $\mathcal{D}(\mathbb{D})'_q$, який переводить 1 в 1.

Ми потребуємо квантовий аналог $\mathbb{C}[\mathrm{Mat}_{n,2n}]_q$ для алгебри поліномів на просторі прямокутних матриць розміру $n \times 2n$. Алгебра $\mathbb{C}[\mathrm{Mat}_{n,2n}]_q$ визначається множиною генераторів $\{t_{ij}\}_{i=1,2,\ldots,n;\, j=1,2,\ldots,2n}$ і співвідношеннями, подібними до таких у випадку квадратних матриць, див. (A.5.1). Відомо, що ця алгебра є областю цілісності.

Структура $U_q\mathfrak{sl}_{2n}$-модульної алгебри задається так:

$$K_k t_{ij} = \begin{cases} q t_{ij}, & j = k, \\ q^{-1} t_{ij}, & j = k+1, \\ t_{ij}, & j \notin \{k, k+1\}, \end{cases}$$

$$E_k t_{ij} = \begin{cases} q^{-1/2} t_{i,j-1}, & j = k+1, \\ 0, & j \neq k+1, \end{cases} \qquad F_k t_{ij} = \begin{cases} q^{1/2} t_{i,j+1}, & j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases}$$

де $k = 1, 2, \ldots, 2n-1$.

Зауваження. Розглянемо $U_q\mathfrak{sl}_{2n}$-модульні підалгебри в $\mathbb{C}[\mathrm{Mat}_{n,2n}]_q$ і в $\mathbb{C}[\Xi]_q$, генерованих $t^{\wedge n}_{\{1,2,\ldots,n\}\{n+1,n+2,\ldots,2n\}}$ і t, відповідно. Відображення $t^{\wedge n}_{\{1,2,\ldots,n\}\{n+1,n+2,\ldots,2n\}} \mapsto t$ поширюється до ізоморфізма i цих $U_q\mathfrak{sl}_{2n}$-модульних підалгебр. У подібний спосіб можна запровадити $U_q\mathfrak{sl}_{2n}$-модульні підалгебри в $\mathbb{C}[\mathrm{Mat}_{n,2n}]_q$ і в $\mathbb{C}[\Xi]_q$, генеровані $t^{\wedge n}_{\{1,2,\ldots,n\}\{1,2,\ldots,n\}}$ і t^*, відповідно. Відображення $t^{\wedge n}_{\{1,2,\dots,n\}\{1,2,\dots,n\}} \mapsto (-q)^{n^2} t^*$ поширюється до ізоморфізма i' цих $U_q\mathfrak{sl}_{2n}$-модульних підалгебр. Ці ізоморфізми можуть бути використані для вкладення мінорів $t^{\wedge n}_{\{1,2,\dots,n\}J}$ і $t^{\wedge n}_{\{n+1,n+2,\dots,2n\}J}$ в $\mathbb{C}[\Xi]_q$.

Розглянемо відображення $m : \mathbb{C}[\mathrm{Mat}_{n,2n}]_q \otimes \mathbb{C}[\mathrm{Mat}_{n,2n}]_q \to \mathbb{C}[\mathrm{Mat}_{2n}]_q$, визначене так. Тензорні множники в області визначення вкладаються в $\mathbb{C}[\mathrm{Mat}_{2n}]_q$ як підалгебри, генеровані елементами, відповідно, верхніми n і нижніми n строками матриці $\mathbf{t} = (t_{ij})$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, 2n$, і відображення m є множенням в алгебрі $\mathbb{C}[\mathrm{Mat}_{2n}]_q$.

Лема 5.4.2. *Відображення m є ізоморфізмом $U_q\mathfrak{sl}_{2n}$-модулів.*

Доведення. Відображення m переводить мономіальну базу

$$t_{11}^{j_{11}} \dots t_{1,2n}^{j_{1,2n}} t_{21}^{j_{21}} \dots t_{2,2n}^{j_{2,2n}} \dots t_{n1}^{j_{n1}} \dots t_{n,2n}^{j_{n,2n}} \otimes \\ t_{n+1,1}^{j_{n+1,1}} \dots t_{n+1,2n}^{j_{n+1,2n}} t_{n+2,1}^{j_{n+2,1}} \dots t_{n+2,2n}^{j_{n+2,2n}} \dots t_{2n,1}^{j_{2n,1}} \dots t_{2n,2n}^{j_{2n,2n}}$$

алгебри $\mathbb{C}[\mathrm{Mat}_{n,2n}]_q \otimes \mathbb{C}[\mathrm{Mat}_{n,2n}]_q$ в мономіальну базу

$$t_{11}^{j_{11}} \dots t_{1,2n}^{j_{1,2n}} t_{21}^{j_{21}} \dots t_{2,2n}^{j_{2,2n}} \dots t_{n1}^{j_{n1}} \dots t_{n,2n}^{j_{n,2n}} t_{n+1,1}^{j_{n+1,1}} \dots t_{n+1,2n}^{j_{n+1,2n}} \cdot \\ \cdot t_{n+2,1}^{j_{n+2,1}} \dots t_{n+2,2n}^{j_{n+2,2n}} \dots t_{2n,1}^{j_{2n,1}} \dots t_{2n,2n}^{j_{2n,2n}}$$

алгебри $\mathbb{C}[\mathrm{Mat}_{2n}]_q$, $j_{ik} \in \mathbb{Z}_+$, і тому є бієктивним. Воно є морфізмом $U_q\mathfrak{sl}_{2n}$-модулів, оскільки $\mathbb{C}[\mathrm{Mat}_{2n}]_q$ є $U_q\mathfrak{sl}_{2n}$-модульною алгеброю. □

Варто зазначити, що визначення $U_q\mathfrak{sl}_{2n}$-модульної алгебри $\mathbb{C}[X]_q$ припускає заміну $\mathbb{C}[SL_{2n}]_q$ на $\mathbb{C}[\mathrm{Mat}_{n,2n}]_q$.

Розглянемо такі елементи $U_q\mathfrak{sl}_{2n}$-модуля $\mathbb{C}[\mathrm{Mat}_{n,2n}]_q \otimes \mathbb{C}[\mathrm{Mat}_{n,2n}]_q$:

$$\mathcal{L} = \sum_{J \subset \{1,2,\dots,2n\} \& \operatorname{card}(J)=n} (-q)^{l(J,J^c)} t^{\wedge n}_{\{1,2,\dots,n\}J} \otimes t^{\wedge n}_{\{n+1,n+2,\dots,2n\}J^c},$$

$$\overline{\mathcal{L}} = \sum_{J \subset \{1,2,\dots,2n\} \& \operatorname{card}(J)=n} (-q)^{-l(J,J^c)} t^{\wedge n}_{\{n+1,n+2,\dots,2n\}J^c} \otimes t^{\wedge n}_{\{1,2,\dots,n\}J}.$$

Тут J^c є доповненням до J і $l(I,J) = \operatorname{card}\{(i,j) \in I \times J |\, i > j\}$.

Твердження 5.4.3. *$\mathcal{L}$ і $\overline{\mathcal{L}}$ є $U_q\mathfrak{sl}_{2n}$-інваріантами.*

Доведення викладаємо для $\mathcal{L}$. У випадку $\overline{\mathcal{L}}$ працюють подібні аргументи.

Нагадаємо q-аналог для формули Лапласа розкладу квантового детермінанта матриці $\mathbf{t} = (t_{ij})$ розміру $2n \times 2n$ відносно верхніх n строк:

$$\det_q \mathbf{t} = \sum_{J \subset \{1,2,\ldots,2n\} \& \operatorname{card}(J)=n} (-q)^{l(J,J^c)} t^{\wedge n}_{\{1,2,\ldots,n\}J} t^{\wedge n}_{\{n+1,n+2,\ldots,2n\}J^c} =$$
$$= \sum_{J \subset \{1,2,\ldots,2n\} \& \operatorname{card}(J)=n} (-q)^{-l(J,J^c)} t^{\wedge n}_{\{n+1,n+2,\ldots,2n\}J^c} t^{\wedge n}_{\{1,2,\ldots,n\}J}.$$

Наше твердження випливає з Леми 5.4.2, співвідношення $m\mathcal{L} = \det_q \mathbf{t}$ і $U_q\mathfrak{sl}_{2n}$-інваріантності квантового детермінанта. $\square$

Зазначимо, що з огляду на попереднє Зауваження, маємо $\mathcal{L}, \overline{\mathcal{L}} \in \mathbb{C}[X]_q \otimes \mathbb{C}[\Xi]_q$.

По-перше, розглянемо $U_q\mathfrak{sl}_{2n}$-модуль ядер $\mathcal{D}(\mathbb{D} \times \Xi)'_q$, чиїми елементами є формальні ряди з коефіцієнтами з $\mathbb{C}[\overline{\mathrm{Mat}}_n]_{q,-j}\mathbb{C}[\mathrm{Mat}_n]_{q,i} \otimes \mathbb{C}[\Xi]_{q,\xi}$, і, по-друге, $U_q\mathfrak{sl}_{2n}$-модуль ядер $\mathcal{D}(X \otimes \Xi)'_q$, чиїми елементами є скінченні суми

$$\sum_{(i,j) \notin (-\mathbb{N}) \times (-\mathbb{N})} (t^i t^{*j} \otimes 1) f_{ij}, \qquad f_{ij} \in \mathcal{D}(\mathbb{D} \times \Xi)'_q$$

(див. також (A.7.4)). Зрозуміло, що $\mathcal{D}(\mathbb{D} \times \Xi)'_q$ є $\mathrm{Pol}(\mathrm{Mat}_n)^{\mathrm{op}}_q \otimes \mathbb{C}[\Xi]_{q,\xi}$-бімодулем, а $\mathcal{D}(X \times \Xi)'_q$ є $\mathbb{C}[X]^{\mathrm{op}}_{q,x} \otimes \mathbb{C}[\Xi]_{q,\xi}$-бімодулем.

Ядро $\mathcal{L} \in \mathbb{C}[X]^{\mathrm{op}}_q \otimes \mathbb{C}[\Xi]_q$ може бути записане у вигляді

$$\mathcal{L} = (-q)^{-n^2} \cdot$$
$$\cdot \left(1 + \sum_{J \neq \{1,2,\ldots,n\}} (-q)^{l(J,J^c)} t^{\wedge n}_{\{1,2,\ldots,n\}J} t^{-1} \otimes t^{\wedge n}_{\{n+1,n+2,\ldots,2n\}J^c} t^{*-1} \right) (t \otimes t^*).$$

Зазначимо, що $t^{\wedge n}_{\{1,2,\ldots,n\}J} t^{-1}, t^{\wedge n}_{\{n+1,n+2,\ldots,2n\}J^c} t^{*-1} \in \mathbb{C}[\mathrm{Mat}_n]_q$, див. (A.7.3). Це дозволяє виписати явно такий елемент $\mathcal{L}^{-n}$ простору узагальнених ядер $\mathcal{D}(X \times \Xi)'_q$, що $\mathcal{L}^n \cdot \mathcal{L}^{-n} = \mathcal{L}^{-n} \cdot \mathcal{L}^n = 1$, де $\cdot$ позначає (ліву та праву) дії алгебри $\mathcal{L}^n$ на елемент $\mathcal{L}^{-n}$ бімодуля $\mathcal{D}(X \times \Xi)'_q$.

Подібна побудова дозволяє одержати також $U_q\mathfrak{sl}_{2n}$-інваріантне узагальнене ядро $\overline{\mathcal{L}}^{-n}$.

Зазначимо, що $\mathcal{L}^{-n} = \sum\limits_i x_i$ є формальним рядом із $x_i \in \mathbb{C}[\mathrm{Mat}_n]_{q,i} \otimes \mathbb{C}[\Xi]_{q,\xi}$, $i \in \mathbb{Z}_+$, і члени формального ряда $\overline{\mathcal{L}}^{-n} = \sum\limits_j y_j$ є такими, що $y_j \in \mathbb{C}[\overline{\mathrm{Mat}}_n]_{q,-j} \otimes \mathbb{C}[\Xi]_{q,\xi}$. Це дозволяє визначити "добуток" $\overline{\mathcal{L}}^{-n}\mathcal{L}^{-n}$ як подвійний ряд $\sum\limits_{i,j} y_j x_i$, що за цим стає елементом модуля узагальнених ядер $\mathcal{D}(X \otimes \Xi)'_q$. Зрозуміло, що $\overline{\mathcal{L}}^n \cdot \left(\overline{\mathcal{L}}^{-n}\mathcal{L}^{-n}\right) \cdot \mathcal{L}^n = 1$ в $\mathcal{D}(X \times \Xi)'_q$, і ця властивість визначає однозначно узагальнене ядро $\overline{\mathcal{L}}^{-n}\mathcal{L}^{-n}$. Крім того, зазначена вище однозначність дозволяє перевірити інваріантність узагальненого ядра $\overline{\mathcal{L}}^{-n}\mathcal{L}^{-n}$. Звичайно, цей аргемент має застосовувати інваріантність $\mathcal{L}$, $\overline{\mathcal{L}}$.

Розглянемо ядро Пуассона $P \in \mathcal{D}(\mathbb{D} \times S(\mathbb{D}))'_q$ для матричної кулі, задаючи наступні властивості:

i) з точністю до постійного множника, ядро Пуассона є $(1 \otimes tt^*)^n\overline{\mathcal{L}}^{-n}\mathcal{L}^{-n}$, тобто $P = \mathrm{const}(q,n)(1 \otimes tt^*)^n\overline{\mathcal{L}}^{-n}\mathcal{L}^{-n}$;

ii) інтегральний оператор з ядром P переводить $1 \in \mathbb{C}[S(\mathbb{D})]_q$ в $1 \in \mathcal{D}(\mathbb{D})'_q$.

Лема 5.4.4. *Інтегральний оператор $\mathbb{C}[S(\mathbb{D})]_q \to \mathcal{D}(\mathbb{D})'_q$ з ядром $(1 \otimes tt^*)^n\overline{\mathcal{L}}^{-n}\mathcal{L}^{-n}$ є морфізмом $U_q\mathfrak{sl}_{2n}$-модулів.*

Доведення. З існування інваріантного інтегралу $\eta : \mathbb{C}[\Xi]_q^{(-n,-n)} \to \mathbb{C}$ і інваріантності $\overline{\mathcal{L}}^{-n}\mathcal{L}^{-n}$ виплаває, що інтегральний оператор $\mathbb{C}[S(\mathbb{D})]_q \to \mathcal{D}(\mathbb{D})'_q$ з ядром $\overline{\mathcal{L}}^{-n}\mathcal{L}^{-n}$ є морфізмом $U_q\mathfrak{sl}_{2n}$-модулів. Залишається перенести множник $(1 \otimes t^{*-n}t^{-n})$ з $\overline{\mathcal{L}}^{-n}\mathcal{L}^{-n}$ наліво і застосувати (A.7.6). □

Зауваження. Оскільки інтегральний оператор $\mathbb{C}[S(\mathbb{D})]_q \to \mathcal{D}(\mathbb{D})'_q$ з ядром $(1 \otimes tt^*)^n\overline{\mathcal{L}}^{-n}\mathcal{L}^{-n}$ є морфізмом $U_q\mathfrak{sl}_{2n}$-модулів, образ $1 \in \mathbb{C}[S(\mathbb{D})]_q$ є $U_q\mathfrak{sl}_{2n}$-інваріантним елементом в $\mathcal{D}(\mathbb{D})'_q$, тобто константою. Це доводить існування ядра Пуассона P.

Зауваження. Проілюструємо визначене вище ядро Пуассона P у найпростішому випадку $n = 1$. Розглянуте інваріантне ядро одержане в [163]. Елементи

$$\mathcal{L} = t_{11} \otimes t_{22} - qt_{12} \otimes t_{21}, \qquad \overline{\mathcal{L}} = -q^{-1}t_{21} \otimes t_{12} + t_{22} \otimes t_{11}$$

алгебри $\mathbb{C}[X]^{\rm op}_{q,x} \otimes \mathbb{C}[\Xi]_{q,\xi}$ є $U_q\mathfrak{sl}_2$-інваріантними ядрами. Нижче подається просте обчислення, яке використовує для скорочення позначення

$$z = qt_{12}^{-1}t_{11}, \qquad z^* = t_{22}t_{21}^{-1},$$

замість явного використання вкладень $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$. Маємо:

$$\mathcal{L} = (1 - z \otimes z^*)(-qt_{12} \otimes t_{21}), \qquad \overline{\mathcal{L}} = (-q^{-1}t_{21} \otimes t_{12})(1 - q^2 z^* \otimes z),$$

і, оскільки $t = t_{12}$, $t^* = -qt_{21}$,

$$\mathcal{L} = (1 - z \otimes z^*)(t \otimes t^*), \qquad \overline{\mathcal{L}} = (q^{-2}t^* \otimes t)(1 - q^2 z^* \otimes z).$$

Тому,

$$\overline{\mathcal{L}}^{-1}\mathcal{L}^{-1} = q^2(1 \otimes t^{-1}t^{*-1})(1 - z^* \otimes z)^{-1}((1 - z^*z) \otimes 1)(1 - z \otimes z^*)^{-1}.$$

Усуваючи $\otimes$ і заміняючи в другому тензорному множнику z на ζ і z^* на ζ^* (що є стандартним у теорії функцій), одержуємо

$$P = \mathrm{const}(q)(1 - z^*\zeta)^{-1}(1 - z^*z)(1 - z\zeta^*)^{-1}.$$

Залишається знайти $\mathrm{const}(q)$, або, точніше кажучи, довести, що $\mathrm{const}(q) = 1$. Дійсно, інтегральний оператор з ядром $(1 - z^*\zeta)^{-1}(1 - z^*z)(1 - z\zeta^*)^{-1}$ переводить 1 в 1. Це є наслідком $\zeta^* = \zeta^{-1}$, і інтегрування добутку рядів за ζ дає постійний член : $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k(1 - zz^*)z^{*k} = 1$.

Зазначимо, що ядро Пуассона є формальним рядом $P = \sum\limits_{j,k=0}^{\infty} p_{jk}$ із $p_{jk} \in \mathbb{C}[\overline{\mathrm{Mat}}_n]_{q,-k}\mathbb{C}[\mathrm{Mat}_n]_{q,j} \otimes \mathbb{C}[S(\mathbb{D})]_q$. У подальшому ми опускаємо $\otimes$ і заміняємо у другому тензорному множнику z на ζ і z^* на ζ^*.

Лема 5.4.5. *Має місце таке співвідношення:*

$$p_{11} = \mathrm{const}(q,n) \sum_{a,b,\alpha,\beta=1}^{n} \left(\frac{1 - q^{-2n}}{1 - q^{-2}} q^{2(2n-a-\alpha)} \zeta_a^\alpha \left(\zeta_b^\beta\right)^* - \delta_{ab}\delta^{\alpha\beta} \right) (z_a^\alpha)^* z_b^\beta, \qquad (5.4.5)$$

де $\mathrm{const}(q,n) \neq 0$.

Доведення. В алгебрі ядер маємо

$$\mathcal{L} = \left(1 - \sum_{a,\alpha=1}^{n} z_a^\alpha (\zeta_a^\alpha)^* + \ldots \right) t\tau^*, \qquad (5.4.6)$$

$$\overline{\mathcal{L}}=q^{-2n^2}t^*\tau\left(1-q^2\sum_{a,\alpha=1}^n q^{2(2n-a-\alpha)}(z_a^\alpha)^*\zeta_a^\alpha+\ldots\right), \tag{5.4.7}$$

що легко виводиться з (A.7.3), (A.7.1) і того факту, що $\mathcal{I}$ є морфізмом $*$-алгебр. Також, добре видно з (A.7.2), що

$$y=(tt^*)^{-1}=1-\sum_{a,\alpha=1}^n(z_a^\alpha)^*z_a^\alpha+\ldots. \tag{5.4.8}$$

Тут крапки заміняють члени, чий ступінь перевищує 2, і використано такі скорочені позначення:

$$t=t\otimes 1,\qquad \tau=1\otimes\tau,\qquad z_a^\alpha=z_a^\alpha\otimes 1,\qquad \zeta_a^\alpha=1\otimes\zeta_a^\alpha,$$

$$t^*=t^*\otimes 1,\qquad \tau^*=1\otimes\tau^*,\qquad (z_a^\alpha)^*=(z_a^\alpha)^*\otimes 1,\qquad (\zeta_a^\alpha)^*=1\otimes(\zeta_a^\alpha)^*.$$

Застосовуючи (5.4.6) – (5.4.8) разом з комутаційними співвідношеннями (див. також (A.7.5))

$$t^*\tau\left(\sum_{a,\alpha=1}^n q^{2(2n-a-\alpha)}(z_a^\alpha)^*\zeta_a^\alpha\right)=q^{-2}\left(\sum_{a,\alpha=1}^n q^{2(2n-a-\alpha)}(z_a^\alpha)^*\zeta_a^\alpha\right)t^*\tau$$

$$t\tau^*\left(\sum_{a,\alpha=1}^n z_a^\alpha(\zeta_a^\alpha)^*\right)=q^2\left(\sum_{a,\alpha=1}^n z_a^\alpha(\zeta_a^\alpha)^*\right)t\tau^*,$$

одержуємо:

$$\overline{\mathcal{L}}^{-n}\mathcal{L}^{-n}=\prod_{j=1}^n\left(1-q^{2j}\sum_{a,\alpha=1}^n q^{2(2n-a-\alpha)}(z_a^\alpha)^*\zeta_a^\alpha+\ldots\right)^{-1}\cdot$$
$$\cdot q^{2n^3}(\tau^*\tau)^{-n}(tt^*)^{-n}\prod_{j=0}^{n-1}\left(1-q^{2j}\sum_{a,\alpha=1}^n z_a^\alpha(\zeta_a^\alpha)^*+\ldots\right)^{-1}.$$

Тому

$$P=\mathrm{const}(q,n)\prod_{j=0}^{n-1}\left(1-q^{-2j}\sum_{a,\alpha=1}^n q^{2(2n-a-\alpha)}(z_a^\alpha)^*\zeta_a^\alpha+\ldots\right)^{-1}\cdot$$
$$\cdot\left(1-\sum_{a,\alpha=1}^n(z_a^\alpha)^*z_a^\alpha+\ldots\right)^n\cdot\prod_{j=0}^{n-1}\left(1-q^{2j}\sum_{a,\alpha=1}^n z_a^\alpha(\zeta_a^\alpha)^*+\ldots\right)^{-1}, \tag{5.4.9}$$

де крапки у кожній дужці позначають внесок членів, чий ступінь перевищує 2, і множники у добутках розміщено у порядку спадання індексу j зліва направо.

Наразі (5.4.5) випливає з (5.4.9). $\square$

Зауваження. Формальний граничний перехід для $q \to 1$ в (5.4.5) призводить до

$$p_{11} = \mathrm{const}(n) \sum_{a,b,\alpha,\beta=1}^{n} \left(n\, \zeta_a^\alpha \overline{\zeta_b^\beta} - \delta_{ab}\delta^{\alpha\beta}\right) \overline{z_a^\alpha} z_b^\beta .$$

Це співвідношення добре відоме (з $\mathrm{const}(n) = n$), див., наприклад, [89, p. 597], і є наслідком (5.4.1).

5.4.4 Виведення рівнянь Хуа

Займемося безпосередньо одержанням квантового аналогу (5.4.3).

З Леми 5.4.5 і визначення множення в алгебрі ядер випливає

$$\left.\frac{\partial^2 P}{\partial z_b^\beta \partial (z_a^\alpha)^*}\right|_{\mathbf{z}=0} = \mathrm{const}(q,n) \cdot \left(\frac{1-q^{-2n}}{1-q^{-2}} q^{2(2n-a-\alpha)} \zeta_a^\alpha (\zeta_b^\beta)^* - \delta_{ab}\delta^{\alpha\beta}\right).$$

Покладаючи тут $a = b = c$, маємо

$$\left.\frac{\partial^2 P}{\partial z_c^\beta \partial (z_c^\alpha)^*}\right|_{\mathbf{z}=0} = \mathrm{const}(q,n) \cdot \left(\frac{1-q^{-2n}}{1-q^{-2}} q^{2(2n-c-\alpha)}\; \zeta_c^\alpha (\zeta_c^\beta)^* - \delta^{\alpha\beta}\right).$$

З іншого боку, твірні алгебри функцій на межі Шилова пов'язані співвідношенням

$$\sum_{c=1}^{n} \zeta_c^\alpha (\zeta_c^\beta)^* = q^{-2n+\alpha+\beta} \delta^{\alpha\beta}, \qquad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n,$$

див. (A.5.2). Тому

$$\frac{1}{\mathrm{const}(q,n)} \sum_{c=1}^{n} q^{2c} \left.\frac{\partial^2 P}{\partial z_c^\beta \partial (z_c^\alpha)^*}\right|_{\mathbf{z}=0} =$$
$$= \frac{1-q^{-2n}}{1-q^{-2}} q^{2(2n-\alpha)} \sum_{c=1}^{n} \zeta_c^\alpha (\zeta_c^\beta)^* - q^2 \frac{1-q^{2n}}{1-q^2} \delta^{\alpha\beta} =$$
$$= \frac{1-q^{-2n}}{1-q^{-2}} q^{2(2n-\alpha)} q^{-2n+\alpha+\beta} \delta^{\alpha\beta} - q^2 \frac{1-q^{2n}}{1-q^2} \delta^{\alpha\beta} = 0,$$

і отже маємо таку Лему.

Лема 5.4.6. *Якщо* $u \in \mathcal{D}(\mathbb{D})'_q$ *є інтегралом Пуассона на квантовій матричній кулі розміру* $n \times n$, *то*

$$\sum_{c=1}^{n} q^{2c} \frac{\partial^2 u}{\partial z_c^\beta \partial (z_c^\alpha)^*}\bigg|_{\mathbf{z}=0} = 0$$

для всіх $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$.

Оскільки підпростір інтегралів Пуассона

$$u = \int\limits_{S(\mathbb{D})_q} P(\mathbf{z}, \zeta) f(\zeta) d\nu(\zeta), \qquad f \in \mathbb{C}[S(\mathbb{D})]_q,$$

є $U_q\mathfrak{sl}_{2n}$-підмодулем, з попередньої Леми випливає Теорема 5.4.1.

Відомо [77], що в класичному випадку $q = 1$ ядро Пуассона P є розв'язком ще однієї системи рівнянь:

$$\sum_{\gamma=1}^{n} \frac{\partial^2 u(g \cdot \mathbf{z})}{\partial z_b^\gamma \partial \overline{z}_a^\gamma}\bigg|_{\mathbf{z}=0} = 0, \qquad g \in SU_{n,n}, \quad a, b \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Аргумент, подібний до того, що викладено вище, дозволяє одержати q-аналог цього результату.

Твердження 5.4.7. *Якщо* $u \in \mathcal{D}(\mathbb{D})'_q$ *є інтегралом Пуассона на квантовій матричній кулі розміру* $n \times n$, *то*

$$\sum_{\gamma=1}^{n} q^{2\gamma} \frac{\partial^2 (\xi u)}{\partial z_a^\gamma \partial (z_b^\gamma)^*}\bigg|_{\mathbf{z}=0} = 0$$

для всіх $\xi \in U_q\mathfrak{sl}_{2n}$, $a, b = 1, 2, \dots, n$.

Висновки до розділу 5

У класичному випадку $q = 1$ визначення функтора Бернштейна істотно використовує алгебру узагальнених функцій на дійсній редуктивній групі Лі G з носіями в максимальній компактній підгрупі K. У підрозділі 5.1 знайдено q-аналог алгебри узагальнених функцій, зазначених вище. Це дозволило побудувати q-аналог функтора Бернштейна.

Вивчено властивості диференціальних числень на поліноміальних алгебрах над квантовими передоднорідними векторними просторами комутативного параболічного типу. На ці квантові алгебри поширений відомий для квантових матриць результат про те, що вимірності однорідних компонент для градуйованих векторних просторів k-форм співпадають з їх класичними значеннями. З'ясовано, що комплекс де Рама над такими алгебрами є дуальним до узагальненого комплекса Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда для тривіального $U_q\mathfrak{g}$-модуля. Це є квантовим аналогом відомого у класичному випадку $q = 1$ результату.

Викладено основи теорії функцій на квантових аналогах комплексних гіперболічних просторів $\mathcal{H}_{n,m}$ і відповідних ізотропних конусів $\Xi_{n,m}$. Запроваджуються так звані "простори функцій з компактними носіями" (простори фінітних функцій). Для цих некомутативних алгебр побудовано точні зображення та інтеграли; для цих останніх доведено інваріантність щодо дії квантової універсальної огортуючої алгебри $U_q\mathfrak{su}_{n,m}$. Побудовано квантовий аналог основної унітарної серії $U_q\mathfrak{su}_{n,m}$-модулів, пов'язаних з квантовим аналогом конуса Ξ. Для цих модулів встановлено необхідні умови еквівалентності.

Ще один результат пов'язаний з одержанням квантових аналогів для інтеграла Пуассона і рівнянь Хуа. У класичному випадку інтегральний оператор Пуассона сплітає дії групи $SU_{n,n}$ у просторах неперервних функцій на матричній кулі і її межі Шилова (унітарних матрицях). Але не будь-яка неперервна функція на матричній кулі може бути одержана шляхом застосування інтегрального оператора Пуассона до неперервної функції на межі Шилова. Класичний результат стверджує, що повну характеризацію образа оператора Пуассона дає система диференціальних рівнянь Хуа.

У цій роботі подано квантовий аналог оператора Пуассона. Виведено рівняння Хуа у квантовому випадку. Доведено, що ці рівняння є необхідною умовою приналежності функції до образу квантового оператора Пуассона. Досі невідомо, чи є ця умова також і достатньою.

РОЗДІЛ 6
КВАНТОВІ УНІВЕРСАЛЬНІ ОГОРТУЮЧІ З ІДЕМПОТЕНТАМИ І РОЗКЛАДИ ПІРСА

Ми будуємо нові квантові алгебри, що містять $U_q(sl_2)$ [34, 88]. Вони також містять ідемпотенти і твірні картанівського типу, регулярні за фон Нейманом (див. [37, 38]).

6.1 Попередні відомості

Нагадаємо коротко необхідні позначення і основні факти про алгебри Хопфа [1, 21]. В нашому контексті алгебра $U^{(alg)}$ над $\mathbb{C}$ – це четвірка $(\mathbb{C}, A, \mu, \eta)$, де A – векторний простір, $\mu : A \otimes A \to A$ – множення (альтернативне позначення $\mu(a \otimes b) = a \cdot b$), $\eta : \mathbb{C} \to A$ – одиниця, тобто $\mathbf{1} \stackrel{def}{=} \eta(1)$, $\mathbf{1} \in A$, $1 \in \mathbb{C}$. Множення вважається асоціативним $\mu \circ (\mu \otimes \mathsf{id}) = \mu \circ (\mathsf{id} \otimes \mu)$, і одиниця характеризується властивістю $\mu \circ (\eta \otimes \mathsf{id}) = \mu \circ (\mathsf{id} \otimes \eta) = \mathsf{id}$. Морфізм алгебр – це лінійне відображення $\psi : U_1^{(alg)} \to U_2^{(alg)}$ із властивістю $\psi \circ \mu_1 = \mu_2 \circ (\psi \otimes \psi)$ і $\psi \circ \eta_1 = \eta_2$. Коалгебра $U^{(coalg)}$ – це четвірка $(\mathbb{C}, C, \Delta, \epsilon)$, де C – векторний простір, $\Delta : C \to C \otimes C$ – комноження, що має властивості $\Delta(A) = \sum\limits_i \left(A^i_{(1)} \otimes A^i_{(2)} \right)$ у позначеннях Свідлера, $\epsilon : C \to \mathbb{C}$ – коодиниця. Ці лінійні відображення мають такі властивості: коасоціативність $(\Delta \otimes \mathsf{id}) \circ \Delta = (\mathsf{id} \otimes \Delta) \circ \Delta$, властивість коодиниці $(\epsilon \otimes \mathsf{id}) \circ \Delta = (\mathsf{id} \otimes \epsilon) \circ \Delta = \mathsf{id}$. Морфізм коалгебр – це лінійне відображення $\varphi : U_1^{(coalg)} \to U_2^{(coalg)}$ таке, що $(\varphi \otimes \varphi) \circ \Delta_1 = \Delta_2 \circ \varphi$ і $\epsilon_1 = \epsilon_2 \circ \varphi$. Біалгебра $U^{(bialg)}$ – це шістка $(\mathbb{C}, B, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$, що є алгеброю та коалгеброю одночасно, з такими умовами узгодженості: $\Delta \circ \mu = (\mu \otimes \mu) \circ (\mathsf{id} \otimes \tau \otimes \mathsf{id}) \circ (\Delta \otimes \Delta)$, $\Delta(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$, $\epsilon \circ \mu = \mu_{\mathbb{C}} \circ (\epsilon \otimes \epsilon)$, $\epsilon(\mathbf{1}) = 1$; тут τ – перестановка тензорних множників, $\mu_{\mathbb{C}}$ – множення в основному полі. Алгебра Хопфа $U^{(Hopf)}$ – це біалгебра з антиподом, антиморфізмом алгебри з властивістю $(S \otimes \mathsf{id}) \circ \Delta = (\mathsf{id} \otimes S) \circ \Delta = \eta \circ \epsilon$.

Нехай $q \in \mathbb{C}$ і $q \neq \pm 1, 0$. Нагадаємо визначення квантової універсальної огортуючої алгебри $U_q(sl_2)$ [33]. Це асоціативна алгебра з одиницею

$U_q^{(alg)}(sl_2)$, визначена твірними k, k^{-1}, e, f і співвідношеннями

$$k^{-1}k = \mathbf{1}, \qquad kk^{-1} = \mathbf{1}, \tag{6.1.1}$$

$$ke = q^2 ek, \qquad kf = q^{-2} fk, \tag{6.1.2}$$

$$ef - fe = \frac{k - k^{-1}}{q - q^{-1}}. \tag{6.1.3}$$

Стандартна структура алгебри Хопфа на $U_q^{(Hopf)}(sl_2)$ визначається так:

$$\Delta_0(k) = k \otimes k, \tag{6.1.4}$$

$$\Delta_0(e) = \mathbf{1} \otimes e + e \otimes k, \qquad \Delta_0(f) = f \otimes \mathbf{1} + k^{-1} \otimes f, \tag{6.1.5}$$

$$\mathsf{S}_0(k) = k^{-1}, \qquad \mathsf{S}_0(e) = -ek^{-1}, \qquad \mathsf{S}_0(f) = -kf, \tag{6.1.6}$$

$$\varepsilon_0(k) = 1, \qquad \varepsilon_0(e) = \varepsilon_0(f) = 0. \tag{6.1.7}$$

Алгебра $U_q^{(alg)}(sl_2)$ є областю цілісності, тобто вона не має дільників нуля і, зокрема, ідемпотентів [22, 90]. База векторного простору $U_q(sl_2)$ утворена мономами $k^s e^m f^n$, де $m, n \geq 0$ [88]. Ми позначатимемо картанівську підалгебру в $U_q(sl_2)$ через $\mathcal{H}_0(\mathbf{1}, k, k^{-1})$.

Нашим завданням є застосування розкладу Пірса до певного розширення $U_q(sl_2)$. Добре відомо, що існує взаємно-однозначна відповідність між центральним розкладами одиниці на ідемпотенти і розкладами модуля в пряму суму. Тому ми почнемо з узагальнення картанівської підалгебри в $U_q(sl_2)$ до набуття нею властивості регулярності фон Неймана [55, 149, 20].

6.2 Від стандартної $U_q(sl_2)$ до U_{K+L}

Розглянемо твірні K, $\overline{K}$, що задовольняють співвідношенням

$$K\overline{K}K = K, \qquad \overline{K}K\overline{K} = \overline{K}, \tag{6.2.1}$$

що називають властивістю *регулярності фон Неймана* [55]. За умови комутативності

$$K\overline{K} = \overline{K}K \tag{6.2.2}$$

маємо ідемпотент $P \stackrel{\text{def}}{=} K\overline{K} = \overline{K}K$ із властивістю

$$\begin{aligned} PK = KP = K, \\ P^2 = P. \end{aligned} \tag{6.2.3}$$

Комутативна алгебра, генерована $K, \overline{K}$ (ми позначаємо її через $\mathcal{H}\left(K, \overline{K}\right)$), не містить одиниці, оскільки, на відміну від $U_q(sl_2)$, її співвідношення не передбачають одиницю явно, як у (6.1.1). Зазначимо, що $\mathcal{H}\left(K, \overline{K}\right)$ розглядалася як подібна картанівській частина аналогу квантової огортуючої алгебри з антиподом, регулярним за фон Нейманом $U_q^v = \mathfrak{vsl}_q(2)$, запровадженої Дуплієм та Лі [36, 35]. Відповідна алгебра з одиницею, одержана зовнішнім приєднанням одиниці $\mathcal{H}\left(\mathbf{1}, K, \overline{K}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{H}\left(K, \overline{K}\right) \oplus \mathbb{C}\mathbf{1}$ також з'являється в [36, 35] як частина $U_q^w = \mathfrak{wsl}_q(2)$.

$\mathcal{H}\left(\mathbf{1}, K, \overline{K}\right)$ містить ще один ідемпотент $(\mathbf{1} - P) = (\mathbf{1} - P)^2$. Тому ми запроваджуємо ще одну копію тієї ж алгебри (позначаємо її через $\mathcal{H}\left(L, \overline{L}\right)$) з твірними L і $\overline{L}$, що задовольняють таким же співвідношенням, що й K, $\overline{K}$ як вище:

$$L\overline{L}L - L = 0, \qquad \overline{L}L\overline{L} - \overline{L} = 0. \tag{6.2.4}$$

За умови комутативності

$$L\overline{L} = \overline{L}L \tag{6.2.5}$$

ідемпотент $Q \stackrel{\text{def}}{=} L\overline{L} = \overline{L}L$ задовольняє

$$\begin{aligned} QL = LQ = L, \\ Q^2 = Q. \end{aligned} \tag{6.2.6}$$

За умови відсутності додаткових співвідношень між K, $\overline{K}$ і L, $\overline{L}$, алгебри без одиниць $\mathcal{H}\left(K, \overline{K}\right)$ і $\mathcal{H}\left(L, \overline{L}\right)$ можуть утворювати лише вільний добуток. Але ми зіставляємо алгебри з одиницями $\mathcal{H}\left(\mathbf{1}, K, \overline{K}\right)$ і $\mathcal{H}\left(\mathbf{1}, L, \overline{L}\right)$ у такий спосіб, що їхні одиниці суміщаються, і додаємо ще одне співвідношення (розклад одиниці):

$$P + Q = \mathbf{1} \tag{6.2.7}$$

для одержання розкладу Пірса [141] вихідної алгебри $\mathcal{H}\left(\mathbf{1}, K, \overline{K}, L, \overline{L}\right)$, що зводиться до прямого добутку, оскільки $QP = PQ = 0$.

Внаслідок (6.2.3), (6.2.6) і (6.2.7) маємо

$$KL = \overline{L}K = LK = K\overline{L} = \overline{K}L = L\overline{K} = 0. \tag{6.2.8}$$

Нові порівняно з [36, 35] необоротні твірні L, $\overline{L}$ запроваджені, аби виправдати таке.

Лема 6.2.1. *Сума $aK + bL$ оборотна, і обернений елемент дорівнює $a^{-1}\overline{K} + b^{-1}\overline{L}$, де $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

Доведення зводиться до обчислення, що бере до уваги (6.2.7) і (6.2.8):

$$(aK + bL)\left(a^{-1}\overline{K} + b^{-1}\overline{L}\right) = K\overline{K} + L\overline{L} = P + Q = \mathbf{1}. \qquad \square$$

Це дозволяє розглянути двопараметричне сімейство морфізмів для картанівської підалгебри $\mathbf{\Phi}_{\mathcal{H}}^{(a,b)} : \mathcal{H}_0(\mathbf{1}, k, k^{-1}) \to \mathcal{H}\left(\mathbf{1}, K, \overline{K}, L, \overline{L}\right)$:

$$k \to aK + bL, \qquad k^{-1} \to a^{-1}\overline{K} + b^{-1}\overline{L}. \tag{6.2.9}$$

Твердження 6.2.2. *Відображення $\mathbf{\Phi}_{\mathcal{H}}^{(a,b)}$ є вкладенням, тобто*

$$\ker \mathbf{\Phi}_{\mathcal{H}}^{(a,b)} = 0.$$

Доведення. Використаємо (6.2.9) для визначення гомоморфізма $\overline{\mathbf{\Phi}}_{\mathcal{H}}^{(a,b)}$ з вільної алгебри $\overline{\mathcal{H}}_0(\mathbf{1}, k, k^{-1})$, генерованої $\mathbf{1}$, k, k^{-1}, у вільну алгебру $\overline{\mathcal{H}}\left(\mathbf{1}, K, \overline{K}, L, \overline{L}\right)$, генеровану $\mathbf{1}$, K, $\overline{K}$, L, $\overline{L}$. Ми стверджуємо, що $\overline{\mathbf{\Phi}}_{\mathcal{H}}^{(a,b)}$ є вкладенням. Дійсно, припустимо протилежне, тобто $\overline{\mathbf{\Phi}}_{\mathcal{H}}^{(a,b)}$ анігілює певний ненульовий елемент $\overline{\mathcal{H}}_0(\mathbf{1}, k, k^{-1})$. Цей елемент може розглядатися як "некомутативний поліном" від трьох змінних $\mathbf{1}$, k, k^{-1}. Оскільки лінійна заміна змінних (6.2.9) є невиродженою, ми одержуємо нетривіальний поліном від $\mathbf{1}$, K, $\overline{K}$, L, $\overline{L}$, що не може бути нулем у вільній алгебрі $\overline{\mathcal{H}}\left(\mathbf{1}, K, \overline{K}, L, \overline{L}\right)$. Залишається зазначити, що $\mathbf{\Phi}_{\mathcal{H}}^{(a,b)}$ встановлює взаємно однозначну відповідність між співвідношеннями в $\mathcal{H}_0(\mathbf{1}, k, k^{-1})$ і такими в образі $\mathbf{\Phi}_{\mathcal{H}}^{(a,b)}$, звідки наше твердження для морфізму $\mathbf{\Phi}_{\mathcal{H}}^{(a,b)}$ між фактор-алгебрами $\mathcal{H}_0(\mathbf{1}, k, k^{-1})$ і $\mathcal{H}\left(\mathbf{1}, K, \overline{K}, L, \overline{L}\right)$. $\square$

Тепер додамо ще дві твірні E і F, разом з двома додатковими співвідношеннями

$$(aK+bL)E = q^2E(aK+bL), \tag{6.2.10}$$

$$\left(a^{-1}\overline{K}+b^{-1}\overline{L}\right)E = q^{-2}E\left(a^{-1}\overline{K}+b^{-1}\overline{L}\right), \tag{6.2.11}$$

$$(aK+bL)F = q^{-2}F(aK+bL), \tag{6.2.12}$$

$$\left(a^{-1}\overline{K}+b^{-1}\overline{L}\right)F = q^{2}F\left(a^{-1}\overline{K}+b^{-1}\overline{L}\right), \tag{6.2.13}$$

$$EF-FE = \frac{(aK+bL)-\left(a^{-1}\overline{K}+b^{-1}\overline{L}\right)}{q-q^{-1}} \tag{6.2.14}$$

які, разом з (6.2.1) – (6.2.2) і (6.2.4) – (6.2.5), задають алгебру, що позначатиметься через $U^{(alg)22}_{aK+bL}$. Тут індекси 22 визначають кількість твірних в лівій (відповідно, правій) частині співвідношень між подібними до картанівських твірних (K, L) і E, F. Ця алгебра відповідає алгебрі $U^w_q = \mathfrak{wsl}_q(2)$, запровадженій Дуплієм і Лі [36, 35]. Точніше кажучи, існує морфізм алгебр $\mathfrak{wsl}_q(2) \to U^{(alg)22}_{aK+bL}$, що у позначеннях роботи [36] задається так

$$K_w \mapsto aK+bL, \quad \overline{K}_w \mapsto a^{-1}\overline{K}+b^{-1}\overline{L}, \quad E_w \mapsto E, \quad F_w \mapsto F. \tag{6.2.15}$$

Як можна побачити з Леми 6.2.1 разом з (6.2.10) – (6.2.14), образ цього морфізму є копією $U_q(sl_2)$, див. також [36, твердження 1].

Представимо аналог алгебри $U^v_q = \mathfrak{vsl}_q(2)$ з [36]. Це алгебра з тими ж твірними, що й $U^{(alg)22}_{aK+bL}$, і поданими нижче співвідношеннями (разом з (6.2.1) – (6.2.2) і (6.2.4) – (6.2.5)):

$$(aK+bL)E\left(a^{-1}\overline{K}+b^{-1}\overline{L}\right) = q^2E, \tag{6.2.16}$$

$$\left(a^{-1}\overline{K}+b^{-1}\overline{L}\right)E(aK+bL) = q^{-2}E, \tag{6.2.17}$$

$$(aK+bL)F\left(a^{-1}\overline{K}+b^{-1}\overline{L}\right) = q^{-2}F, \tag{6.2.18}$$

$$\left(a^{-1}\overline{K}+b^{-1}\overline{L}\right)F(aK+bL) = q^{2}F, \tag{6.2.19}$$

$$EF-FE = \frac{(aK+bL)-\left(a^{-1}\overline{K}+b^{-1}\overline{L}\right)}{q-q^{-1}}, \tag{6.2.20}$$

яку ми позначаємо $U^{(alg)31}_{aK+bL}$. Ця алгебра відповідає алгебрі $U^v_q = \mathfrak{vsl}_q(2)$ [36] у тому сенсі, що існує морфізм алгебр $\mathfrak{vsl}_q(2) \to U^{(alg)31}_{aK+bL}$. Як і вище, цей морфізм в позначеннях роботи [36], заданий на твірних (6.2.15), де індекси

w заміняються на v. Ще одне застосування Леми 6.2.1 дозволяє виявити, що образ цього морфізму є копією $U_q(sl_2)$, див. також [36, твердження 1].

Визначимо розширення $\mathbf{\Phi}^{(a,b)}$ морфізму $\mathbf{\Phi}_{\mathcal{H}}^{(a,b)}$ до морфізму $U_q(sl_2)$ зі значеннями в алгебрах $U_{aK+bL}^{(alg)22}$ і $U_{aK+bL}^{(alg)31}$:

$$\mathbf{\Phi}^{(a,b)} : \begin{cases} k \mapsto aK + bL, & k^{-1} \mapsto a^{-1}\overline{K} + b^{-1}\overline{L}, \\ e \mapsto E, & f \mapsto F. \end{cases} \tag{6.2.21}$$

Твердження 6.2.3. *Алгебри* $U_{aK+bL}^{(alg)22}$ *і* $U_{aK+bL}^{(alg)31}$ *є ізоморфними алгебрам* $U_{K+L}^{(alg)22} \stackrel{\mathrm{def}}{=} U_{aK+bL}^{(alg)22}|_{a=1,b=1}$ *і* $U_{K+L}^{(alg)31} \stackrel{\mathrm{def}}{=} U_{aK+bL}^{(alg)31}|_{a=1,b=1}$, *відповідно.*

Доведення. Бажаний ізоморфізм $\mathbf{\Psi} : U_{K+L}^{(alg)22,31} \to U_{aK+bL}^{(alg)22,31}$ задається так: $K \mapsto aK$, $L \mapsto bL$, $\overline{K} \mapsto a^{-1}\overline{K}$, $\overline{L} \mapsto b^{-1}\overline{L}$, $E \mapsto E$, $F \mapsto F$. $\square$

Виходячи з цього, ми не будемо розглядати нижче параметри a і b.

6.3 "Розділення" співвідношень

Ідемпотенти P і Q не є центральними в $U_{K+L}^{(alg)22}$ і $U_{K+L}^{(alg)31}$. Нехтуючи неточністю термінології, можна сказати, що ми маємо намір "розділити" співвідношення (6.2.10) – (6.2.14) і (6.2.16) – (6.2.20) у такий спосіб, що або P і Q стають центральними

$$PE = EP, \qquad QE = EQ, \tag{6.3.1}$$

$$PF = FP, \qquad QF = FQ, \tag{6.3.2}$$

або задовольняють "сплетеним" умовам

$$PE = EQ, \qquad QE = EP, \tag{6.3.3}$$

$$PF = FQ, \qquad QF = FP. \tag{6.3.4}$$

Точніше кажучи, ми додамо зазначені вище співвідношення, одержуючи відповідні фактори алгебр $U_{K+L}^{(alg)22}$ і $U_{K+L}^{(alg)31}$. "Розділені" 22-алгебри задаються переліками співвідношень, що подані у Таблиці 1 Додатку А.8, а "розділені" 31-алгебри визначаються Таблицею 2 Додатку А.8.

Зазначимо, що $P = K\overline{K}$ і $Q = L\overline{L}$ відсутні серед твірних, перелічених в Таблицях 1 та 2 Додатку A.8. Співвідношення в таблицях утворюють еквівалентні системи у термінах "справжніх" твірних щодо попередніх співвідношень для $U_{K+L}^{(alg)22}$ і $U_{K+L}^{(alg)31}$, разом з "розділенними" співвідношеннями (6.3.1) – (6.3.4). Процедура одержання табличних співвідношень з "не розділених" у більшості випадків зводиться до правого і/або лівого множення на ідемпотенти P і Q з подальшим використанням "правил анігіляції" (6.2.8). Навпаки, припустимо, що співвідношення з Таблиць 1 та 2 Додатку A.8 задані. Наприклад, почнемо зі співвідношень у лівій частині Таблиці 2. Для доведення того, що у цьому випадку P є центральним, використаємо (6.2.8):

$$\begin{aligned} PE &= K\overline{K}E(P+Q) = K(\overline{K}EK)\overline{K} + K\overline{K}(EL\overline{L}) = \\ &= K(q^{-2}EK\overline{K})\overline{K} + K\overline{K}(q^{-2}LE\overline{L}) = q^{-2}KE\overline{K} + 0 = EK\overline{K} = EP. \end{aligned}$$

Подібні ідеї працюють працюють також у решті перевірок.

Твердження 6.3.1. *Мають місце такі ізоморфізми:* $U_{K,L,norm}^{(alg)22} \cong U_{K,L,norm}^{(alg)31}$, *і* $U_{K,L,twist}^{(alg)22} \cong U_{K,L,twist}^{(alg)31}$.

Доведення. Просте обчислення показує, що в обидвох випадках (нормальному та сплетеному), ідеали співвідношень співпадають. Наприклад, праве множення $KE = q^2EK$ на $\overline{K}$ в $U_{K,L,norm}^{(alg)22}$ дає $KE\overline{K} = q^2EP$ як і в $U_{K,L,norm}^{(alg)31}$. Навпаки, стартуючи зі співвідношення $KE\overline{K} = q^2EP$ в $U_{K,L,norm}^{(alg)31}$, одержуємо $KE = K(PE) = K(EP) = \left(KE\overline{K}\right)K = (q^2EP)K = q^2EK$ як і в $U_{K,L,norm}^{(alg)22}$. Домножаючи EF-співвідношення в $U_{K,L,norm}^{(alg)22}$, $U_{K,L,twist}^{(alg)22}$ на P і Q, одержуємо EF-співвідношення в $U_{K,L,norm}^{(alg)31}$, $U_{K,L,twist}^{(alg)31}$, і навпаки, додаючи останні два EF-співвідношення в $U_{K,L,norm}^{(alg)31}$ і використовуючи (6.2.7), одержуємо EF-співвідношення в $U_{K,L,norm}^{(alg)22}$. Подібні аргументи встановлюють другий ізоморфізм.

З огляду на це, у подальшому ми будемо розглядати лише алгебри $U_{K,L,norm}^{(alg)22}$, $U_{K,L,twist}^{(alg)22}$ (без індексів 22).

Продовжимо морфізм $\mathbf{\Phi}_{\mathcal{H}}$ до морфізму, що приймає значення в "розділених" алгебрах $U^{(alg)}_{K,L,norm}$ і $U^{(alg)}_{K,L,twist}$:

$$\mathbf{\Phi}:\begin{cases} k\mapsto K+L, & k^{-1}\mapsto \overline{K}+\overline{L},\\ e\mapsto E, & f\mapsto F.\end{cases} \tag{6.3.5}$$

Твердження 6.3.2. *Відображення $\mathbf{\Phi}$, задане на твірних вище, припускає поширення до коректно визначеного морфізму алгебр з $U_q(sl_2)$ у $U^{(alg)}_{K,L,norm}$ або $U^{(alg)}_{K,L,twist}$, що є вкладенням.*

Доведення. Треба застосувати аргумент, подібний до того, що був використаний у доведенні Твердження 6.2.2. □

Наслідок 6.3.3. *Обидві алгебри $U^{(alg)}_{K,L,norm}$ і $U^{(alg)}_{K,L,twist}$ містять $U_q(sl_2)$ як підалгебру.*

Зазначимо, що розклад Пірса для $U^{(alg)}_{K,L,norm}$ має вигляд

$$U^{(alg)}_{K,L,norm}=PU^{(alg)}_{K,L,norm}P+QU^{(alg)}_{K,L,norm}Q, \tag{6.3.6}$$

тобто складає пряму суму двох ідеалів. Внаслідок цього, маємо

Твердження 6.3.4. *$U^{(alg)}_{K,L,norm}$ є прямою сумою двох підалгебр, кожна з яких ізоморфна $U_q(sl_2)$.*

Доведення. Бажаний ізоморфізм задається так

$$K\mapsto k\oplus 0,\quad \overline{K}\mapsto k^{-1}\oplus 0,\quad PE\mapsto e\oplus 0,\quad PF\mapsto f\oplus 0, \tag{6.3.7}$$

$$L\mapsto 0\oplus k,\quad \overline{L}\mapsto 0\oplus k^{-1},\quad QE\mapsto 0\oplus e,\quad QF\mapsto 0\oplus f, \tag{6.3.8}$$

і тому $P\mapsto \mathbf{1}\oplus 0$, $Q\mapsto 0\oplus\mathbf{1}$. Цей морфізм розпадається у пряму суму двох морфізмів, кожен з яких, очевидно, є ізоморфізмом. □

У "сплетеному" випадку розклад Пірса

$$U^{(alg)}_{K,L,twist}= \\ =PU^{(alg)}_{K,L,twist}P+PU^{(alg)}_{K,L,twist}Q+QU^{(alg)}_{K,L,twist}P+QU^{(alg)}_{K,L,twist}Q, \tag{6.3.9}$$

є нетривіальним, оскільки всі члени ненульові, і отже (6.3.9) не є прямою сумою ідеалів.

Запровадимо автоморфізм алгебр $U^{(alg)}_{K,L,norm}$ і $U^{(alg)}_{K,L,twist}$, що буде позначатись тією ж буквою $\boldsymbol{\Upsilon}$. У кожному з випадків, $\boldsymbol{\Upsilon}$ задається на твірних так:

$$E \mapsto E,\ F \mapsto F,\ K \mapsto L,\ \overline{K} \mapsto \overline{L},\ L \mapsto K,\ \overline{L} \mapsto \overline{K},\ \mathbf{1} \mapsto \mathbf{1}, \tag{6.3.10}$$

і далі поширюється до ендоморфізма алгебри. Факт коректної визначеності як лінійного відображення і його бієктивність встановлюються прийняттям до уваги того, що $\boldsymbol{\Upsilon}$ переставляє твірні (з переліку) і співвідношення. Зазначимо також, що $\boldsymbol{\Upsilon}^2 = \mathsf{id}$.

Твердження 6.3.5. *База Пуанкаре-Біркгофа-Вітта алгебри $U^{(alg)}_{K,L,norm}$ утворена мономами*

$$\left[\left\{PK^iE^jF^k\right\}_{i,j,k\geq 0} \cup \left\{\overline{K}^iE^jF^k\right\}_{i>0,j,k\geq 0}\right]$$
$$\cup \left[\left\{QL^iE^jF^k\right\}_{i,j,k\geq 0} \cup \left\{\overline{L}^iE^jF^k\right\}_{i>0,j,k\geq 0}\right].$$

Доведення. Оскільки $U^{(alg)}_{K,L,norm}$ – пряма сума двох примірників $U_q(sl_2)$, наше твердження безпосередньо випливає з [88]. $\square$

У випадку $U^{(alg)}_{K,L,twist}$ маємо розклад в пряму суму 4 векторних підпросторів (6.3.9). Нижче подається ПБВ база, що відповідає цьому розкладу.

Твердження 6.3.6. *База Пуанкаре-Біркгофа-Вітта алгебри $U^{(alg)}_{K,L,twist}$ утворена мономами*

$$\begin{aligned}
&\left[\left\{PK^iE^jF^k\right\}_{\substack{i,j,k\geq 0\\ j+k\ \text{парне}}} \cup \left\{\overline{K}^iE^jF^k\right\}_{\substack{i>0,j,k\geq 0\\ j+k\ \text{парне}}}\right]\\
\cup &\left[\left\{PK^iE^jF^k\right\}_{\substack{i,j,k\geq 0\\ j+k\ \text{непарне}}} \cup \left\{\overline{K}^iE^jF^k\right\}_{\substack{i>0,j,k\geq 0\\ j+k\ \text{непарне}}}\right]\\
\cup &\left[\left\{QL^iE^jF^k\right\}_{\substack{i,j,k\geq 0\\ j+k\ \text{непарне}}} \cup \left\{\overline{L}^iE^jF^k\right\}_{\substack{i>0,j,k\geq 0\\ j+k\ \text{непарне}}}\right]\\
\cup &\left[\left\{QL^iE^jF^k\right\}_{\substack{i,j,k\geq 0\\ j+k\ \text{парне}}} \cup \left\{\overline{L}^iE^jF^k\right\}_{\substack{i>0,j,k\geq 0\\ j+k\ \text{парне}}}\right].
\end{aligned} \tag{6.3.11}$$

Доведення. Внаслідок співвідношень з Таблиці 1 Додатку А.8, лінійна оболонка векторів (6.3.11) є інваріантною відносно множення на кожну з твірних K, $\overline{K}$, L, $\overline{L}$, E, F, звідки така інваріантність також має місце відносно множення на будь-який елемент алгебри $U^{(alg)}_{K,L,twist}$. Оскільки P і Q є також векторами бази, ця лінійна оболонка містить $P+Q=\mathbf{1}$, і тому співпадає з усією алгеброю. Для доведення лінійної незалежності векторів (6.3.11) досить довести, що кожна частина цієї системи векторів, що лежить усередині конкретної компоненти Пірса, є лінійно незалежною. Ми розглянемо окремий випадок компоненти Пірса $P \cdot U^{(alg)}_{K,L,twist} \cdot P$, генерованою сімейством векторів

$$\left\{PK^iE^jF^k\right\}_{\substack{i,j,k\geq 0\\ j+k \text{ парне}}} \cup \left\{\overline{K}^iE^jF^k\right\}_{\substack{i>0,j,k\geq 0\\ j+k \text{ парне}}},$$

частиною системи векторів (6.3.11) усередині перших квадратних дужок. Розглянемо (скінченну) лінійну комбінацію

$$\sum_{\substack{i,j,k\geq 0\\ j+k \text{ парне}}} \alpha_{ijk}PK^iE^jF^k + \sum_{\substack{i>0,j,k\geq 0\\ j+k \text{ парне}}} \beta_{ijk}\overline{K}^iE^jF^k \qquad (6.3.12)$$

яка є нетривіальною (не всі α_{ijk} і β_{ijk} дорівнюють нулю). Ми доведемо, що (6.3.12) не є нуль. Для цього, ми по-перше, використовуючи α_{ijk} і β_{ijk}, побудуємо відповідну нетривіальну лінійну комбінацію

$$\sum_{\substack{i,j,k\geq 0\\ j+k \text{ парне}}} \alpha_{ijk}k^ie^jf^k + \sum_{\substack{i>0,j,k\geq 0\\ j+k \text{ парне}}} \beta_{ijk}k^{-i}e^jf^k \qquad (6.3.13)$$

в $U_q(sl_2)$. Оскільки задіяні тут мономи утворюють ПБВ базу в $U_q(sl_2)$ [88], лінійна комбінація (6.3.13) ненульова. Застосовуючи відображення $\mathbf{\Phi}$ (6.3.5) до (6.3.13), одержуємо

$$\sum_{\substack{i,j,k\geq 0\\ j+k \text{ парне}}} \alpha_{ijk}(K+L)^iE^jF^k + \sum_{\substack{i>0,j,k\geq 0\\ j+k \text{ парне}}} \beta_{ijk}\left(\overline{K}+\overline{L}\right)^iE^jF^k. \qquad (6.3.14)$$

Оскільки $\mathbf{\Phi}$ є вкладенням за Твердженням 6.3.2, доходимо висновку, що (6.3.14) не є нуль у $U^{(alg)}_{K,L,twist}$. Варто зазначити, що у задіяних мономах $j+k$ є парним; звідси заключаємо, що проекції (6.3.14) у компоненти Пірса

$P \cdot U^{(alg)}_{K,L,twist} \cdot Q$ і $Q \cdot U^{(alg)}_{K,L,twist} \cdot P$ є нульовими. Тому (6.3.14) є сумою своїх проекцій в $P \cdot U^{(alg)}_{K,L,twist} \cdot P$ і $Q \cdot U^{(alg)}_{K,L,twist} \cdot Q$, які мають вигляд

$$\sum_{\substack{i,j,k \geq 0 \\ j+k \text{ парне}}} \alpha_{ijk} P K^i E^j F^k + \sum_{\substack{i>0,j,k \geq 0 \\ j+k \text{ парне}}} \beta_{ijk} \overline{K}^i E^j F^k$$

і

$$\sum_{\substack{i,j,k \geq 0 \\ j+k \text{ парне}}} \alpha_{ijk} Q L^i E^j F^k + \sum_{\substack{i>0,j,k \geq 0 \\ j+k \text{ парне}}} \beta_{ijk} \overline{L}^i E^j F^k,$$

відповідно. Легко бачити, що вони переставляються автоморфізмом $\boldsymbol{\Upsilon}$ (6.3.10), звідки ці проекції одночасно нульові чи ненульові. Зрозуміло, що має місце другий варіант, оскільки їх сума (6.3.14) ненульова. Зокрема,

$$\sum_{\substack{i,j,k \geq 0 \\ j+k \text{ парне}}} \alpha_{ijk} P K^i E^j F^k + \sum_{\substack{i>0,j,k \geq 0 \\ j+k \text{ парне}}} \beta_{ijk} \overline{K}^i E^j F^k$$

не нуль, що й треба було довести. Доведення лінійної незалежності всіх інших підсистем в (6.3.11) (в квадратних дужках), що відповідають іншим компонентам Пірса, здійснюється у подібний спосіб. □

6.4 Структура алгебри Хопфа і антипод, регулярний за фон Нейманом

Для побудови біалгебри ми потребуємо коодиницю ε на U_{K+L}. Оскільки P і Q – ідемпотенти в U_{K+L}, маємо $\varepsilon(P)(\varepsilon(P)-1) = 0$ і $\varepsilon(Q)(\varepsilon(Q)-1) = 0$, звідки або $\varepsilon(P) = 1$, $\varepsilon(Q) = 0$, або $\varepsilon(P) = 0$, $\varepsilon(Q) = 1$. Припустимо перший варіант. Тоді внаслідок $L = QL$ маємо $\varepsilon(L) = \varepsilon(QL) = 0$.

Використовуючи вкладення $\mathbf{\Phi}$, визначене в (6.2.9) і стандартні співвідношення (6.1.4), (6.1.5), (6.1.7), перенесемо комноження на образ $\mathbf{\Phi}$ (6.2.21):

$$\Delta(K+L) = (K+L)\otimes(K+L), \tag{6.4.1}$$

$$\Delta\left(\overline{K}+\overline{L}\right) = \left(\overline{K}+\overline{L}\right)\otimes\left(\overline{K}+\overline{L}\right), \tag{6.4.2}$$

$$\Delta(E) = \mathbf{1}\otimes E + E\otimes(K+L), \tag{6.4.3}$$

$$\Delta(F) = F\otimes\mathbf{1} + \left(\overline{K}+\overline{L}\right)\otimes F, \tag{6.4.4}$$

$$\varepsilon(E) = \varepsilon(F) = 0, \tag{6.4.5}$$

$$\varepsilon(K+L) = 1, \tag{6.4.6}$$

$$\varepsilon\left(\overline{K}+\overline{L}\right) = 1. \tag{6.4.7}$$

Для побудови комноження на алгебрах $U^{(alg)}_{K,L,norm}$ і $U^{(alg)}_{K,L,twist}$, заданих в Таблиці 1 Додатку А.8, використаємо (6.4.1) – (6.4.7) для визначення комноження Δ спочатку на $\mathbf{\Phi}(U^{(alg)}_q(sl_2))$ (шляхом перенесення з $U^{(alg)}_q(sl_2)$), а далі продовжимо його на алгебри $U^{(alg)}_{K,L,norm}$ і $U^{(alg)}_{K,L,twist}$, як показано у Таблиці 3 Додатку А.8.

Згортка на біалгебрах $U^{(bialg)}_{K,L,norm}$ і $U^{(bialg)}_{K,L,twist}$, побудованих вище, визначається так:

$$(\mathsf{A}\star\mathsf{B}) \equiv \mu(\mathsf{A}\otimes\mathsf{B})\Delta, \tag{6.4.8}$$

де A, B – лінійні ендоморфізми відповідних векторних просторів.

Спочатку розглянемо біалгебру $U^{(bialg)}_{K,L,norm}$ з точки зору запровадження структури алгебри Хопфа.

Твердження 6.4.1. *Біалгебра $U^{(bialg)}_{K,L,norm}$ не має антиподу S, що задовольняє стандартній аксіомі алгебри Хопфа*

$$\mathsf{S}\star\mathsf{id} = \mathsf{id}\star\mathsf{S} = \eta\circ\varepsilon. \tag{6.4.9}$$

Доведення. Оскільки $\varepsilon(P) = 1$ і $\Delta(P) = P\otimes P$, маємо внаслідок (6.4.8)

$$(\mathsf{S}\star\mathsf{id})(P) = \mathsf{S}(P)P = (\mathsf{id}\star\mathsf{S})(P) = P\mathsf{S}(P) = \mathbf{1}\cdot\varepsilon(P) = \mathbf{1}, \tag{6.4.10}$$

що неможливо з огляду на необоротність P. □

Розглянемо антиморфізм T алгебри $U_{K,L,norm}^{(bialg)}$:

$$\mathsf{T}(K)=\overline{K}, \qquad \mathsf{T}\left(\overline{K}\right)=K, \qquad \mathsf{T}(L)=\overline{L}, \qquad \mathsf{T}\left(\overline{L}\right)=L, \tag{6.4.11}$$

$$\mathsf{T}(E)=-E\left(\overline{K}+\overline{L}\right), \qquad \mathsf{T}(F)=-(K+L)F. \tag{6.4.12}$$

Для $U_{K,L,norm}^{(bialg)}$ маємо

$$(\mathsf{T}\star\mathsf{id})(K)=(\mathsf{id}\star\mathsf{T})(K)=(\mathsf{T}\star\mathsf{id})\left(\overline{K}\right)=(\mathsf{id}\star\mathsf{T})\left(\overline{K}\right)=P,$$

$$(\mathsf{T}\star\mathsf{id})(L)=(\mathsf{id}\star\mathsf{T})(L)=(\mathsf{T}\star\mathsf{id})\left(\overline{L}\right)=(\mathsf{id}\star\mathsf{T})\left(\overline{L}\right)=Q,$$

$$(\mathsf{T}\star\mathsf{id})(E)=(\mathsf{id}\star\mathsf{T})(E)=(\mathsf{T}\star\mathsf{id})(F)=(\mathsf{id}\star\mathsf{T})(F)=0.$$

Твердження 6.4.2. *Антиморфізм* T *алгебри* $U_{K,L,norm}^{(bialg)}$ *є регулярним за фон Нейманом:*

$$\mathsf{id}\star\mathsf{T}\star\mathsf{id}=\mathsf{id}, \qquad \mathsf{T}\star\mathsf{id}\star\mathsf{T}=\mathsf{T}. \tag{6.4.13}$$

Доведення. По-перше, зазначимо, що, оскільки згортка лінійних відображень є лінійним відображенням, досить перевірити (6.4.13) окремо на прямих складниками $PU_{K,L,norm}^{(bialg)}$ і $QU_{K,L,norm}^{(bialg)}$, які відповідають центральним ідемпотентам P і Q, відповідно. Ми почнемо з $PU_{K,L,norm}^{(bialg)}$, що є підбіалгеброю. Позначимо через $\varphi_P : PU_{K,L,norm}^{(bialg)} \to U_q(sl_2)$ ізоморфізм (6.3.7). Раніше було розглянуто ізоморфізм алгебр (що сплітає множення, $\varphi_P\circ\mu\circ\left(\varphi_P^{-1}\otimes\varphi_P^{-1}\right)=\mu_0=\mu_{U_q(sl_2)}$), але зараз, внаслідок визначень з Таблиці 3 Додатку A.8 і $\Delta(P)=P\otimes P$, доходимо висновку, що φ_P також сплітає комноження (6.1.4) – (6.1.5) на $U_q(sl_2)$ і обмеження комноження Δ на $U_{K,L,norm}^{(bialg)}$ на $PU_{K,L,norm}^{(bialg)}$, тобто $(\varphi_P\otimes\varphi_P)\circ\Delta\circ\varphi_P^{-1}=\Delta_0$.

З огляду на це, для заданих двох ендоморфізмів векторних просторів $U_{K,L,norm}^{(bialg)}$, що залишають $PU_{K,L,norm}^{(bialg)}$ інвіаріантним, φ_P переводить їх згортку (обмежену на $PU_{K,L,norm}^{(bialg)}$) в згортку перенесених відображень на $U_q(sl_2)$.

Проста перевірка показує, що id та T залишають $PU_{K,L,norm}^{(bialg)}$ інваріантним, і далі обчислення показує, що те ж саме має місце для $\mathsf{id}\star\mathsf{T}$ та $\mathsf{T}\star\mathsf{id}$. А саме, маємо

$$(\mathsf{id}\star\mathsf{T})(PX)=(\mathsf{T}\star\mathsf{id})(PX)=\varepsilon_0(\varphi_P(PX))P$$

для будь-якого $X \in U^{(bialg)}_{K,L,norm}$. Це означає, що φ_P встановлює еквівалентність (6.4.13) на $PU^{(bialg)}_{K,L,norm}$ і умови регулярності фон Неймана для перенесеного T застосуванням φ_P на $U_q(sl_2)$. Проста перевірка показує що цей перенесений T є саме S, антипод на $U_q(sl_2)$. Добре відомо, що S є також регулярним за фон Нейманом, що завершує доведення (6.4.13), обмежене на $PU^{(bialg)}_{K,L,norm}$.

У попередньому аргументі можна замінити φ_P на ізоморфізм $\mathbf{\Phi}^{-1}$: $\mathbf{\Phi}(U_q(sl_2)) \to U_q(sl_2)$, де $\mathbf{\Phi}$ – вкладення (6.3.5). Отже, одержуємо (6.4.13), обмежене на $\mathbf{\Phi}(U_q(sl_2))$. Але цей аргумент неможливо застосувати до $QU^{(bialg)}_{K,L,norm}$, оскільки останнє не є підкоалгеброю.

Візьмемо до уваги, що проекція $\mathbf{\Phi}(U_q(sl_2))$ у прямий складник $QU^{(bialg)}_{K,L,norm}$ є $QU^{(bialg)}_{K,L,norm}$. Це є наслідком того, що ПБВ база $\left\{k^i e^j f^k\right\}_{j,k\geq 0}$ в $U_q(sl_2)$, перенесена $\mathbf{\Phi}$, є

$$\left\{(K+L)^i E^j F^k\right\}_{i,j,k\geq 0} \cup \left\{\left(\overline{K}+\overline{L}\right)^i E^j F^k\right\}_{i>0,j,k\geq 0}.$$

Ці вектори мають такі проекції в $QU^{(bialg)}_{K,L,norm}$:

$$\left\{QL^i E^j F^k\right\}_{i,j,k\geq 0} \cup \left\{\overline{L}^i E^j F^k\right\}_{i>0,j,k\geq 0},$$

що складають базу в $QU^{(bialg)}_{K,L,norm}$ внаслідок Твердження 6.3.5. Отже, для будь-яких $X \in U^{(bialg)}_{K,L,norm}$ можна знайти $x \in U_q(sl_2)$ такий, що $QX = Q\mathbf{\Phi}(x)$. З огляду на це, маємо

$$\begin{aligned}(\mathsf{id} \star \mathsf{T} \star \mathsf{id})(QX) &= (\mathsf{id} \star \mathsf{T} \star \mathsf{id})((\mathbf{1}-P)\mathbf{\Phi}(x)) = \\ &= (\mathsf{id} \star \mathsf{T} \star \mathsf{id})(\mathbf{\Phi}(x)) - (\mathsf{id} \star \mathsf{T} \star \mathsf{id})(P\mathbf{\Phi}(x)) = \\ &= \mathbf{\Phi}(x) - P\mathbf{\Phi}(x) = (\mathbf{1}-P)\mathbf{\Phi}(x) = Q\mathbf{\Phi}(x) = QX.\end{aligned}$$

Подібне обчислення можна застосувати до другої частини (6.4.13), що завершує його перевірку на $QU^{(bialg)}_{K,L,norm}$, а тому й на $U^{(bialg)}_{K,L,norm}$. □

Визначення 6.4.3. *Ми називаємо антиморфізм* T *із властивістю* (6.4.13) *антиподом, регулярним за фон Нейманом.*

Визначення 6.4.4. *Ми називаємо біалгебру з антиподом, регулярним за фон Нейманом, алгеброй фон Неймана-Хопфа.*

Розглянемо можливість побудувати структуру алгебри Хопфа на $U_{K,L,twist}^{(bialg)}$. По-перше, зазначимо, що аргумент з доведення Твердження 6.4.1 у цьому випадку не працює. Насправді, застосування (6.4.9) до P дає, замість (6.4.10), таке співвідношення:

$$\mathsf{S}(P)P + \mathsf{S}(Q)Q = \mathbf{1},$$

що не суперечить необоротності P і Q, як те було в контексті (6.4.10). Запровадимо автоморфізм S алгебри $U_{K,L,twist}^{(bialg)}$ тими ж формулами, що й (6.4.11) – (6.4.12):

$$\mathsf{S}(K) = \overline{K}, \qquad \mathsf{S}\left(\overline{K}\right) = K, \qquad \mathsf{S}(L) = \overline{L}, \qquad \mathsf{S}\left(\overline{L}\right) = L,$$
$$\mathsf{S}(E) = -E\left(\overline{K} + \overline{L}\right), \qquad \mathsf{S}(F) = -(K+L)F.$$

Для $U_{K,L,twist}^{(bialg)}$ маємо:

$$(\mathsf{id} \star \mathsf{S})(K) = (\mathsf{S} \star \mathsf{id})(K) = (\mathsf{S} \star \mathsf{id})\left(\overline{K}\right) = (\mathsf{id} \star \mathsf{S})\left(\overline{K}\right) = \mathbf{1}, \tag{6.4.14}$$

$$(\mathsf{id} \star \mathsf{S})(L) = (\mathsf{S} \star \mathsf{id})(L) = (\mathsf{S} \star \mathsf{id})\left(\overline{L}\right) = (\mathsf{id} \star \mathsf{S})\left(\overline{L}\right) = 0, \tag{6.4.15}$$

$$(\mathsf{id} \star \mathsf{S})(E) = (\mathsf{S} \star \mathsf{id})(E) = (\mathsf{S} \star \mathsf{id})(F) = (\mathsf{id} \star \mathsf{S})(F) = 0. \tag{6.4.16}$$

Доведення наступного Твердження застосовує аргумент з [88, стор. 35].

Твердження 6.4.5. *Співвідношення* $(\mathsf{id} \star \mathsf{S})(X) = (\mathsf{S} \star \mathsf{id})(X) = \varepsilon(X) \cdot \mathbf{1}$ *мають місце для будь-якого* $X \in U_{K,L,twist}^{(bialg)}$.

Доведення. Зазначимо, що $X \mapsto \varepsilon(X)\mathbf{1}$ є морфізмом алгебр. Тому, з огляду на очевидний аргумент індукції, досить перевірити, що $(\mathsf{id} \star \mathsf{S})(XY) = (\mathsf{id} \star \mathsf{S})(X) \cdot (\mathsf{id} \star \mathsf{S})(Y)$ і $(\mathsf{S} \star \mathsf{id})(XY) = (\mathsf{S} \star \mathsf{id})(X) \cdot (\mathsf{S} \star \mathsf{id})(Y)$, де X – будь-яка з твірних K, $\overline{K}$, L, $\overline{L}$, E, F, а Y довільний. Використовуючи позначення Свідлера $\Delta(X) = \sum\limits_i X_i' \otimes X_i''$ [182], одержуємо

$$(\mathsf{S} \star \mathsf{id})(XY) = \sum_{ij} \mathsf{S}(Y_j')\mathsf{S}(X_i')X_i''Y_j''.$$

Внаслідок (6.4.14) – (6.4.16), $\sum\limits_i \mathsf{S}(X_i')X_i''$ – скаляр, помножений на $\mathbf{1}$, зокрема елемент центра в $U^{(bialg)}_{K,L,twist}$, отже

$$(\mathsf{S}\star\mathsf{id})(XY)=\sum_{ij}\mathsf{S}(X_i')X_i''\mathsf{S}(Y_j')Y_j''=$$
$$=\left(\sum_i\mathsf{S}(X_i')X_i''\right)\left(\sum_j\mathsf{S}(Y_j')Y_j''\right)=(\mathsf{S}\star\mathsf{id})(X)\cdot(\mathsf{S}\star\mathsf{id})(Y).$$

Подібний аргумент працює також і у випадку $(\mathsf{id}\star\mathsf{S})$.

Отже, маємо

Теорема 6.4.6. *1) $U^{(Hopf)}_{K,L}\stackrel{\mathrm{def}}{=}(U^{(bialg)}_{K,L,twist},\mathsf{S})$ є алгеброю Хопфа;*
2) $U^{(vN-Hopf)}_{K,L}\stackrel{\mathrm{def}}{=}(U^{(bialg)}_{K,L,norm},\mathsf{T})$ є алгеброю фон Неймана-Хопфа.

6.5 Структура R-матриці і розклад Пірса

Розглянемо універсальну R-матрицю для $U^{(vN-Hopf)}_{K,L}$ і $U^{(Hopf)}_{K,L}$. Аби запобігти розглядів, пов'язаних із формальними рядами (що є загальним контекстом щодо R-матриць), ми обмежимося квазі-кокомутативними біалгебрами [98]. Такі біалгебри генерують R-матриці простішого вигляду, які припускають (за певних додаткових умов) явну формулу, подану нижче.

Визначення 6.5.1. *Кажуть, що біалгебра $U^{(bialg)}=(\mathbb{C},B,\mu,\eta,\Delta,\varepsilon)$ є квазі-кокоммутативною, якщо існує оборотний елемент $R\in U^{(bialg)}\otimes U^{(bialg)}$, який називається універсальною R-матрицею, такий, що*

$$\Delta^{\mathrm{cop}}(b)=R\Delta(b)R^{-1},\qquad\forall b\in U^{(bialg)},$$

де Δ^{cop} – протилежне комноження в $U^{(bialg)}$.

R-матриця *сплетеної* біалгебри $U^{(bialg)}$ задовольняють умовам

$$(\Delta\otimes\mathrm{id})(R)=R_{13}R_{23},\qquad(\mathrm{id}\otimes\Delta)(R)=R_{13}R_{12},\tag{6.5.1}$$

де для $R=\sum\limits_i s_i\otimes t_i$, $R_{12}=\sum\limits_i s_i\otimes t_i\otimes\mathbf{1}$, тощо [34]. У подальшому в межах цього підрозділу ми розглядаємо випадок $q^n=1$, що є протилежним до попереднього контексту.

Розглянемо двосторонній ідеал I_{sl_2} в $U_q^{(alg)}(sl_2)$, генерований $\{k^n - \mathbf{1}, e^n, f^n\}$, разом з відповідною фактор-алгеброю $\widehat{U}_q^{(alg)}(sl_2) = U_q^{(alg)}(sl_2) \big/ I_{sl_2}$.

Теорема 6.5.2 ([98, стор. 230]). *Універсальна R-матриця для алгебри $\widehat{U}_q^{(alg)}(sl_2)$ має вигляд*

$$\widehat{R} = \sum_{0 \le i,j,m \le n-1} A_m^{ij}(q) \cdot e^m k^i \otimes f^m k^j,$$

$$A_m^{ij}(q) = \frac{1}{n} \frac{(q - q^{-1})^m}{[m]!} q^{\frac{m(m-1)}{2} + 2m(i-j) - 2ij},$$

де $[m]! = [1][2] \ldots [m]$, $[m] = (q^m - q^{-m})/(q - q^{-1})$.

Використовуючи (6.3.5), одержуємо аналог цієї теореми для $U_{K,L}^{(Hopf)}$. У подібний спосіб розглянемо фактор-алгебру $\widehat{U}_{K+L}^{(Hopf)} = U_{K,L}^{(Hopf)} / I_{K+L}^{(Hopf)}$, де двосторонній ідеал $I_{K+L}^{(Hopf)}$ генерований $\{K^n + L^n - \mathbf{1}, E^n, F^n\}$.

Теорема 6.5.3. *Універсальна R-матриця для $\widehat{U}_{K,L}^{(Hopf)}$ має вигляд*

$$\widehat{R}_{K+L}^{(Hopf)} = \sum_{0 \le i,j,m \le n-1} A_m^{ij}(q) \cdot E^m (K^i + L^i) \otimes F^m (K^j + L^j).$$

Доведення. Внаслідок морфізму $\widehat{\mathbf{\Phi}} : \widehat{U}_q^{(alg)}(sl_2) \to \widehat{U}_{K+L}^{(Hopf)}$, індукованого (6.3.5), і Теореми 6.5.2, досить (з огляду на оборотність R) перевірити співвідношення $\Delta^{\mathrm{cop}}(\xi) \widehat{R}_{K+L}^{(Hopf)} = \widehat{R}_{K+L}^{(Hopf)} \Delta(\xi)$ для $\xi = K, \overline{K}$, оскільки Δ і Δ^{cop} є морфізмами алгебр. Це твердження зводиться до перевірки

$$(K \otimes K + L \otimes L)(E^m (K^i + L^i) \otimes F^m (K^j + L^j)) = \\ = (E^m (K^i + L^i) \otimes F^m (K^j + L^j))(K \otimes K + L \otimes L),$$

і

$$\left(\overline{K} \otimes \overline{K} + \overline{L} \otimes \overline{L}\right) \left(E^m \left(\overline{K}^i + \overline{L}^i\right) \otimes F^m \left(\overline{K}^j + \overline{L}^j\right)\right) = \\ = \left(E^m \left(\overline{K}^i + \overline{L}^i\right) \otimes F^m \left(\overline{K}^j + \overline{L}^j\right)\right) \left(\overline{K} \otimes \overline{K} + \overline{L} \otimes \overline{L}\right),$$

використовуючи Таблицю 1 Додатку А.8. Співвідношення (6.5.1) переносяться $\widehat{\mathbf{\Phi}}$, оскільки $\widehat{R}_{K+L}^{(Hopf)}$ міститься у тензорному квадраті образа $\widehat{\mathbf{\Phi}}$. $\square$

Перейдемо до явного вигляду універсальної R-матриці у випадку $U_{K,L}^{(vN-Hopf)}$. Знову розглянемо фактор-алгебру $\widehat{U}_{K+L}^{(vN-Hopf)} = U_{K,L}^{(N-Hopf)}/I_{K+L}^{(vN-Hopf)}$, де двосторонній ідеал $I_{K,L}^{(vN-Hopf)}$ генерований $\{K^n + L^n - \mathbf{1}, E^n, F^n\}$.

Теорема 6.5.4. *Універсальна R-матриця для* $\widehat{U}_{K+L}^{(vN-Hopf)}$ *має вигляд*

$$\widehat{R}_{K+L}^{(vN-Hopf)} = \sum_{0\le i,j,m\le n-1} A_m^{ij}(q)\cdot E^m(K^i+L^i)\otimes F^m(K^j+L^j).$$

Доведення співпадає з таким для Теореми 6.5.3. □

Зазначимо, що $\widehat{R}_{K+L}^{(vN-Hopf)}$ не відповідає розкладу в пряму суму (6.3.6). Нижче ми подаємо дещо інше поняття R-матриці, яке шанує розклад (6.3.6), але відрізняється від того, що описано у Визначенні 6.5.1, необоротністю.

Визначення 6.5.5. *Біалгебра* $\widetilde{U}^{(bialg)} = (\mathbb{C}, B, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ *називається майже квазі-кокомутативною, якщо існує елемент* $\widetilde{R} \in \widetilde{U}^{(bialg)} \otimes \widetilde{U}^{(bialg)}$, *що зветься універсальною майже-R-матрицею, такий, що*

$$\Delta^{\mathrm{cop}}(b)\widetilde{R} = \widetilde{R}\Delta(b), \qquad \forall b \in \widetilde{U}^{(bialg)},$$

де Δ^{cop} *– протилежне комноження в* $\widetilde{U}^{(bialg)}$, *а елемент* $\widetilde{R}^{\dagger} \in \widetilde{U}^{(bialg)} \otimes \widetilde{U}^{(bialg)}$ *є таким, що*

$$\widetilde{R}\widetilde{R}^{\dagger}\widetilde{R} = \widetilde{R}, \qquad \widetilde{R}^{\dagger}\widetilde{R}\widetilde{R}^{\dagger} = \widetilde{R}^{\dagger}, \tag{6.5.2}$$

$\widetilde{R}^{\dagger}$ *називається оберненим Мура-Пенроуза для майже-R-матриці [55, 149].*

Майже-квазі-кокомутативна біалгебра $\widetilde{U}^{(bialg)}$ називається сплетеною, якщо її майже-R-матриця задовольняє (6.5.1).

Розглянемо фактор-алгебру $\widehat{U}_{K,L}^{(vN-Hopf)} = U_{K,L}^{(vN-Hopf)}/I_{K,L}^{(vN-Hopf)}$, де двосторонній ідеал $I_{K,L}^{(vN-Hopf)}$ генерований $\{K^n - P, L^n - Q, E^n, F^n\}$.

Теорема 6.5.6. *Універсальна R-матриця для* $\widehat{U}_{K,L}^{(vN-Hopf)}$ *є сумою*

$$\widehat{R}_{K,L}^{(vN-Hopf)} = \widehat{R}_{PP}^{(vN-Hopf)} + \widehat{R}_{QQ}^{(vN-Hopf)},$$

де

$$\widehat{R}_{PP}^{(vN-Hopf)} = \sum_{0\le i,j,m\le n-1} A_m^{ij}(q)\cdot E^m K^i \otimes F^m K^j,$$
$$\widehat{R}_{QQ}^{(vN-Hopf)} = \sum_{0\le i,j,m\le n-1} A_m^{ij}(q)\cdot E^m L^i \otimes F^m L^j.$$

Зауваження. Універсальна майже-R-матриця $\widehat{R}_{K,L}^{(vN-Hopf)}$ може бути представлена у вигляді

$$\widehat{R}_{K,L}^{(vN-Hopf)} = (P\otimes P)\widehat{R}_{PP}^{(vN-Hopf)} + (Q\otimes Q)\widehat{R}_{QQ}^{(vN-Hopf)}. \qquad (6.5.3)$$

Доведення. Нагадаємо, що $U_{K,L}^{(vN-Hopf)}$ припускає розклад у пряму суму (6.3.6), де кожен складник ізоморфний $U_q(sl_2)$. Факторизуючи за ідеалом $I_{K,L}^{(vN-Hopf)}$, одержуємо

$$\widehat{U}_{K,L}^{(vN-Hopf)} = PU_{K,L}^{(vN-Hopf)}P/\{I_{K,L}^{(vN-Hopf)}\cap PU_{K,L}^{(vN-Hopf)}P\}+ \\ + QU_{K,L}^{(vN-Hopf)}Q/\{I_{K,L}^{(vN-Hopf)}\cap QU_{K,L}^{(vN-Hopf)}Q\}. \qquad (6.5.4)$$

Кожен складник у правій частині (6.5.4) є зрозумілим чином ізоморфним $\widehat{U}_q^{(alg)}(sl_2)$, і при цьому цей ізоморфізм переводить $\mathbf{1}\in\widehat{U}_q^{(alg)}(sl_2)$ в P і Q, відповідно. Внаслідок Теореми 6.5.2, кожен зі складників у (6.5.3) задовольняє умовам Визначення 6.5.1 і (6.5.1), і тому те ж саме має місце для їх суми $\widehat{R}_{K,L}^{(vN-Hopf)}$. Також з Теореми 6.5.2 випливає, що існують $\widehat{R}_{PP}^{(vN-Hopf)\dagger}$, $\widehat{R}_{QQ}^{(vN-Hopf)\dagger}\in\widehat{U}_{K,L}^{(vN-Hopf)}\otimes\widehat{U}_{K,L}^{(vN-Hopf)}$ такі, що

$$\widehat{R}_{PP}^{(vN-Hopf)}\widehat{R}_{PP}^{(vN-Hopf)\dagger} = \widehat{R}_{PP}^{(vN-Hopf)\dagger}\widehat{R}_{PP}^{(vN-Hopf)} = P\otimes P,$$
$$\widehat{R}_{QQ}^{(vN-Hopf)}\widehat{R}_{QQ}^{(vN-Hopf)\dagger} = \widehat{R}_{QQ}^{(vN-Hopf)\dagger}\widehat{R}_{QQ}^{(vN-Hopf)} = Q\otimes Q,$$

і тому регулярність фон Неймана (6.5.2) має місце для

$$\widehat{R}^{(vN-Hopf)} = \widehat{R}_{PP}^{(vN-Hopf)} + \widehat{R}_{QQ}^{(vN-Hopf)},$$

оскільки $\widehat{R}_{PP}^{(vN-Hopf)}$, $\widehat{R}_{PP}^{(vN-Hopf)\dagger}$ і $\widehat{R}_{QQ}^{(vN-Hopf)}$, $\widehat{R}_{QQ}^{(vN-Hopf)\dagger}$ взаємно ортогональні. □

Висновки до розділу 6

Побудовано нові біалгебри на основі $U_q(sl_2)$, які містять ідемпотенти і інші дільники нуля. У деяких окремих випадках наведено явні формули для R-матриць. Визначено майже-R-матриці, що задовольняють умові регулярності фон Неймана.

У подібний спосіб можна розглянути аналоги $U_q(sl_n)$, устатковані відповідними більш розгалуженими сімействами ідемпотентів. Крім того, варто дослідити суперсиметричні версії поданих структур.

Треба сподіватись, що цей підхід зможе сприяти подальшим дослідженням біалгебр, які розпадаються у прямі суми, що є новим шляхом узагальнення стандартних алгебр Дрінфельда-Джімбо.

РОЗДІЛ 7
СИМЕТРІЇ КВАНТОВОЇ ПЛОЩИНИ

Раніше розглядалася у літературі єдина виділена структура $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-модульної алгебри на квантовій площині. Виявляється, що насправді існує континуум неізоморфних таких структур.

7.1 Класифікація структур $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-модульної алгебри на квантовій площині

Ми подаємо повний перелік структур $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-модульної алгебри на квантовій площині. Виявлено їх класи ізоморфізму, композиційні ряди відповідних зображень та класичні границі (див. [39])

7.1.1 Попередні відомості

Нехай H – алгебра Хопфа з комноженням Δ, коодиницею ε і антиподом S [1]. Нехай також A – алгебра з одиницею $\mathbf{1}$. Ми користуємося позначеннями Свідлера $\Delta(h) = \sum\limits_i h_i' \otimes h_i''$ [182].

Визначення 7.1.1. *Під структурою H-модульної алгебри на A мається на увазі гомоморфізм $\pi : H \to \operatorname{End}_{\mathbb{C}} A$ такий, що*

(i) $\pi(h)(ab) = \sum\limits_i \pi(h_i')(a) \cdot \pi(h_i'')(b)$ для всіх $h \in H$, $a, b \in A$;

(ii) $\pi(h)(\mathbf{1}) = \varepsilon(h)\mathbf{1}$ для всіх $h \in H$.

Структури π_1, π_2 називають ізоморфними, якщо існує автоморфізм Ψ алгебри A такий, що $\Psi\pi_1(h)\Psi^{-1} = \pi_2(h)$ для всіх $h \in H$.

Наше припущення щодо $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ полягає в тому, що воно не є коренем з одиниці ($q^n \neq 1$ для всіх ненульових цілих n). Розглянемо *квантову площину*, яка є алгеброю з одиницею $\mathbb{C}_q[x, y]$ з двома твірними x, y і єдиним співвідношенням

$$yx = qxy. \tag{7.1.1}$$

Нашим об'єктом є квантова універсальна огортуюча алгебра $U_q(\mathfrak{sl}_2)$. Це асоціативна алгебра з одиницею, що визначається твірними Шевалле k,

k^{-1}, e, f і співвідношеннями (6.1.1) – (6.1.3) з підрозділу 6.1. Там же подано стандартну структуру алгебри Хопфа на $U_q(sl_2)$.

Позначимо через $\mathbb{C}_q[x,y]_i$ i-ту однорідну компоненту алгебри $\mathbb{C}_q[x,y]$, яка є лінійною оболонкою мономів $x^m y^n$ із $m+n=i$. Для заданого полінома $p \in \mathbb{C}_q[x,y]$ позначимо через $(p)_i$ i-ту однорідну компоненту p, тобто проекцію p на $\mathbb{C}_q[x,y]_i$ паралельно прямій сумі всіх інших однорідних компонент алгебри $\mathbb{C}_q[x,y]$.

Ми будемо використовувати наступний результат Дж. Алева та М. Шамарі, що подає, зокрема, опис автоморфізмів алгебри $\mathbb{C}_q[x,y]$.

Твердження 7.1.2 (твердження 1.4.4(і) з [3]). *Нехай Ψ – автоморфізм алгебри $\mathbb{C}_q[x,y]$, тоді існують ненульові константи α, β такі, що*

$$\Psi : x \mapsto \alpha x, \qquad y \mapsto \beta y. \tag{7.1.2}$$

7.1.2 Структури $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-модульної алгебри на квантовій площині

Для скорочення запису, заданій структурі $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-модульної алгебри на $\mathbb{C}_q[x,y]$ ставимо у відповідність матрицю розміру 2×3 з елементами в $\mathbb{C}_q[x,y]$:

$$\mathsf{M} \stackrel{def}{=} \begin{Vmatrix} \mathsf{k} \\ \mathsf{e} \\ \mathsf{f} \end{Vmatrix} \cdot \|x, y\| = \begin{Vmatrix} \mathsf{k}(x) & \mathsf{k}(y) \\ \mathsf{e}(x) & \mathsf{e}(y) \\ \mathsf{f}(x) & \mathsf{f}(y) \end{Vmatrix}, \tag{7.1.3}$$

де k, e, f – твірні $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ і x, y – твірні $\mathbb{C}_q[x,y]$. Ми називаємо M *повною матрицею дії*. Навпаки, нехай задано матрицю M із елементами в $\mathbb{C}_q[x,y]$ як у (7.1.3). Для побудови відповідної структури $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-модульної алгебри на $\mathbb{C}_q[x,y]$ покладаємо (з використанням позначень Свідлера)

$$(\mathsf{ab})u \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{a}(\mathsf{b}u), \qquad \mathsf{a}, \mathsf{b} \in U_q(\mathfrak{sl}_2), \qquad u \in \mathbb{C}_q[x,y], \tag{7.1.4}$$

$$\mathsf{a}(uv) \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma_i(\mathsf{a}'_i u) \cdot (\mathsf{a}''_i v), \qquad \mathsf{a} \in U_q(\mathfrak{sl}_2), \qquad u, v \in \mathbb{C}_q[x,y]. \tag{7.1.5}$$

Це задає коректно визначену дію $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ на $\mathbb{C}_q[x,y]$ за виконання наступних умов. По-перше, застосування (визначене в (7.1.4)) елемента ідеалу співвідношень в $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ (6.1.1) – (6.1.3) до будь-якого $u \in \mathbb{C}_q[x, y]$ має давати нуль. По-друге, результат застосування (визначений в (7.1.5)) будь-якого $\mathsf{a} \in U_q(\mathfrak{sl}_2)$ до елемента ідеалу співвідношення в $\mathbb{C}_q[x, y]$ (7.1.1) має бути нульовим. Ці умови мають перевірятися в усіх випадках, розглянутих нижче.

Для заданої структури $U_q(\mathfrak{sl}_2)$модульної алгебри на квантовій площині, дія твірної k визначає автоморфізм алгебри $\mathbb{C}_q[x, y]$, що є наслідком оборотності k і $\Delta(\mathsf{k}) = \mathsf{k} \otimes \mathsf{k}$. Зокрема, з (7.1.2) випливає, що дія k повністю визначається його дією Ψ на твірних, яка задається матрицею M_k розміру 1×2 :

$$\mathsf{M}_\mathsf{k} \stackrel{\text{def}}{=} \|\mathsf{k}(x), \mathsf{k}(y)\| = \|\alpha x, \beta y\| \tag{7.1.6}$$

для певних $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (це є мінор матриці M (7.1.3)). Тому кожен моном $x^n y^m \in \mathbb{C}_q[x, y]$ є власним вектором для k, і відповідне власне значення $\alpha^n \beta^m$ буде називатися *вагою* цього моному, або у запису $\mathbf{wt}(x^n y^m) = \alpha^n \beta^m$.

Ми також потребуємо інший мінор матриці M:

$$\mathsf{M}_{\mathsf{ef}} \stackrel{\text{def}}{=} \left\| \begin{matrix} \mathsf{e}(x) & \mathsf{e}(y) \\ \mathsf{f}(x) & \mathsf{f}(y) \end{matrix} \right\| \tag{7.1.7}$$

і ми називаємо M_k і M_{ef} k-*матрицею* і ef-*матрицею дії*, відповідно.

Внаслідок (6.1.2), кожний елемент матриці M є ваговим вектором, зокрема, всі ненульові мономи, що утворюють конкретний матричний елемент, повинні мати одну й ту ж саму вагу. А саме, ціною певного нехтування точністю позначень, можна записати

$$\mathbf{wt}(\mathsf{M}) \stackrel{\text{def}}{=}$$
$$= \begin{pmatrix} \mathbf{wt}(\mathsf{k}(x)) & \mathbf{wt}(\mathsf{k}(y)) \\ \mathbf{wt}(\mathsf{e}(x)) & \mathbf{wt}(\mathsf{e}(y)) \\ \mathbf{wt}(\mathsf{f}(x)) & \mathbf{wt}(\mathsf{f}(y)) \end{pmatrix} \bowtie \begin{pmatrix} \mathbf{wt}(x) & \mathbf{wt}(y) \\ q^2\mathbf{wt}(x) & q^2\mathbf{wt}(y) \\ q^{-2}\mathbf{wt}(x) & q^{-2}\mathbf{wt}(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ q^2\alpha & q^2\beta \\ q^{-2}\alpha & q^{-2}\beta \end{pmatrix},$$

де відношення $\bowtie$ між двома матрицями $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$ є таким:

Позначення. $A \bowtie B$, якщо для кожної пари індексів i, j такої, що і a_{ij}, і b_{ij} ненульові, має місце $a_{ij} = b_{ij}$; наприклад $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \bowtie \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Нашим головним спостереженням є те, що дії $U_q(\mathfrak{sl}_2)$, які розглядаються, насправді значною мірою визначені проекціями M до найнижчих однорідних компонент алгебри $\mathbb{C}_q[x,y]$.

Позначимо через $(M)_i$ i-ту однорідну компоненту матриці M, чиїми елементами є i-ті однорідні компоненти відповідних елементів M. Отже, кожен елемент матриці M, якщо не нуль, має коректно визначену вагу.

Розглянемо константи $a_0, b_0, c_0, d_0 \in \mathbb{C}$ такі, що компонента ступеню нуль повної матриці дії є

$$(\mathsf{M})_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix}_0 . \tag{7.1.8}$$

Тут ми пишемо індекс 0 до матриці у правій частині, аби підкреслити її походження як 0-вої однорідної компоненти матриці M. Зазначимо, що ненульові проекції (вагових) елементів M повинні мати ту ж саму вагу. Тому

$$\mathbf{wt}((\mathsf{M})_0) \bowtie \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q^2\alpha & q^2\beta \\ q^{-2}\alpha & q^{-2}\beta \end{pmatrix}_0 . \tag{7.1.9}$$

З іншого боку, оскільки всі елементи $(\mathsf{M})_0$ є константами (7.1.8), доходимо висновку, що

$$\mathbf{wt}((\mathsf{M})_0) \bowtie \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_0 , \tag{7.1.10}$$

де $\bowtie$ має сприйматися як множина поелементих рівностей, що мають місце тоді й тільки тоді, коли вони мають сенс, тобто, коли відповідний елемент матриці-проекції $(\mathsf{M})_0$ ненульовий. Тому не можуть бути нулями одночасно всі елементи в 0-ій однорідній компоненті матриці M.

Пропонована класифікація структур $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-модульної алгебри на квантовій площині здійснюється у термінах пари символічних матриць, що походять від мінора M_{ef}. Ми використовуємо $(\mathsf{M}_{\mathsf{ef}})_i$ для побудови символічної матриці $\left(\overset{\star}{\mathsf{M}}_{\mathsf{ef}}\right)_i$, чиїми елементами є символи $\mathbf{0}$ або $\star$: ненульовий елемент $(\mathsf{M}_{\mathsf{ef}})_i$ заміняється на символ $\star$, а нульовий – на символ $\mathbf{0}$.

У випадку 0-ї компоненти поелементні співвідношення з (7.1.9) мають наслідком те, що кожен стовпчик в $\left(\overset{\star}{\mathsf{M}}_{\mathsf{ef}}\right)_0$ містить принаймні один $\mathbf{0}$, і звідси $\left(\overset{\star}{\mathsf{M}}_{\mathsf{ef}}\right)_0$ може бути однією з таких 9 матриць:

$$\begin{matrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_0, & & & \\ \begin{pmatrix} \star & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_0, & \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_0, & \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \mathbf{0} \end{pmatrix}_0, & \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \star \end{pmatrix}_0, \\ \begin{pmatrix} \star & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_0, & \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star \end{pmatrix}_0, & \begin{pmatrix} \star & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \star \end{pmatrix}_0, & \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \star \\ \star & \mathbf{0} \end{pmatrix}_0. \end{matrix} \tag{7.1.11}$$

Застосування e і f до (7.1.1) із використанням (7.1.6) дає

$$y\mathsf{e}(x) - q\beta\mathsf{e}(x)y = qx\mathsf{e}(y) - \alpha\mathsf{e}(y)x, \tag{7.1.12}$$

$$\mathsf{f}(x)y - q^{-1}\beta^{-1}y\mathsf{f}(x) = q^{-1}\mathsf{f}(y)x - \alpha^{-1}x\mathsf{f}(y). \tag{7.1.13}$$

Проектуючи (7.1.12) – (7.1.13) на $\mathbb{C}_q[x,y]_1$, одержуємо

$$a_0(1 - q\beta)y = b_0(q - \alpha)x, \qquad d_0\left(1 - q\alpha^{-1}\right)x = c_0\left(q - \beta^{-1}\right)y,$$

звідки маємо

$$a_0(1 - q\beta) = b_0(q - \alpha) = d_0\left(1 - q\alpha^{-1}\right) = c_0\left(q - \beta^{-1}\right) = 0.$$

Це визначає такі вагові константи α і β:

$$a_0 \neq 0 \Longrightarrow \beta = q^{-1}, \tag{7.1.14}$$

$$b_0 \neq 0 \Longrightarrow \alpha = q, \tag{7.1.15}$$

$$c_0 \neq 0 \Longrightarrow \beta = q^{-1}, \tag{7.1.16}$$

$$d_0 \neq 0 \Longrightarrow \alpha = q. \tag{7.1.17}$$

Цей висновок у порівнянні з (7.1.9), (7.1.10) має наслідком те, що символічні матриці з (7.1.11), які містять два символа $\star$, повинні бути виключені. Крім того, використовуючи (7.1.9) і (7.1.14) – (7.1.17), доходимо висновку, що позиція $\star$ у решті символічних матриць цілком визначає відповідні вагові константи:

$$\begin{pmatrix} \star & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = q^{-2}, \qquad \beta = q^{-1}, \tag{7.1.18}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = q, \qquad \beta = q^{-2}, \tag{7.1.19}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \mathbf{0} \end{pmatrix}_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = q^{2}, \qquad \beta = q^{-1}, \tag{7.1.20}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \star \end{pmatrix}_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = q, \qquad \beta = q^{2}. \tag{7.1.21}$$

Стосовно ж матриці $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_0$, вона зовсім не визначає вагових констант.

Далі, для 1-ї однорідної компоненти маємо $\mathbf{wt}(\mathsf{e}(x)) = q^2\mathbf{wt}(x) \neq \mathbf{wt}(x)$ (оскільки $q^2 \neq 1$), звідки $(\mathsf{e}(x))_1 = a_1 y$, і у подібний спосіб маємо

$$(\mathsf{M}_{\mathsf{ef}})_1 = \begin{pmatrix} a_1 y & b_1 x \\ c_1 y & d_1 x \end{pmatrix}_1,$$

де $a_1, b_1, c_1, d_1 \in \mathbb{C}$. Це дозволяє запровадити символічну матрицю $\begin{pmatrix} \overset{\star}{\mathsf{M}}_{\mathsf{ef}} \end{pmatrix}_1$, згадану вище. Використовуючи співвідношення між вагами подібно до (7.1.9), одержуємо:

$$\mathbf{wt}((\mathsf{M}_{\mathsf{ef}})_1) \bowtie \begin{pmatrix} q^2\alpha & q^2\beta \\ q^{-2}\alpha & q^{-2}\beta \end{pmatrix}_1 \bowtie \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}_1. \tag{7.1.22}$$

Це означає, що кожна строка і кожен стовпчик у $\begin{pmatrix} \overset{\star}{\mathsf{M}}_{\mathsf{ef}} \end{pmatrix}_1$ має містити принаймні один $\mathbf{0}$. Спроектуємо (7.1.12) – (7.1.13) на $\mathbb{C}_q[x,y]_2$:

$$a_1(1 - q\beta)y^2 = b_1(q - \alpha)x^2, \qquad d_1\left(1 - q\alpha^{-1}\right)x^2 = c_1\left(q - \beta^{-1}\right)y^2,$$

звідки $a_1(1 - q\beta) = b_1(q - \alpha) = d_1\left(1 - q\alpha^{-1}\right) = c_1\left(q - \beta^{-1}\right) = 0$. В якості наслідка маємо

$$a_1 \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \beta = q^{-1}, \tag{7.1.23}$$

$$b_1 \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = q, \tag{7.1.24}$$

$$c_1 \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \beta = q^{-1}, \tag{7.1.25}$$

$$d_1 \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = q. \tag{7.1.26}$$

Порівняння (7.1.22) і (7.1.23) – (7.1.26) дозволяє виключити символічну матрицю $\begin{pmatrix} \star & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \star \end{pmatrix}_1$ з переліку символічних матриць з принаймні одним $\mathbf{0}$ у кожній строчці чи стовпчику. Щодо інших символічних матриць із зазначеною вище властивістю маємо

$$\begin{pmatrix} \star & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_1 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = q^{-3}, \qquad \beta = q^{-1}, \tag{7.1.27}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_1 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = q, \qquad \beta = q^{-1}, \tag{7.1.28}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \mathbf{0} \end{pmatrix}_1 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = q, \qquad \beta = q^{-1}, \tag{7.1.29}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \star \end{pmatrix}_1 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = q, \qquad \beta = q^{3}, \tag{7.1.30}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \star \\ \star & \mathbf{0} \end{pmatrix}_1 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = q, \qquad \beta = q^{-1}. \tag{7.1.31}$$

Матриця $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_1$ взагалі не визначає вагових констант зазначеним вище способом.

З попередніх розглядів видно, що у більшості випадків пара символічних матриць, що відповідають 0-й та 1-й однорідним компонентам, цілком визначають вагові константи ймовірних відповідних симетрій. З подальшого стане зрозумілим, що більш високі однорідні компоненти є зайвими у межах даної класифікації. Тому ми подаємо перелік сімейств структур $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-модульної алгебри, кожна з яких індексується двома символічними матрицями $\begin{pmatrix} \overset{\star}{\mathsf{M}}_{\mathsf{ef}} \end{pmatrix}_0$, $\begin{pmatrix} \overset{\star}{\mathsf{M}}_{\mathsf{ef}} \end{pmatrix}_1$, і називаємо таке сімейство $\left[\begin{pmatrix} \overset{\star}{\mathsf{M}}_{\mathsf{ef}} \end{pmatrix}_0 ; \begin{pmatrix} \overset{\star}{\mathsf{M}}_{\mathsf{ef}} \end{pmatrix}_1 \right]$-серією. Зазначимо, що серії, індексовані парами ненульових символічних матриць на кожній з двох позицій є пустими, оскільки кожна з ненульових матриць визначає пару вагових констант α та β (7.1.18) – (7.1.21), що не співпадають з жодною парою таких констант, які відповідають ненульовим символічним матрицям на другій позиції (7.1.27) – (7.1.31).

Крім того, серії з нульовою символічною матрицею на першій позиції і символічною матрицею, що містить лише один символ $\star$ на другій позиціїї, є пустими. Наприклад, покажемо, що $\left[\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_0 ; \begin{pmatrix} \star & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_1 \right]$-серія є пустою. Якщо припустити протилежне, то внаслідок (6.1.3) у такій серії ми б мали $e(f(x)) - f(e(x)) = -(1 + q^2 + q^{-2})x$. Ми стверджуємо, що проекція лівої частини на $\mathbb{C}_q[x,y]_1$ нульова. Спочатку відмітимо, що якщо перша з символічних матриць утворена лише символами $\mathbf{0}$, застосування e або f не зменшує ступінь монома. З іншого боку, у цій серії $f(x)$ є сумою мономів ступеню принаймні 2. Тому, $e(f(x))$ має нульову проекцію на $\mathbb{C}_q[x,y]_1$. Аналогічно, $f(e(x))$ також має нульову проекцію на $\mathbb{C}_q[x,y]_1$. Одержана суперечність доводить наше твердження.

У подібний спосіб можна довести, що всі інші серії з нульовою символічною матрицею на першій позиції і символічною матрицею, яка містить лише одну $\star$ на другій позиції, є пустими.

Отже, у межах нашої класифікації ми одержали 24 "пустих" $\left[\begin{pmatrix} \overset{\star}{\mathsf{M}}_{\mathsf{ef}} \end{pmatrix}_0 ; \begin{pmatrix} \overset{\star}{\mathsf{M}}_{\mathsf{ef}} \end{pmatrix}_1 \right]$-серій. Перейдемо до "непустих" серій. Почнемо з найпростішого випадку, у якому ef-матриця дії нульова, а повна матриця дії має вигляд

$$\mathsf{M} = \left\| \begin{pmatrix} \alpha x & \beta y \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\|.$$

Теорема 7.1.3. $\left[\begin{pmatrix}\mathbf{0}\,\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\,\mathbf{0}\end{pmatrix}_0;\begin{pmatrix}\mathbf{0}\,\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\,\mathbf{0}\end{pmatrix}_1\right]$*-серія утворена 4-ма структурами $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-модульної алгебри на квантовій площині, заданими так:*

$$\mathsf{k}(x)=\pm x,\qquad \mathsf{k}(y)=\pm y, \tag{7.1.32}$$

$$\mathsf{e}(x)=\mathsf{e}(y)=\mathsf{f}(x)=\mathsf{f}(y)=0, \tag{7.1.33}$$

які попарно неізоморфні.

Доведення. Зрозуміло, що (7.1.32) – (7.1.33) задають коректно визначену $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-дію, узгоджену з множеннями в $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ і на квантовій площині, як і з комноженням в $U_q(\mathfrak{sl}_2)$. Доведемо, що тут немає інших $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-дій. застосування лівої частини (6.1.3) до x або y має нульову проекцію на $\mathbb{C}_q[x,y]_1$, оскільки у цій серії e та f переводять будь-який моном у суму мономів вищого ступеню. Тому $\left(\mathsf{k}-\mathsf{k}^{-1}\right)(x)=\left(\mathsf{k}-\mathsf{k}^{-1}\right)(y)=0$, звідки $\alpha-\alpha^{-1}=\beta-\beta^{-1}=0$, що призводить до $\alpha,\beta\in\{1,-1\}$. Для доведення (6.4.12), зазначимо, що $\mathbf{wt}(\mathsf{e}(x))=q^2\mathbf{wt}(x)=\pm q^2\neq\pm1$. З іншого боку, вага будь-якого вагового вектора у цій серії є ±1. Це і подібні міркування щодо e, f, x, y мають наслідком (6.4.12).

Аби побачити, що структури $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-модульної алгебри попарно неізоморфні, зазначимо, що будь-який автоморфізм квантової площини комутує з дією k (див. пункт 7.1.1). □

Дія з наступної теореми добре відома [130, 114, 98].

Теорема 7.1.4. $\left[\begin{pmatrix}\mathbf{0}\,\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\,\mathbf{0}\end{pmatrix}_0;\begin{pmatrix}\mathbf{0}\,\star\\ \star\,\mathbf{0}\end{pmatrix}_1\right]$*-серія утворена однопараметричним ($\tau\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$) сімейством структур $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-модульної алгебри на квантовій площині:*

$$\mathsf{k}(x)=qx,\qquad \mathsf{k}(y)=q^{-1}y, \tag{7.1.34}$$

$$\mathsf{e}(x)=0,\qquad \mathsf{e}(y)=\tau x, \tag{7.1.35}$$

$$\mathsf{f}(x)=\tau^{-1}y,\qquad \mathsf{f}(y)=0. \tag{7.1.36}$$

Усі ці структури ізоморфні, зокрема, дії з $\tau=1$.

Доведення. Легка перевірка показує, що (7.1.34) – (7.1.36) пропускаються скрізь усі співвідношення в $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ і $\mathbb{C}_q[x,y]$, і тому задають коректно визначену структуру $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-модульної алгебри на квантовій площині [130].

Доведемо, що $\left[\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}_0 ; \begin{pmatrix}\mathbf{0} & \star\\ \star & \mathbf{0}\end{pmatrix}_1\right]$-серія не містить ніяких інших дій крім тих, що описані в (7.1.34) – (7.1.36). Спочатку доведемо, що матричні елементи M_{ef} (7.1.7) не містять мономів ступеню, вищого за 1, тобто $\left(\mathsf{M}_{\mathsf{ef}}\right)_n = 0$ для $n \geq 2$. Загальний вигляд для $\mathsf{e}(x)$ і $\mathsf{e}(y)$ тут такий:

$$\mathsf{e}(x) = \sum_{m+n\geq 2} \overline{\rho}_{mn} x^m y^n, \qquad \mathsf{e}(y) = \tau_{\mathsf{e}} x + \sum_{m+n\geq 2} \overline{\sigma}_{mn} x^m y^n, \qquad (7.1.37)$$

де $\tau_{\mathsf{e}}, \overline{\rho}_{mn}, \overline{\sigma}_{mn} \in \mathbb{C}$, $\tau_{\mathsf{e}} \neq 0$. У цій серії

$$\mathbf{wt}\left(\mathsf{M}_{\mathsf{ef}}\right) = \begin{pmatrix} q^3 & q \\ q^{-1} & q^{-3} \end{pmatrix}.$$

Зокрема, $\mathbf{wt}(\mathsf{e}(x)) = q^3$ і $\mathbf{wt}(\mathsf{e}(y)) = q$, що зводить загальний вигляд (7.1.37) до суми мономів з однією фіксованою вагою

$$\mathsf{e}(x) = \sum_{m\geq 0} \rho_m x^{m+3} y^m, \qquad \mathsf{e}(y) = \tau_{\mathsf{e}} x + \sum_{m\geq 0} \sigma_m x^{m+2} y^{m+1}. \qquad (7.1.38)$$

Підставляючи (7.1.38) до (7.1.12) і далі проектуючи на одновимірний підпростір $\mathbb{C}x^{m+3}y^{m+1}$ (для кожного $m \geq 0$), одержуємо $\frac{\rho_m}{\sigma_m} = -q\frac{1-q^{m+1}}{1-q^{m+3}}$.

У подібний спосіб, співвідношення $\mathbf{wt}(\mathsf{f}(x)) = q^{-1}$ і $\mathbf{wt}(\mathsf{f}(y)) = q^{-3}$ мають наслідком

$$\mathsf{f}(x) = \tau_f y + \sum_{n\geq 0} \rho'_n x^{n+1} y^{n+2}, \qquad \mathsf{f}(y) = \sum_{n\geq 0} \sigma'_n x^n y^{n+3}, \qquad (7.1.39)$$

де $\tau_f \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Застосування (7.1.39) і (7.1.13) з подальшим проектуванням на $\mathbb{C}x^{n+1}y^{n+3}$ (для кожного $n \geq 0$) дозволяє одержати $\frac{\rho'_n}{\sigma'_n} = -q^{-1}\frac{1-q^{n+3}}{1-q^{n+1}}$. Отже, маємо

$$\mathsf{M}_{\mathsf{ef}} = \begin{pmatrix} 0 & \tau_e x \\ \tau_f y & 0 \end{pmatrix} + \\ + \sum_{n\geq 0} \begin{pmatrix} -\mu_n q(1-q^{n+1})x^{n+3}y^n & \mu_n(1-q^{n+3})x^{n+2}y^{n+1} \\ \nu_n(1-q^{n+3})x^{n+1}y^{n+2} & -\nu_n q(1-q^{n+1})x^n y^{n+3} \end{pmatrix},$$

де $\mu_n, \nu_n \in \mathbb{C}$. Ми доведемо, що друга матриця у цій сумі нульова. Припустимо протилежне. У випадку, коли існують як ненульові μ_n, так і ненульові ν_n, і оскільки суми тут скінченні, оберемо найбільший індекс n_e, для якого $\mu_{n_e} \neq 0$, а також найбільший індекс n_f із $\nu_{n_f} \neq 0$. Тоді, використовуючи (6.1.5), доходимо висновку, що найбільший ступінь мономів у $(ef - fe)(x)$ є $2n_e + 2n_f + 5$. Цей моном єдиний, і його обчислення дає $\mu_{n_e}\nu_{n_f}q^{n_e n_f - 1}(1 - q^{n_2 + n_f + 4})(1 - q^{2n_e + 2n_f + 6})x^{n_e + n_f + 3}y^{n_e + n_f + 2}$. Тому $(ef - fe)(x)$ має ненульову проекцію на одновимірний підпростір, генерований мономом $x^{n_e + n_f + 3}y^{n_e + n_f + 2}$, який має ступінь вищий від 1. Це суперечить (6.1.3), чия права частина, застосована до x, має ступінь 1.

У випадку, коли всі ν_n дорівнюють нулю, а деякі з μ_n ненульові, моном найвищого ступеню в $(ef - fe)(x)$ має вигляд

$$\tau_f \mu_{n_e} \frac{(1 - q^{n_e + 3})(1 - q^{2n_e + 4})}{q^{n_e + 1}(1 - q^2)} x^{n_e + 2} y^{n_e + 1},$$

і отже є ненульовим за наших припущень щодо q. Це знов призводить до суперечності як і вище. У протилежному випадку, коли всі μ_n нульові, а деякі з ν_n ненульові, можна здійснити подібне обчислення, що знову призводить до суперечності. Тому всі μ_n і ν_n дорівнюють нулю.

Зрештою, застосування (6.1.3) до x дає $\tau_e \tau_f = 1$, і отже $\tau_e = \tau$ і $\tau_f = \tau^{-1}$ для певного $\tau \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Ми стверджуємо, що всі дії з ненульовими τ ізоморфні дії з $\tau = 1$. Бажаний ізоморфізм задається автоморфізмом $\Phi_\tau : x \mapsto x$, $y \mapsto \tau y$. Зокрема, $\left(\Phi_\tau \mathsf{e}_\tau \Phi_\tau^{-1}\right)(y) = \tau^{-1}\Phi_\tau(\tau x) = x = \mathsf{e}_1(y)$, де $\mathsf{e}_\tau(y)$ позначає дію з (7.1.35) з довільним $\tau \neq 0$. $\square$

Тепер розглянемо дії, чиї символічні матриці $\begin{pmatrix} \overset{\star}{\mathsf{M}}_{\mathsf{ef}} \end{pmatrix}_0$ містить одну $\star$.

Теорема 7.1.5. $\left[\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_0 ; \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_1\right]$*-серія утворена однопараметричним* ($b_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$) *сімейством структур* $U_q(\mathfrak{sl}_2)$*-модульної алгебри на кван-*

товій площині

$$\mathsf{k}(x) = qx, \qquad \mathsf{k}(y) = q^{-2}y, \tag{7.1.40}$$

$$\mathsf{e}(x) = 0, \qquad \mathsf{e}(y) = b_0, \tag{7.1.41}$$

$$\mathsf{f}(x) = b_0^{-1}xy, \qquad \mathsf{f}(y) = -qb_0^{-1}y^2. \tag{7.1.42}$$

Всі ці структури ізоморфні, зокрема, дії з $b_0 = 1$.

Доведення. Просте обчислення показує, що розширення (7.1.40) – (7.1.42) до дії всієї алгебри $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ на $\mathbb{C}_q[x,y]$ пропускається через усі співвідношення.

Тепер доведемо, що $\left[\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}_0 ; \begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}_1\right]$-серія не містить ніяких інших дій, крім (7.1.40) – (7.1.42). Покажемо, що матричні елементи M_{ef} (7.1.7) не містять мономів ступеню вище 2, тобто $(\mathsf{M}_{\mathsf{ef}})_n = 0$ для $n \geq 3$. Загальний вигляд для $\mathsf{e}(x)$, $\mathsf{e}(y)$, $\mathsf{f}(x)$, $\mathsf{f}(y)$ такий:

$$\mathsf{e}(x) = \sum_{m+n\geq 0} \overline{\rho}_{mn} x^m y^n, \qquad \mathsf{e}(y) = \sum_{m+n\geq 0} \overline{\sigma}_{mn} x^m y^n, \tag{7.1.43}$$

$$\mathsf{f}(x) = \sum_{m+n\geq 0} \overline{\rho}'_{mn} x^m y^n, \qquad \mathsf{f}(y) = \sum_{m+n\geq 0} \overline{\sigma}'_{mn} x^m y^n \tag{7.1.44}$$

де $\overline{\rho}_{mn}, \overline{\sigma}_{mn}, \overline{\rho}'_{mn}, \overline{\sigma}'_{mn} \in \mathbb{C}$. У цій серії матриця ваг є такою:

$$\mathbf{wt}(\mathsf{M}_{\mathsf{ef}}) = \begin{pmatrix} q^3 & 1 \\ q^{-1} & q^{-4}\end{pmatrix}.$$

З огляду на це, загальний вигляд (7.1.43) – (7.1.44) має бути сумою мономів однакової ваги:

$$\mathsf{e}(x) = \sum_{m\geq 0} \rho_m x^{2m+3} y^m, \qquad \mathsf{e}(y) = b' + \sum_{m\geq 0} \sigma_m x^{2m+2} y^{m+1}, \tag{7.1.45}$$

$$\mathsf{f}(x) = b''xy + \sum_{n\geq 0} \rho'_n x^{2n+3} y^{n+2}, \quad \mathsf{f}(y) = b'''y^2 + \sum_{n\geq 0} \sigma'_n x^{2n+2} y^{n+3}. \tag{7.1.46}$$

Порівняємо (7.1.45) (відповідно, (7.1.46)) і (7.1.12) (відповідно, (7.1.13)), і далі спроектуємо вихідне співвідношення на одновимірний простір $\mathbb{C}x^{2m+3}y^{m+2}$ (відповідно, $\mathbb{C}x^{2n+3}y^{n+3}$) (для кожного $m \geq 0$, відповідно,

$n \geq 0$), що дає

$$\frac{\rho_m}{\sigma_m} = -q^2 \frac{1-q^{m+1}}{1-q^{2m+4}}, \qquad \frac{\rho'_n}{\sigma'_n} = -q^{-1} \frac{1-q^{n+3}}{1-q^{2n+4}}.$$

Отже, одержуємо

$$\mathsf{M}_{\mathsf{ef}} = \begin{pmatrix} 0 & b' \\ b''xy & b'''y^2 \end{pmatrix} + \\ + \sum_{n \geq 0} \begin{pmatrix} \mu_n q^2(1-q^{n+1})x^{2n+3}y^n & -\mu_n(1-q^{2n+4})x^{2n+2}y^{n+1} \\ -\nu_n(1-q^{n+3})x^{2n+3}y^{n+2} & \nu_n q(1-q^{2n+4})x^{2n+2}y^{n+3} \end{pmatrix}, \quad (7.1.47)$$

де $\mu_n, \nu_n \in \mathbb{C}$. Для доведення того, що друга матриця нульова, припустимо протилежне. Спочатку розглянемо випадок, коли існують як ненульові μ_n, так і ненульові ν_n. Оскільки суми скінченні, знайдемо найбільший індекс n_e із $\mu_{n_e} \neq 0$, і найбільший індекс n_f із $\nu_{n_f} \neq 0$. Після застосування (6.1.5) доходимо висновку, що найбільший ступінь мономів в $(ef - fe)(x)$ є $3n_e + 3n_f + 7$. Цей моном єдиний, і його обчислення дає

$$\mu_{n_e}\nu_{n_f} q^{2n_e n_f + 2n_e}(1-q^{n_e+n_f+4})(1-q^{2n_e+2n_f+6})x^{2n_e+2n_f+5}y^{n_e+n_f+2}. \quad (7.1.48)$$

За наших припущень щодо q, з огляду на $n_e \geq 0$, $n_f \geq 0$, $\mu_{n_e}\nu_{n_f} \neq 0$, стає зрозумілим, що (7.1.48) є ненульовим мономом ступеню вищого за 1. Це суперечить (6.1.3), чия права частина, застосована до x, має ступінь 1.

Застосування (6.1.3) до x та y, разом з (7.1.47), призводить до (з точністю до членів ступеню вищого за 1)

$$\left(\mathsf{ef} - \mathsf{fe} - \frac{\mathsf{k} - \mathsf{k}^{-1}}{q - q^{-1}}\right)(x) = 0 = b'b''x - x,$$
$$\left(\mathsf{ef} - \mathsf{fe} - \frac{\mathsf{k} - \mathsf{k}^{-1}}{q - q^{-1}}\right)(y) = 0 = b'b'''(1+q^{-2})y + \left(q + q^{-1}\right)y,$$

звідки $b' = b_0$, $b'' = b_0^{-1}$, $b''' = -qb_0^{-1}$ для певного $b_0 \neq 0$.

Подібне, але більш просте обчислення показує, що у випадку, коли всі ν_n нульові, і є ненульові μ_n, маємо моном найвищого ступеню в $(ef-fe)(x)$ вигляду

$$b_0^{-1}\mu_{n_e}\frac{(1-q^{n_e+3})(q^{2n_e+4}-1)}{1-q^2}x^{2n_e+3}y^{n_e+1}.$$

Цей моном ненульовий за наших припущень щодо q, що дає суперечність як і вище. Протилежний випадок, коли всі μ_n є нулями, і деякі з ν_n ненульові, може бути розглянутий аналогічно і теж призводить до суперечності. Отже, всі μ_n та ν_n є нульовими. Це дає співвідношення (7.1.40) – (7.1.42).

Зрештою, покажемо, що дії (7.1.40) – (7.1.42) з ненульовими b_0 ізоморфні дії з $b_0 = 1$. Як показує легке обчислення, бажаний ізоморфізм є таким: $\Phi_{b_0} : x \mapsto x,\ y \mapsto b_0 y$. Теорему доведено. □

Теорема 7.1.6. $\left[\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \mathbf{0} \end{pmatrix}_0 ; \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_1\right]$*-серія утворена однопараметричним* ($c_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$) *сімейством структур* $U_q(\mathfrak{sl}_2)$*-модульної алгебри на квантовій площині*

$$\mathsf{k}(x) = q^2 x, \qquad \mathsf{k}(y) = q^{-1} y, \tag{7.1.49}$$
$$\mathsf{e}(x) = -q c_0^{-1} x^2, \qquad \mathsf{e}(y) = c_0^{-1} xy,$$
$$\mathsf{f}(x) = c_0, \qquad \mathsf{f}(y) = 0. \tag{7.1.50}$$

Усі ці структури ізоморфні, зокрема, дії з $c_0 = 1$.

Доведення майже дослівно відтворює таке для попередньої Теореми.
□

Теорема 7.1.7. $\left[\begin{pmatrix} \star & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_0 ; \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_1\right]$*-серія утворена трипараметричним* ($a_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $s, t \in \mathbb{C}$) *сімейством* $U_q(\mathfrak{sl}_2)$*-дій на квантовій площині*

$$\mathsf{k}(x) = q^{-2} x, \qquad \mathsf{k}(y) = q^{-1} y, \tag{7.1.51}$$
$$\mathsf{e}(x) = a_0, \qquad \mathsf{e}(y) = 0, \tag{7.1.52}$$
$$\mathsf{f}(x) = -q a_0^{-1} x^2 + t y^4, \qquad \mathsf{f}(y) = -q a_0^{-1} xy + s y^3. \tag{7.1.53}$$

Область у просторі параметрів $\{(a_0, s, t) | s \neq 0,\ t \neq 0\}$ *розпадається на незчисленну кількість диз'юнктних підмножин* $\{(a_0, s, t) |\ s \neq 0,\ t \neq 0,\ \varphi = \mathrm{const}\}$, *де* $\varphi = \dfrac{t}{a_0 s^2}$. *Кожна така підмножина відповідає класу ізоморфізму структур* $U_q(\mathfrak{sl}_2)$*-модульної алгебри. Додатково існує ще три класи ізоморфізму, які відповідають підмножинам*

$$\{(a_0, s, t) |\ s \neq 0, t = 0\}, \quad \{(a_0, s, t) | s = 0, t \neq 0\}, \quad \{(a_0, s, t) |\ s = 0, t = 0\}.$$

Доведення. Проста перевірка показує, що (7.1.51) – (7.1.53) пропускається скрізь співвідношення, як і вище, і тому має розширення до коректно заданої серії $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-дій на квантовій площині.

Перевіримо, що $\left[\begin{pmatrix} \star & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_0 ; \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_1\right]$-серія не містить інших дій, крім (7.1.51) – (7.1.53). Спочатку розглянемо поліном $\mathsf{e}(x)$. Оскільки його вага $q^2\mathbf{wt}(x) = 1$, і вага будь-якого монома, відмінного від константи, є негативний ступінь q (у межах даної серії), отже відмінна від 1, єдиною можливістю залишається $\mathsf{e}(x) = a_0$. У подібний спосіб, єдиною можливістю для $\mathsf{e}(y)$ є нуль, оскільки у протилежному випадку, $\mathbf{wt}(\mathsf{e}(y)) = q^2\mathbf{wt}(y) = q$, що не є можливим з наведених вище міркувань.

Перейдемо до $\mathsf{f}(x)$ і приймемо до уваги, що $\mathbf{wt}(\mathsf{f}(x)) = q^{-4}$. Легко бачити, що всі мономи з цією вагою – це x^2, xy^2, y^4, тобто $\mathsf{f}(x) = ux^2 + vxy^2 + wy^4$. У подібний спосіб, $\mathbf{wt}(\mathsf{f}(y)) = q^{-3}$, і тому $\mathsf{f}(y) = zxy + sy^3$. Підстановка до (6.1.3) дає $\left(1 + q^{-2}\right) ua_0 = -\left(q + q^{-1}\right)$, $v = 0$, $za_0q^{-1} = -1$. Зазначимо, що (7.1.13) не дає нових співвідношень між u, v, z і не дає обмежень на w і s. Це призводить до (7.1.53).

Для виділення класів ізоморфізму структур у межах цієї серії ми використовуємо Теорему 7.1.2 для запису явного вигляду автоморфізму алгебри $\mathbb{C}_q[x, y]$ як $\Phi_{\theta,\omega} : x \mapsto \theta x$, $y \mapsto \omega y$. Зрозуміло, що це комутує з дією k. Для інших твірних маємо:

$$\begin{aligned}
\left(\Phi_{\theta,\omega}\mathsf{e}_{a_0,s,t}\Phi_{\theta,\omega}^{-1}\right)(x) &= \Phi_{\theta,\omega}\mathsf{e}_{a_0,s,t}\left(\theta^{-1}x\right) = \theta^{-1}a_0, \\
\left(\Phi_{\theta,\omega}\mathsf{e}_{a_0,s,t}\Phi_{\theta,\omega}^{-1}\right)(y) &= \Phi_{\theta,\omega}\mathsf{e}_{a_0,s,t}\left(\omega^{-1}y\right) = \omega^{-1}\Phi_{\theta,\omega}\mathsf{e}_{a_0,s,t}(y) = 0, \\
\left(\Phi_{\theta,\omega}\mathsf{f}_{a_0,s,t}\Phi_{\theta,\omega}^{-1}\right)(x) &= \Phi_{\theta,\omega}\mathsf{f}_{a_0,s,t}\left(\theta^{-1}x\right) = \theta^{-1}\Phi_{\theta,\omega}\left(-qa_0^{-1}x^2 + ty^4\right) \\
&= -qa_0^{-1}\theta x^2 + \theta^{-1}t\omega^4y^4, \\
\left(\Phi_{\theta,\omega}\mathsf{f}_{a_0,s,t}\Phi_{\theta,\omega}^{-1}\right)(y) &= \Phi_{\theta,\omega}\mathsf{f}_{a_0,s,t}\left(\omega^{-1}y\right) = \omega^{-1}\Phi_{\theta,\omega}\left(-qa_0^{-1}xy + sy^3\right) \\
&= -q\theta a_0^{-1}xy + s\omega^2y^3.
\end{aligned}$$

Тобто автоморфізм $\Phi_{\theta,\omega}$ перетворює параметри дій (7.1.52) – (7.1.53) у такий спосіб: $a_0 \mapsto \theta^{-1}a_0$, $s \mapsto \omega^2 s$, $t \mapsto \theta^{-1}\omega^4 t$. Зокрема, це означає, що у межах області $\{s \neq 0,\ t \neq 0\}$ одержуємо інваріант $\varphi = \frac{t}{a_0 s^2}$ класу ізоморфізму. Очевидно, додаток до цієї області має подальший розклад на три диз'юнктні підмножини $\{s \neq 0,\ t = 0\}$, $\{s = 0,\ t \neq 0\}$, $\{s = 0,\ t = 0\}$, що відповідають класам ізоморфізму з формулювання Теореми. $\square$

Теорема 7.1.8. $\left[\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \star \end{pmatrix}_0 ; \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_1\right]$*-серія утворена трипараметричним* ($d_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $s, t \in \mathbb{C}$) *сімейством* $U_q(\mathfrak{sl}_2)$*-дій на квантовій площині*

$$\mathsf{k}(x) = qx, \qquad \mathsf{k}(y) = q^2 y, \tag{7.1.54}$$

$$\mathsf{e}(x) = -qd_0^{-1}xy + sx^3, \qquad \mathsf{e}(y) = -qd_0^{-1}y^2 + tx^4, \tag{7.1.55}$$

$$\mathsf{f}(x) = 0, \qquad \mathsf{f}(y) = d_0. \tag{7.1.56}$$

Тут маємо область $\{(d_0, s, t)|\ s \neq 0,\ t \neq 0\}$ *у просторі параметрів, що розпадається на диз'юнктні підмножини* $\{(d_0, s, t)|\ s \neq 0,\ t \neq 0,\ \varphi = \mathrm{const}\}$ *з* $\varphi = \frac{t}{d_0 s^2}$. *Це незчисленне сімейство підмножин є у взаємно-однозначній відповідності з класами ізоморфізму структур* $U_q(\mathfrak{sl}_2)$*-модульної алгебри. Поза ними, існує ще три класа ізоморфізму, які індексуються елементами підмножин* $\{(d_0, s, t)|\ s \neq 0,\ t = 0\}$, $\{(d_0, s, t)|\ s = 0,\ t \neq 0\}$, $\{(d_0, s, t)|\ s = 0,\ t = 0\}$.

Доведення співпадає з таким для попередньої Теореми. $\square$

Зауваження. Не існує ізоморфізмів між структурами $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-модульної алгебри на $\mathbb{C}_q[x, y]$ з різних серій. Дійсно, кожен автоморфізм квантової площини комутує з дією твірної k, і тому обмеження ізоморфних дій на k завжди співпадають. З іншого боку, дії k у різних серіях різні.

Зауваження. Перелік структур $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-модульної алгебри на $\mathbb{C}_q[x, y]$, поданий у теоремах цього пункту, є повним. Це тому, що припущення цих теорем вичерпують всі припустимі форми для компонент $(\mathsf{M}_{\mathsf{ef}})_0$, $(\mathsf{M}_{\mathsf{ef}})_1$ для ef-матриці дії.

7.1.3 Композиційні ряди

Подивимось на структури $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-модульної алгебри на $\mathbb{C}_q[x, y]$, подані у теоремах попереднього пункту, просто як на зображення $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ у *вектор-*

ному просторі $\mathbb{C}_q[x, y]$. Нашим завданням є опис композиційних рядів цих зображень.

Твердження 7.1.9. *Зображення, що відповідають* $\left[\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_0 ; \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_1\right]$*-серії, описаній в* (7.1.32) – (7.1.33)*, розпадаються у пряму суму* $\mathbb{C}_q[x, y] = \oplus_{m=0}^{\infty} \oplus_{n=0}^{\infty} \mathbb{C}x^m y^n$ *(незвідних) одновимірних підзображень. Ці підзображення можуть належати до двох класів ізоморфізму, залежно від ваги моному* $x^m y^n$*, яка може бути* ± 1 *(див. Теорему 7.1.3).*

Доведення. Оскільки e і f представлені нульовими операторами і мономи $x^m y^n$ є власними векторами для k, кожен прямий складник є $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-інваріантним. □

Перейдемо до нетривіальних структур $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-модульної алгебри і почнемо з добре відомого випадку [130, 98].

Твердження 7.1.10. *Зображення, що відповідають* $\left[\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_0 ; \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \star \\ \star & \mathbf{0} \end{pmatrix}_1\right]$*-серії, описаній в* (7.1.34) – (7.1.36)*, розпадаються у пряму суму* $\mathbb{C}_q[x, y] = \oplus_{n=0}^{\infty} \mathbb{C}_q[x, y]_n$ *незвідних скінченновимірних підзображень, де* $\mathbb{C}_q[x, y]_n$ *–* n*-на однорідна компонента (описана у пункті 7.1.1), з* $\dim \mathbb{C}_q[x, y]_n = n + 1$ *і клас ізоморфізму цього підзображення є* $\mathcal{V}_{1,n}$ *[98, Глава VI].*

Доведення є таким для Теореми VII.3.3 (b) з [98]. □

У подальших розглядах ми матимемо розклади, що не зводяться до сімейства скінченновимірних під- або факторзображень. Ми нагадаємо визначення модулів Верма в нашому окремому випадку $U_q(\mathfrak{sl}_2)$.

Визначення 7.1.11. *Модуль Верма* $\mathcal{V}(\lambda)$ *(*$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$*) – це векторний простір з базою* $\{v_i,\ i \geq 0\}$*, у якому задана така дія* $U_q(\mathfrak{sl}_2)$*:*

$$\mathsf{k}v_i = \lambda q^{-2i} v_i, \qquad \mathsf{k}^{-1} v_i = \lambda^{-1} q^{2i} v_i,$$

$$\mathsf{e}v_0 = 0, \qquad \mathsf{e}v_{i+1} = \frac{\lambda q^{-i} - \lambda^{-1} q^i}{q - q^{-1}} v_i, \qquad \mathsf{f}v_i = \frac{q^{i+1} - q^{-i-1}}{q - q^{-1}} v_{i+1}.$$

Модуль Верма $\mathcal{V}(\lambda)$ генерований старшим ваговим ветором v_0, чия вага є λ (див. деталі в, наприклад, [98]).

Твердження 7.1.12. *Зображення, що відповідають* $\left[\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \star\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}_0; \begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}_1\right]$*-серії, описаній в* (6.1.1) – (7.1.42)*, розпадаються у пряму суму підзображень* $\mathbb{C}_q[x,y] = \oplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{V}_n$*, де* $\mathcal{V}_n = x^n\mathbb{C}[y]$*. Кожен* $\mathcal{V}_n$ *має композиційний ряд вигляду* $0 \subset \mathcal{J}_n \subset \mathcal{V}_n$*. Простий підмодуль* $\mathcal{J}_n$ *вимірності* $n+1$ *є лінійною оболонкою мономів* $x^n, x^n y, \ldots, x^n y^{n-1}, x^n y^n$*, чий клас ізоморфізму є* $\mathcal{V}_{1,n}$*, і при цьому* $\mathcal{J}_n$ *не є прямим складником в категорії* $U_q(\mathfrak{sl}_2)$*-модулів (не існує підмодуля* $\mathcal{W}$ *такого, що* $\mathcal{V}_n = \mathcal{J}_n \oplus \mathcal{W}$*). Фактормодуль* $\mathcal{V}_n/\mathcal{J}_n = \mathcal{Z}_n$ *ізоморфний (простому) модулю Верма* $\mathcal{V}\left(q^{-n-2}\right)$*.*

Доведення. Завдяки твердженню про ізоморфізм з Теореми 7.1.5, досить зафіксувати параметр серії $b_0 = 1$ в (6.1.1) – (7.1.42). Застосування e і f до елементів бази в $\mathbb{C}_q[x,y]$ дає:

$$\mathsf{e}(x^n y^p) = q^{1-p}\frac{q^p - q^{-p}}{q - q^{-1}} x^n y^{p-1} \neq 0, \qquad \forall p > 0, \tag{7.1.57}$$

$$\mathsf{e}(x^n) = 0, \tag{7.1.58}$$

$$\mathsf{f}(x^n y^p) = q^{-n}\frac{q^{2n} - q^{2p}}{q - q^{-1}} x^n y^{p+1}, \qquad \forall p \geq 0, \tag{7.1.59}$$

звідки кожний $\mathcal{V}_n$ є $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-інваріантним. Крім того, $\mathcal{J}_n$ – підмодуль в $\mathcal{V}_n$, генерований старшим ваговим вектором x^n, оскільки послідовність вагових векторів $\mathsf{f}(x^n y^p)$ обривається: $\mathsf{f}(x^n y^n) = 0$. Старшою вагою модуля $\mathcal{J}_n$ є q^n, і тому, внаслідок Теореми VI.3.5 з [98], підмодуль $\mathcal{J}_n$ є простим, і його клас ізоморфізму є $\mathcal{V}_{1,n}$.

Припустимо протилежне, тобто нехай $\mathcal{V}_n = \mathcal{J}_n \oplus \mathcal{W}$ для підмодуля $\mathcal{W}$ в $\mathcal{V}_n$, і $\mathcal{V}_n \ni x^n y^{n+1} = u + w$, $u \in \mathcal{J}_n$, $w \in \mathcal{W}$ – відповідний розклад. З огляду на (7.1.57) – (7.1.58), застосування e^{n+1} дає $A(q)x^n = \mathsf{e}^{n+1}(w)$ для певної ненульової константи $A(q)$, оскільки $\mathsf{e}^{n+1}|_{\mathcal{J}_n} = 0$. Це становить суперечність, адже $\mathcal{J}_n \cap \mathcal{W} = \{0\}$, і тому не існує підмодуля $\mathcal{W}$ як вище.

Фактормодуль $\mathcal{Z}_n$ є лінійною оболонкою векторів своєї бази $z_{n+1}, z_{n+2}, \ldots$, що є проекціями $x^n y^{n+1}, x^n y^{n+2}, \ldots$, відповідно, на $\mathcal{V}_n/\mathcal{J}_n$. Внаслідок (7.1.57), z_{n+1} є старшим ваговим вектором з вагою q^{-n-2}, і він генерує $\mathcal{Z}_n$, як це можна побачити з (7.1.59). З властивості універсальності модулів Верма (див., наприклад, Твердження VI.3.7 з [98]) випливає, що існує сюр'єктивний морфізм модулів $\Pi : \mathcal{V}\left(q^{-n-2}\right) \to \mathcal{Z}_n$. Внаслідок твердження 2.5 з [88], $\ker \Pi = 0$, і тому Π є ізоморфізмом. $\square$

Наступна серія, на відміну від попередньої, пов'язана з модулями Верма з молодшою вагою, а поза цим доведення наступного Твердження аналогічне (ми також покладаємо тут $d_0 = 1$).

Твердження 7.1.13. *Зображення, що відповідають* $\left[\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \star & \mathbf{0}\end{pmatrix}_0 ; \begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}_1\right]$*-серії, описаній в* (7.1.49) – (7.1.50)*, розпадаються у пряму суму підзображень* $\mathbb{C}_q[x,y] = \oplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{V}_n$*, де* $\mathcal{V}_n = \mathbb{C}[x]y^n$*. Кожен* $\mathcal{V}_n$ *має композиційний ряд вигляду* $0 \subset \mathcal{J}_n \subset \mathcal{V}_n$*. Простий підмодуль* $\mathcal{J}_n$ *вимірності* $n+1$ *є лінійною оболонкою* $y^n, xy^n, \ldots, x^{n-1}y^n, x^n y^n$*. Це* $U_q(\mathfrak{sl}_2)$*-модуль, чиїм молодшим ваговим вектором є* y^n *з вагою* q^{-n}*, і його клас ізоморфізму є* $\mathcal{V}_{1,n}$*. Підмодуль* $\mathcal{J}_n$ *не є прямим складником в категорії* $U_q(\mathfrak{sl}_2)$*-модулів (не існує підмодуля* $\mathcal{W}$ *такого, що* $\mathcal{V}_n = \mathcal{J}_n \oplus \mathcal{W}$*). Фактормодуль* $\mathcal{V}_n/\mathcal{J}_n = \mathcal{Z}_n$ *ізоморфний (простому) модулю Верма з молодшою вагою* q^{n+2}.

Перейдемо до розгляду трипараметричних серій з Теорем 7.1.7, 7.1.8. Незважаючи на наявність трьох параметрів, для всієї серії має місце єдиний розклад.

Твердження 7.1.14. *Зображення, що відповідають* $\left[\begin{pmatrix}\star & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}_0 ; \begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}_1\right]$*-серії, описаній в* (7.1.51) – (7.1.53)*, розпадаються в пряму суму підзображень* $\mathbb{C}_q[x,y] = \oplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{V}_n$*, де* $\mathcal{V}_n$ *з* $n \geq 1$ *– підмодуль, генерований своїм старшим ваговим вектором* y^n*; він ізоморфний простому модулю Верма* $\mathcal{V}\left(q^{-n}\right)$ *із старшою вагою. Підмодуль* $\mathcal{V}_0$ *має композиційний ряд вигляду* $0 \subset \mathcal{J}_0 \subset \mathcal{V}_0$*, де* $\mathcal{J}_0 = \mathbb{C}\mathbf{1}$*. Підмодуль* $\mathcal{J}_0$ *не є прямим складником в категорії* $U_q(\mathfrak{sl}_2)$*-модулів (не існує підмодуля* $\mathcal{W}$ *такого, що* $\mathcal{V}_0 = \mathcal{J}_0 \oplus \mathcal{W}$*). Фактормодуль* $\mathcal{V}_0/\mathcal{J}_0$ *ізоморфний (простому) модулю Верма* $\mathcal{V}\left(q^{-2}\right)$.

Доведення. Спочатку розглянемо окремий випадок із (7.1.52), (7.1.53), у якому $s = t = 0$ і $a_0 = 1$. Тоді $\mathcal{V}_n = \mathbb{C}[x]y^n$ є $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-інваріантним, і просте обчислення дає

$$\begin{aligned}
\mathsf{e}(x^p y^n) &= q^{-n-p+1}\frac{q^p - q^{-p}}{q - q^{-1}} x^{p-1} y^n \neq 0, \qquad \forall p > 0,\\
\mathsf{e}(y^n) &= 0,\\
\mathsf{f}(x^p y^n) &= q^{n+p}\frac{q^{p+n} - q^{-p-n}}{q - q^{-1}} x^{p+1} y^n, \qquad \forall p \geq 0.
\end{aligned} \tag{7.1.60}$$

Зазначимо, що $\mathsf{f}(x^p y^n) = 0$ лише у випадку $p = n = 0$. Тому $\mathcal{V}_n$ з $n \geq 1$ має генеруючий старший ваговий вектор y^n, чиєю вагою є q^{-n}. Як і в доведенні Твердження 7.1.12, доходимо висновку, що кожен $\mathcal{V}_n$ з $n \geq 1$ ізоморфний (простому) модулю Верма зі старшою вагою $\mathcal{V}\left(q^{-n}\right)$. У випадку $n = 0$ зрозуміло, що $\mathcal{V}_0$ містить очевидний підмодуль $\mathbb{C}\mathbf{1}$, що не є прямим складником з міркувань, викладених у доведенні Твердження 7.1.12.

Перейдемо до загального випадку з трьома параметрами без обмежень. Формули (7.1.51) – (7.1.53) визначають існування послідовності підмодулів, що спадає

$$\ldots \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n-1} \subset \ldots \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_0 = \mathbb{C}_q[x, y],$$

де $\mathcal{F}_n = \cup_{k=n}^{\infty} \mathbb{C}[x] y^k$, оскільки оператори дії, застосовані до монома, можуть хіба що підвищити його ступінь за y. Зазначимо, що фактормодуль $\mathcal{F}_n/\mathcal{F}_{n+1}$ з необмеженими параметрами є ізоморфним модулю $\mathbb{C}[x]y^n \cong \mathcal{V}\left(q^{-n}\right)$, як і у випадку $s = t = 0$.

Ми стверджуємо, що $\mathcal{F}_{n+1}$ є прямим складником в $\mathcal{F}_n$, а саме $\mathcal{F}_n = \mathcal{V}_n \oplus \mathcal{F}_{n+1}$, $n \geq 0$, де $\mathcal{V}_n = U_q(\mathfrak{sl}_2) y^n$ для $n \geq 1$ і $\mathcal{V}_0 = U_q(\mathfrak{sl}_2) x$.

Спершу розглянемо випадок $n \geq 1$. Внаслідок (7.1.51) – (7.1.53), y^n є генеруючим старшим ваговим вектором підмодуля $\mathcal{V}_n = U_q(\mathfrak{sl}_2) y^n$, чиєю вагою є q^{-n}. Ще одне застосування аргументу з доведення Твердження 7.1.12 встановлює ізоморфізм $\mathcal{V}_n \cong \mathcal{V}\left(q^{-n}\right)$; зокрема, $\mathcal{V}_n$ є простим модулем внаслідок Твердження 2.5 з [88]. Тому $\mathcal{V}_n \cap \mathcal{F}_{n+1}$ не може бути власним підмодулем в $\mathcal{V}_n$. Оскільки $\mathcal{V}_n$ не міститься в $\mathcal{F}_{n+1}$ (бо $y^n \notin \mathcal{F}_{n+1}$), останній перетин є нульовим, і отже сума $\mathcal{V}_n + \mathcal{F}_{n+1}$ є прямою. З іншого боку, порівняння (7.1.53) з (7.1.60) дозволяє дійти висновку, що $\mathcal{V}_n + \mathcal{F}_{n+1}$ містить всі мономи $x^p y^m$, $m \geq n$, $p \geq 0$. Це доводить, що $\mathcal{F}_n = \mathcal{V}_n \oplus \mathcal{F}_{n+1}$.

Перейдемо до випадку $n = 0$. Композиційний ряд $0 \subset \mathbb{C}\mathbf{1} \subset \mathcal{V}_0 = U_q(\mathfrak{sl}_2)x$ розглядається у такий же спосіб, як і для $\mathcal{V}_0$ в Твердженні 7.1.12; зокрема, фактормодуль $\mathcal{V}_0/\mathbb{C}\mathbf{1}$ ізоморфний простому модулю Верма $\mathcal{V}\left(q^{-2}\right)$. Нехай $\pi : \mathcal{V}_0 \to \mathcal{V}_0/\mathbb{C}\mathbf{1}$ – природна проекція. Зрозуміло, що $\mathcal{F}_1$ не містить $\mathbb{C}\mathbf{1}$, тому обмеження π на $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{F}_1$ є взаємно однозначним. Отже, аби довести, що останній перетин нульовий, досить перевірити, що $\pi(\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{F}_1)$ є нуль. Оскільки модуль $\mathcal{V}_0/\mathbb{C}\mathbf{1}$ простий, єдиною альтернативою для $\pi(\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{F}_1) = \{0\}$ могло б стати $\pi(\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{F}_1) = \mathcal{V}_0/\mathbb{C}\mathbf{1}$. За останнього припущення повинен був би існувати елемент з $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{F}_1$, що має вигляд Py для певного $P \in \mathbb{C}_q[x, y]$, і при цьому $\pi(x) = \pi(Py)$. Це співвідношення еквівалентне $x - Py = \gamma$ для певної константи γ, що неможливо, адже мономи, що складають Py, разом з x і $\mathbf{1}$, лінійно незалежні. Одержана нами суперечність доводить, що $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{F}_1 = \{0\}$, і тому сума $\mathcal{V}_0 + \mathcal{F}_1$ є прямою. З іншого боку, порівняння (7.1.53) і (7.1.60) дозволяє дійти висновку, що $\mathcal{V}_0 + \mathcal{F}_1$ містить всі мономи $x^p y^m$, із $m, p \geq 0$. Отже, співвідношення $\mathcal{F}_n = \mathcal{V}_n \oplus \mathcal{F}_{n+1}$ доведено для $n \geq 0$. Це, разом з $\cap_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}_i = \{0\}$, має наслідком $\mathbb{C}_q[x, y] = (\oplus_{n=1}^{\infty} U_q(\mathfrak{sl}_2) y^n) \oplus U_q(\mathfrak{sl}_2)x$, що й треба було довести. $\square$

У подібний спосіб одержуємо наступне

Твердження 7.1.15. *Зображення, що відповідають* $\left[\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \star \end{pmatrix}_0 ; \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_1 \right]$*-серії, описаній в* (7.1.54) – (7.1.56)*, розпадаються в пряму суму підзображень* $\mathbb{C}_q[x, y] = \oplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{V}_n$*, де* $\mathcal{V}_n$ *з* $n \geq 1$ *– підмодуль, генерований своїм молодшим ваговим вектором* x^n*; він ізоморфний простому модулю Верма з молодшою вагою* q^n*. Підмодуль* $\mathcal{V}_0$ *має композиційний ряд вигляду* $0 \subset \mathcal{J}_0 \subset \mathcal{V}_0$*, де* $\mathcal{J}_0 = \mathbb{C}\mathbf{1}$*. Підмодуль* $\mathcal{J}_0$ *не є прямим складником в категорії* $U_q(\mathfrak{sl}_2)$*-модулів (не існує підмодуля* $\mathcal{W}$ *такого, що* $\mathcal{V}_0 = \mathcal{J}_0 \oplus \mathcal{W}$*). Фактормодуль* $\mathcal{V}_0/\mathcal{J}_0$ *ізоморфний (простому) модулю Верма з молодшою вагою* q^2*.*

Дії алгебри Лі $\mathfrak{sl}_2$ (тут це алгебра Лі, генерована твірними e, f, h зі співвідношеннями $[h, e] = 2e$, $[h, f] = -2f$, $[e, f] = h$) диференціюваннями на $\mathbb{C}[x, y]$, що є класичними границями квантових дій, виводяться з останніх шляхом підстановки $\mathbf{k} = q^h$ із подальшим формальним граничним переходом для $q \to 1$.

Ми подаємо перелік квантових симетрій разом із відповідними класичними границями у таблиці з Додатку А.9. Варто відзначити, що існує більше дійалгебри Лі $\mathfrak{sl}_2$ на $\mathbb{C}[x, y]$ диференціюваннями (див., наприклад, [69]), ніж їх міститься у нашій таблиці. З наших результатів випливає, що решта класичних дій не мають квантових аналогів. З іншого боку, серед квантових дій з першого рядка таблиці, єдиною дією, до якої можливе застосування процедури переходу до класичної границі, є дія з $k(x) = x$, $k(y) = y$. Інші три дії цієї серії не мають класичної границі у зазначеному вище сенсі.

7.2 Квантові симетрії алгебри поліномів Лорана над квантовою площиною

Ми подаємо сімейство $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-симетрій на алгебрі поліномів Лорана над квантовою площиною, що містить незчисленну кількість класів ізоморфізму (див. [177, 178]).

7.2.1 Попередні відомості

Нехай H – алгебра Хопфа з комноженням Δ, коодиницею ε та антиподом S [1]. Нехай також A – алгебра з одиницею $\mathbf{1}$. Ми будемо користуватися позначеннями Свідлера $\Delta(h) = \sum\limits_i h_i' \otimes h_i''$ [182] і визначенням структури H-модульної алгебри на A з пункту 7.1.1.

Структури π_1, π_2 називаються ізоморфними, якщо існує автоморфізм Ψ алгебри A з властивостями $\Psi\pi_1(h)\Psi^{-1} = \pi_2(h)$ для всіх $h \in H$.

Ми припускаємо, що $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ не є коренем з 1 ($q^n \neq 1$ для всіх ненульових цілих чисел n). Розглянемо квантову площину, яка є алгеброю з одиницею $\mathbb{C}_q[x, y]$ з двома твірними x, y та єдиним співвідношенням

$$yx = qxy. \tag{7.2.1}$$

Додамо до переліку твірних ще два елементи x^{-1}, y^{-1}, та до переліку співвідношень

$$xx^{-1} = x^{-1}x = yy^{-1} = y^{-1}y = \mathbf{1}. \qquad (7.2.2)$$

Розширена алгебра з одиницею $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$, яка виникає у такий спосіб, називається розширенням Лорана квантової площини (більш точна назва – алгебра поліномів Лорана на квантовій площині).

Кожній матриці з цілими елементами $\sigma = \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ та парі ненульових комплексних чисел $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{C}^*)^2$ поставимо у відповідність автоморфізм $\varphi_{\sigma,\alpha,\beta}$ $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$, визначений на генераторах x та y у такий спосіб:

$$\varphi_{\sigma,\alpha,\beta}(x) = \alpha x^k y^m; \qquad \varphi_{\sigma,\alpha,\beta}(y) = \beta x^l y^n. \qquad (7.2.3)$$

Добре відомий результат стверджує, що кожний автоморфізм $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ має вигляд (7.2.3), і група $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}])$ автоморфізмів $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ є напівпрямим добутком своїх підгруп $SL(2, \mathbb{Z})$ та $(\mathbb{C}^*)^2$, який задається так:

$$\sigma(\alpha, \beta)\sigma^{-1} = (\alpha, \beta)^\sigma \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\alpha^k \beta^m, \alpha^l \beta^n). \qquad (7.2.4)$$

[102] (див. також [4], [140]).

Нашим об'єктом є квантова універсальна огортуюча алгебра $U_q(\mathfrak{sl}_2)$. Це асоціативна алгебра з одиницею, що визначається твірними Шевалле k, k^{-1}, e, f і співвідношеннями (6.1.1) – (6.1.3) з підрозділу 6.1. Там же подано стандартну структуру алгебри Хопфа на $U_q(sl_2)$.

7.2.2 Симетрії з нетривіальним $\boldsymbol{\sigma}$

Якщо задана структура $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-модульної алгебри на $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ (яку у подальшому будемо називати симетрією, або просто дією для скорочення), твірна k діє автоморфізмом алгебри $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$, як легко можна вивести зі зворотністі k, Визначення 7.1.1(i) та (6.1.4). Зокрема, кожна симетрія однозначно визначає матрицю $\sigma \in SL(2, \mathbb{Z})$ як у (7.2.3).

Зауваження. Виявляється, що існує взаємно однозначна відповідність між $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-симетріями, що залишають інваріантними підалгебру $\mathbb{C}_q[x, y]$ та $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-симетріями на $\mathbb{C}_q[x, y]$. Дійсно, таку симетрію алгебри $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ завжди можна обмежити на $\mathbb{C}_q[x, y]$.

З іншого боку, нехай дана довільна симетрія π на $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ (не обов'язково така, що залишає інваріантною підалгебру $\mathbb{C}_q[x, y]$). Маємо наступні співвідношення:

$$\pi(\mathsf{k})(x^{-1}) = (\pi(\mathsf{k})x)^{-1} \qquad \pi(\mathsf{k})(y^{-1}) = (\pi(\mathsf{k})y)^{-1} \tag{7.2.5}$$

$$\pi(\mathsf{e})(x^{-1}) = -x^{-1}(\pi(\mathsf{e})x)(\pi(\mathsf{k})x)^{-1} \tag{7.2.6}$$

$$\pi(\mathsf{e})(y^{-1}) = -y^{-1}(\pi(\mathsf{e})y)(\pi(\mathsf{k})y)^{-1} \tag{7.2.7}$$

$$\pi(\mathsf{f})(x^{-1}) = -(\pi(\mathsf{k}^{-1})x)^{-1}(\pi(\mathsf{f})x)x^{-1} \tag{7.2.8}$$

$$\pi(\mathsf{f})(y^{-1}) = -(\pi(\mathsf{k}^{-1})y)^{-1}(\pi(\mathsf{f})y)y^{-1} \tag{7.2.9}$$

Тут (7.2.5) є очевидним, оскільки $\pi(\mathsf{k})$ є автоморфізмом; (7.2.6) – (7.2.9) виводяться "диференціюванням" (тобто, застосуванням e та f, відповідно, до) (7.2.2). Ці співвідношення залишаються справедливими, коли x або y замінюються на довільний оборотний елемент.

Таким чином, для заданої симетрії на $\mathbb{C}_q[x, y]$, співвідношення (7.2.5) – (7.2.9) задають коректно визначене її продовження на додаткові твірні x^{-1}, y^{-1}, і отже на $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$.

Виглядає так, нібито тут має бути велика відмінність від контексту роботи [39], з огляду на (уявний) надлишок невагових дій, які пов'язані з нетривіальними матрицями σ. Проте, виявляється, що існує лише невелике сімейство таких симетрій. Почнемо з опису останніх дій.

Нехай дана матриця $\sigma = \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$, також нехай λ і μ – її власні значення. Ми розглянемо два ряда припущень на σ:

(i) $\overline{\lambda} = \mu$ та (оскільки $\lambda\mu = 1$) $|\lambda| = |\mu| = 1$,

(ii) $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ та $\lambda, \mu \notin \{-1, 1\}$.

Це означає, по-перше, $\lambda + \mu \in \mathbb{Z}$. У випадку (i), це, разом з іншими обмеженнями (i), означає, що можливими значеннями для $\lambda + \mu = \operatorname{tr}\sigma$ можуть бути лише 0, ± 1, ± 2. Таким чином, маючи завданням знайти симетрії, що відповідають припущенням (i), ми маємо розглянути п'ять окремих випадків.

(i-1) Припустимо, що $\operatorname{tr}\sigma = 2$. Це означає, що $\lambda = \mu = 1$.

Розгляд випадку, коли σ є просто одиничною матрицею I, відкладається до наступного пункту.

Розглянемо випадок (матриці, спряженої до) блока Жордана, іншими словами, власний підпростір σ є одновимірним. Нам необхідна наступна

Лема 7.2.1. *Повний перелік $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-симетрій на алгебрі поліномів Лорана $\mathbb{C}[z^{\pm 1}]$ однієї змінної z виглядає так.*

1). Нехай $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ є таким, що $\gamma^{r-1} = q^2$ для певного $r \in \mathbb{Z}$. Існує однопараметричне ($a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$) сімейство $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-симетрій на $\mathbb{C}[z^{\pm 1}]$:

$$\pi(\mathsf{k})(z) = \gamma z; \qquad \pi(\mathsf{e})(z) = \frac{a}{q^2 - 1} z^r; \qquad \pi(\mathsf{f})(z) = q^3(\gamma - 1)a^{-1} z^{2-r}.$$

Крім того, існують ще дві симетрії

$$\pi(\mathsf{k})(z) = \pm z; \qquad \pi(\mathsf{e})(z) = \pi(\mathsf{f})(z) = 0.$$

Усі симетрії з фіксованим γ є ізоморфними, зокрема, тій, для якої $a = 1$. Існує ізоморфізм між симетріями з γ та γ^{-1}. У всіх інших випадках симетрії є неізоморфними.

2). Нехай $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Існує $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-симетрія на $\mathbb{C}[z^{\pm 1}]$, яка має вигляд

$$\pi(\mathsf{k})(z) = \gamma z^{-1}; \qquad \pi(\mathsf{e})(z) = \pi(\mathsf{f})(z) = 0.$$

Всі ці симетрії є ізоморфними, зокрема, такій з $\gamma = 1$.

Симетрії з 1) є неізоморфними тим, що є у 2).

Доведення. Оскільки для симетрії π, $\pi(\mathsf{k})$ є автоморфізмом $\mathbb{C}[z^{\pm 1}]$, а кожний автоморфізм $\mathbb{C}[z^{\pm 1}]$ є або $z \mapsto \gamma z$, або $z \mapsto \gamma z^{-1}$, $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ [140], нам необхідно розглянути два випадки.

1). Нехай $\pi(\mathsf{k})(z) = \gamma z$.

Спочатку припустимо, що $\pi(\mathsf{e})(z) \neq 0$. Внаслідок (6.1.2), маємо $\pi(\mathsf{ke})(z) = q^2 \gamma \pi(\mathsf{e})(z)$, і якщо $\pi(\mathsf{e})(z) = \sum\limits_i a_i z^i$, з припущення $a_r \neq 0$ випливає $a_r \gamma^r z^r = q^2 \gamma a_r z^r$, отже

$$\gamma^{r-1} = q^2. \tag{7.2.10}$$

Оскільки q не є коренем з 1, таке $r \in \mathbb{Z}$ є єдиним.

Отже ми встановили, що $\pi(\mathsf{e})(z) = az^r$, з $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Цілком подібне міркування дозволяє зробити висновок, що $\pi(\mathsf{f})(z) = bz^{2-r}$. Тут $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, бо інакше $\pi(\mathsf{f})$ тотожно дорівнює нулю на $\mathbb{C}[z^{\pm 1}]$. За останнього припущення, ми бачимо, що (6.1.3), застосоване до z, не виконується, оскільки його ліва частина дорівнює нулю, в той час як його права частина не є нуль, бо γ, завдяки (7.2.10), не є коренем з 1 разом з q. Ця суперечність показує, що $\pi(\mathsf{f})(z) \neq 0$.

Залишається використати наші формули для $\pi(\mathsf{e})(z)$ та $\pi(\mathsf{f})(z)$, застосовуючи (6.1.3) до z, аби обчислити співвідношення між a and b. Це потребує дві додаткові формули

$$\pi(\mathsf{e})(z^p) = \frac{\gamma^p - 1}{\gamma - 1}\, az^{p+r-1} = \frac{\gamma^p - 1}{\gamma - 1} z^{p-1}\pi(\mathsf{e})(z), \tag{7.2.11}$$

$$\pi(\mathsf{f})(z^p) = \frac{\gamma^{-p} - 1}{\gamma - 1}\, bz^{p+1-r} = \frac{\gamma^{-p} - 1}{\gamma - 1} z^{p-1}\pi(\mathsf{f})(z), \tag{7.2.12}$$

$p \in \mathbb{Z}$, які легко доводяться. Маємо

$$\pi(\mathsf{ef})(z) = \pi(\mathsf{e})(bz^{2-r}) = b\frac{\gamma^{2-r} - 1}{\gamma - 1} z^{1-r}\pi(\mathsf{e})(z) = ab\frac{\gamma^{2-r} - 1}{\gamma - 1} z,$$
$$\pi(\mathsf{fe})(z) = \pi(\mathsf{f})(az^r) = a\frac{\gamma^{-r} - 1}{\gamma - 1} z^{r-1}\pi(\mathsf{f})(z) = ab\frac{\gamma^{-r} - 1}{\gamma - 1} z,$$

звідки

$$\pi(\mathsf{ef} - \mathsf{fe})(z) = ab\frac{\gamma^{2-r} - \gamma^{-r}}{\gamma - 1} z = ab\gamma^{-r}(\gamma + 1)z.$$

З іншого боку,

$$\frac{\pi(\mathsf{k} - \mathsf{k}^{-1})}{q - q^{-1}}(z) = \frac{\gamma - \gamma^{-1}}{q - q^{-1}} z = \frac{\gamma^{-1}(\gamma^2 - 1)}{q - q^{-1}} z.$$

Таким чином, одержуємо рівняння $ab\gamma^{-r}(\gamma+1) = \frac{\gamma^{-1}(\gamma^2-1)}{q-q^{-1}}$, звідки, з огляду на (7.2.10), виводимо $ab = \frac{q^2(\gamma-1)}{q-q^{-1}}$. Отже, отримуємо перше сімейство симетрій з твердження (1) Леми. Наведений вище аргумент показує, що у випадку, який розглядається зараз ($\pi(\mathsf{k})(z) = \gamma z$, $\pi(\mathsf{e})(z) \neq 0$), не існує ніяких інших симетрій. З іншого боку, проста перевірка показує, що ті формули пропускаються через усі співвідношення (7.2.1), (7.2.2), (6.1.1) – (6.1.3), і тому задають сімейство коректно визначених $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-симетрій на $\mathbb{C}[z^{\pm 1}]$.

Розглянемо окремо випадок $\pi(\mathsf{e})(z) = 0$. Це означає, що $\pi(\mathsf{e})$ тотожно дорівнює нулю на $\mathbb{C}[z^{\pm 1}]$. Застосовуючи знову (6.1.3) для z, доходимо висновку, що наразі $\gamma = \pm 1$. Звичайно, $\pi(\mathsf{f}) \equiv 0$ у цьому випадку, оскільки (співвідношення, подібне до) (7.2.10) не виконується. Таким чином, ми одержуємо дві додаткові симетрії, як у Лемі (1); коректність їх визначення може бути легко перевірена.

Можна перевірити, що ізоморфізми дій з одним і тим же γ та різними a задається як $\Psi(z) = \alpha z$ для певного α. Ізоморфізм дій, що відповідають γ та γ^{-1}, визначається як $\Psi(z) = z^{-1}$. Цим вичерпується дія групи автоморфізмів на просторі параметрів симетрій, отже немає інших ізоморфізмів між симетріями.

2). Нехай $\pi(\mathsf{k})(z) = \gamma z^{-1}$.

Внаслідок прямого обчислення маємо $\pi(\mathsf{k})^2 = \mathrm{id}$, звідки

$$\pi(\mathsf{e}) = \pi(\mathsf{k}^2\mathsf{e}) = q^4\pi(\mathsf{e}\mathsf{k}^2) = q^4\pi(\mathsf{e}),$$

тобто $\pi(\mathsf{e}) \equiv 0$. Аналогічне міркування доводить, що $\pi(\mathsf{f}) \equiv 0$. Таким чином, (6.1.3) задовільняється.

Ізоморфізм між симетріями з різними γ задається як $\Psi(z) = \alpha z$ для певного α. $\square$

Твердження 7.2.2. *Не існує $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-симетрії на $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$, у якій k діє автоморфізмом $\varphi_{\sigma,\alpha,\beta}$ таким, що матриця σ має власні значення $\lambda = \mu = 1$ та одновимірний власний підпростір.*

Доведення. Припустимо, що така симетрія π існує. Ясно, що власний вектор $\binom{v_1}{v_2}$ для σ може бути обраний таким чином, що v_1, v_2 є взаємно прості цілі числа. Нехай u_1, u_2 є такі цілі, що $u_1v_1 + u_2v_2 = 1$. Розглянемо матрицю $\theta = \begin{pmatrix} v_1 & -u_2 \\ v_2 & u_1 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ разом з автоморфізмом $\Phi = \varphi_{\theta,1,1}$ алгебри $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ як у (7.2.3). У відповідній ізоморфній симетрії твірна Картана k діє автоморфізмом $\Phi^{-1} \circ \pi(\mathsf{k}) \circ \Phi$ як у (7.2.3) з матрицею $\theta^{-1}\sigma\theta$, яка має вигляд $\begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ для певного $l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Таким чином, ми можемо припустити, що σ сама має такий вигляд.

Внаслідок (7.2.3), маємо $\pi(\mathsf{k})(x) = \alpha x$, $\pi(\mathsf{k})(y) = \beta x^l y$ для певних $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Нехай $\pi(\mathsf{e})(x) = \sum\limits_{i,j} a_{ij} x^i y^j$. Прямі обчислення, які використовують співвідношення

$$(x^r y^s)^i = q^{\frac{i(i-1)}{2} rs} x^{ri} y^{si}, \qquad i, r, s \in \mathbb{Z},$$

показують, що

$$q^2 \pi(\mathsf{ek})(x) = q^2 \alpha \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j, \tag{7.2.13}$$

$$\pi(\mathsf{ke})(x) = \sum_{i,j} a_{ij} \alpha^i \beta^j q^{\frac{j(j-1)}{2} l} x^{i+lj} y^j. \tag{7.2.14}$$

Оскільки $l \neq 0$, порівняння (7.2.13) та (7.2.14) демонструє, що коли $a_{ij} \neq 0$ для певних i, j з $j \neq 0$, то (6.1.2) не задовольняється. Таким чином, ми одержуємо, що $\pi(\mathsf{e})(x) \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}]$. Аналогічно доводиться, що $\pi(\mathsf{f})(x) \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}]$. З цього випливає, що дія π алгебри $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ залишає інваріантою підалгебру $\mathbb{C}[x^{\pm 1}]$, таким чином задаючи $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-симетрію на $\mathbb{C}[x^{\pm 1}]$. Внаслідок Леми 7.2.1, нам необхідно розглянути два випадки.

(A). Нехай $\alpha^{r-1} = q^2$ для певного $r \in \mathbb{Z}$ і $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ таке, що

$$\pi(\mathsf{e})(x) = \frac{a}{q^2 - 1} x^r; \qquad \pi(\mathsf{f})(x) = q^3 (\alpha - 1) a^{-1} x^{2-r}.$$

Покладаючи $\pi(\mathsf{f})(y) = \sum\limits_{i,j} d_{ij} x^i y^j$, ми обчислюємо, використовуючи (7.2.12):

$$\begin{aligned} q^{-2}\pi(\mathsf{fk})(y) &= \beta q^{-2}\pi(\mathsf{f})(x^l y) = \beta q^{-2}\pi(\mathsf{f})(x^l) y + \beta q^{-2} \pi(\mathsf{k})^{-1}(x^l)\pi(\mathsf{f})(y) = \\ &= \beta(\alpha^{-l} - 1) q a^{-1} x^{l-r+1} y + \beta \alpha^{-l} q^{-2} x^l \pi(\mathsf{f})(y) = \\ &= \beta(\alpha^{-l} - 1) q a^{-1} x^{l-r+1} y + \beta \alpha^{-l} q^{-2} \sum_{i,j} d_{ij} x^{i+l} y^j; \end{aligned} \tag{7.2.15}$$

$$\pi(\mathsf{kf})(y) = \sum_{i,j} d_{ij} \alpha^i \beta^j q^{\frac{j(j-1)}{2} l} x^{i+lj} y^j. \tag{7.2.16}$$

Оскільки $l \neq 0$, порівняння (7.2.15) та (7.2.16) демонструє, що, коли $d_{ij} \neq 0$ для певних i, j з $j \neq 1$, то (6.1.2) не виконується. З цього випливає, що

$$\pi(\mathsf{f})(y) x = q x \pi(\mathsf{f})(y). \tag{7.2.17}$$

Використаємо (7.2.17) та (7.2.12) для обчислення

$$0 = \pi(\mathsf{kf} - q^{-2}\mathsf{fk})(y) = \pi(\mathsf{kf})(y) - q^{-2}\beta\pi(\mathsf{f})(x^l)y - q^{-2}\beta\pi(\mathsf{k})^{-1}(x^l)\pi(\mathsf{f})(y) =$$
$$= \pi(\mathsf{kf})(y) - q^{-2}\beta\frac{\alpha^{-l}-1}{\alpha-1}x^{l-1}\pi(\mathsf{f})(x)y - q^{-2}\beta\alpha^{-l}x^l\pi(\mathsf{f})(y),$$

звідки

$$\pi(\mathsf{kf})(y) - q^{-2}\alpha^{-l}\beta x^l\pi(\mathsf{f})(y) - q^{-2}\beta\frac{\alpha^{-l}-1}{\alpha-1}x^{l-1}\pi(\mathsf{f})(x)y = 0. \qquad (7.2.18)$$

Далі, застосування (7.2.17) і явний вигляд $\pi(\mathsf{f})(x)$ у нашому випадку дає

$$0 = \pi(\mathsf{f})(yx - qxy) =$$
$$= \pi(\mathsf{f})(y)x + \pi(\mathsf{k})^{-1}(y)\pi(\mathsf{f})(x) - q\pi(\mathsf{f})(x)y - q\pi(\mathsf{k})^{-1}(x)\pi(\mathsf{f})(y) =$$
$$= q(1-\alpha^{-1})x\pi(\mathsf{f})(y) + q^{2-r}\alpha^l\beta^{-1}x^{-l}\pi(\mathsf{f})(x)y - q\pi(\mathsf{f})(x)y,$$

звідки

$$\pi(\mathsf{f})(y) + \frac{\alpha}{\alpha-1}\left(q^{1-r}\alpha^l\beta^{-1}x^{-l-1} - x^{-1}\right)\pi(\mathsf{f})(x)y = 0. \qquad (7.2.19)$$

Нам потрібні два похідні співвідношення. Першим є $-\pi(\mathsf{k})$, застосоване до (7.2.19):

$$-\pi(\mathsf{kf})(y) + \frac{\alpha q^{-2}}{\alpha-1}\left(\beta x^{l-1} - q^{1-r}x^{-1}\right)\pi(\mathsf{f})(x)y = 0. \qquad (7.2.20)$$

Друге похідне співвідношення – це просто (7.2.19), помножене зліва на $q^{-2}\alpha^{-l}\beta x^l$:

$$q^{-2}\alpha^{-l}\beta x^l\pi(\mathsf{f})(y) + \frac{\alpha q^{-2}}{\alpha-1}\left(q^{1-r}x^{-1} - \alpha^{-l}\beta x^{l-1}\right)\pi(\mathsf{f})(x)y = 0. \qquad (7.2.21)$$

Нарешті, знаходимо суму (7.2.18), (7.2.20), та (7.2.21) і одержуємо:

$$\frac{\beta q^{-2}}{\alpha-1}(1+\alpha)\left(1-\alpha^{-l}\right)x^{l-1}\pi(\mathsf{f})(x)y = 0.$$

Оскільки $\mathbb{C}_q[x^{\pm1}, y^{\pm1}]$ є областю цілісності, доходимо висновку, що принаймні один з постійних множників у цьому добутку повинен дорівнювати нулю. Проте, у випадку (A), що ми розглядаємо, це неможливо. Отже, одержуємо суперечність.

(B). Нехай $\alpha = \pm 1$, $\pi(\mathsf{e})(x) = \pi(\mathsf{f})(x) = 0$. Маємо

$$0 = \pi(\mathsf{e})(yx - qxy) = \pi(\mathsf{e})(y)\pi(\mathsf{k})(x) - qx\pi(\mathsf{e})(y) = \alpha\pi(\mathsf{e})(y)x - qx\pi(\mathsf{e})(y),$$

звідки $\pi(\mathsf{e})(y)x = \alpha^{-1}qx\pi(\mathsf{e})(y)$. Це квазі-комутаційне співвідношення можливе лише якщо $\pi(\mathsf{e})(y) = \varphi y^p$ для певних $\varphi \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}]$, $p \in \mathbb{Z}$.

У випадку $\alpha = -1$ це неможливо, тому що тоді б ми мали $q^{p-1} = -1$. З останнього випливає, що $p - 1 \neq 0$ та $q^{2(p-1)} = 1$, що суперечить нашим припущенням щодо q.

Залишається припустити, що $\alpha = 1$. У цьому випадку $p = 1$, і маємо $\pi(\mathsf{e})(y) = \varphi y$, $\pi(\mathsf{k})(\varphi) = \varphi$, і тому

$$0 = \pi(\mathsf{ke} - q^2\mathsf{ek})(y) = \pi(\mathsf{k})(\varphi)\beta x^l y - q^2\beta\pi(\mathsf{e})(x^l y) = \beta x^l \varphi y - q^2\beta x^l \varphi y,$$

звідки $\beta(1 - q^2)x^l\varphi y = 0$. Це означає $\varphi = 0$, тому $\pi(\mathsf{e})(y) = 0$. Отже, $\pi(\mathsf{e})$ тотожно дорівнює нулю на $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$. Оскільки $\pi(\mathsf{k})(y) \neq \pi(\mathsf{k})^{-1}(y)$, ми бачимо, що (6.1.3), застосоване до y, не виконується. Отже, одержуємо остаточну суперечність, що завершує доведення Теореми. □

(i-2) Припустимо, що $\operatorname{tr}\sigma = 1$. Це означає, що $\lambda = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\mu = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Зокрема, матриця σ має скінченний порядок, точніше $\sigma^6 = I$. Отже, те ж саме має місце і для відповідного автоморфізму $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ як у (7.2.3) з $\alpha = \beta = 1$. Проте, ми потребуємо більш тонке твердження.

Лема 7.2.3. *Припустимо заданими довільну пару $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{C}^*)^2$ та матрицю $\sigma \in SL(2, \mathbb{Z})$ з властивостями, що перераховані у під-випадку (i-2) а також і в під-випадках (i-3), (i-4) нижче. Тоді автоморфізм $\varphi_{\sigma,\alpha,\beta}$ алгебри $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$, що визначений (7.2.3), має скінченний порядок, більший ніж 2.*

Доведення. Легке обчислення дає $\det(\sigma - I) = 2 - \operatorname{tr}\sigma = 1$, отже обернена матриця $(\sigma - I)^{-1}$ має цілі елементи. Таким чином, одержуємо коректно визначену пару $(\alpha', \beta') = (\sigma - I)(\alpha, \beta)(\sigma - I)^{-1} \in (\mathbb{C}^*)^2$ як у (7.2.4). Наразі просте обчислення показує, що у групі $\operatorname{Aut}(\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}])$ має місце спряження $(\alpha', \beta')^{-1}\sigma(\alpha', \beta') = (\alpha, \beta)\sigma$. Звідси випливає $\varphi^6_{\sigma,\alpha,\beta} = \mathrm{id}$, що доводить Лему у цьому під-випадку (i-2). Як стане ясно у подальшому, у під-випадках (i-3), (i-4) це доведення потребує лише незначних змін. $\square$

Тепер припустимо, що π – симетрія, чия матриця σ задовольняє властивостям, що перераховані у під-випадку (i-2). Внаслідок (6.1.2) маємо $\mathsf{k}^6\mathsf{e}\mathsf{k}^{-6} = q^{12}\mathsf{e}$. З Леми 7.2.3 випливає, що $\pi(\mathsf{k})^6 = \mathrm{id}$, отже $q^{12}\pi(\mathsf{e}) = \pi(\mathsf{e})$. Оскільки q не є коренем з 1, $\pi(\mathsf{e})$ тотожно дорівнює нулю. Подібні міркування встановлюють також, що $\pi(\mathsf{f}) \equiv 0$.

Застосуємо π до (6.1.3). Наведені вище міркування показують, що ми одержуємо нуль у лівій частині. Але це не так у правій частині, тому що $\pi(\mathsf{k}) \not\equiv \pi(\mathsf{k})^{-1}$, бо з Леми 7.2.3 ми знаємо, що порядок $\pi(\mathsf{k})$ більший, ніж 2. Суперечність, одержана у такий спосіб, доводить, що *не існує симетрії з матрицею σ як у під-випадку (i-2).*

(i-3) Припустимо, що $\operatorname{tr}\sigma = 0$. Це означає, що $\lambda = i$, $\mu = -i$. Матриця σ має порядок 4, $\sigma^4 = I$, отже $\varphi_{\sigma,1,1}^4 = \mathrm{id}$.

Для доведення Леми 7.2.3 у цьому під-випадку, зазначимо спочатку, що підгрупа $T \subset (\mathbb{C}^*)^2 \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}])$, утворена парами (r, s) з $r, s = \pm 1$, є нормальною в $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}])$, як це можна побачити з (7.2.4). Отже, підгрупа групи $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}])$, генерована T та σ^i, $i = 0, 1, 2, 3$, є скінченною.

У цьому під-випадку маємо $\det(\sigma - I) = 2 - \operatorname{tr}\sigma = 2$, отже $(\sigma - I)\sigma' = 2I$ для певної матриці σ' з цілими елементами. Оскільки (друга рівність у) (7.2.4) задає коректно визначену дію полугрупи матриць з цілими елементами на $(\mathbb{C}^*)^2$, доходимо висновку, що для довільної пари $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{C}^*)^2$

$$(\alpha, \beta)^{(\sigma - I)\sigma'} = \left((\alpha, \beta)^{\sigma'}\right)^{(\sigma - I)} = (\alpha, \beta)^2.$$

Після переходу до квадратних коренів, маємо

$$\left((\alpha', \beta')^{\sigma'}\right)^{(\sigma - I)} = (r, s)(\alpha, \beta),$$

для певних α', β', r, s таких, що $\alpha'^2 = \alpha$, $\beta'^2 = \beta$; $r, s \in \{-1, 1\}$. Покладемо $(\alpha'', \beta'') \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\alpha', \beta')^{\sigma'}$. Прості обчислення показують, що має місце спряження $(\alpha'', \beta'')^{-1}(r, s)\sigma(\alpha'', \beta'') = (\alpha, \beta)\sigma$. З викладених вище міркувань, $(r, s)\sigma$

має скінченний порядок як елемент скінченної підгрупи, отже те ж саме справедливо також для спряженого елемента $(\alpha, \beta)\sigma$. Цей порядок не може бути меншим за порядок проекції σ на $SL(2, \mathbb{Z})$, що є 4. Це доводить Лему 7.2.3. Залишається продовжити так само, як у випадку (i-2), та дійти висновку, що *не існує симетрій з матрицею σ як у під-випадку (i-3).*

(i-4) Нехай $\operatorname{tr}\sigma = -1$. Це означає, що $\lambda = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\mu = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Матриця σ має порядок 3, $\sigma^3 = I$, отже $\varphi^3_{\sigma,1,1} = \mathrm{id}$.

Для доказу Леми 7.2.3 у цьому під-випадку, зауважимо спочатку, що підгрупа $T \subset (\mathbb{C}^*)^2 \subset \operatorname{Aut}(\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}])$, утворена парами (r, s) з $r, s = \zeta^i$, $\zeta = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $i = 0, 1, 2$, є нормальною в групі $\operatorname{Aut}(\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}])$, як це можна побачити з (7.2.4). Таким чином, підгрупа групи $\operatorname{Aut}(\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}])$, генерована T та σ^i, $i = 0, 1, 2$, є скінченною.

У цьому під-випадку маємо $\det(\sigma - I) = 2 - \operatorname{tr}\sigma = 3$, отже $(\sigma - I)\sigma' = 3I$ для певної матриці σ' з цілими елементами. Оскільки (друге рівняння в) (7.2.4) задає коректно визначену дію напівгрупи матриць з цілими елементами на $(\mathbb{C}^*)^2$, доходимо висновку, що для довільної пари $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{C}^*)^2$

$$(\alpha, \beta)^{(\sigma - I)\sigma'} = \left((\alpha, \beta)^{\sigma'}\right)^{(\sigma - I)} = (\alpha, \beta)^3.$$

Переходячи до кубічних коренів, одержуємо

$$\left((\alpha', \beta')^{\sigma'}\right)^{(\sigma - I)} = (r, s)(\alpha, \beta),$$

для певних α', β', r, s таких, що $\alpha'^3 = \alpha$, $\beta'^3 = \beta$; $r, s \in \{\zeta^i,\ i = 0, 1, 2\}$. Покладаємо $(\alpha'', \beta'') \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\alpha', \beta')^{\sigma'}$. Обчислення показують, що маємо спряження $(\alpha'', \beta'')^{-1}(r, s)\sigma(\alpha'', \beta'') = (\alpha, \beta)\sigma$. З наведених вище міркувань, $(r, s)\sigma$ має скінченний порядок як елемент скінченної підгрупи, отже те ж саме справедливо для спряженого елемента $(\alpha, \beta)\sigma$. Цей порядок не може бути меншим від порядку проекції σ на $SL(2, \mathbb{Z})$, який є 3. Це доводить Лему 7.2.3. Залишається продовжити так само, як у під-випадку (i-2), аби зробити висновок, що *не існує симетрій з матрицею σ як у під-випадку (i-4).*

(i-5) Припустимо, що $\operatorname{tr}\sigma = -2$. Це означає, що $\lambda = \mu = -1$, отже або $\sigma = -I$, або σ спряжена блоку Жордана, тобто її власний підпростір одновимірний.

Теорема 7.2.4. *Існує двопараметричне ($\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$) сімейство $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-симетрій на $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$, що відповідає матриці $\sigma = -I$:*

$$\pi(\mathsf{k})(x) = \alpha^{-1}x^{-1}; \qquad \pi(\mathsf{k})(y) = \beta^{-1}y^{-1}; \tag{7.2.22}$$

$$\pi(\mathsf{e})(x) = 0; \qquad \pi(\mathsf{e})(y) = 0; \tag{7.2.23}$$

$$\pi(\mathsf{f})(x) = 0; \qquad \pi(\mathsf{f})(y) = 0. \tag{7.2.24}$$

Це складає повний перелік симетрій з $\sigma = -I$. Зазначені симетрії усі ізоморфні, зокрема такій із $\alpha = \beta = 1$.

Доведення. Рутинна перевірка показує, що дія (7.2.22) – (7.2.24) пропускається через усі співвідношення (7.2.1), (7.2.2) у $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ та (6.1.1) – (6.1.3) у $U_q(\mathfrak{sl}_2)$. Це означає, що ця дія є дійсно $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-симетрією.

Аби побачити, що немає інших симетрій з $\sigma = -I$, візьмемо до уваги, що α та β є довільні ненульові комплексні числа, отже (7.2.22) вичерпує усі можливості для дії твірної k автоморфізмом (див. (7.2.3)). Щодо дії e та f, відмітимо, що $\pi(\mathsf{k})^2 = \mathrm{id}$ (пряме обчислення). Отже з огляду на (6.1.2) маємо $\pi(\mathsf{e}) = \pi(\mathsf{k}^2\mathsf{e}\mathsf{k}^{-2}) = q^4\pi(\mathsf{e})$. Оскільки q не є коренем з 1, маємо, що $\pi(\mathsf{e}) \equiv 0$. Аналогічно, $\pi(\mathsf{f}) \equiv 0$.

Перевіримо, що усі симетрії, перелічені у Теоремі, ізоморфні. Для будь-якої симетрії з $\pi(\mathsf{k})$, що діє автоморфізмом $(\alpha, \beta)(-I) \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}])$ та довільного автоморфізму $A = (\mu, \nu)\tau$, $\tau \in SL(2, \mathbb{Z})$, $(\mu, \nu) \in (\mathbb{C}^*)^2$, маємо $A(\alpha, \beta)(-I)A^{-1} = (\mu^2, \nu^2)(\alpha, \beta)^\tau(-I)$. Очевидно, що відповідний вибір (μ, ν), τ робить останній спряжений автоморфізм таким, що співпадає з $(-I)$. $\square$

Зауваження. Хоча дії твірної k у симетріях з Теореми 7.2.4 не зводяться до множення x, y на вагові константи як у [39], відповідні $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-модулі є ваговими. А саме, база вагових векторів у $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ має вигляд

$$\{1\} \cup \{u_{ij} = \alpha^i\beta^j x^i y^j + x^{-i}y^{-j} | \, i, j > 0\} \cup \{v_{ij} = \alpha^i\beta^j x^i y^j - x^{-i}y^{-j} | \, i, j > 0\},$$

і при цьому $\pi(\mathsf{k})(1) = 1$, $\pi(\mathsf{k})(u_{ij}) = u_{ij}$, $\pi(\mathsf{k})(v_{ij}) = -v_{ij}$.

Твердження 7.2.5. *Не існує $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-симетрій на $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$, для яких* k *діє автоморфізмом $\varphi_{\sigma,\alpha,\beta}$ з матрицею σ, що має власні значення $\lambda = \mu = -1$ та одновімирний власний простір.*

Доведення. Припустимо, що така симетрія π існує. Можна застосувати той же аргумент, що й на початку доведення Твердження 7.2.2, аби обгрунтувати можливість обмежитися окремим випадком $\sigma = \begin{pmatrix} -1 & l \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ для певного $l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Внаслідок (7.2.3) маємо, що $\pi(\mathsf{k})(x) = \alpha x^{-1}$, $\pi(\mathsf{k})(y) = \beta x^l y^{-1}$ для певних $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Нехай $\pi(\mathsf{e})(x) = \sum\limits_{i,j} a_{ij} x^i y^j$. Пряме обчислення, що використовує (7.2.6), показує, що

$$q^2 \pi(\mathsf{ek})(x) = -\sum_{i,j} q^{j+2} a_{ij} x^i y^j, \tag{7.2.25}$$

$$\pi(\mathsf{ke})(x) = \sum_{i,j} a_{ij} \alpha^i \beta^j q^{-\frac{j(j-1)}{2} l} x^{-i+lj} y^{-j}. \tag{7.2.26}$$

Порівняємо (7.2.25) і (7.2.26). Прирівнюючи коефіцієнти при x^i, і x^{-i}, відповідно, $i \in \mathbb{Z}$, $j = 0$, маємо:

$$-q^2 a_{i0} = a_{-i,0} \alpha^{-i}, \qquad -q^2 a_{-i,0} = a_{i0} \alpha^i.$$

Добуток двох останніх співвідношень є $q^4 a_{i,0} a_{-i,0} = a_{i,0} a_{-i,0}$. Звідси маємо $a_{i,0} a_{-i,0} = 0$. Завдяки співвідношенням вище, одержуємо, що $a_{i,0} = 0$ для всіх i.

Зараз нехай $j \neq 0$. Порівняємо знову (7.2.25) і (7.2.26) та, прирівнюючи коефіцієнти при $x^{-i+lj} y^{-j}$, одержуємо $a_{-i+lj,-j} = -q^{-\frac{j(j-1)}{2} l + j - 2} \alpha^i \beta^j a_{ij}$. Ще одна ітерація цього співвідношення дає

$$a_{i-2lj,j} = -q^{-\frac{(-j)(-j-1)}{2} l - j - 2} \alpha^{-i+lj} \beta^{-j} a_{-i+lj,-j} = q^{-j^2 l - 4} \alpha^{lj} a_{ij}.$$

Оскільки $l \neq 0$, це означає, що, за припущення про те, що якийсь a_{ij} з $j \neq 0$ є відмінними від нуля, тоді нескінченно багато інших a_{ij} має бути ненульовими. Це зрозумілим чином неможливо, тому що елемент

$\pi(\mathsf{e})(x) = \sum\limits_{i,j} a_{ij}x^i y^j$ алгебри $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ у будь-якому випадку є скінченна сума мономів. Це доводить, що з $j \neq 0$, $a_{ij} = 0$ для всіх $i \in \mathbb{Z}$.

Отже, доходимо висновку про те, що $\pi(\mathsf{e})(x) = 0$. Наразі обчислюємо

$$0 = \pi(\mathsf{e})(yx - qxy) = \alpha\pi(\mathsf{e})(y)x^{-1} - qx\pi(\mathsf{e})(y),$$

звідки $\alpha\pi(\mathsf{e})(y)x^{-1} = qx\pi(\mathsf{e})(y)$. Останнє не може відбутися з ненульовим $\pi(\mathsf{e})(y)$, оскільки максимальна ступінь за x мономів у лівій частині нижче, ніж така ступінь у правій частині. Тому $\pi(\mathsf{e})(y) = 0$, і отже $\pi(\mathsf{e})$ є тотожнім нулем на $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$. З іншого боку, $\pi(\mathsf{k})(y) \neq \pi(\mathsf{k})^{-1}(y)$, отже (6.1.3), застосоване до y, не виконується. Ця суперечність завершує доведення Твердження. □

Розглянемо випадок (ii).

Твердження 7.2.6. *Не існує $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-симетрій на $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$, у яких k діє автоморфізмом $\varphi_{\sigma,\alpha,\beta}$, де матриця σ має власні значення $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.*

Для доведення цього Твердження ми потребуємо деяких спостережень. По-перше, для заданої симетрії π, введемо позначення

$$\pi(\mathsf{e})(x) = \sum_{i,j} a_{ij}x^i y^j, \qquad \pi(\mathsf{e})(y) = \sum_{i,j} b_{ij}x^i y^j. \tag{7.2.27}$$

Тут, звичайно, лише скінченна кількість a_{ij}, b_{ij} є ненульовими. Нехай $D = \left\{\binom{i}{j} \in \mathbb{Z}^2 :\ a_{ij} \neq 0\right\}$, $E = \left\{\binom{i}{j} \in \mathbb{Z}^2 :\ b_{ij} \neq 0\right\}$.

Індукційний аргумент дозволяє вивести співвідношення

$$\pi(\mathsf{e})(x^p) = \sum_{r=0}^{p-1} x^{p-1-r}\pi(\mathsf{e})(x)\pi(\mathsf{k})(x)^r,$$

для цілих $p > 0$, разом з подібною, але трохи відмінною формулою для $p < 0$ (завдяки (7.2.6)):

$$\pi(\mathsf{e})(x^p) = -\sum_{r=0}^{-p-1} x^{p+r}\pi(\mathsf{e})(x)\pi(\mathsf{k})(x)^{-r-1}.$$

Можна об'єднати ці дві формули і одержати універсальну формулу для всіх $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, яка, однак, не враховує конкретні значення постійних множників при мономах. Точніше, ми маємо

$$\pi(\mathsf{e})(x^p) = \sum_{\binom{i}{j} \in D} \sum_{r=\min\{0,p\}}^{\max\{0,p\}-1} \mathrm{const}(i,j,p,r,k,m) x^{p-1-r+i+rk} y^{j+rm}, \qquad (7.2.28)$$

де k і m визначаються дією твірної k як у (7.2.3), константи a_{ij} є як у (7.2.27), та усі константи $\mathrm{const}(\dots)$ є ненульовими. Ця формула стане у нагоді в подальшому, коли ми обчислюватимемо суми мономів по модулю постійних множників.

Подібно до цього, маємо

$$\pi(\mathsf{e})(y^p) = \sum_{r=0}^{p-1} y^{p-1-r} (\pi(\mathsf{e})y)(\pi(\mathsf{k})y)^r,$$

для цілих $p > 0$, та

$$\pi(\mathsf{e})(y^p) = -\sum_{r=0}^{-p-1} y^{p+r} (\pi(\mathsf{e})y)(\pi(\mathsf{k})y)^{-r-1},$$

для $p < 0$.

Знову. останні дві формули можна скомбінувати для отримання універсальної формули для усіх $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, подібно до (7.2.28):

$$\pi(\mathsf{e})(y^p) = \sum_{\binom{i}{j} \in E} \sum_{r=\min\{0,p\}}^{\max\{0,p\}-1} \mathrm{const}(i,j,p,r,l,n) x^{i+rl} y^{p-1-r+j+rn}, \qquad (7.2.29)$$

де l та n визначають дію k як у (7.2.3), константи b_{ij} є як у (7.2.27), та усі константи $\mathrm{const}(\dots)$ ненульові.

Інше спостереження пов'язано з конкретною формою (цілих) елементів матриці

$$\sigma^N = \begin{pmatrix} a(N) & b(N) \\ c(N) & d(N) \end{pmatrix}.$$

Нехай λ, λ^{-1} – дійсні власні значення матриці σ як у формулюванні

Твердження 7.2.6, $|\lambda| > 1$, тоді

$$\sigma^N = \Phi \begin{pmatrix} \lambda^N & 0 \\ 0 & \lambda^{-N} \end{pmatrix} \Phi^{-1}$$

для певної оборотної комплексної матриці Φ та $N \in \mathbb{Z}$. Просте обчислення показує, що

$$\sigma^N = \begin{pmatrix} a\lambda^N + a'\lambda^{-N} & b\lambda^N + b'\lambda^{-N} \\ c\lambda^N + c'\lambda^{-N} & d\lambda^N + d'\lambda^{-N} \end{pmatrix},$$

для певних $a, a', b, b', c, c', d, d' \in \mathbb{C}$. Підставимо $N = 0$; оскільки $\sigma^0 = I$, ми знаходимо, що насправді

$$\sigma^N = \begin{pmatrix} a\lambda^N + (1-a)\lambda^{-N} & b(\lambda^N - \lambda^{-N}) \\ c(\lambda^N - \lambda^{-N}) & d\lambda^N + (1-d)\lambda^{-N} \end{pmatrix}.$$

Зрештою, обчислюючи $\det \sigma^N$, що дорівнює 1, ми знаходимо, що $ad - bc = 0$ та $d = 1 - a$.

Зазначимо, що за умов Твердження 7.2.6 $b \neq 0$. Дійсно, коли $b = 0$, тоді $ad = 0$, отже або $a = 0$ або $a = 1$. В обидвох випадках σ становить трикутну матрицю з діагональними елементами λ, λ^{-1}. Оскільки вони є цілими, маємо $\lambda = \pm 1$, що не є наш випадок.

Аналогічним чином виводимо, що $c \neq 0$, $a \neq 0$, $a \neq 1$.

Отже, маємо $c = \frac{a(1-a)}{b}$, і тому

$$\sigma^N = \begin{pmatrix} a(N) & b(N) \\ c(N) & d(N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\lambda^N + (1-a)\lambda^{-N} & b(\lambda^N - \lambda^{-N}) \\ \frac{a(1-a)}{b}(\lambda^N - \lambda^{-N}) & (1-a)\lambda^N + a\lambda^{-N} \end{pmatrix}. \quad (7.2.30)$$

Доведення Твердження 7.2.6. Припустимо протилежне, тобто існує симетрія π з властивостями як у Твердженні 7.2.6. Ми обмежимося розглядом випадку, коли k діє автоморфізмом $\varphi_{\sigma,\alpha,\beta}$ з $\alpha = \beta = 1$. В подальшому, стане ясно, що це додаткове припущення не обмежує загальності. Проте, це обмеження буде матися на увазі, лише якщо явно не зазначено протилежне.

Використовуючи (7.2.3), (6.1.5), (7.2.28), (7.2.29), обчислюємо (по модулю ненульових постійних множників при мономах)

$$
\begin{aligned}
\pi\left(\mathsf{ek}^N\right)(x) = \pi(\mathsf{e})\left(x^{a(N)}y^{c(N)}\right) = \\
= x^{a(N)}\pi(\mathsf{e})\left(y^{c(N)}\right) + \pi(\mathsf{e})\left(x^{a(N)}\right)\pi(\mathsf{k})\left(y^{c(N)}\right) = \\
= x^{a(N)} \sum_{\binom{i}{j}\in E} \sum_{r=\min\{0,c(N)\}}^{\max\{0,c(N)\}-1} \operatorname{const} x^{i+rb(1)} y^{j+c(N)-1+r(d(1)-1)} + \\
+ \sum_{\binom{i}{j}\in D} \sum_{r=\min\{0,a(N)\}}^{\max\{0,a(N)\}-1} \operatorname{const} x^{i+a(N)-1+r(a(1)-1)} y^{j+rc(1)} \left(x^{b(1)}y^{d(1)}\right)^{c(N)} = \\
= \sum_{\binom{i}{j}\in E} \sum_{r=\min\{0,c(N)\}}^{\max\{0,c(N)\}-1} \operatorname{const} x^{i+a(N)+rb(1)} y^{j+c(N)-1+r(d(1)-1)} + \\
+ \sum_{\binom{i}{j}\in D} \sum_{r=\min\{0,a(N)\}}^{\max\{0,a(N)\}-1} \operatorname{const} x^{i+a(N)+b(1)c(N)-1+r(a(1)-1)} y^{j+d(1)c(N)+rc(1)}.
\end{aligned}
\tag{7.2.31}
$$

Постійні множники тут всі не нульові. У разі, коли або $a(N) = 0$, або $c(N) = 0$, відповідна сума в (7.2.31) повністю відсутня (дорівнює 0), що узгоджується з $\pi(\mathsf{e})(\mathbf{1}) = 0$. З іншого боку,

$$
\begin{aligned}
\pi\left(\mathsf{k}^N\mathsf{e}\right)(x) = \pi\left(\mathsf{k}^N\right)\left(\sum_{\binom{i}{j}\in D} \operatorname{const} x^i y^j\right) = \\
= \sum_{\binom{i}{j}\in D} \operatorname{const} \left(x^{a(N)}y^{c(N)}\right)^i \left(x^{b(N)}y^{d(N)}\right)^j = \\
= \sum_{\binom{i}{j}\in D} \operatorname{const} x^{ia(N)+jb(N)} y^{ic(N)+jd(N)},
\end{aligned}
\tag{7.2.32}
$$

з усіма постійними множниками ненульовими.

Нехай $\xi = \binom{\xi_1}{\xi_2}$, $\eta = \binom{\eta_1}{\eta_2}$ – власні вектори матриці σ, що відповідають власним значенням λ та λ^{-1}, з $|\lambda| > 1$ та $|\lambda^{-1}| < 1$, відповідно. Можна вважати, що ξ_i, η_i дійсні, і все вкладається в дійсний векторний простір $\mathbb{R}^2$, разом з дією $SL(2,\mathbb{Z})$ на ньому, що залишає інваріантною решітку $\mathbb{Z}^2$.

Відмітимо, що $\frac{\eta_2}{\eta_1}$ є ірраціональним. Дійсно, якщо припустити протилежне, можна нормалізувати η так, що воно разом з усіма $\sigma^N\eta$ мають цілі координати, $N \in \mathbb{Z}$. Оскільки останні вектори є $\lambda^{-N}\eta$, маємо суперечність. Аналогічним чином, $\frac{\xi_2}{\xi_1}$ ірраціональне.

Розглянемо лінійні функціонали Φ, Ψ на дійсному векторному просторі $\mathbb{R}^2$, задані так: $\Phi(s\xi + t\eta) = s$, $\Psi(s\xi + t\eta) = t$, $s, t \in \mathbb{R}$. Нехай також $L_\varepsilon = \big\{w \in \mathbb{R}^2 : |\Psi(w)| < \varepsilon\big\}$ для $\varepsilon > 0$.

Відзначимо для подальшого використання взаємно-однозначну відповідність $\mathrm{const}\, x^i y^j \mapsto \binom{i}{j}$ між мономами з $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ по модулю ненульових постійних множників і парами цілих з $\mathbb{Z}^2$. Якщо дивитися на решітку $\mathbb{Z}^2$, то внаслідок (6.1.2), треба очікувати, що (скінченний) набір пар цілих, що походить з (7.2.31) і з (7.2.32), має бути той самий. Але ці набори на вигляд досить різні. Щодо (7.2.32), відповідна підмножина у $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ – не що інше, як $\sigma^N D$, що міститься у вузькій стрічці L_ε, із $\varepsilon > 0$ як завгодно малим для досить великого $N \in \mathbb{Z}_+$. З іншого боку, множина пар, що походить з (7.2.31), утворена двома наборами арифметичних прогресій

$$\left\{ \begin{pmatrix} i + a(N) + rb(1) \\ j + c(N) - 1 + r(d(1) - 1) \end{pmatrix} : \right.$$
$$\left. r \in \mathbb{Z}, \quad \min\{0, c(N)\} \le r < \max\{0, c(N)\} \right\}, \quad (7.2.33)$$

з $\binom{i}{j} \in E$, і

$$\left\{ \begin{pmatrix} i + a(N) + b(1)c(N) - 1 + r(a(1) - 1) \\ j + d(1)c(N) + rc(1) \end{pmatrix} : \right.$$
$$\left. r \in \mathbb{Z}, \quad \min\{0, a(N)\} \le r < \max\{0, a(N)\} \right\}, \quad (7.2.34)$$

з $\binom{i}{j} \in D$. У разі, коли або $a(N) = 0$, або $c(N) = 0$, відповідний набір прогресій трактується як порожній, оскільки відповідна сума в (7.2.31) повністю відсутня (дорівнює 0). Кроки цих прогресій, $h_E = \binom{b(1)}{d(1)-1}$ та $h_D = \binom{a(1)-1}{c(1)}$, відповідно, не залежать від N. Ці вектори лінійно незалежні як стовпці невиродженої матриці $\sigma - I$.

Таким чином, єдина проблема в отриманні бажаної суперечності полягає в спостереженні, що деякі пари в (7.2.33) та в (7.2.34) можуть виявитися такими, що співпадають, і тому відповідні мономи в (7.2.31) можуть не вижити після можливих скорочень.

Лема 7.2.7. *Кожна множина D та E містить не більше двох елементів.*

Доведення. Доведемо цю Лему для D. Абсолютно аналогічне міркування може бути використане для E.

Попереднє міркування про ірраціональність має наслідком, що всі значення $\Phi\binom{i}{j}$, $\binom{i}{j} \in D$, попарно різні, тому

$$d_\Phi = \min\left\{\left|\Phi\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} - \Phi\begin{pmatrix} i' \\ j' \end{pmatrix}\right| : \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} i' \\ j' \end{pmatrix} \in D\right\} > 0,$$

та

$$\left|\lambda^N\right| d_\Phi = \min\left\{\left|\Phi\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} - \Phi\begin{pmatrix} i' \\ j' \end{pmatrix}\right| : \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} i' \\ j' \end{pmatrix} \in \sigma^N D\right\}$$

для $N \in \mathbb{Z}$. Звичайно, остання нерівність ($d_\Phi > 0$) передбачає $\operatorname{card} D > 1$, оскільки протилежне припущення має наслідком твердження Леми.

Аналогічним чином, покладаємо

$$d_\Psi = \max\left\{\left|\Psi\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} - \Psi\begin{pmatrix} i' \\ j' \end{pmatrix}\right| : \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i' \\ j' \end{pmatrix} \in D\right\}.$$

Нехай $A = \max\left\{\left|\Phi\binom{i}{j} - \Phi\binom{i'}{j'}\right| : \binom{i}{j}, \binom{i'}{j'} \in D\right\}$. Оскільки $\Psi(h_D) \neq 0$, можна вибрати $\varepsilon > 0$ так, що $\varepsilon < \frac{1}{2}|\Psi(h_D)|$, а потім виберемо $N > 0$ так, що $\sigma^N D \subset L_\varepsilon$ та

$$\left|\lambda^N\right| d_\Phi > A + (d_\Psi + 2\varepsilon)\left|\frac{\Phi(h_D)}{\Psi(h_D)}\right| + 1. \tag{7.2.35}$$

Розглянемо другу суму в (7.2.31), що відповідає $\binom{i}{j} \in D$, разом з відповідним набором прогресій (7.2.34) в $\mathbb{Z}^2$. За нашим вибором ε, кожна така прогресія має не більше однієї точки перетину з L_ε, а отже і з $\sigma^N D$. Ми стверджуємо, що насправді всі прогресії у (7.2.34) разом мають не більше однієї точки перетину з $\sigma^N D$. Щоб переконатися в цьому, припустимо протилежне, тобто дві прогресії, з (7.2.34) перетинають $\sigma^N D$ у двох різних точках. Оскільки кроки цих прогресій однакові, ці прогресії диз'юнктні. Точніше кажучи, маємо $\binom{i_1}{j_1}$, $\binom{i_2}{j_2} \in \binom{a(N)+b(1)c(N)-1}{d(1)c(N)} + D$ і r_1, $r_2 \in \mathbb{Z}$ з $\min\{0, a(N)\} \le r < \max\{0, a(N)\}$, такі, що

$$\binom{i_1}{j_1} + r_1 h_D, \ \binom{i_2}{j_2} + r_2 h_D \in \sigma^N D.$$

За цим маємо

$$\begin{aligned} d_\Psi \ge & \left| \Psi\binom{i_1}{j_1} - \Psi\binom{i_2}{j_2} \right| \ge \\ & \ge |r_1 - r_2||\Psi(h_D)| - \left| \Psi\left(\binom{i_1}{j_1} + r_1 h_D\right) - \Psi\left(\binom{i_2}{j_2} + r_2 h_D\right) \right| \ge \\ & \ge |r_1 - r_2||\Psi(h_D)| - 2\varepsilon, \end{aligned}$$

звідки $|r_1 - r_2| \le \frac{d_\Psi + 2\varepsilon}{|\Psi(h_D)|}$. Ця оцінка, разом з (7.2.35), має наслідком

$$\begin{aligned} A \ge & \left| \Phi\binom{i_1}{j_1} - \Phi\binom{i_2}{j_2} \right| \ge \\ & \ge \left| \Phi\left(\binom{i_1}{j_1} + r_1 h_D\right) - \Phi\left(\binom{i_2}{j_2} + r_2 h_D\right) \right| - |r_1 - r_2||\Phi(h_D)| \ge \\ & \ge \left|\lambda^N\right| d_\Phi - \frac{d_\Psi + 2\varepsilon}{|\Psi(h_D)|}|\Phi(h_D)| > A + 1. \end{aligned}$$

Таким чином, ми отримуємо суперечність, яка доводить існування не більше однієї точки перетину прогресій (7.2.34) та $\sigma^N D$ для N обраного вище і всіх більших N.

Аналогічне міркування, можливо після зменшення ε і збільшення N, дозволяє встановити існування додатково не більше однієї точки перетину прогресій (7.2.33) та $\sigma^N D$. Це доводить твердження Леми, оскільки, з огляду на (6.1.2), об'єднання точок з (7.2.34) та (7.2.33) повинне містити $\sigma^N D$. $\square$

Лема 7.2.8. $\operatorname{card} D = \operatorname{card} E = 2$, *і* $D = \left\{\binom{i}{j}; \binom{i}{j} + h_D\right\}$, $E = \left\{\binom{i'}{j'}; \binom{i'}{j'} + h_E\right\}$ *для певних цілих* i, j, i', j'.

Доведення. З огляду на Лему 7.2.7, ми повинні розглянути скінченну кількість альтернатив, що мають бути відкинуті.

(a) Припустимо, що $\operatorname{card} D = 0$. Це означає що $\pi(\mathsf{e})(x) = 0$. Якщо при цьому також $\operatorname{card} E = 0$, тобто $\pi(\mathsf{e})(y) = 0$, тоді $\pi(\mathsf{e})$ тотожно дорівнює нулю. Застосуємо (6.1.3) через дію π до x. В той час, як ліва частина дорівнює нулю, права частина дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли $\pi(\mathsf{k})^2(x) = x$. З цього випливає (навіть не припускаючи, $\alpha = \beta = 1$ як на початку доведення), що матриця σ^2 має власним значенням 1, що не передбачено нашим випадком. Таким чином, ми отримуємо суперечність.

Припустимо тепер у цьому випадку $\operatorname{card} E = 1$, тобто (7.2.33) утворене рівно однією прогресією (зауважимо, що $c(N) \neq 0$), в той час, як (7.2.34) є пустим. Оскільки відповідні мономи у (7.2.31) лінійно незалежні, доходимо висновку, що (7.2.31) ненульове, в той час як (7.2.32) дорівнює нулю. Це суперечить (6.1.2).

Останній під-випадок тут $\operatorname{card} E = 2$. Знову ж, оскільки $c(N) \neq 0$, (7.2.33) утворене рівно двома прогресіями. Вони не можуть співпадати як множини точок, оскільки вони відповідають різним точкам E і мають один і той же крок h_E. Отже, існує точка, яка належить одній з прогресій, але не іншій. Відповідний моном у (7.2.31) виживе у можливих скороченнях, таким чином роблячи (7.2.31) ненульовим, в той час як (7.2.32) дорівнює нулю. Це суперечить (6.1.2).

(b) Розглянемо випадок $\operatorname{card} D = 1$. Існує єдина прогресія у (7.2.34). Виберемо $\varepsilon > 0$ та $N > 0$ як у доведенні Леми 7.2.7; це забезпечує, що прогресія з (7.2.34) містить не більше однієї точки перетину з $\sigma^N D$. Додатково, остання множина може містити не більше двох точок перетину з прогресіями з (7.2.33). Це є наслідком Леми 7.2.7 а також того факту, що кроки h_D та h_E лінійно незалежні. Щодо решти точок в прогресії з (7.2.34) (які, безумовно, присутні з $N > 0$ досить великим), вони всі за межами $\sigma^N D$, і відповідні мономи у (7.2.31) виживають у можливих скороченнях. Це суперечить (6.1.2).

(c) Розглянемо випадок, коли $\operatorname{card} D = 2$, тобто D утворене двома різними точками $\binom{i_1}{j_1}$, $\binom{i_2}{j_2}$. Відповідно, (7.2.34) утворене двома прогресіями з кроком h_D і довжиною $|a(N)|$. Як можна побачити з (7.2.30), останнє значення ненульове і зростає для $N > 0$ досить великого, чий вибір знаходиться в наших руках.

Припустимо, що ці дві прогресії не перетинаються. В цьому випадку можна вибрати будь-яку з них, і, застосовуючи аргумент з (b), одержати бажану суперечність. Зрозуміло, що цей аргумент може бути також застосований до прогресій з (7.2.33).

Нарешті, припустимо, що дві прогресії в (7.2.34) перетинаються (принаймні, коли їх довжина $|a(N)|$ є досить великою). Точніше, треба припустити, що $\binom{i_2}{j_2} = \binom{i_1}{j_1} + sh_D$ для певного цілого s. Насправді $s = 1$, оскільки в іншому випадку симетрична різниця цих двох прогресій містить $2s$ (принаймні 4) точок. Після видалення не більше однієї точки перетину з прогресіями з (7.2.33), одержуємо принаймні 3 точки в (7.2.34), що відповідають, щонайменше, 3 мономам у (7.2.31) які виживають після всіх скорочень у (7.2.31). Оскільки (7.2.32) містить не більше 2 мономів, ми одержуємо суперечність із (6.1.2). Отже, $s = 1$, і подібний аргумент працює також для E. $\square$

Повернемося до **Доведення** Твердження 7.2.6. На цьому етапі нам потрібно відійти від нашого попереднього підходу, заснованого на нехтуванні конкретних ненульових постійних множників при мономах. Крім того, тепер ми припускаємо, що k діє автоморфизмом $\varphi_{\sigma,\alpha,\beta}$ загального вигляду. А саме, ми маємо

$$\pi(\mathsf{k})(x) = \alpha x^{a(1)} y^{c(1)}; \qquad \pi(\mathsf{k})(y) = \beta x^{b(1)} y^{d(1)}. \tag{7.2.36}$$

Крім того, з Леми 7.2.8 маємо

$$\pi(\mathsf{e})(x) = a_1 x^i y^j + a_2 x^{i+a(1)-1} y^{j+c(1)}, \tag{7.2.37}$$

$$\pi(\mathsf{e})(y) = b_1 x^{i'} y^{j'} + b_2 x^{i'+b(1)} y^{j'+d(1)-1} \tag{7.2.38}$$

для певних $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Обчислимо

$$\begin{aligned}\pi(\mathsf{e})(yx) &= y\pi(\mathsf{e})(x) + \pi(\mathsf{e})(y)\pi(\mathsf{k})(x) = \\ &= a_1 q^i x^i y^{j+1} + a_2 q^{i+a(1)-1} x^{i+a(1)-1} y^{j+c(1)+1} + b_1 \alpha q^{a(1)j'} x^{i'+a(1)} y^{j'+c(1)} + \\ &\quad + b_2 \alpha q^{a(1)(j'+d(1)-1)} x^{i'+a(1)+b(1)} y^{j'+c(1)+d(1)-1},\end{aligned} \tag{7.2.39}$$

$$q\pi(\mathsf{e})(xy) = qx\pi(\mathsf{e})(y) + q\pi(\mathsf{e})(x)\pi(\mathsf{k})(y) =$$
$$= b_1 q x^{i'+1} y^{j'} + b_2 q x^{i'+b(1)+1} y^{j'+d(1)-1} + a_1 \beta q^{b(1)j+1} x^{i+b(1)} y^{j+d(1)} +$$
$$+ a_2 \beta q^{b(1)(j+c(1))+1} x^{i+a(1)+b(1)-1} y^{j+c(1)+d(1)}. \quad (7.2.40)$$

Прирівнюючи (7.2.39) та (7.2.40), одержуємо співвідношення з сумою 8 ненульових мономів, що дорівнює нулю. Розглянемо ситуацію, що виникає внаслідок взаємно-однозначної відповідності $\mathrm{const}\, x^i y^j \mapsto \binom{i}{j}$ між мономами в $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ по модулю ненульових постійних множників і $\mathbb{Z}^2$. Серед 8 мономів, ті 4, які містять i, j в своїх показниках, відповідають наступним 4 точкам в $\mathbb{Z}^2$: $u = \binom{i}{j+1}$, $u + h_D$, $u + h_E$, $u + h_D + h_E$. Ці 4 точки попарно різні, тому відповідні мономи лінійно незалежні.

Аналогічним чином, 4 мономи, які містять i', j' в своїх показниках, відповідають наступним 4 різним точкам у $\mathbb{Z}^2$: $v = \binom{i'+1}{j'}$, $v + h_D$, $v + h_E$, $v + h_D + h_E$; тому відповідні мономи лінійно незалежні. Слід зазначити, що в обох випадках ми маємо паралелограми, сторони яких визначаються однією й тією ж парою векторів h_D, h_E. З огляду на наші спостереження, доходимо висновку, що сума 8 мономів може дорівнювати нулю лише в тому випадку, коли два зазначені паралелограми співпадають. З цього випливає, зокрема, $i = i' + 1$, $j + 1 = j'$.

З урахуванням останнього висновку, наш наступний крок полягає в прирівнюванні коефіцієнтів при відповідних мономах в (7.2.39), (7.2.40). Це призводить до наступної системи рівнянь:

$$\begin{cases} a_1 q^i = b_1 q \\ a_2 q^{i+a(1)-1} = -b_1 \alpha q^{a(1)j+a(1)} \\ a_1 \beta q^{b(1)j+1} = -b_2 q \\ a_2 \beta q^{b(1)(j+c(1))+1} = b_2 \alpha q^{a(1)(j+d(1))} \end{cases}$$

Загальний розв'язок цієї системи має вигляд

$$a_1 = g, \quad a_2 = -g\alpha q^{a(1)j}, \quad b_1 = g q^{i-1}, \quad b_2 = -g\beta q^{b(1)j}, \qquad g \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Це дозволяє переписати (7.2.37) і (7.2.38) так:

$$\pi(\mathsf{e})(x) = gx^iy^j - g\alpha q^{a(1)j}x^{i+a(1)-1}y^{j+c(1)}, \tag{7.2.41}$$

$$\pi(\mathsf{e})(y) = gq^{i-1}x^{i-1}y^{j+1} - g\beta q^{b(1)j}x^{i+b(1)-1}y^{j+d(1)}. \tag{7.2.42}$$

Тепер повернемося до (7.2.31), (7.2.32), разом з відповідними конфігураціями в $\mathbb{Z}^2$ (7.2.33), (7.2.34), обидві у випадку $N = 1$, для того, аби вивести більше наслідків з (6.1.2), застосованого до x. Дивлячись на (7.2.34), зазначимо, що, з огляду на Лему 7.2.8, все зводиться до двох прогресій, обидві з яких мають однакову довжину $|a(1)|$ і той самий крок h_D. Ці прогресії перетинаються; точніше, вони є зсувами одна одної таким чином, що початкова точка однієї з них збігається з другою точкою іншої. Це означає, що кінці об'єднання цих двох прогресій відповідають мономам у (7.2.31), які виживають після можливого скорочення в рамках другої суми в (7.2.31). Для того, щоб написати ці дві точки $u_1, u_2 \in \mathbb{Z}^2$ явно, необхідно підставити $r = 0$ і $r = a(1)$ до (7.2.34), відповідно, і це, очевидно, не залежить від знаку $a(1)$. А саме, маємо

$$u_1 = \begin{pmatrix} i + a(1) - 1 + b(1)c(1) \\ j + c(1)d(1) \end{pmatrix}; \qquad u_2 = \begin{pmatrix} i + a(1)^2 - 1 + b(1)c(1) \\ j + a(1)c(1) + c(1)d(1) \end{pmatrix}.$$

Може виглядати так, що все це передбачає $a(1) \neq 0$. Однак це справедливо лише в наведеному вище. Як стане ясно в подальшому, для випадку $a(1) = 0$, незважаючи на зникнення вище двох прогресій, це не порушує аргумент в цілому.

Аналогічним чином, розглянемо прогресії з (7.2.33), довжина яких становить $|c(1)|$, а крок h_E, і запишемо явно кінцеві точки $v_1, v_2 \in \mathbb{Z}^2$, підставляючи $r = 0$ та $r = c(1)$ до (7.2.33), використовуючи при цьому співвідношення між i, j, i', j':

$$v_1 = \begin{pmatrix} i + a(1) - 1 \\ j + c(1) \end{pmatrix}; \qquad v_2 = \begin{pmatrix} i + a(1) - 1 + b(1)c(1) \\ j + c(1)d(1) \end{pmatrix}.$$

Зазначимо, що $c(1) \neq 0$, оскільки матриця σ не може бути трикутною за наших припущень. Знову ж, відповідні мономи в (7.2.31) виживають після можливих скорочень в межах першої суми в (7.2.31). Проте, всі чотири мономи повинні якимось чином зникати при прирівнюванні (7.2.31) і (7.2.32) внаслідок (6.1.2). З огляду на це, порівняємо u_1, u_2, v_1, v_2 з точками σD, які відповідають мономам у (7.2.32). Внаслідок (7.2.41), $\binom{i}{j} \in D$, отже, дві точки з σD є $w_1 = \sigma\binom{i}{j}$ і $w_2 = \sigma\left(\binom{i}{j} + h_D\right)$.

Зазначимо, що $u_1 = v_2$. Звідси випливає, що $\{u_2, v_1\} = \sigma D$ (очевидно, немає жодних інших варіантів). Точніше, оскільки $u_2 = u_1 + a(1)h_D = u_1 + a(1)(\sigma - I)\binom{1}{0}$ і $v_1 = v_2 - c(1)h_E = v_2 - c(1)(\sigma - I)\binom{0}{1}$, маємо

$$u_2 - v_1 = a(1)(\sigma - I)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + c(1)(\sigma - I)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = (\sigma - I)\begin{pmatrix}a(1)\\c(1)\end{pmatrix} = (\sigma - I)\sigma\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

Також маємо

$$w_2 - w_1 = \sigma h_D = \sigma(\sigma - I)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$

і, оскільки матриці σ, $\sigma - I$ комутують, $u_2 - v_1 = w_2 - w_1$. Звідси випливає, що $v_1 = w_1$, $u_2 = w_2$. Першу з цих рівностей можна записати у вигляді

$$\sigma\begin{pmatrix}i\\j\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}i + a(1) - 1\\j + c(1)\end{pmatrix},$$

тому

$$(\sigma - I)\begin{pmatrix}i\\j\end{pmatrix} = h_D = (\sigma - I)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$

і, оскільки $\sigma - I$ є оборотною матрицею, доходимо висновку, що $i = 1$, $j = 0$, і це рішення єдине. Звичайно, той же результат можна вивести з $u_2 = w_2$. Це, разом з (7.2.36), дозволяє ще раз уточнити (7.2.41), (7.2.42):

$$\pi(\mathsf{e})(x) = gx - g\alpha x^{a(1)}y^{c(1)} = g(\mathrm{id} - \pi(\mathsf{k}))(x), \tag{7.2.43}$$

$$\pi(\mathsf{e})(y) = gy - g\beta x^{b(1)}y^{d(1)} = g(\mathrm{id} - \pi(\mathsf{k}))(y), \tag{7.2.44}$$

для певного $g \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Проста перевірка показує, що лінійне відображення $\Phi = g(\mathrm{id} - \pi(\mathsf{k}))$ на $\mathbb{C}_q[x^{\pm1}, y^{\pm1}]$ має ту ж властивість $\Phi(\xi\eta) = \xi\Phi(\eta) + \Phi(\xi)\pi(\mathsf{k})(\eta)$, що й $\pi(\mathsf{e})$. Це дозволяє розширити співвідношення (7.2.43), (7.2.44) з твірних на усю алгебру $\mathbb{C}_q[x^{\pm1}, y^{\pm1}]$, і отже $\pi(\mathsf{e}) = g(\mathrm{id} - \pi(\mathsf{k}))$ тотожно на $\mathbb{C}_q[x^{\pm1}, y^{\pm1}]$. Оскільки це відображення комутує з $\pi(\mathsf{k})$, доходимо висновку, що (6.1.2) не виконується. Отримана суперечність завершує доведення. $\square$

Зауваження. З огляду на результати цього пункту, повний перелік $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-симетрій на $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$, у яких k діє автоморфизмом $\varphi_{\sigma,\alpha,\beta}$ з не одиничною матрицею σ, подається Теоремою 7.2.4.

7.2.3 $\boldsymbol{\sigma = I}$: випадок загального положення

В випадку $\sigma = I$, дія картанівської твірної k задається множенням твірних x, y на *вагові константи.* Як і в (7.2.3), ми позначаємо ці вагові константи α та β, відповідно. Мономи утворюють базу вагових векторів (власних векторів для $\pi(\mathsf{k})$), і відповідні власні значення називаються *вагами.*

Розглянемо випадок, коли або $\pi(\mathsf{e})$, або $\pi(\mathsf{f})$ не є тотожнім нулем. За цих умов ми описуємо ряд симетрій, які ми називаємо *симетріями загального положення.*

Пара ненульових комплексних констант α та β, які можуть відігравати роль вагових констант $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-симетрії на $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$, не може бути довільною. Дійсно, очевидним наслідком (6.1.2) є те, що $\pi(\mathsf{e})$ переводить вектор, вага якого γ, у вектор, чия вага $q^2\gamma$. Зокрема, $\pi(\mathsf{e})(x)$, якщо не нуль, є сумою мономів з (однією й тією ж) вагою $q^2\alpha$. Оскільки вага монома ax^iy^j (з $a \neq 0$) є $\alpha^i\beta^j$, маємо $\alpha^u\beta^v = q^2$ для певних цілих u, v. Подібні висновки можуть бути також одержані застосуванням (6.1.2) до x та y. За наших припущень, цей аргумент повинен спрацювати принаймні один раз.

Наступна Теорема охоплює всі, крім зчисленного сімейства, припустимі пари вагових констант.

Теорема 7.2.9. *Нехай $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ такі, що $\alpha^u\beta^v = q^2$ для певних $u, v \in \mathbb{Z}$ та $\alpha^m \neq \beta^n$ для всіх ненульових цілих m, n. Тоді існує однопараметричне ($a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$) сімейство $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-симетрій на $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$:*

$$\pi(\mathsf{k})(x) = \alpha x \qquad \pi(\mathsf{k})(y) = \beta y \tag{7.2.45}$$

$$\pi(\mathsf{e})(x) = aq^{uv+3}\frac{1-\alpha q^v}{(1-q^2)^2}x^{u+1}y^v \qquad \pi(\mathsf{e})(y) = aq^{uv+3}\frac{q^u-\beta}{(1-q^2)^2}x^u y^{v+1} \tag{7.2.46}$$

$$\pi(\mathsf{f})(x) = -\frac{(\alpha^{-1}-q^{-v})}{a}x^{-u+1}y^{-v} \qquad \pi(\mathsf{f})(y) = -\frac{(\beta^{-1}q^{-u}-1)}{a}x^{-u}y^{-v+1} \tag{7.2.47}$$

Не існує ніяких інших симетрій з ваговими константами α та β.

Лема 7.2.10. *Нехай π – $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-симетрія на $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$:*

$$\pi(\mathsf{k})(x) = \alpha x \qquad \pi(\mathsf{k})(y) = \beta y \tag{7.2.48}$$

$$\pi(\mathsf{e})(x) = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j \qquad \pi(\mathsf{e})(y) = \sum_{i,j} b_{i,j} x^i y^j \tag{7.2.49}$$

$$\pi(\mathsf{f})(x) = \sum_{i,j} c_{i,j} x^i y^j \qquad \pi(\mathsf{f})(y) = \sum_{i,j} d_{i,j} x^i y^j, \tag{7.2.50}$$

з $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j}, d_{i,j} \in \mathbb{C}$, і всі суми тут є скінченними. Тоді

$$a_{i+1,j}\left(q^i - \beta\right) = b_{i,j+1}\left(1 - \alpha q^j\right), \tag{7.2.51}$$

$$c_{i+1,j}\left(1 - \beta^{-1} q^i\right) = d_{i,j+1}\left(q^j - \alpha^{-1}\right). \tag{7.2.52}$$

Доведення. Це є наслідком (7.2.1). Маємо

$$\pi(\mathsf{e})(yx) = y\pi(\mathsf{e})(x) + \pi(\mathsf{e})(y)\pi(\mathsf{k})(x) = \sum_{i,j} a_{i,j} q^i x^i y^{j+1} + \sum_{i,j} b_{i,j} \alpha q^j x^{i+1} y^j,$$

$$q\pi(\mathsf{e})(xy) = qx\pi(\mathsf{e})(y) + q\pi(\mathsf{e})(x)\pi(\mathsf{k})(y) = \sum_{i,j} b_{i,j} q x^{i+1} y^j + \sum_{i,j} a_{i,j} \beta q x^i y^{j+1}.$$

З цим, ми проектуємо співвідношення $\pi(\mathsf{e})(yx) = q\pi(\mathsf{e})(xy)$ на одновимірний підпростір $\mathbb{C}x^{i+1}y^{j+1}$ паралельно лінійної оболонці всіх інших мономів і одержуємо (7.2.51). Доведення (7.2.52) є подібним. □

Доведення Теореми 7.2.9. Ми збираємося застосувати наступні співвідношення, справедливі за припущення $\sigma = I$ цього пункту:

$$\pi(\mathsf{e})(x^p) = \sum_{i,j} a_{i,j} \frac{\alpha^p q^{jp} - 1}{\alpha q^j - 1} x^{p-1+i} y^j, \quad \pi(\mathsf{e})(y^p) = \sum_{i,j} b_{i,j} \frac{\beta^p - q^{ip}}{\beta - q^i} x^i y^{p-1+j},$$

$$\pi(\mathsf{f})(x^p) = \sum_{i,j} c_{i,j} \frac{\alpha^{-p} - q^{jp}}{\alpha^{-1} - q^j} x^{p-1+i} y^j, \quad \pi(\mathsf{f})(y^p) = \sum_{i,j} d_{i,j} \frac{\beta^{-p} q^{ip} - 1}{\beta^{-1} q^i - 1} x^i y^{p-1+j},$$

де $p \in \mathbb{Z}$, $a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j}, d_{i,j} \in \mathbb{C}$ є як у (7.2.49), (7.2.50). Ці співвідношення виводяться простим застосуванням індукції.

Пряме обчислення, яке застосовує вищезгадані співвідношення, дозволяє перевірити, що продовження дії (7.2.45) – (7.2.47) з твірних на всі алгебри $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ та $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ пропускається через всі співвідношення (7.2.1), (7.2.2), (6.1.1) – (6.1.3). Тому (7.2.45) – (7.2.47) задають коректно визначену $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-симетрію на $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$.

Доведемо, що немає ніяких інших симетрій. Зазначимо насамперед, що за припущеннь Теореми про вагові константи α and β, пара цілих чисел u, v з властивістю $\alpha^u \beta^v = q^2$ є єдиною. Тому мономи по модулю (ненульових) постійних множників є у взаємно-однозначній відповідності до їх ваг. Оскільки, з огляду на (6.1.2), $\pi(\mathsf{e})$ та $\pi(\mathsf{f})$ "множать" вагу вагового вектора на q^2 та q^{-2}, відповідно, доходимо висновку, що $\pi(\mathsf{e})(x)$, $\pi(\mathsf{e})(y)$, $\pi(\mathsf{f})(x)$, $\pi(\mathsf{f})(y)$ є мономами, які, з точністю до постійних множників, мають бути такими, як в (7.2.46), (7.2.47).

Зауважимо, що в припущеннях Теореми про вагові константи α та β, жоден з постійних множників в (7.2.46), (7.2.47) не може дорівнювати нулю. Тому, внаслідок Леми 7.2.10, відношення коефіцієнтів при мономах $\pi(\mathsf{e})(x)$ та $\pi(\mathsf{e})(y)$ має бути таким, як в (7.2.46). Аналогічне твердження вірне і для (7.2.47).

Залишається встановити співвідношення коефіцієнтів в (7.2.46) і такі в (7.2.47). Це робиться застосуванням (6.1.3) до x та y. Це обчислення, яке залишається читачеві, в обох випадках приводить до одного й того ж результату, відображеного в (7.2.46), (7.2.47). $\square$

Зауваження. Теорема 7.2.9 подає незчисленне сімейство класів ізоморфізму $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-симетрій на $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$.

Дійсно, маємо незчисленне сімейство припустимих (тобто таких, що відповідають умовам Теореми 7.2.9) пар вагових констант α, β. З іншого боку, дія групи автоморфізмів алгебри $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ (яка є напівпрямим добутком своїх підгруп $SL(2, \mathbb{Z})$ та $(\mathbb{C}^*)^2$) на просторі параметрів симетрій загального положення є такою, що дія нормальної підгрупи $(\mathbb{C}^*)^2$ залишає незмінною кожну пару вагових констант (α, β). Звідси випливає, що (проекція) кожної орбіти групи автоморфізмів на простір припустимих пар вагових констант α, β є лише зчисленною.

Висновки до розділу 7

Раніше у літературі з квантових груп розглядалася лише одна виділена структура $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-модульної алгебри на квантовій площині. З незрозумілих причин питання про її єдиність не ставилося. У цій роботі з'ясовано, що насправді ні про яку єдиність мова не йде. Подано повний перелік таких структур на квантовій площині. З цього переліку випливає існування незчисленної кількості класів ізоморфізму структур $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-модульної алгебри на квантовій площині. Для відповідних зображень $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ у векторному просторі обчислено композиційні ряди.

Незважаючи на наявність континууму неізоморфних $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-симетрій на (алгебрі поліномів на) квантовій площині, варто відзначити існування лише скінченної кількості серій таких симетрій, що визначаються, зокрема, парами вагових констант. Це сприймається як натяк на можливе існування більш симетричних об'єктів (алгебр), пов'язаних із квантовою площиною.

З огляду на це, ми розглянули розширення Лорана квантової площини, "дозволивши" її твірним x, y бути оборотними. Тут симетрій зі структурою, принципово відмінною від таких для стандартної квантової площини, порівняно небагато, і для них у роботі подано повний перелік. І все ж виявилося, що розширення Лорана є набагато більш симетричним об'єктом, ніж стандартна квантова площина (тобто відповідна алгебра звичайних поліномів). Більш точний сенс цього твердження полягає в тому, що, з одного боку, як це з'ясовано, кожна симетрія стандартної квантової площини має продовження на алгебру поліномів Лорана. З іншого боку, на алгебрі поліномів Лорана існує "багато" симетрій, що не залишають інваріантною підалгебру звичайних поліномів. Їх настільки багато, що відповідна множина пар вагових констант не лише не є скінченною, як у випадку стандартної квантової площини, але навіть незчисленна. При цьому мова йде лише про так звані симетрії загального положення, описані в роботі.

Тому завданням для подальшого дослідження є подання повного переліку симетрій розширення Лорана квантової площини. Звичайно, варто розглянути квантові групи симетрій для інших квантових алгебр, зокрема для квантового кола та його розширень.

ВИСНОВКИ

У роботі вирішено низку змістовних задач у галузі ергодичної теорії та теорії квантових груп.

У розділі 2 одержано остаточний результат щодо можливості представлення аменабельної дії локально компактної сепарабельної (л.к.с.) групи у вигляді дії Маккі ергодичного автоморфізму, зокрема і для дій (не обов'язково аменабельної) л.к.с. групи з нетривіальними стабілізаторами. Аналогічний результат встановлено також для так званих "подвійних дій", що є діями Маккі "подвійних коциклів". Встановлено, що аменабельність групової дії еквівалентна аменабельності відповідного відношення еквівалентності, разом із аменабельністю стабілізаторів.

Далі доводиться більш значуща теорема єдиності для коциклів, яка встановлює взаємно-однозначну відповідність між класами слабої еквівалентності коциклів і класами спряженості їх дій Маккі. Інакше кажучи, подано характеризацію класів коциклів з ізоморфними "віртуальними образами". Цей результат встановлено на найбільш загальному рівні.

Змістовність цього результату полягає у можливості його ефективного застосування до вирішення різноманітних задач ергодичної теорії. У межах розділу це продемонстровано застосуваннями до вивчення фундаментальної групи динамічних систем та до дослідження дійснозначних коциклів з необмеженими лакунами з точки зору наявності скінченної інваріантної міри для їх потоків Маккі.

Концепцію існування та єдиності коциклів перенесено з вимірної ергодичної теорії до теорії груп псевдо-гомеоморфізмів досконалого польського простору. У цьому новому контексті доведено теореми існування та єдиності для ергодичних коциклів. У якості застосування доведено теорему про зовнішню спряженість зчисленних підгруп нормалізатора повної групи. Але варто відзначити, що залишаються відкритими низка проблем, пов'язаних з перенесенням до даного контексту більш загальних результатів щодо критеріїв слабої еквівалентності коциклів, зовнішньої спряженості тощо, які існують у рамках вимірної ергодичної теорії. Це може стати предметом подальших досліджень.

Ще однією проблемою, яку вирішено у розділі, є проблема регуляризації дій л.к.с. груп та вимірних групоїдів автоморфізмами вимірних відношень еквівалентності. Як відомо, стандартний підхід у вимірній ергодичній теорії полягає у розгляді індивідуальних автоморфізмів, точкових властивостей динамічних систем тощо з точністю до множини міри нуль. Ця виключна множина є специфічною для кожного індивідуального перетворення простору з мірою, і у випадку, коли ці перетворення складають неперервну групу чи групоїд, такі елементи некоректної поведінки можуть створювати проблеми при вирішенні конкретних задач ергодичної теорії. Можливість регуляризації, доведена у межах розділу, реалізується шляхом зміни відношення еквівалентності на множині міри нуль.

Розділ 3 присвячений вивченню властивостей спряженості та ізоморфізму стабілізаторів невільних групових дій. Стандартним аргументом вимірної ергодичної теорії є доведення інваріантності тієї чи іншої функції відносно ергодичної динамічної системи, після чого робиться висновок про те, що така функція є константою. Звісно, йдеться про функції зі значеннями у "гарних" просторах, скажімо, комплекснозначні. На практиці доводиться стикатися з відображеннями до просторів, гарні властивості яких не є очевидним фактом; такими можуть бути, наприклад, різноманітні фактор-простори "гарних" просторів. В нашому дослідженні йдеться про простори класів спряженості чи ізоморфізму замкнутих підгруп л.к.с. групи, адже стабілізатори групової дії спряжені над кожною траєкторією.

У розділі доведено, що ергодична дія дійсної групи Лі з компактними стабілізаторами має всі стабілізатори спряженими. Ще один результат – це ізоморфізм скінченних стабілізаторів для ергодичних дій л.к.с. групи.

Подано змістовні контрприклади, в яких ергодичні дії груп Лі мають неспряжені або неізоморфні стабілізатори.

Варто звернути увагу на досі відкриті питання про спряженість чи ізоморфізм стабілізаторів ергодичних групових дій за більш загальних припущень, насамперед для дій зчисленних груп з нескінченними стабілізаторами.

Розділ 4 містить результати з ентропійної теорії аменабельних груп перетворень. Класичні результати з ентропійної теорії автоморфізмів простору з мірою перенесено на скінченно-генеровані нільпотентні групи без кручень. Це стало можливим завдяки тому, що ці групи є впорядкованими, як і група $\mathbb{Z}$.

У розділі доведено формулу Пінскера для середньої ентропії перетину розбиттів, подано опис алгебр Пінскера для дій скінченно-генерованих нільпотентних груп. Розглянуто розбиття з різноманітними властивостями інваріантності: інваріантні, сильно інваріантні, тотально інваріантні, вичерпні, досконалі. У термінах таких розбиттів подано опис K-систем як таких, що мають цілком позитивну ентропію, а також доведено, що динамічна система з додатною ентропією має зчисленний лебегівський спектр в ортогональному додатку до L^2-простору над алгеброю Пінскера.

У розділі також досліджено співвідношення властивостей бернуллієвості та цілком позитивної ентропії для дій зчисленних аменабельних груп. Добре відомо, що бернулліївські дії мають цілком позитивну ентропію (ц.п.е.), і при цьому існують небернуліївські перетворення з цілком позитивною ентропією.

Виявлено, що важливим засобом побудови групових дій із зазначеними вище властивостями є так звані коіндуковані дії. Процедура коіндукування дозволяє будувати дію групи за дією її підгрупи (зі скінченною інваріантною мірою), і при цьому, як встановлено у роботі, зберігаються властивості бернуллієвості та ц.п.е.

З огляду на названий вище класичний результат щодо групи $\mathbb{Z}$, у роботі доведено, що зчисленна аменабельна група, яка містить елемент нескінченного порядку, має небернулліївську дію з ц.п.е.

Залишається невирішеним питання про існування небернулліївських дій з ц.п.е. для зчисленних груп, всі елементи яких мають скінченні порядки. Ймовірно, для цього також можливе застосування коіндукції.

Розділ 5 присвячений вирішенню деяких проблем з теорії зображень квантових алгебр. У підрозділі 5.1 розглянуто алгебри Гекке (див. [104]) у квантовому випадку. Це дозволило побудувати квантовий аналог функтора Бернштейна, що є кроком на шляху до когомологічної індукції у контексті квантових груп.

У підрозділі 5.2 вивчаються властивості диференціальних числень на поліноміальних алгебрах над квантовими передоднорідними векторними просторами комутативного параболічного типу. В цьому контексті встановлено дуальність комплекса де Рама голоморфних форм з поліноміальними коефіцієнтами і узагальненого комплексу Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда для тривіального $U_q\mathfrak{g}$-модуля.

Підрозділ 5.3 містить викладення основ теорії функцій на квантових аналогах комплексних гіперболічних просторів $\mathcal{H}_{n,m}$ і відповідних ізотропних конусів $\Xi_{n,m}$. Запроваджуються алгебри фінітних функцій. Для них побудовано точні зображення та інтеграли; для цих останніх доведено інваріантність щодо дії квантової універсальної огортуючої алгебри $U_q\mathfrak{su}_{n,m}$. Побудовано квантовий аналог основної унітарної серії $U_q\mathfrak{su}_{n,m}$-модулів, пов'язаних з квантовим аналогом конуса Ξ. Для цих модулів встановлено необхідні умови еквівалентності.

Ще один результат (підрозділ 5.4) пов'язаний з одержанням квантових аналогів для інтеграла Пуассона і рівнянь Хуа. У класичному випадку інтегральний оператор Пуассона сплітає дії групи $SU_{n,n}$ у просторах неперервних функцій на матричній кулі і її межі Шилова (унітарних матрицях). Але не будь-яка неперервна функція на матричній кулі може бути одержана шляхом застосування інтегрального оператора Пуассона до неперервної функції на межі Шилова. Класичний результат стверджує, що повну характеризацію образа оператора Пуассона дає система диференціальних рівнянь Хуа.

У даному підрозділі подано квантовий аналог оператора Пуассона. Виведено рівняння Хуа у квантовому випадку. Доведено, що ці рівняння є необхідною умовою приналежності функції до образу квантового оператора

Пуассона. Досі невідомо, чи є ця умова також і достатньою, що може стати предметом подальшого дослідження.

Розділ 6 присвячений побудові нових біалгебр на основі $U_q(sl_2)$, що містять ідемпотенти і інші дільники нуля. У деяких окремих випадках наведено явні формули для R-матриць. Визначено майже-R-матриці, що задовольняють умові регулярності фон Неймана.

У подібний спосіб можна розглянути аналоги $U_q(sl_n)$, устатковані відповідними більш розгалуженими сімействами ідемпотентів. Варто також дослідити суперсиметричні версії поданих структур. Цей підхід має сприяти подальшим дослідженням біалгебр, які розпадаються у прямі суми, що є новим шляхом узагальнення стандартних алгебр Дрінфельда-Джімбо.

Розділ 7 подає опис дослідження, яке вперше ставить питання про єдиність структури $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-модульної алгебри на квантовій площині, що раніше розглядалася у літературі. З'ясовано, що насправді ні про яку єдиність не йдеться. Подано повний перелік таких структур на квантовій площині, з якого випливає існування незчисленної кількості класів ізоморфізму структур $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-модульної алгебри на квантовій площині. Для відповідних зображень $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ у векторному просторі обчислено композиційні ряди.

Розглянуто також розширення Лорана квантової площини, у якому "дозволяється" її твірним x, y бути оборотними. Подано повний перелік симетрій зі структурою, принципово відмінною від таких для стандартної квантової площини. Виявилося, що розширення Лорана є набагато більш симетричним об'єктом, ніж стандартна квантова площина (тобто відповідна алгебра звичайних поліномів). Точніше кажучи, з'ясовано, що кожна симетрія стандартної квантової площини має продовження на алгебру поліномів Лорана. З іншого боку, на алгебрі поліномів Лорана існує "багато" симетрій, що не залишають інваріантною підалгебру звичайних поліномів. Їх настільки багато, що відповідна множина пар вагових констант не лише не є скінченною, як у випадку стандартної квантової площини, але навіть незчисленна. При цьому мова йде лише про так звані симетрії загального положення, описані в розділі.

Тому завданням для подальшого дослідження є подання повного переліку симетрій розширення Лорана квантової площини. Звичайно, варто розглянути квантові групи симетрій для інших квантових алгебр, зокрема для квантового кола та його розширень.

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Abe E.* Hopf Algebras / Eiichi Abe. – Cambridge: Cambridge Univ. Press., 1980. – 284 pp.
2. *Adams S.* Amenable actions of groups / Scot Adams, George A. Elliott, Thierri Giordano // Trans. Amer. Math. Soc. – 1994. – Vol. 344. – P. 803–822.
3. *Alev J.* Dérivations et automorphismes de quelques algèbres quantiques / Jacques Alev, Marc Chamarie // Comm. Algebra. – 1992. – Vol. 20. – P. 1787–1802.
4. *Alev J.* Rigidité des plongements des quotients primitifs minimaux de $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ dans l'Algèbre quantique de Weyl-Hayashi / Jacques Alev, François Dumas // Nagoya Math. J. – 1996. – Vol. 143. – P. 119–146.
5. *Auslander L.* Unitary representations of solvable Lie groups / Louis Auslander, Calvin C. Moore // Mem. Amer. Math. Soc. – 1966. – No 62.
6. *Baldoni W.* The Harish-Chandra homomorphism for a quantized classical Hermitean symmetric pair / Welleda Baldoni, Pierluigi M. Frajria // Ann. Inst. Fourier. – 1999. – Vol. 49. – P. 1179–1214.
7. *Baston R. J.* The Penrose Transform. Its Interaction with Representation Theory / Robert J. Baston, Michael G. Eastwood. – Oxford: Clarendon Press, 1989. – 213 p.
8. *Baston R. J.* The Penrose transform for complex homogeneous spaces / Robert J. Baston, Michael G. Eastwood // Further Advances in Twistor Theory. – Pitman: Res. Notes Math., 1990. – Vol. 231. – P. 126–142.
9. *Berezin F. A.* Introduction to Superanalysis / Felix A. Berezin. – Reidel: Dordrecht, 1987.
10. *Bergman G. M.* The diamond lemma for ring theory / George M. Bergman // Adv. in Math. – 1978. – Vol. 29. – P. 178–218.
11. *Bernstein J. N.* Differential operators on the base affine space and a study of $\mathfrak{g}$-modules / Joseph N. Bernstein, Israel M. Gelfand, Sergey I. Gelfand // Lie Groups and Their Representations [Summer School of the Bolyai Janos Mathematical Society]. – New York: Halsted Press, 1975. – P. 21–64.

12. *Bershtein O.* A q-Analog of the Hua Equations / Olga Bershtein, Sergey Sinel'shchikov // Math. Phys., Analysis, and Geometry. – 2009. – Vol. 5. – No 3. – P. 219–244.

13. *Bershtein O.* Function theory on a q-analog of complex hyperbolic space / Olga Bershtein, Sergey Sinel'shchikov // J. of Geometry and Physics. – 2012. – Vol. 62. – No 5. – P. 1323–1337.

14. *Bershtein O.* Degenerate principal series of quantum Harish-Chandra modules / Olga Bershtein // J. Math. Phys. – 2004. – Vol. 45. – No 10. – P. 3800–3827.

15. *Безуглый С. И.* Внешняя сопряженность действий счетных аменабельных групп на пространстве с мерой / Сергей И. Безуглый, Валентин Я. Голодец // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1986. – Т. 50. – No 4. – С. 643–660.

16. *Bezuglyi S. I.* Groups of measure space transformations and invariants of outer conjugation for automorphisms from normalizers of type III full groups / Sergey I. Bezuglyi, Valentin Ya. Golodets // J. Funct. Anal. – 1985. – Vol. 60. – P. 341–369.

17. *Bopp P. N.* Fonction zêta associée à la série principale sphérique de certain espaces symmétriques / Nicole Bopp, Hubert Rubenthaler // Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. – 1993. – Vol. 26. – 4^e serie. – P. 701–745.

18. *Bourbaki N.* Groupes et Algébres de Lie. Chap. 4-6 / N. Bourbaki. – Paris: Hermann, 1968. – 334 p.

19. *Bourbaki N.* Groupes et Algèbres de Lie, chapitres VII-VIII / N. Bourbaki. – Paris: Herman, 1975. – 342 p.

20. *Campbell S. L.* Generalized Inverses of Linear Transformations / Stephen L. Campbell, Carl D. Meyer. – Boston: Pitman, 1979.– 272 pp.

21. *Chari V.* A Guide to Quantum Groups / Vyjayanthi Chari, Andrew Pressley. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995. – 651 p.

22. *de Concini C.* Representations of quantum groups at roots of 1 / Corrado de Concini, Viktor Kac // Operator Algebras, Unitary Representations, Enveloping Algebras and Invariant Theory; [A. Connes, M. Duflo, A. Joseph, R. Rentschler (eds.)] – Boston: Birkhauser, 1990. – P. 471–506.

23. *Connes A.* An amenable equivalence relation is generated by a single transformation / Alain Connes, Jacob Feldman, Benjamin Weiss // Ergod. Theory and Dyn. Syst. – 1981. – Vol. 1. – No 4. – P. 431–450.

24. *Connes A.* Classification of injective factors. Cases II_1, II_∞, III_λ, $\lambda \neq 1$ / Alain Connes // Ann. Math. – 1976. – Vol. 104 (2). – No 1. – P. 73–115.

25. *Connes A.* Measure space automorphisms, the normalizers of their full groups, and approximate finiteness / Alain Connes, Wolfgang Krieger // J. Funct. Anal. – 1977. – Vol. 24. – P. 336–352.

26. *Conze J. P.* Entropie d'un groupe abélien de transformations / Jean-Pierre Conze // Z. Wahr. Theor. Verw. Geb. – 1972. – Vol. 25. – P. 11–30.

27. *Danilenko A.* Entropy theory from orbital point of view / Alexandre Danilenko // Monatshefte Math. – 2001. – Vol. 134. – P. 121–141.

28. *van Dijk G.* The Plancherel formula for line bundles on complex hyperbolic spaces / Gerrit van Dijk, Yu. Sharshov // J. Math. Pures Appl. – 2000. – Vol. 79. – No. 5. – P. 451–473.

29. *Dixmier J.* Enveloping algebras / Jacques Dixmier. – Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1977.

30. *Dobrev V. K.* Singular vectors of quantum group representations for straight Lie algebra roots / Vladimir K. Dobrev // Lett. Math. Phys. – 1991. – Vol. 22. – P. 251–266.

31. *Dooley A. H.* The spectrum of completely positive entropy actions of countable amenable groups / Anthony H. Dooley, Valentin Ya. Golodets // J. Funct. Anal. – 2002. – Vol. 196. – P. 1–18.

32. *Dooley A.* Non-Bernoulli systems with completely positive entropy / Anthony Dooley, Valentin Golodets, Daniel Rudolph, Sergey Sinel'shchikov // Ergodic Theory and Dyn. Syst. – 2008. – Vol. 28. – No 1. – P. 87–124.

33. *Drinfeld V. G.* Quantum groups / Vladimir G. Drinfeld // Proceedings of the International Congress of Mathematicians. [Berkeley, 1986, A. M. Gleason (ed.)]. – Providence, R. I.: American Mathematical Society, 1987. – P. 798–820.

34. *Drinfeld V. G.* On almost commutative Hopf algebras / Vladimir G. Drinfeld // Leningrad Math. J. – 1990. – Vol. 1. – P. 321–432.

35. *Duplij S.* Weak Hopf algebras and singular solutions of quantum Yang-Baxter equation / Steven Duplij, Fang Li // Commun. Math. Phys. – 2001. – Vol. 225. – P. 191–217.

36. *Duplij S.* Regular solutions of quantum Yang-Baxter equation from weak Hopf algebras / Steven Duplij, Fang Li // Czech. J. Phys. – 2001. – Vol. 51. – P. 1306–1311.

37. *Duplij S.* Quantum enveloping algebras with von Neumann regular Cartan-like generators and the Pierce decomposition / Steven Duplij, Sergey Sinel'shchikov // Commun. Math Phys. – 2009. – Vol. 287. – P. 769–785.

38. *Duplij S.* Quantum enveloping algebras, von Neumann regularity and the Pierce decomposition / Steven Duplij, Sergey Sinel'shchikov // Proceedings of 5th Mathematical Physics Meeting [Summer School in Modern Mathematical Physics, 6 - 17 July 2008, Belgrade; Ed. B. Dragovich, Z. Rakic, Institute of Physics]. – Belgrade, 2009. – P. 241–265.

39. *Duplij S.* Classification of $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-module algebra structures on the quantum plane / Steven Duplij, Sergey Sinel'shchikov // Math. Phys., Anal., and Geom. – 2010. – Vol. 6. – No 4. – P. 406–430.

40. *Duplij S.* On semi-supermanifolds / Steven Duplij // Pure Math. Appl. – 1998. – Vol. 9. – P. 283–310.

41. *Dye H. A.* On groups of measure-preserving transformations, I / Henry A. Dye // Amer. J. Math. – 1959. – Vol. 81. – P. 119–159.

42. *Elliott G. A.* Amenable actions of discrete groups / George A. Elliott, Thierri Giordano // Ergodic Theory and Dynamical Systems – 1993. – Vol. 13. – P. 289–318.

43. *Faraut J.* Distributions sphériques sur les espaces hyperboliques / Jacques Faraut // J. Math. pures et appl. – 1979. – Vol. 58. – P. 369–444.

44. *Федоров А. Л.* Теорема Кригера для коциклов / Андрей Л. Федоров. – 1985. – 76 с. – Деп. в ВИНИТИ 25.02.85, No 1406-85 Деп.

45. *Федоров А. Л.* Поточечная реализация гомоморфизмов группоидов в нормализаторы измеримых отношений эквивалентности / Андрей Л. Федоров. – 1985. – 35 с. – Деп. в ВИНИТИ 08.08.85, No 5929-85 Деп.

46. *Feigin B.* Integrals of motion and quantum groups / Boris L. Feigin, Edward Frenkel // Lecture Notes Math. – 1995. – Vol. 1620. – P. 349–418.

47. *Feigin B.* Integral intertwining operators and complex powers of differential (q-difference) operators / Boris Feigin, Fedor Malikov // Adv. Soviet Math. – Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 1993. – Vol. 17. – P. 15–63.

48. *Feldman J.* Orbit structure and countable sections for ergodic group actions / Jacob Feldman, Peter Hahn, Calvin C. Moore // Adv. in Math. – 1978. – Vol. 28. – P. 186–230.

49. *Feldman J.* New K-automorphisms and a problem of Kakutani / Jacob Feldman // Israel J. Math. – 1976. – Vol. 24. – P. 16–38.

50. *Fell J. M. G.* A Hausdorff topology for the closed subsets of a locally compact non-Hausdorff space / James Michael Gardner Fell // Proc. Amer. Math. Soc. – 1962. – Vol. 13. – P. 472–476.

51. *Fieldsteel A.* A factor orbit equivalence of compact group extensions / Adam Fieldsteel // Israel J. Math. – 1981. – Vol. 38. – P. 289–303.

52. *Fuchs J.* Category theory for conformal boundary conditions / Jurgen Fuchs, Christoph Schweigert // Fields Institute Communications. – Vol. 39. – P. 25–70.

53. *Gefter S.* Fundamental groups for ergodic actions and actions with unit fundamental groups / Sergey Gefter, Valentin Golodets // Publ. Res. Inst. Math. Sci. – 1988. – Vol. 24. – P. 821–847.

54. *Гефтер С. Л.* Фундаментальна група для ергодичних дій напівпростих груп Лі та їх решіток / Сергій Гефтер, Валентин Голодець, Сергій Синельщиков // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1987. – No 8. – С. 6–8.

55. Generalized Inverses and Applications [Proceedings of an Advanced Seminar Sponsored by the Mathematics Research Center, the University of Wisconsin–Madison, October 8–10, 1973; Edited by: M. Zuhair Nashed]. – New York: Academic Press, 1976. – 1054 pp.

56. *Glasner E.* Ergodic Theory via Joinings / Glasner Eli; Mathematical surveys and Monographs; AMS. – 2003. – 384 pp.

57. *Glasner E.* Entropy theory without past / Eli Glasner, Jean-Paul Thouvenot, Benjamin Weiss // Ergod. Theory and Dyn. Syst. – 2000. – Vol. 20. – P. 1355–1370.

58. *Glimm J.* Locally compact transformation groups / James Glimm // Trans. Amer. Math. Soc. – 1961. – Vol. 101. – P. 124–138.

59. *Golodets V.* Cocycles of an ergodic approximately finite dynamical system and the automorphisms compatible with them / Valentin Golodets, Alexandre Danilenko, Sergey Bezuglyi // Adv. in Soviet Math. – 1994. – Vol 19. – P. 73–96.

60. *Golodets V.* Orbit properties of pseudo-homeomorphism groups of a perfect Polish space and their cocycles / Valentin Golodets, Vyacheslav Kulagin, Sergey Sinel'shchikov // London Math. Soc.; Lecture Notes Ser., 2000. – Vol. 277 (Descriptive Set Theory and Dynamical Systems). – P. 211–229.

61. *Golodets V.* Outer conjugacy for actions of continuous amenable groups / Valentin Golodets, Sergey Sinel'shchikov // Publ. Res. Inst. Math. Sci. – 1987. – Vol. 23. – P. 737–769.

62. *Голодецъ В. Я.* Структура автоморфізмів вимірних групоїдів та порівняння транзитних коциклів / Валентин Я. Голодець, Сергій Д. Синельщиков // Доповіді АН Української РСР. – 1987. – No 5. – С. 3–5.

63. *Golodets V.* Regularization of actions of groups and groupoids on measured equivalence relations / Valentin Golodets, Sergey Sinel'shchikov // Pacific J. Math. – 1989. – Vol. 137. – P. 145–154.

64. *Голодец В. Я.* Аменабельные эргодические действия групп и образы коциклов / Валентин Я. Голодец, Сергей Д. Синельщиков // Доклады АН СССР. – 1990. – Т. 312. – No 6. – С. 1296–1299.

65. *Golodets V.* Classification and structure of cocycles of amenable ergodic equivalence relations / Valentin Golodets, Sergey Sinel'shchikov // J. Funct. Anal. – 1994. – Vol. 121. – No 2. – P. 455–485.

66. *Golodets V.* On the conjugacy and isomorphism problems for stabilizers of Lie group actions / Valentin Golodets, Sergey Sinel'shchikov // Ergod. Theory and Dyn. Syst. – 1999. – Vol. 19. – P. 391–411.

67. *Golodets V.* Complete positivity of entropy and non-Bernoullicity for transformation groups / Valentin Golodets, Sergey Sinel'shchikov // Colloq. Math. – 2000. – Vol. 84/85. – P. 421–429.

68. *Golodets V.* On the entropy theory of finitely generated nilpotent group actions / Valentin Golodets, Sergey Sinel'shchikov // Ergod. Theory and Dyn. Syst. – 2002. – Vol. 22. – P. 1747–1771.

69. *González-López A.* Quasi-exactly solvable Lie algebras of differential operators in two complex variables / Artemio González-López, Niky Kamran, Peter J. Olver // J. Phys. A. Math. Gen. – 1991. – Vol. 24. – P. 3995–4078.

70. *Halmos P.* Measure Theory / Paul R. Halmos – Princeton, N. J.: Van Nostrand, 1962.

71. *Hamachi T.* Ergodic groups of automorphisms and Krieger's theorems / Toshihiro Hamachi, Motosige Osikawa // Sem. math. Sci. Keio Univ. – 1981. – Vol. 3. – P. 1–113.

72. *Hamachi T.* Type III_0 cocycles without unbounded gaps / Toshihiro Hamachi // Comment. Math. Univ. Carolinae. – 1995. – Vol. 36 – P. 713–720.

73. *Harris M.* Covariant differential operators / Michael Harris, Hans P. Jakobsen // Lect. Notes Phys. – Berlin: Springer-Verlag, 1983. – Vol. 180. – P. 16–34.

74. *Heckenberger I.* De Rham complex for quantized irreducible flag manifolds / István Heckenberger, Stefan Kolb // J. Algebra. – 2006. – Vol. 305. – No 2. – P. 704–741.

75. *Heckenberger I.* The locally finite part of the dual coalgebra of quantized irreducible flag manifolds / István Heckenberger, Stefan Kolb // Proc. London Math. Soc. – 2004. – Vol. 89. – P. 457–484.

76. *Хелгасон С.* Дифференциальная геометрия и симметрические пространства / Сигурдур Хелгасон. – М.: Мир, 1964. – 534 с.

77. *Helgason S.* Geometric Analysis on Symmetric Spases / Sigurdur Helgason // Mathematical Surveys and Monographs. – Providence R.I.: Amer. Math. Soc., 1994. – Vol. 39.

78. *Hewit E.* Abstract Harmonic Analysis / Edwin Hewit, Kenneth A. Ross. – Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1963.

79. *Higman G.* A remark on finitely generated nilpotent groups / Graham Higman // Proc. Amer. Math. Soc. – 1955. – Vol. 6. – P. 284–285.

80. *Hoffman C.* A K-counterexample machine / Christofer Hoffman // Trans. Amer. Math. Soc. – 1999. – Vol. 351. – P. 4263–4280.

81. *Hua L. K.* Harmonic Analysis of Functions of Several Complex Variables in the Classical Domains / L. K. Hua // Providence, R. I.: Amer. Matth. Soc., 1963. – 164 pp.

82. *Хамфри Дж.* Линейные алгебраические группы / Джеймс Хамфри. – М.: Наука, 1980. – 400 с.

83. *Humphreys J. E.* Reflection Groups and Coxeter groups / James E. Humphreys. – Cambridge Univ. Press, 1990. – 204 pp.

84. *Iohara K., Malikov F.* Rings of skew polynomials and Gelfand-Kirillov conjecture for quantum groups / Kenji Iohara, Feodor Malikov // Commun. Math. Phys. – 1994. – Vol. 164. – No 2. – P. 217–237.

85. *Jakobsen H. P.* Quantized Hermitian symmetric spaces / Hans P. Jakobsen // Lie theory and its applications in physics. – River Edge, N.J.: World Sci. Publ., 1996. – P. 105–116.

86. *Jakobsen H. P.* A class of quadratic matrix algebras arising from the quantized enveloping algebra $U_q(A_{2n-1})$ / Hans P. Jakobsen, Hechun Zhang // J. Math. Phys. – 2000. – Vol. 41. – P. 2310-2336.

87. *Jakobsen H. P.* Unitarity of highest-weight modules for quantum groups / Hans P. Jakobsen // Lett. Math. Phys. – 1997. – Vol. 41. – P. 119–133.

88. *Jantzen J. C.* Lectures on Quantum Groups / Jens C. Jantzen. – Providence R.I.: Amer. Math. Soc., 1996. – 266 pp.

89. *Johnson K.* The Hua operators on bounded symmetric domains of tube type / Kenneth Johnson, Adam Korányi // Ann. Math. – 1980. – Vol. 111. – P. 589–608.

90. *Joseph A.* Local finiteness for the adjoint action for quantized enveloping algebras / Anthony Joseph, Gail Letzter // J. Algebra. – 1992. – Vol. 153. – P. 289–318.

91. *Kalikow S.* The T, T^{-1}-transformation is not loosely Bernoulli / Steven Kalikow // Ann. Math. – 1982. – Vol. 115. – P. 393–409.

92. *Kamiński B.* Spectrum of miltidimensional dynamical systems with positive entropy / Brunon Kamiński, Pierre Liardet // Studia Mathematica. – 1994. – Vol. 108. – P. 77–85.

93. *Kamiński B.* The theory of invariant partitions for $\mathbb{Z}^d$-actions / Brunon Kamiński // Bull. de l'Academie Polonaise des Sciences. Ser. Sci. Math. – 1981. – Vol. 29. – P. 349–362.

94. *Kamita A.* Quantum deformations of certain prehomogeneous vector spaces I / Atsushi Kamita, Yoshiyuki Morita, Toshiyuki Tanisaki // Hiroshima Math. J. – 1998. – Vol. 28. – No 3. – P. 527–540.

95. *Kamita A.* Quantum deformations of certain prehomogeneous vector spaces III / Atsushi Kamita // Hiroshima Math. J. – 2000. – Vol. 30. – No 1. – P. 79–115.

96. *Kamita A.* Quantum b-functions of prehomogeneous vector spaces of commutative parabolic type / Atsushi Kamita // J. Algebra. – 2001. – Vol. 244. – P. 581–603.

97. *Каргаполов М. И.* Основы теории групп / Михаил И. Каргаполов, Юрий И. Мерзляков. – М.: Наука, 1982. – 288 с.

98. *Kassel C.* Quantum Groups / Christian Kassel. – Springer-Verlag, N.Y.–Berlin–Heidelberg, 1995. – 531 pp.

99. *Kébé M.* Sur la classification des $\mathcal{O}$-algèbres quantiques / M. Kébé // J. Algebra. – 1999. – Vol. 212. – P. 626–659.

100. *Kirillov A. A.* On q-analog of McKay correspondence and ADE classification of $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ conformal field theory / Alexander Kirillov, Viktor Ostrik // Adv. Math. – 2002. – Vol. 171. – P. 183–227.

101. *Kirillov A. N.* q-Weyl group and a multiplicative formula for universal R-matrices / Anatolii N. Kirillov, Nicolai Yu. Reshetikhin // Commun. Math. Phys. – 1990. – Vol. 34. – P. 421–431.

102. *Kirkman E.* A q-Analog for the Virasoro Algebra / Ellen Kirkman, Claudio Procesi, L. Small // Comm. Algebra. – 1994. – Vol. 22. – No 10. – P. 3755–3774.

103. *Klimyk A.* Quantum Groups and Their Representations / Anatoli Klimyk, Konrad Schmüdgen. – Berlin et al.: Springer, 1997.

104. *Knapp A.* Cohomological Induction and Unitary Representations / Anthony W. Knapp, David A. Vogan. – Princeton: Princeton Univ. Press, 1995. – 948 pp.

105. *Колмогоров А. Н.* Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространства Лебега / Андрей Н. Колмогоров // Доклады АН СССР. – 1958. – Т. 119. – No 5. – С. 861–864.

106. *Korányi A.* Harmonic functions on symmetric spaces / Adam Korányi // Symmetric spaces. Short courses presented at Washington university. [Ed. by W. M. Boothby, G. L. Weiss.] New York: Marcel Dekker, Inc., 1972. – Vol. 8. – Pure and Applied Mathematics. – P. 379–412.

107. *Korányi A.* Poisson integrals and boundary components of symmetric spaces / Adam Korányi // Invent. Math. – 1976. – Vol. 34. – P. 19–35.

108. *Korányi A.* Function Spaces on Bounded Symmetric Domains / Adam Korányi // Analysis and geometry on complex homogeneous domains [J. Faraut, S. Kaneyuki, A. Koranyi, Qi-keng Lu, Guy Roos, (eds)] – Birkhauser Boston, Inc.: Boston, MA, 2000. – Pp. 183–281.

109. *Корнфельд И. П.* Эргодическая теория / Исаак П. Корнфельд, Яков Г. Синай, Сергей В. Фомин. – М.: Наука, 1980. – 384 с.

110. *Kostant B.* Lie algebra cohomology and the generalized Borel-Weil theorem / Bertram Kostant // Ann. Math. – 1961. – Vol. 74. - No 2. – P. 329–387.

111. *Krieger W.* On ergodic flows and the isomorphism of factors / Wolfgang Krieger // Math. Ann. – 1976. – Vol. 223. – P. 19–70.

112. *Куратовский К.* Топология / Казимеж Куратовский. – М.: Мир, 1966.

113. *Курош А. Г.* Теория групп / Александр Г. Курош. – М: Наука, 1967. – 648 с.

114. *Lambe L. A.* Introduction to the Quantum Yang-Baxter Equation and Quantum Groups – An Algebraic Approach / Larry A. Lambe, David E. Radford. – Dordrecht: Kluwer, 1997. – 293 pp.

115. *Lemańczyk M.* Unbounded gaps for cocycles and invariant measures for their Mackey actions / Mariusz Lemańczyk, Sergey Sinel'shchikov // Proc. Amer. Math. Soc. – 1998. – Vol. 126. – P. 815–818.

116. *Lemańczyk M.* Analytic nonregular cocycles over irrational rotations spaces / Mariusz Lemańczyk // Comment. Math. Univ. Carolinae. – 1955. – Vol. 36. – P. 727–735.

117. *Levendorskii S. Z.* Algebras of functions on compact quantum groups, Schubert cells and quantum tori / Sergei Z. Levendorskii, Yan S. Soibelman // Comm. Math. Phys. – 1991. Vol. 139. – P. 141–170.

118. *Lepowsky J.* Generalized Verma modules, the Cartan-Helgason theorem, and the Harish-Chandra homomorphism / James Lepowsky // J. Algebra. – 1977. – Vol. 49. – P. 470–495.

119. *Lepowsky J.* A generalization of the Bernstein-Gelfand-Gelfand resolution / James Lepowsky // J. Algebra. – 1977. – Vol. 49. – P. 496–511.

120. *Lindenstrauss E.* Mean topological dimension / Elon Lindenstrauss, Benjamin Weiss // Israel J. Math. – 2000. – Vol. 115. – P. 1–24.

121. *Lychagin V.* Products and quantization in K-theory of braiding-commutative algebras / Valentin Lychagin, Andrei V. Prasolov : Algebraic K-theory and its applications, TCTP: Trieste, 1997. – World Scientific: Singapore, 1999.– Vol. 132. – Pp. 450–489.

122. *Mackey G. W.* Point realizations of transformation groups / George W. Mackey // Illinois J. Math. – 1962. – Vol. 6. – P. 327–335.

123. *Mackey G. W.* Ergodic theory and virtual groups / George W. Mackey // Math. Ann. – 1966. – Vol. 166. – P. 187–207.

124. *Majid S.* Foundations of Quantum Group Theory / Shahn Majid. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.

125. *Malikov F.* Quantum groups: singular vectors and BGG resolution / Feodor Malikov // Infinite Analysis. – International Journal of Modern Physics A. – 1992. – Vol. 7. – Suppl. 1B – P. 623–643.

126. *Manin Yu. I.* Topics in Noncommutative Differential Geometry / Yuri I. Manin. – Princeton: Princeton University Press, 1991.

127. *Milne S. C.* A triple product identity for Schur functions / Stephen C. Milne // J. Math. Anal. Appl. – 1991. – Vol 160. – No 2. – P. 446–458.

128. *Молчанов В.* Сферические функции на гиперболоидах / Владимир Ф. Молчанов // Матем. Сб. – 1976. – Т. 99. – No 2. – С. 139–161.

129. *Молчанов В.* Гармонический анализ на однородных пространствах / Владимир Ф. Молчанов // Итоги науки и техн. Совр. пробл. мат. Фунд. напр. – М: ВИНИТИ, 1990. – Т. 59. – С. 5–144.

130. *Montgomery S.* Skew derivations and $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ / Susan Montgomery, S. Paul Smith // Israel J. Math. – 1990. – Vol. 72. – P. 158–166.

131. *Moore C. C.* Extensions and low dimensional cohomology theory of locally compact groups, I / Calvin C. Moore // Trans. Amer. Math. Soc. – 1964. – Vol. 113. – P. 40–63.

132. *Moore C. C.* Ergodic theory and von Neumann algebras / Calvin C. Moore // Operator Algebras and Applications: [Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc., Kingston, July 14 – Aug 2, 1980]. – Providence R.I., 1982. – Pt. 2. – P. 179–226.

133. *Morita Y.* Quantum deformation of certain prehomogeneous vector spaces II / Yoshiyuki Morita // Osaka J. Math. – 2000. – Vol. 37. – No 2. – P. 385–403.

134. *Ollagnier J. M.* Ergodic Theory and Statistical Mechanics / Ollagnier J. M. – Springer Lecture Notes in Mathematics. – 1985. – Vol. 1115. – 147 pp.

135. *Ornstein D.* Equivalence of measure preserving transformations / Donald S. Ornstein, Daniel J. Rudolph, Benjamin Weiss // Mem. Amer. Math. Soc. – 1982. – Vol. 37. – P. 1–166.

136. *Ornstein D.* An uncountable family of K-automorphisms / Donald S. Ornstein, Paul C. Shields // Adv. Math. – 1973. – Vol 10. – P. 63–88.

137. *Ornstein D.* Entropy and isomorphism theorems for actions of amenable groups / Donald S. Ornstein, Benjamin Weiss // J. d'Analyse Math. – 1987. – Vol. 48. – P. 1–141.

138. *Ornstein D.* Ergodic Theory, Randomness and Dynamical Systems / Donald S. Ornstein D. – New Haven: Yale University Press, 1974. – 141 pp.

139. *Pareigis B.* On braiding and dyslexia / Bodo Pareigis // J. Algebra. – 1995. – Vol. 171. – P. 413–425.

140. *Park Hong Goo* Automorphism groups of some algebras / Hong Goo Park, Jeongsig Lee, Seul Hee Choi, XueQing Chen, Nam Ki-Bong // Science in China Series A (Mathematics). – 2009. – Vol. 52. – No 2. – P. 323–328.

141. *Пирс Р.* Ассоциативные алгебры / Ричард С. Пирс // М.: Мир, 1986. – 543 с.

142. *Пицкель Б. С.* Об информационных будущих аменабельных групп / Б. С. Пицкель // Докл. Акад. Наук СССР. – 1975. – Т. 223. – С. 1067–1070.

143. *Rabin J. M.* Super elliptic curves / Jeffrey M. Rabin // J. Geom. Phys. – 1995. – Vol. 15. – P. 252–280.

144. *Ramsay A.* Virtual groups and group actions / Arlan Ramsay // Adv. in Math. – 1971. – Vol. 6. – No 3. – P. 253–322.

145. *Ramsay A.* Nontransitive quasiorbits in Mackey's analysis of group extensions / Arlan Ramsay // Acta Mathematica. – 1976. – Vol. 137. – P. 17–48.

146. *Ramsay A.* Subobjects of virtual groups / Arlan Ramsay // Pacif. J. Math. – 1980. – Vol. 87. – No 2. – P. 289–454.

147. *Ramsay A.* Topologies on measured groupoids / Arlan Ramsay // J. Funct. Analysis. – 1982. – Vol. 47. – No 3. – P. 314–342.

148. *Ramsay A.* The Mackey-Glimm dichotomy for foliations and other Polish groupoids / Arlan Ramsay // J. Funct. Anal. – 1990. – Vol. 94. – P. 358–374.

149. *Rao C. R.* Generalized Inverse of Matrices and its Application / C. Radhakrishna Rao, Sujit Kumar Mitra. – New York: Wiley, 1971. – 240 pp.

150. *Решетихин Н. Ю.* Квантование групп Ли и алгебр Ли / Николай Ю. Решетихин, Леон А. Тахтаджян, Людвиг Д. Фаддеев // Алгебра и анализ. – 1989. – Т. 1. – No 1. – С. 178–206.

151. *Rocha-Caridi A.* Splitting criteria for $\mathfrak{g}$-modules induced from a paraboic and Bernstein-Gelfand-Gelfand resolution of a finite dimensional, irreducible $\mathfrak{g}$-module / Alvany Rocha-Caridi // Trans. Amer. Math. Soc. – 1980. – Vol. 262. – P. 335–366.

152. *Рохлин В. А.* Построение и свойства инвариантных измеримых разбиений / Владимир А. Рохлин, Яков Г. Синай // Докл. АН СССР. – 1961. – Т. 141. – С. 1038–1041.

153. *Рохлин В. А.* Лекции по энтропийной теории преобразований с инвариантной мерой / Владимир А. Рохлин // УМН. – 1967. – Т. 22. – С. 4–54.

154. *Rosenthal A.* Finite uniform generators for ergodic, finite entropy, free actions of amenable groups / A. Rosenthal // Prob. Th. Rel. Fields. – 1988. – Vol 77. – P. 147–166.

155. *Rubenthaler H.* Algèbres de Lie et espaces préhomogènes / Hubert Rubenthaler. – Paris: Hermann, 1992.

156. *Rubenthaler H.* Les paires duales dans les algèbres de Lie réductives / Hubert Rubenthaler // *Asterisque*. – 1994. – Vol. 219.

157. *Rudolph D. J.* Entropy and mixing for amenable group actions / Daniel J. Rudolph, Benjamin Weiss // Ann. Math. – 2000. – Vol. 151. – P. 1119–1150.

158. *Сафонов А. В.* Информационные прошлые в группах / А. В. Сафонов // Изв. Акад. Наук СССР. – 1983. – Т. 47. – С. 421–426.

159. *Schmidt K.* Lectures on cocycles of ergodic transformation groups / Klaus Schmidt. – University of Warwick, 1976.

160. *Shklyarov D.* Non-compact quantum groups and quantum Harish-Chandra modules / Dmitriy Shklyarov, Sergey Sinel'shchikov, Alexander Stolin, Leonid Vaksman // Supersymmetry and Quantum Field Theory [Ed. by D. Sorokin]. – Netherlands: North Holland, 2001. – Vol. 102 & 103 of Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) – P. 334–337.

161. *Shklyarov D.* On a q-analogue of the Penrose transform / Dmitriy Shklyarov, Sergey Sinel'shchikov, Alexander Stolin, Leonid Vaksman // Укр. фiз. журн. – 2002. – Vol. 47. – No 3. – P. 288–292.

162. *Shklyarov D.* On function theory in the quantum disc: integral representations / Dmitriy Shklyarov, Sergey Sinel'shchikov, Leonid Vaksman. – Preprint arXiv:math/9808015 [math.QA].

163. *Shklyarov D.* On function theory in quantum disc: invariant kernels / Dmitriy Shklyarov, Sergey Sinel'shchikov, Leonid Vaksman. – Preprint arXiv:math/9808047 [math.QA].

164. *Shklyarov D.* Quantum matrix ball: differential and integral calculi / Dmitriy Shklyarov, Sergey Sinel'shchikov, Leonid Vaksman. – Preprint arXiv:math/9905035 [math.QA].

165. *Shklyarov D.* Quantum matrix ball: The Bergman kernel / Dmitriy Shklyarov, Sergey Sinel'shchikov, Leonid Vaksman. – Preprint arXiv:math/9909036 [math.QA].

166. *Shklyarov D.* A q-analogue of the Berezin quantization method / Dmitriy Shklyarov, Sergey Sinel'shchikov, Leonid Vaksman // Letters in Math. Phys. – 1999. – Vol. 49. – P. 253–261.

167. *Shklyarov D.* q-Analogues of some bounded symmetric domains / Dmitriy Shklyarov, Sergey Sinel'shchikov, Leonid Vaksman // Czech. J. Phys. – 2000. – Vol. 50. – P. 175–180.

168. *Shklyarov D.* Hidden symmetry of some algebras of q-differential operators / Dmitriy Shklyarov, Sergey Sinel'shchikov, Leonid Vaksman // Noncommutative Structures in Mathematics and Physics [Ed. by S. Duplij, J. Wess]. – Dordrecht, Boston, London: Kluwer, 2001. – Vol. 22 of NATO Science Series. – P. 309–320.

169. *Shklyarov D.* Fock representations and quantum matrices / Dmitriy Shklyarov, Sergey Sinel'shchikov, Leonid Vaksman // Internat. J. Math. – 2004. – Vol. 15. – No 9. – P. 855–894.

170. *Sinel'shchikov S.* Spherical principal non-degenerate series of representations for the quantum group SU(2,2) / Sergey Sinel'shchikov, Alexander Stolin, Leonid Vaksman // Czechoslovak J. Phys. – 2001. – Vol. 51. – P. 1431–1440.

171. *Sinel'shchikov S.* A Quantum Analogue of the Bernstein Functor / Sergey Sinel'shchikov, Alexander Stolin, Leonid Vaksman // Journal of Lie Theory. – 2007. – Vol. 17. – No 1. – P. 73–89.

172. *Sinel'shchikov S.* Differential calculi on some quantum prehomogeneous vector spaces / Sergey Sinel'shchikov, Alexander Stolin, Leonid Vaksman // Journal of Mathematical Physics. – 2007. – Vol. 48. – Issue 7. – P. 073514-073514-27.

173. *Sinel'shchikov S.* Hidden symmetry of the differential calculus on the quantum matrix space / Sergey Sinel'shchikov, Leonid Vaksman // J. Phys. A. – 1997. – Vol. 30. – P. L23 – L26.

174. *Sinel'shchikov S.* On q-analogues of bounded symmetric domains and Dolbeault complexes / Sergey Sinel'shchikov, Leonid Vaksman // Math. Phys., Anal., and Geom. – 1998. – Vol. 1. – P. 75–100.

175. *Sinel'shchikov S.* Geometric realizations for some series of representations of the quantum group $SU_{2,2}$ / Sergey Sinel'shchikov, Leonid Vaksman // Math. Phys., Anal., and Geom. – 2001. – Vol. 8. – P. 90–110.

176. *Sinel'shchikov S.* Quantum groups and bounded symmetric domains / Sergey Sinel'shchikov, Leonid Vaksman // Contemp. Math. – 2005. – Vol. 391. – P. 323 – 330.

177. *Синельщиков С. Д.* Симетрії загального положення для розширення Лорана квантової площини / Сергій Д. Синельщиков // Доповіді НАН України. – 2014. – No 11. – С. 22–25.

178. *Sinel'shchikov S.* Generic symmetries of the Laurent extension of quantum plane / Sergey Sinel'shchikov // Math. Phys., Anal., and Geom. – 2015. – Vol. 11. – No 4. – P. 333–358.

179. *Stuck G.* Stabilisers of ergodic actions of higher rank semisimple groups / Garrett Stuck, Robert J. Zimmer // Ann. Math. – 1994. – Vol. 139. – P. 723–747.

180. *Sullivan D.* Generic dynamics and monotone complete C^*-algebras / Dennis Sullivan, Benjamin Weiss, J. D. Maitland Wright // Trans. Amer. Math. Soc. – 1986. – Vol. 295. – P. 795–809.

181. *Sutherland C. E.* A Borel parametrization of Polish groups / C. E. Sutherland // Publ. Res. Inst. Math. Sci. – 1985. – Vol. 21. – P. 1067–1086.

182. *Sweedler M. E.* Hopf Algebras / Moss E. Sweedler. – New York: Benjamin, 1969. – 350 pp.

183. *Tolstoy V. N.* Projection operator method for quantum groups / V. N. Tolstoy // Special Functions 2000: Current Perspective and Future Directions. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001. – Pp. 457–488.

184. *Ваксман Л. Л.* Алгебра функций на квантовой группе $SU(n+1)$ и нечетномерные квантовые сферы / Леонид Л. Ваксман, Ян С. Сойбельман // Алгебра и анализ. – 1990. – Т. 2. – No 5. – С. 101–120.

185. *Vaksman L.* Quantum Bounded Symmetric Domains / Leonid Vaksman. – AMS, 2010. – 256 pp.

186. *Vaksman L.* Quantum matrix ball: the Cauchy-Szego kernel and the Shilov boundary / Leonid Vaksman // Mathematical Physics, Analysis, and Geometry. – 2001. – Vol. 8. – No 4. – P. 366–384.

187. *Ваксман Л. Л.* Интегральные сплетающие операторы и квантовые однородные пространства / Леонид Л. Ваксман // ТМФ. – 1995. – Т. 105. – No 3. – С. 355–363.

188. *Varadarajan V. S.* Geometry of Quantum Theory / Veeravalli Seshadri Varadarajan. – Princeton, N.J.: Van Nostrand, 1970. – 412 pp.

189. *Varadarajan V. S.* Lie groups, Lie algebras and their representations / Veeravalli Seshadri Varadarajan. – Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1974. – 434 pp.

190. *Вершик А. М.* Измеримые реализации групп автоморфизмов и интегральные представления положительных операторов / Анатолий М. Вершик // Сибирский матем. журнал. – 1987. – Т. 28. – No 1. – С. 52–60.

191. *Weiss B.* Actions of amenable groups / Benjamin Weiss // Topics in dynamics and ergodic theory: LMS: Lecture Notes Series. – 2002. – Vol. 310. – P. 226–262.

192. *Weiss B.* Monotileable amenable groups / Benjamin Weiss // Topology, Ergodic Theory, Real Algebraic Geometry. [V. Turaev and A. Vershik ed.] – AMS Translations. – II-202. – P. 257–262.

193. *Woronowicz S. L.* Compact matrix pseudogroups / Stanisław L. Woronowicz // Comm. Math. Phys. – 1987. – Vol. 111. – P. 613–665.

194. *Желобенко Д. П.* Компактные группы Ли и их представления / Дмитрий П. Желобенко – М.: Наука, 1970. – 664 с.

195. *Zimmer R.* Amenable ergodic group actions and an application to Poisson boundaries of random walks / Robert J. Zimmer // J. Funct. Anal. – 1978. – Vol. 27. – No 3. – P. 350–372.

196. *Zimmer R.* Induced and amenable ergodic actions of Lie groups / Robert J. Zimmer // Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. – 1978. – Vol. 11. – No 3. – P. 407–428.

197. *Zimmer R.* Strong rigidity for ergodic actions of semisimple Lie groups / Robert J. Zimmer // Ann. Math. – 1980. – Vol. 112. – No 3. – P. 511–529.

198. *Zimmer R.* An algebraic group associated to an ergodic diffeomorphism / Robert J. Zimmer // Compos. Math. – 1981. – Vol. 43. – No 1. – P. 59–69.

199. *Zimmer R.* Orbit equivalence and rigidity of ergodic actions of Lie groups / Robert J. Zimmer // Ergod. Theory and Dyn. Syst. – 1981. – Vol. 1. – No 2. – P. 237–253.

200. *Zimmer R.* On the cohomology of ergodic actions of semisimple Lie groups and discrete subgroups / Robert J. Zimmer // Amer. J. Math. – 1981. – Vol. 87. – No 5. – P. 937 – 951.

201. *Zimmer R.* Ergodic Theory and Semisimple Groups / Robert J. Zimmer. – Boston: Birkhauser, 1984. – 250 pp.

ДОДАТКИ

A.1 Приклади ергодичних групових дій із неспряженими стабілізаторами

Приклад. Умова компактності стосовно стабілізаторів в Теоремі 3.1.17 виявляється суттєвою, як це можна побачити з наступного.

Розглянемо групу Маутнера

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} e^{it} & 0 & z_1 \\ 0 & e^{i\alpha t} & z_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R},\ z_1, z_2 \in \mathbb{C} \right\},$$

для певного фіксованого ірраціонального дійсного α. Зрозуміло, що H – щільна підгрупа в групі

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \zeta_1 & 0 & z_1 \\ 0 & \zeta_2 & z_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{T},\ z_1, z_2 \in \mathbb{C} \right\}.$$

Для однопараметричної підгрупи

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

розглянемо однорідний простір G/A, на якому ергодично діє група H. Стабілізатором цієї дії в класі суміжності gA, де

$$g = \begin{pmatrix} \zeta_1 & 0 & z_1 \\ 0 & \zeta_2 & z_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

є підгрупа

$$gAg^{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \zeta_1 t \\ 0 & 1 & \zeta_2 t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\},$$

а спряження елементом g здійснюється в групі G. Але в групі Маутнера H ця підгрупа не є спряженою підгрупі A, за виключенням випадку, коли $(\zeta_1, \zeta_2) = (e^{it}, e^{i\alpha t})$ для певного $t \in \mathbb{R}$. Зокрема, області спряженості H-стабілізаторів є виключно H-траєкторії в G/A, які є множинами міри нуль завдяки власній ергодичності дії групи H на G/A.

Приклад. Навіть скінченні стабілізатори можуть виявитися не спряженими для ергодичної дії загальної л.к.с. групи.

Розглянемо компактну абелеву групу $K = (\mathbb{Z}_2)^{\mathbb{Z}}$ з мірою Хаара μ, простір Лебега $X = (K \times K, \mu \times \mu)$, і нехай Q – зсув Бернуллі на K, $(Qx)_n = x_{n-1}$. Тоді на (X, μ) маємо групу перетворень $\overline{Q}(x,y) = (Qx, Qy)$, $S(x,y) = (x, y+x)$, що зберігають міру, а також дію групи K, а саме $\alpha(k)(x,y) = (x, y+k)$, $k \in K$. Разом ці дії утворюють ергодичну розв'язну цілком незв'язну л.к.с. групу перетворень G на (X, μ), яка є прямим добутком двох підгруп. Перша з них – це $\mathbb{Z}_2$ (генерована перетворенням S), а друга – напівпрямий добуток своєї нормальної підгрупи K на підгрупу $\mathbb{Z}$, яка діє перетворенням $\overline{Q}$.

Ця дія групи G не є вільною, і стабілізатором у точці $(x,y) \in X$ є підгрупа $\mathbb{Z}_2$, генерована перетворенням $S \cdot \alpha(x)$. Зрозуміло, що існує незчисленна множина попарно відмінних стабілізаторів над будь-якою множиною додатної міри в X. З іншого боку, множина внутрішніх автоморфізмів групи G є лише зчисленною, і тому стабілізатори не є спряженими над конульовою множиною.

A.2 Приклади ергодичних групових дій із неізоморфними стабілізаторами

Наведемо приклади ергодичних дій груп Лі, для яких стабілізатори не є ізоморфними м.в.

Приклад 1. Розглянемо дійсну групу Лі

$$\widetilde{G} = \left\{ \begin{pmatrix} k & l & s & a \\ m & n & t & b \\ 0 & 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}); a,b,s,t,u \in \mathbb{R} \right\}$$

разом із сімейством її замкнутих підгруп

$$\widetilde{L}_{\alpha,\beta} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha s & a \\ 0 & 1 & \beta s & b \\ 0 & 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a,b,s,u \in \mathbb{R} \right\},$$

де $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Дискретна підгрупа групи $\widetilde{G}$

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 & n \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : m, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

міститься в усіх підгрупах $\widetilde{L}_{\alpha,\beta}$. Нехай $p : \widetilde{G} \to G = \widetilde{G}/\Gamma$ – природна проекція, і покладемо $L_{\alpha,\beta} = \widetilde{L}_{\alpha,\beta}/\Gamma$.

Зазначимо, що група $\widetilde{G}$ є напівпрямим добутком своєї підгрупи $SL(2,\mathbb{Z})$ і нільпотентної нормальної підгрупи. Ще одне спостереження полягає в тому, що перетин всіх підгруп $\widetilde{L}_{\alpha,\beta}$ є прямим добутком їх спільного центру

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \ a, b \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{R}^2$$

і ще однієї підгрупи, ізоморфної $\mathbb{R}$ (вона відповідає параметру u). Фактор-група $\widetilde{G}/C$ ізоморфна $\left(SL(2,\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{R}^2\right) \times \mathbb{R}$. Напівпрямий добуток $SL(2,\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{R}^2$ тут походить від природної дії групи $SL(2,\mathbb{Z})$ на $\mathbb{R}^2$, а множення в $SL(2,\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{R}^2$ є таким:

$$(A,(a,b))(B,(c,d)) = (AB, B^{-1}(a,b) + (c,d)).$$

Це множення реалізується, якщо ототожнити елемент $(A,(a,b))$ з класом суміжності

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}a + a_{12}b & * \\ a_{21} & a_{22} & a_{21}a + a_{22}b & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

групи $\widetilde{G}$, де $A = (a_{ij}) \in SL(2,\mathbb{Z})$.

Визначимо дію групи $SL(2,\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{R}^2$ на $\mathbb{R}^3$ через (таке лінійне зображення): $(A,(a,b))(x,y,z) = (A(x,y), z - ya + xb)$.

Просте обчислення показує, що над конульовою підмножиною (відносно міри Лебега на $\mathbb{R}^3$) стабілізатор останньої дії в точці $(\alpha s, \beta s, z)$ має вигляд $\{(I,(\alpha t, \beta t)) : \ t \in \mathbb{R}\}$, де I – одинична матриця.

Ця дія припускає підняття до дії групи $\left(SL(2,\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{R}^2\right) \times \mathbb{R}$, в якій прямий множник $\mathbb{R}$ не діє зовсім. Нехай $\pi : G \to \widetilde{G}/C$ – природна проекція.

Вона дозволяє підняти нашу дію до дії групи G, у якій центральний в G_0 тор $\mathbb{T}^2$ (що співпадає з ядром проекції π) не діє зовсім. З наведених вище розглядів випливає, що стабілізатори цієї дії групи G є в точності $L_{\alpha,\beta}$.

Зазначимо, що стабілізатори $L_{\alpha,\beta}$ мають спільний центр

$$p\left\{\begin{pmatrix}1&0&0&a\\0&1&0&b\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\;:\;a,b\in\mathbb{R}\right\}$$

ізоморфний тору $\mathbb{T}^2$, і при цьому комутатори елементів групи $L_{\alpha,\beta}$ містяться в такій однопараметричній підгрупі групи $\mathbb{T}^2$:

$$p\left\{\begin{pmatrix}1&0&0&\alpha s\\0&1&0&\beta s\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\;:\;s\in\mathbb{R}\right\}.$$

Отже, ізоморфізм підгруп $L_{\alpha,\beta}$ і $L_{\alpha',\beta'}$ визначає також автоморфізм тора $\mathbb{T}^2$, який також має сплітати відповідні однопараметричні підгрупи, зазначені вище. Оскільки будь-який автоморфізм групи $\mathbb{T}^2$ задається матрицею $A\in SL(2,\mathbb{Z})$, ізоморфізм груп $L_{\alpha,\beta}$ і $L_{\alpha',\beta'}$ рівнозначний умові $\lambda(\alpha',\beta')=A(\alpha,\beta)$ для певних $A\in SL(2,\mathbb{Z})$, $\lambda\in\mathbb{R}$. З огляду на це робимо висновок, що для зазначеної вище дії групи G всі області ізоморфізму стабілізаторів є множинами міри нуль; зокрема, стабілізатори не є ізоморфними над конульовою множиною.

Приклад 2. Попередній Приклад 1 може здаватися дещо штучним, оскільки дія має ядро $p(C)\times\mathbb{R}$, у той час як дія фактор-групи $G/(p(C)\times\mathbb{R})$ має ізоморфні стабілізатори. Це можна усунути, застосовуючи процедуру індукування [196].

А саме, для групи G з Прикладу 1 розглянемо прямий добуток $G\times G$ разом з його автоморфізмом σ, $\sigma(g,h)=(h,g)$. Нехай $\widehat{G}$ – відповідний напівпрямий добуток групи $\mathbb{Z}_2$ на $G\times G$, в який група G вкладається у вигляді підгрупи $G\times\{1\}$. Нехай $s:\widehat{G}/(G\times\{1\})\to\widehat{G}$ – борелівський переріз однорідного простору $\widehat{G}/(G\times\{1\})$, $s[\sigma^n\cdot(g,h)]=\sigma^n\cdot(1,h)$.

Стартуючи з дії групи $G\simeq G\times\{1\}$ на $\mathbb{R}^3$ як у Прикладі 1, побудуємо індуковану дію групи $\widehat{G}$, чий явний опис є таким [196]. Простором цієї дії є $\mathbb{R}^3\times\left(\widehat{G}/G\times\{1\}\right)$ з природним класом мір, а сама дія задана так:

$$g(x,h(G\times\{1\}))=(\alpha(g,h(G\times\{1\}))x,gh(G\times\{1\})),$$

де $x \in \mathbb{R}^3$, $g, h \in \widehat{G}$, а коцикл $\alpha : \widehat{G} \times \widehat{G}/(G \times \{1\}) \to \widehat{G}$ задається як $\alpha(g, h(G \times \{1\})) = s(gh(G \times \{1\}))^{-1} gs(h(G \times \{1\}))$.

Зазначимо, що стабілізатори цієї дії є підгрупами, спряженими в групі $\widehat{G}$ підгрупам $L_{\alpha,\beta} \times \{1\}$, і при цьому вони, як і у Прикладі 1, не є ізоморфними м.в. З іншого боку, клас цих спряжених підгруп включає також підгрупи вигляду $\{1\} \times L_{\alpha,\beta}$. Отже, перетин усіх цих підгруп є тривіальним, тобто дія має тривіальне ядро.

Зауваження 1. Дії Прикладів 1 та 2 зберігають нескінченну міру. Якщо у Прикладі 1 замінити простір $\mathbb{R}^3$ групової дії простором $\mathbb{T}^3$, то дуже подібна побудова дозволяє одержати дію тієї ж групи, що зберігає скінченну міру. У цьому випадку стабілізатори стають незв'язними, але їх зв'язні компоненти одиниці ті ж, що й у Прикладі 1, чим зберігається феномен неізоморфності. Насправді, єдиною умовою ізоморфізму двох стабілізаторів є те, що вони лежать над тією ж самою траєкторією групової дії; стабілізатори над будь-якими різними траєкторіями не є ізоморфними.

Зауваження 2. Легке спостреження полягає в тому, що дії, побудовані у Прикладах 1 і 2, є аменабельними діями [64] неаменабельних груп. Але ж можна побудувати дію аменабельної групи з неізоморфними стабілізаторами, заміняючи в Прикладах 1 і 2 групу $SL(2, \mathbb{Z})$ ступенями єдиної матриці A з цілими елементами, яка генерує ергодичний груповий автоморфізм двовимірного тора.

A.3 Доведення допоміжних Лем

Ми користуємося позначеннями і термінологією підрозділу 5.1.
Нехай $\mathbb{L} \subset \mathbb{G} \subset \{1, 2, \ldots, l\}$. Облаштуємо $U_q\mathfrak{g}$ градуюванням:

$$\deg E_j = \begin{cases} 1, & j \in \mathbb{G} \setminus \mathbb{L} \\ 0, & j \in \mathbb{L} \end{cases} \qquad \deg F_j = \begin{cases} -1, & j \in \mathbb{G} \setminus \mathbb{L} \\ 0, & j \in \mathbb{L} \end{cases}$$

$$\deg K_j^{\pm 1} = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, l.$$

Нехай $\left(U_q\mathfrak{q}_{\mathbb{L}}^{\pm}\right)_j = \left\{\xi \in U_q\mathfrak{q}_{\mathbb{L}}^{\pm} \middle| \deg \xi = j\right\}$. Зрозуміло, що $\left(U_q\mathfrak{q}_{\mathbb{L}}^{\pm}\right)_0 = U_q\mathfrak{l}$.

Лема A.3.1. *Однорідні компоненти $\left(U_q\mathfrak{q}_{\mathbb{L}}^{\pm}\right)_j$ є вільними лівими та вільними правими $U_q\mathfrak{l}$-модулями скінченного рангу.*

Доведення. Нагадаємо, що підмножини $\mathbb{L} \subset \mathbb{G} \subset \{1, 2, \ldots, l\}$ визначають підгрупи $W_{\mathbb{L}} \subset W_{\mathbb{G}}$ групи Вейля W. Ті підгрупи співпадають з групами Вейля алгебр Лі $\mathfrak{l}$ і $\mathfrak{g}$, відповідно. Нехай $w_{0,\mathbb{L}}$ (відповідно, $w_{0,\mathbb{G}}$) – найдовший елемент групи Вейля $W_\mathbb{L}$ (відповідно, $W_\mathbb{G}$).

Розпочнемо з більшої підмножини $\mathbb{G}$. Виберемо зведений розклад

$$w_{0,\mathbb{G}} = s_{i_1}s_{i_2}s_{i_3}\dots s_{i_M}, \tag{A.3.1}$$

де s_{i_k} – віддзеркалення, що відповідає простому кореню α_{i_k}. Розглянемо автоморфізми Люстіга T_i, $i \in \mathbb{G}$, алгебри $U_q\mathfrak{g}'$, генерованої E_i, F_i, $K_i^{\pm 1}$, $i \in \mathbb{G}$, [88, Глава 8]. Вони мають вигляд

$$\begin{aligned} T_i(K_j) &= K_jK_i^{-a_{ij}}, \\ T_i(E_i) = -F_iK_i, &\qquad T_i(F_i) = -K_i^{-1}E_i, \\ T_i(E_j) &= \sum_{r+s=-a_{ij}} \mathrm{const}\, E_i^sE_jE_i^r, \qquad i \neq j, \\ T_i(F_j) &= \sum_{r+s=-a_{ij}} \mathrm{const}\, F_i^rF_jF_i^s, \qquad i \neq j. \end{aligned} \tag{A.3.2}$$

У подібний спосіб, розглянемо алгебру $U_q\mathfrak{l}'$, що відповідає підмножині $\mathbb{L}$. Нехай $W^\mathbb{L} = \{w \in W_\mathbb{G} |\ l(ws) > l(w)$ для всіх простих віддзеркалень $s \in W_\mathbb{L}\}$, де $l(w)$ – довжина w. Маємо $w_{0,\mathbb{G}} = w^\mathbb{L}w_{0,\mathbb{L}}$, де $w^\mathbb{L} \in W^\mathbb{L}$ і $l(w_{0,\mathbb{G}}) = l(w^\mathbb{L}) + l(w_{0,\mathbb{L}})$ [83, твердження 1.10(c)]. Це дозволяє побудувати зведений розклад (A.3.1) у вигляді

$$w_{0,\mathbb{G}} = s_{i_1}s_{i_2}s_{i_3}\dots s_{i_{M'}}s_{i_{M'+1}}s_{i_{M'+2}}\dots s_{i_M}, \tag{A.3.3}$$

де $w_{0,\mathbb{L}} = s_{i_{M'+1}}, s_{i_{M'+2}}, \dots, s_{i_M}$ і $w^\mathbb{L} = s_{i_1}s_{i_2}s_{i_3}\dots s_{i_{M'}}$.

Застосуємо теорему Люстіга [88, теорема 8.24]. Зазначимо, що зведений розклад спеціального вигляду (A.3.3), з огляду на явний вигляд автоморфізмів Люстіга (A.3.2), мають наслідком те, що всі мономи

$$T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_{M'-1}}(E_{i_{M'}}^{a_{M'}}) \cdot T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_{M'-2}}(E_{i_{M'-1}}^{a_{M'-1}}) \cdot \ldots \cdot T_{i_1}T_{i_2}(E_{i_3}^{a_3}) \cdot T_{i_1}(E_{i_2}^{a_2}) \cdot E_{i_1}^{a_1}$$

містяться в $U_q\mathfrak{l}'$. З теореми Люстіга [88, теорема 8.24] випливає, що мономи

$$\begin{gathered} T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_{M-1}}(E_{i_M}^{a_M}) \cdot T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_{M-2}}(E_{i_{M-1}}^{a_{M-1}}) \cdot \ldots \\ \ldots \cdot T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_{M'+1}}(E_{i_{M'+2}}^{a_{M'+2}}) \cdot T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_{M'}}(E_{i_{M'+1}}^{a_{M'+1}}) \end{gathered}$$

де всі $a_{i_k} \in \mathbb{Z}_+$, утворюють вільну базу правого $U_q\mathfrak{l}$-модуля $U_q\mathfrak{q}_\mathbb{L}^+$. Оскільки для кожного $j \in \mathbb{Z}_+$ можна відокремити скінченну кількість таких мономів, що генерують j-у однорідну компоненту, ми одержуємо наше твердження для $(U_q\mathfrak{q}_\mathbb{L}^+)_j$ як правого $U_q\mathfrak{l}$-модуля. Всі інші твердження можуть бути доведені у подібний спосіб. $\square$

Наслідок A.3.2. *Кожен $U_q\mathfrak{g}$-модуль V містить найбільший підмодуль $V_{\mathfrak{l}}$ категорії $C(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$.*

Доведення. Зрозуміло, що V має найбільший ваговий підмодуль $V_{\mathfrak{h}}$. Залишається довести, що підпростір $V_{\mathfrak{l}} = \{v \in V_{\mathfrak{h}} |\ \dim(U_q\mathfrak{l}v) < \infty\}$ є підмодулем $U_q\mathfrak{g}$-модуля V. Нехай $\xi \in \left(U_q\mathfrak{q}_{\mathbb{L}}^{\pm}\right)_j$, $v \in V_{\mathfrak{l}}$. Внаслідок Леми A.3.1, для певних $\{\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_{N(j)}\}$ маємо $\left(U_q\mathfrak{q}_{\mathbb{L}}^{\pm}\right)_j = \sum\limits_{k=1}^{N(j)} \eta_k U_q\mathfrak{l}$. Тому

$$\dim(U_q\mathfrak{l}\,\xi v) \le \dim\left(\left(U_q\mathfrak{q}_{\mathbb{L}}^{\pm}\right)_j v\right) = \dim\left(\sum_{k=1}^{N(j)} \eta_k U_q\mathfrak{l}\, v\right) < \infty.$$

Отже, $\xi v \in V_{\mathfrak{l}}$. $\square$

Наслідок A.3.3. *Для будь-якого $V \in C(\mathfrak{l},\mathfrak{l})_q$, модуль $P(V)$ належить категорії $C(\mathfrak{g},\mathfrak{l})_q$.*

Доведення. Оскільки $U_q\mathfrak{g}$ – вільний правий $U_q\mathfrak{l}$-модуль, має місце вкладення $U_q\mathfrak{l}$-модулів $i : V \hookrightarrow P(V)$, $i : v \mapsto 1 \otimes v$. Співвідношення $P(V) = P(V)_{\mathfrak{l}}$ виконується завдяки

$$P(V) = U_q\mathfrak{g}\, i(V) \subset U_q\mathfrak{g}\, P(V)_{\mathfrak{l}} = P(V)_{\mathfrak{l}}.$$

Решта тверджень Леми 5.1.3 може бути доведена у такий же спосіб, як і в класичному випадку $q = 1$. $\square$

Для доведення Леми 5.1.7 ми потребуємо наступну допоміжну Лему.

Лема A.3.4. *Нехай $\lambda \in P_+^{\mathbb{L}}$ і $\left(U_q\mathfrak{q}_{\mathbb{L}}^{\pm}\right)_j$ – однорідні компоненти градуйованих алгебр $U_q\mathfrak{q}_{\mathbb{L}}^{\pm}$.*

1. Векторні простори $\left(U_q\mathfrak{q}_{\mathbb{L}}^{\pm}\right)_j \cdot \mathcal{P}_\lambda \subset \operatorname{End} V^{\mathrm{univ}}$ скінченновимірні.

2. Векторні простори $\mathcal{P}_\lambda \cdot \left(U_q\mathfrak{q}_{\mathbb{L}}^{\pm}\right)_j \subset \operatorname{End} V^{\mathrm{univ}}$ скінченновимірні. (Тут крапка позначає добуток елементів $\operatorname{End} V^{\mathrm{univ}}$.)

Доведення. Доведемо перше твердження. Ми розглядаємо $\operatorname{End} V^{\mathrm{univ}}$ як $U_q\mathfrak{l}$-модуль щодо такої дії:

$$(\xi a) : v \mapsto \xi(av), \qquad v \in V^{\mathrm{univ}}, \quad a \in \operatorname{End} V^{\mathrm{univ}}, \quad \xi \in U_q\mathfrak{l}.$$

Зрозуміло, що $\left(U_q\mathfrak{q}_{\mathbb{L}}^{\pm}\right)_j \cdot \mathcal{P}_\lambda$ – підмодуль $U_q\mathfrak{l}$-модуля $\operatorname{End} V^{\mathrm{univ}}$.

Нехай $\pi_\lambda : U_q\mathfrak{l} \to \operatorname{End} L(\mathfrak{l}, \lambda)$ – зображення підалгебри Хопфа $U_q\mathfrak{l}$, що відповідає $U_q\mathfrak{l}$-модулю $L(\mathfrak{l}, \lambda)$. Якщо $\xi \in \operatorname{Ker} \pi_\lambda$, то $\xi \cdot \mathcal{P}_\lambda = 0$. Тому діаграма

$$\begin{tikzcd} U_q\mathfrak{l} \arrow[r, "\xi \mapsto \xi \cdot \mathcal{P}_\lambda"] \arrow[d, "\pi_\lambda"'] & \operatorname{End} V^{\mathrm{univ}} \\ \operatorname{End} L(\mathfrak{l}, \lambda) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

може бути продовжена до комутативної, і

$$\dim(U_q\mathfrak{l} \cdot \mathcal{P}_\lambda) \le (\dim(L(\mathfrak{l}, \lambda)))^2.$$

Отже, перше твердження Леми доведене у випадку $j = 0$. Залишається використати той факт, що $(U_q\mathfrak{q}_{\mathbb{L}}^{\pm})_j$ – правий $U_q\mathfrak{l}$-модуль скінченного рангу (див. Лему A.3.1).

Наразі перше твердження доведено. Друге твердження може бути доведене у подібний спосіб із використанням комутативної діаграми

$$\begin{tikzcd} U_q\mathfrak{l} \arrow[r, "\xi \mapsto \mathcal{P}_\lambda \cdot \xi"] \arrow[d, "\pi_\lambda"'] & \operatorname{End} V^{\mathrm{univ}} \\ \operatorname{End} L(\mathfrak{l}, \lambda) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

в категорії $U_q\mathfrak{l}^{\mathrm{op}}$-модулів. □

Перейдемо до доведення Леми 5.1.7. Розглянемо підпростір $A \subset U_q\mathfrak{g}$ таких елементів $\xi \in U_q\mathfrak{g}$, що для будь-якого $\lambda \in P_+^{\mathbb{L}}$ існує скінченна підмножина $\Lambda \subset P_+^{\mathbb{L}}$, для якої

$$\xi \cdot \mathcal{P}_\lambda = \chi_\Lambda \cdot \xi \cdot \mathcal{P}_\lambda, \tag{A.3.4}$$

$$\mathcal{P}_\lambda \cdot \xi = \mathcal{P}_\lambda \cdot \xi \cdot \chi_\Lambda. \tag{A.3.5}$$

Треба довести, що $A = U_q\mathfrak{g}$. Для цього досить показати, що A – підалгебра в $U_q\mathfrak{g}$ і $A \supset \left(U_q\mathfrak{q}_{\mathbb{L}}^{\pm}\right)_j$ для всіх j.

Доведемо перше твердження. Зрозуміло, що A – векторний підпростір. Нехай $\xi, \eta \in A$, і розглянемо добуток $\xi\eta$. Подвійне застосування (A.3.4), спершу відносно η, а потім щодо ξ, дозволяє вивести, що образ лінійного оператора $\xi \cdot \eta \cdot \mathcal{P}_\lambda \in \operatorname{End} V^{\mathrm{univ}}$ міститься в сумі скінченної кількості ізотипічних компонент $V_\lambda^{\mathrm{univ}}$. Нехай ця сума має вигляд $\bigoplus\limits_{\lambda' \in \Lambda'} V_{\lambda'}^{\mathrm{univ}}$, тоді $\xi \cdot \eta \cdot \mathcal{P}_\lambda = \chi_{\Lambda'} \cdot \xi \cdot \eta \cdot \mathcal{P}_\lambda$. Отже, одержуємо (A.3.4) для $\xi\eta$.

У подібний спосіб, застосовуючи (A.3.5) двічі, виводимо, що для певної скінченної підмножини $\Lambda'' \subset P_+^{\mathbb{L}}$ має місце $\operatorname{Ker}(\mathcal{P}_\lambda \cdot \xi \cdot \eta) \supset (\mathrm{id} - \chi_{\Lambda''})\, V^{\mathrm{univ}}$, тому $\mathcal{P}_\lambda \cdot \xi \cdot \eta = \mathcal{P}_\lambda \cdot \xi \cdot \eta \cdot \chi_{\Lambda''}$. Отже (A.3.5) виконується для $\xi\eta$.

Перейдемо до другого твердження. Ми обмежимося доведенням того, що (A.3.4) виконується для всіх $\xi \in \left(U_q\mathfrak{q}_{\mathbb{L}}^{\pm}\right)_j$. Внаслідок Леми A.3.4, для кожних j, λ, векторний простір $\left(U_q\mathfrak{q}_{\mathbb{L}}^{\pm}\right)_j \cdot \mathcal{P}_\lambda$ скінченновимірний. Він є також $U_q\mathfrak{l}$-модулем, оскільки $U_q\mathfrak{l}\left(U_q\mathfrak{q}_{\mathbb{L}}^{\pm}\right)_j \subset \left(U_q\mathfrak{q}_{\mathbb{L}}^{\pm}\right)_j$. Тому $\left(U_q\mathfrak{q}_{\mathbb{L}}^{\pm}\right)_j \cdot \mathcal{P}_\lambda$ розпадається в суму скінченної кількості $U_q\mathfrak{l}$-ізотипічних компонент. З іншого боку, якщо для певного $a \in \operatorname{End} V^{\mathrm{univ}}$ $U_q\mathfrak{l}$-module $U_q\mathfrak{l} \cdot a \subset \operatorname{End} V^{\mathrm{univ}}$ є кратним $L(\mathfrak{l}, \mu)$, $\mu \in P_+^{\mathbb{L}}$, то $aV^{\mathrm{univ}} \subset V_\mu^{\mathrm{univ}}$ і $\mathcal{P}_\mu \cdot a = a$. Внаслідок цього $\mathcal{P}_{\lambda'} \cdot \left(U_q\mathfrak{q}_{\mathbb{L}}^{\pm}\right)_j \cdot \mathcal{P}_\lambda = 0$ для всіх $\lambda' \in P_+^{\mathbb{L}}$, окрім скінченної їх кількості. Тому $\xi \cdot \mathcal{P}_\lambda = \chi_\Lambda \cdot \xi \cdot \mathcal{P}_\lambda$ для певної скінченної підмножини $\Lambda \subset P_+^{\mathbb{L}}$. □

A.4 Алгебри і модулі в тензорних категоріях

Розглянемо абелеву сплетену тензорну категорію $\mathcal{C}^-$, повну підкатегорію вагових $U_q\mathfrak{b}^-$-скінченних $U_q\mathfrak{g}$-модулів. Сплетення $\check{R}_{V_1,V_2} : V_1 \otimes V_2 \to V_2 \otimes V_1$ зазвичай визначається у термінах універсальної R-матриці [98].

Алгебра F в категорії $\mathcal{C}^-$ називається комутативною в цій категорії, якщо $m = m\check{R}_{FF}$, де $m : F \otimes F \to F$ – множення в F.

Розглянемо бімодуль E над комутативною алгеброю F в категорії $\mathcal{C}^-$:

$$m_{\mathrm{left}} : F \otimes E \to E, \qquad m_{\mathrm{right}} : E \otimes F \to E.$$

Наслідуючи термінологію [121], ми називаємо його симетричним, якщо $m_{\mathrm{right}} = m_{\mathrm{left}}\check{R}_{EF}$.

Приклад. Алгебра F в категорії $\mathcal{C}^-$ є бімодулем над будь-якою своєю підалгеброю F'. Якщо F комутативна в $\mathcal{C}^-$, такий бімодуль симетричний.

Твердження A.4.1. *([139, Зауваження 1.1]) Якщо E_1, E_2 – симетричні бімодулі над комутативною алгеброю F в категорії $\mathcal{C}^-$, то бімодуль $E_1 \otimes_F E_2$ також симетричний.*

Твердження A.4.2. *([139, Зауваження 1.2]) Нехай E – лівий модуль $m_{\mathrm{left}} : F \otimes E \to E$ над комутативною алгеброю F в $\mathcal{C}^-$. Морфізм $m_{\mathrm{right}} = m_{\mathrm{left}}\check{R}_{EF}$ облаштовує E структурою симетричного бімодуля над F в $\mathcal{C}^-$.*

Це означає, що кожен лівий модуль E над комутативною алгеброю F в $\mathcal{C}^-$ є симетричним бімодулем над F в $\mathcal{C}^-$.

Бімодуль E над комутативною алгеброю F в категорії $\mathcal{C}^-$ називається *дислектичним*, якщо $m_{\mathrm{right}} = m_{\mathrm{left}}\check{R}_{EF}$, $m_{\mathrm{left}} = m_{\mathrm{right}}\check{R}_{FE}$.

Твердження A.4.3. *([139, твердження 2.4, теорема 2.5]) Нехай E_1, E_2 – дислективні бімодулі над комутативною алгеброю F в категорії $\mathcal{C}^-$ і j – канонічний ендоморфізм $E_1 \otimes E_2 \to E_1 \otimes_F E_2$. Тоді*

1. *$E_1 \otimes_F E_2$ – дислективний бімодуль над F;*
2. *існує єдиний морфізм $\overline{R}_{E_1 E_2} : E_1 \otimes_F E_2 \to E_2 \otimes_F E_1$ в категорії $\mathcal{C}^-$ такий, що $\overline{R}_{E_1 E_2} j = j \check{R}_{E_1 E_2}$.*

Це означає, що категорія дислективних бімодулів над комутативною алгеброю в категорії $\mathcal{C}^-$ є абелевою сплетеною тензорною категорією.

Доведення Тверджень A.4.3 і A.4.2 одержано Парейгісом із використанням методів теорії категорій на досить широкому рівні загальності. Зазначимо, що модулі над комутативними алгебрами в сплетених абелевих тензорних категоріях використовуються в алгебраїчній K-теорії [121] і природним чином виникають у конформній квантовій теорії поля [100, 52].

A.5 Відомості з теорії функцій на квантовій матричній кулі

У цьому та двох наступних підрозділах використовуються позначення та термінологія з підрозділу 5.4.

Нехай $q \in (0,1)$. Алгебра Хопфа $U_q\mathfrak{sl}_N$ задана своїми твірними K_i, K_i^{-1}, E_i, F_i, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, і добре відомими співвідношеннями та формулами для компноження Δ, антиподу S і коодиниці ε, див. пункт 5.3.1 та [88, Глава 4].

Розглянемо алгебру Хопфа $U_q\mathfrak{sl}_{2n}$. Облаштуємо її структурою $*$-алгебри Хопфа, що задається інволюцією

$$K_j^* = K_j, \qquad E_j^* = \begin{cases} K_j F_j, & j \neq n, \\ -K_j F_j, & j = n, \end{cases} \qquad F_j^* = \begin{cases} E_j K_j^{-1}, & j \neq n, \\ -E_j K_j^{-1}, & j = n. \end{cases}$$

Ця $*$-алгебра Хопфа $(U_q\mathfrak{sl}_{2n}, *)$ позначається як $U_q\mathfrak{su}_{n,n}$.

Позначимо через $U_q\mathfrak{k} = U_q\mathfrak{s}(\mathfrak{u}_n \times \mathfrak{u}_n)$ $*$-підалгебру Хопфа, генеровану E_i, F_i, $i \neq n$; $K_j^{\pm 1}$, $j = 1, 2, \ldots, 2n-1$.

Розглянемо $*$-алгебру $\mathrm{Pol}(\mathrm{Mat}_n)_q$ з твірними $\{z_a^\alpha\}_{a,\alpha=1,2,\ldots,n}$ і визначальними співвідношеннями

$$z_a^\alpha z_b^\beta = \begin{cases} q z_b^\beta z_a^\alpha, & a = b \;\&\; \alpha < \beta \text{ або} \\ & a < b \;\&\; \alpha = \beta \\ z_b^\beta z_a^\alpha, & a < b \;\&\; \alpha > \beta \\ z_b^\beta z_a^\alpha + (q - q^{-1}) z_a^\beta z_b^\alpha, & a < b \;\&\; \alpha < \beta, \end{cases} \tag{A.5.1}$$

$$(z_b^\beta)^* z_a^\alpha = q^2 \sum_{a',b'=1}^{n} \sum_{\alpha',\beta'=1}^{m} R(b,a,b',a') R(\beta,\alpha,\beta',\alpha') z_{a'}^{\alpha'} (z_{b'}^{\beta'})^* + (1 - q^2) \delta_{ab} \delta^{\alpha\beta}$$

де δ_{ab}, $\delta^{\alpha\beta}$ – символи Кронекера і

$$R(b,a,b',a') = \begin{cases} q^{-1}, & a \neq b \;\&\; b = b' \;\&\; a = a' \\ 1, & a = b = a' = b' \\ -(q^{-2} - 1), & a = b \;\&\; a' = b' \;\&\; a' > a \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Позначимо через $\mathbb{C}[\mathrm{Mat}_n]_q$ підалгебру, генеровану z_a^α, $a, \alpha = 1, 2, \ldots, n$. Це є добре відомий аналог алгебри голоморфних поліномів на Mat_n.

Розглянемо довільну алгебру Хопфа A і A-модульну алгебру F. Припустимо, що A є $*$-алгеброю Хопфа. $*$-алгебра F називається A-модульною алгеброю, якщо інволюції узгоджені у такий спосіб:

$$(af)^* = (S(a))^* f^*, \qquad a \in A,\ f \in F,$$

де S – антипод в A.

Як було показано в [169], див. Твердження 8.12 і 10.1, маємо

Твердження A.5.1. $\mathbb{C}[\mathrm{Mat}_n]_q$ *несе структуру* $U_q\mathfrak{sl}_{2n}$*-модульної алгебри:*

$$K_n^{\pm 1} z_a^\alpha = \begin{cases} q^{\pm 2} z_a^\alpha, & a = \alpha = n, \\ q^{\mp 1} z_a^\alpha, & a = n \;\&\; \alpha \neq n \textit{ або } a \neq n \;\&\; \alpha = n, \\ z_a^\alpha, & \textit{в інших випадках,} \end{cases}$$

$$F_n z_a^\alpha = q^{1/2} \cdot \begin{cases} 1, & a = \alpha = n, \\ 0, & \textit{в інших випадках,} \end{cases}$$

$$E_n z_a^\alpha = -q^{1/2} \cdot \begin{cases} q^{-1} z_a^n z_n^\alpha, & a \neq n \;\&\; \alpha \neq n, \\ (z_n^n)^2, & a = \alpha = n, \\ z_n^n z_a^\alpha, & \textit{в інших випадках,} \end{cases}$$

і для $k \neq n$

$$K_k^{\pm 1} z_a^\alpha = \begin{cases} q^{\pm 1} z_a^\alpha, & k < n \ \& \ a = k \text{ або } k > n \ \& \ \alpha = 2n - k, \\ q^{\mp 1} z_a^\alpha, & k < n \ \& \ a = k+1 \text{ або } k > n \ \& \ \alpha = 2n - k + 1, \\ z_a^\alpha, & \text{в інших випадках для } k \neq n; \end{cases}$$

$$F_k z_a^\alpha = q^{1/2} \cdot \begin{cases} z_{a+1}^\alpha, & k < n \ \& \ a = k, \\ z_a^{\alpha+1}, & k > n \ \& \ \alpha = 2n - k, \\ 0, & \text{в інших випадках для } k \neq n; \end{cases}$$

$$E_k z_a^\alpha = q^{-1/2} \cdot \begin{cases} z_{a-1}^\alpha, & k < n \ \& \ a = k+1, \\ z_a^{\alpha-1}, & k > n \ \& \ \alpha = 2n - k + 1, \\ 0, & \text{в інших випадках для } k \neq n \end{cases}$$

Також $\mathrm{Pol}(\mathrm{Mat}_n)_q$ *облаштована у такий спосіб структурою* $U_q\mathfrak{su}_{n,n}$*-модульної алгебри.*

Добре відомо, що в класичному випадку $q = 1$ межа Шилова матричної кулі $\mathbb{D}$ є множиною $S(\mathbb{D})$ всіх унітарних матриць. Нашим завданням є одержати q-аналог межі Шилова для квантової матричної кулі. Запровадимо позначення для квантових мінорів матриці $\mathbf{z} = (z_a^\alpha)$:

$$(z^{\wedge k})_{\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}}^{\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{s \in S_k} (-q)^{l(s)} z_{a_1}^{\alpha_{s(1)}} z_{a_2}^{\alpha_{s(2)}} \cdots z_{a_k}^{\alpha_{s(k)}},$$

де $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k$, $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$, і $l(s)$ – кількість інверсій для $s \in S_k$.

Відомо, що квантовий детермінант

$$\det_q \mathbf{z} = (z^{\wedge n})_{\{1,2,\ldots,n\}}^{\{1,2,\ldots,n\}}$$

лежить у центрі $\mathbb{C}[\mathrm{Mat}_n]_q$. Локалізація $\mathbb{C}[\mathrm{Mat}_n]_q$ відносно мультиплікативної системи $(\det_q \mathbf{z})^{\mathbb{N}}$ називається алгеброю регулярних функцій на квантовій групі GL_n і позначається через $\mathbb{C}[GL_n]_q$.

Лема А.5.2 (Лема 2.1 з [186]). *Існує єдина інволюція $*$ на $\mathbb{C}[GL_n]_q$ така, що*

$$(z_a^\alpha)^* = (-q)^{a+\alpha-2n} (\det_q \mathbf{z})^{-1} \det_q \mathbf{z}_a^\alpha,$$

де $\mathbf{z}_a^\alpha$ – матриця, одержана з $\mathbf{z}$ шляхом вилучення строки α і стовпця a.

$*$-алгебра $\mathbb{C}[S(\mathbb{D})]_q = (\mathbb{C}[GL_n]_q, *)$ є q-аналогом алгебри регулярних функцій на межі Шилова матричної кулі $\mathbb{D}$. Можна легко перевірити, що $\mathbb{C}[S(\mathbb{D})]_q$ є $U_q\mathfrak{su}_{n,n}$-модульною алгеброю (див. доведення [186, теорема 2.2 і твердження 2.7]).

Існує інше визначення алгебри $\mathbb{C}[S(\mathbb{D})]_q$. Розглянемо двосторонній ідеал J $*$-алгебри $\mathrm{Pol}(\mathrm{Mat}_n)_q$, генерований співвідношеннями

$$\sum_{j=1}^{n} q^{2n-\alpha-\beta} z_j^\alpha (z_j^\beta)^* - \delta^{\alpha\beta} = 0, \qquad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n. \tag{A.5.2}$$

Можна довести, що цей ідеал є $U_q\mathfrak{su}_{n,n}$-інваріантним. Це дозволяє визначити $U_q\mathfrak{su}_{n,n}$-модульну алгебру $\mathrm{Pol}(\mathrm{Mat}_n)_q/J$. Як показано в [186, стор. 381, твердження 6.1], $\mathbb{C}[S(\mathbb{D})]_q = \mathrm{Pol}(\mathrm{Mat}_n)_q/J$, що є також визначенням алгебри регулярних функцій на межі Шилова квантової матричної кулі.

Модуль V над $U_q\mathfrak{sl}_{2n}$ називається ваговим, якщо

$$V = \bigoplus_{\lambda \in P} V_\lambda, \qquad V_\lambda = \left\{ v \in V \;\middle|\; K_i v = q^{\lambda_i} v, \quad i = 1, 2, \ldots, 2n-1 \right\},$$

де $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2n-1})$ і $P \cong \mathbb{Z}^{2n-1}$ – решітка ваг алгебри Лі $\mathfrak{sl}_{2n}$. Ненульовий складник V_λ у цьому розкладі називається ваговим підпростором, що відповідає вазі λ.

Кожному ваговому $U_q\mathfrak{sl}_{2n}$-модулю V поставимо у відповідність лінійні відображення H_i, $i = 1, 2, \ldots, 2n-1$, в V такі, що $H_i v = \lambda_i v$ тоді й тільки тоді, коли $v \in V_\lambda$.

Зафіксуємо елемент $H_0 = \sum\limits_{j=1}^{n-1} j(H_j + H_{2n-j}) + nH_n$. Будь-який ваговий $U_q\mathfrak{sl}_{2n}$-модуль V може бути облаштований $\mathbb{Z}$-градуюванням $V = \bigoplus\limits_r V_r$, покладаючи $v \in V_r$ якщо $H_0 v = 2rv$.

Ми потребуємо деякі більш витончені простори. Відомо, що

$$\mathrm{Pol}(\mathrm{Mat}_n)_q = \bigoplus_{k,j=0}^{\infty} \mathbb{C}[\mathrm{Mat}_n]_{q,k} \cdot \mathbb{C}[\overline{\mathrm{Mat}}_n]_{q,-j}.$$

Тут $\mathbb{C}[\overline{\mathrm{Mat}}_n]_q$ – підалгебра в $\mathrm{Pol}(\mathrm{Mat}_n)_q$, генерована $(z_a^\alpha)^*$, $a, \alpha = 1, 2, \ldots, n$, і $\mathbb{C}[\overline{\mathrm{Mat}}_n]_{q,-j}$, $\mathbb{C}[\mathrm{Mat}_n]_{q,k}$ – однорідні компоненти, пов'язані з градуюванням

$$\deg(z_a^\alpha) = 1, \quad \deg(z_a^\alpha)^* = -1, \qquad a, \alpha = 1, 2, \ldots, n.$$

Отже, будь-який $f \in \mathrm{Pol}(\mathrm{Mat}_n)_q$ має єдиний розклад у скінченну суму

$$f = \sum_{k,j \geq 0} f_{k,j}, \qquad f_{k,j} \in \mathbb{C}[\mathrm{Mat}_n]_{q,k} \cdot \mathbb{C}[\overline{\mathrm{Mat}}_n]_{q,-j}. \tag{A.5.3}$$

Зазначимо, що $\dim \mathbb{C}[\mathrm{Mat}_n]_{q,k} \cdot \mathbb{C}[\overline{\mathrm{Mat}_n}]_{q,-j} < \infty$.

Розглянемо векторний простір $\mathcal{D}(\mathbb{D})'_q$ формальних рядів вигляду (A.5.3) із почленною топологією. Дія $U_q\mathfrak{sl}_{2n}$ і інволюція $*$ поширюються за неперервністю з щільного лінійного підпростору $\mathrm{Pol}(\mathrm{Mat}_n)_q$ на $\mathcal{D}(\mathbb{D})'_q$

$$* : \sum_{k,j=0}^{\infty} f_{k,j} \mapsto \sum_{k,j=0}^{\infty} f_{k,j}^*.$$

Крім того, $\mathcal{D}(\mathbb{D})'_q$ – $U_q\mathfrak{sl}_{2n}$-модульний бімодуль над $\mathrm{Pol}(\mathrm{Mat}_n)_q$. Ми називаємо елементи $\mathcal{D}(\mathbb{D})'_q$ узагальненими функціями на квантовій обмеженій симетричній області.

A.6 Інваріантні узагальнені ядра і відповідні інтегральні оператори

Нагадаємо деякі прозорі, але менш відомі визначення і результати щодо інваріантних інтегралів і інваріантних ядер, див. [187]. Розглянемо алгебру Хопфа A і A-модульну алгебру F. Лінійний функціонал ν на F називається A-інваріантним інтегралом, якщо ν – морфізм A-модулів:

$$\nu(af) = \varepsilon(a)f, \qquad a \in A, \quad f \in F,$$

де ε – коодиниця в A.

Існує єдиний $U_q\mathfrak{s}(\mathfrak{gl}_n \times \mathfrak{gl}_n)$-інваріантний інтеграл

$$\nu : \mathbb{C}[S(\mathbb{D})]_q \to \mathbb{C}, \qquad \nu : \varphi \mapsto \int\limits_{S(\mathbb{D})_q} \varphi d\nu,$$

нормалізований умовою $\int\limits_{S(\mathbb{D})_q} 1 d\nu = 1$ (див. [186, Глава 3]). Там було також показано, що $\mathbb{C}[S(\mathbb{D})]_q$ ізоморфна алгебрі регулярних функцій на квантовій групі U_n як $U_q\mathfrak{s}(\mathfrak{gl}_n \times \mathfrak{gl}_n)$-модульна $*$-алгебра. Цей ізоморфізм може бути використаний для перенесення ν на останню алгебру, де він відомий як позитивний [193]. Тому ν сам є позитивним: $\int\limits_{S(\mathbb{D})_q} \varphi^* \varphi d\nu > 0$ для всіх ненульових $\varphi \in \mathbb{C}[S(\mathbb{D})]_q$. Наші подальші результати демонструють можливості використання цього $U_q\mathfrak{s}(\mathfrak{gl}_n \times \mathfrak{gl}_n)$-інваріантного інтегралу для побудови інтегральних операторів, що є морфізмами $U_q\mathfrak{sl}_{2n}$-модулів.

Розглянемо A-модульні алгебри F_1, F_2. Лінійному функціоналу ν :

$F_2 \to \mathbb{C}$ і $\mathcal{K} \in F_1 \otimes F_2$ поставимо у відповідність інтегральний оператор

$$K : F_2 \to F_1, \qquad K : f \mapsto (\mathrm{id} \otimes \nu)(\mathcal{K}(1 \otimes f)).$$

У цьому контексті $\mathcal{K}$ називається ядром цього інтегрального оператора. Припустимо, що інтеграл ν на F_2 інваріантний, і білінійна форма $f' \times f'' \mapsto \nu(f'\, f'')$, $f', f'' \in F_2$, невироджена. Легко зрозуміти, що інтегральний оператор з ядром $\mathcal{K}$ є морфізмом A-модулів тоді й тільки тоді, коли це ядро є інваріантним [187]. Ще одне твердження з [187], що буде істотно використане у подальшій побудові, є таким: A-інваріантні ядра утворюють підалгебру в $F_1^{\mathrm{op}} \otimes F_2$, де F_1^{op} – алгебра, одержана з F_1 заміною її множення на протилежне.

Окрім алгебри ядер $\mathrm{Pol}(\mathrm{Mat}_n)_q^{\mathrm{op}} \otimes \mathbb{C}[S(\mathbb{D})]_q$ ми використаємо бімодуль узагальнених ядер $\mathcal{D}(\mathbb{D} \times S(\mathbb{D}))_q'$, чиїми елементами є формальні ряди

$$\sum_{i,j} f_{ij} \otimes \varphi_{ij}, \qquad f_{ij} \in \mathbb{C}[\overline{\mathrm{Mat}}_n]_{q,-j}^{\mathrm{op}} \mathbb{C}[\mathrm{Mat}_n]_{q,i}^{\mathrm{op}}, \quad \varphi_{ij} \in \mathbb{C}[S(\mathbb{D})]_q.$$

Це є бімодуль над алгеброю $\mathrm{Pol}(\mathrm{Mat}_n)_q^{\mathrm{op}} \otimes \mathbb{C}[S(\mathbb{D})]_q$.

А.7 Перехід від афінних до однорідних координат

Цей пункт, як і пункти А.5 і А.6, містить попередні відомості і відомі результати, одержані в [184, 169, 186].

Повернемось до квантової групи SL_N. Ми користуємося загальною ідеєю Дрінфельда [33] щодо розгляду алгебри Хопфа $\mathbb{C}[SL_N]_q$ матричних елементів скінченновимірних вагових $U_q\mathfrak{sl}_N$-модулів. Її називають "алгеброю регулярних функцій на квантовій групі SL_N". Лінійні відображення в $(U_q\mathfrak{sl}_N)^*$, дуальні до операторів множення зліва на елементи $U_q\mathfrak{sl}_N$ облаштовують $\mathbb{C}[SL_N]_q$ структурою $U_q\mathfrak{sl}_N$-модульної алгебри за дуальністю.

Нагадаємо, що $\mathbb{C}[SL_N]_q$ може бути визначена твірними t_{ij}, $i, j = 1, \ldots, N$, (матричними елементами векторного зображення у ваговій базі) і співвідношеннями

$$\begin{aligned}
&t_{ij'}t_{ij''} = qt_{ij''}t_{ij'}, && j' < j'',\\
&t_{i'j}t_{i''j} = qt_{i''j}t_{i'j}, && i' < i'',\\
&t_{ij}t_{i'j'} = t_{i'j'}t_{ij}, && i < i' \;\&\; j > j',\\
&t_{ij}t_{i'j'} = t_{i'j'}t_{ij} + (q - q^{-1})t_{ij'}t_{i'j}, && i < i' \;\&\; j < j',
\end{aligned}$$

що відтворюють (A.5.1), разом з ще одним співвідношенням

$$\det_q \mathbf{t} = 1,$$

де $\det_q \mathbf{t}$ – q-детермінант матриці $\mathbf{t} = (t_{ij})_{i,j=1,\ldots,N}$:

$$\det_q \mathbf{t} = \sum_{s \in S_N} (-q)^{l(s)} t_{1s(1)} t_{2s(2)} \ldots t_{Ns(N)},$$

із $l(s) = \mathrm{card}\{(i,j) | i < j \ \& \ s(i) > s(j)\}$.

Добре відомо, що $\det_q \mathbf{t}$ комутує з усіма t_{ij}. Отже, $\mathbb{C}[SL_N]_q$ стає факторалгеброю алгебри $\mathbb{C}[\mathrm{Mat}_N]_q$ відносно двостороннього ідеалу, генерованого $\det_q \mathbf{t} - 1$.

Зазначимо, що $\mathbb{C}[SL_N]_q$ є областю цілісності.

У класичному випадку $q = 1$ матрична куля припускає природне вкладення в грасманіан $\mathrm{Gr}_{n,2n}$

$$(\text{стиснення } A \in \mathrm{End}\, \mathbb{C}^n) \mapsto (\text{лінійна оболонка } (v, Av), \quad v \in \mathbb{C}^n),$$

де остання пара є елементом $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{C}^{2n}$. Нашим завданням є побудова q-аналога цього вкладення.

Нехай

$$I = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subset \{1, 2, \ldots, 2n\}, \qquad i_1 < i_2 < \ldots < i_k;$$

$$J = \{j_1, j_2, \ldots, j_k\} \subset \{1, 2, \ldots, 2n\}, \qquad j_1 < j_2 < \ldots < j_k.$$

Елементи $t_{IJ}^{\wedge k} = \sum\limits_{s \in S_k} (-q)^{l(s)} t_{i_{s(1)} j_1} t_{i_{s(2)} j_2} \ldots t_{i_{s(k)} j_k}$ алгебри $\mathbb{C}[SL_{2n}]_q$ називаються квантовими мінорами; легко перевірити, що

$$t_{IJ}^{\wedge k} = \sum_{s \in S_k} (-q)^{l(s)} t_{i_1 j_{s(1)}} t_{i_2 j_{s(2)}} \ldots t_{i_k j_{s(k)}}.$$

Розглянемо найменшу підалгебру з одиницею $\mathbb{C}[X]_q \subset \mathbb{C}[SL_{2n}]_q$, що містить квантові мінори $t_{\{1,2,\ldots,n\}J}^{\wedge n}$, $t_{\{n+1,n+2,\ldots,2n\}J}^{\wedge n}$, $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_n\} \subset \{1, 2, \ldots, 2n\}$. Це $U_q\mathfrak{sl}_{2n}$-модульна підалгебра, що є заміною класичного координатного кільця на грасманіані.

Наступні результати є легкими модифікаціями таких з [169].

Твердження A.7.1. *Існує єдина антилінійна інволюція $*$ на $\mathbb{C}[X]_q$ така, що $(\mathbb{C}[X]_q, *)$ є $U_q\mathfrak{su}_{n,n}$-модульною алгеброю і*

$$\left(t_{\{1,2,\ldots,n\}\{n+1,n+2,\ldots,2n\}}^{\wedge n}\right)^* = (-q)^{n^2} t_{\{n+1,n+2,\ldots,2n\}\{1,2,\ldots,n\}}^{\wedge n}.$$

Лема A.7.2 (Лема 11.3 з [169]). *Нехай* $J \subset \{1,2,\dots,2n\}$, $\mathrm{card}(J)=n$, $J^c = \{1,2,\dots,2n\} \setminus J$, $l(J,J^c) = \mathrm{card}\{(j',j'') \in J \times J^c |\, j' > j''\}$. *Тоді*

$$\left(t^{\wedge n}_{\{1,2,\dots,n\}J}\right)^* = (-1)^{\mathrm{card}(\{1,2,\dots,n\}\cap J)}(-q)^{l(J,J^c)} t^{\wedge n}_{\{n+1,n+2,\dots,2n\}J^c}. \qquad (\text{A.7.1})$$

Запровадимо скорочене позначення $t = t^{\wedge n}_{\{1,2,\dots,n\}\{n+1,n+2,\dots,2n\}}$, $x = tt^*$. Зазначимо, що t, t^* і x квазі-комутують з усіма твірними t_{ij} алгебри $\mathbb{C}[SL_{2n}]_q$. Локалізація $\mathbb{C}[X]_{q,x}$ алгебри $\mathbb{C}[X]_q$ відносно мультиплікативної множини $x^{\mathbb{Z}_+}$ є коректно визначеною. Структура $U_q\mathfrak{su}_{n,n}$-модульної алгебри має єдине продовження з $\mathbb{C}[X]_q$ на $\mathbb{C}[X]_{q,x}$ [169].

Твердження A.7.3 (див. Твердження 3.2 з [170]). *Існує єдине вкладення* $U_q\mathfrak{su}_{n,n}$*-модульних* $*$*-алгебр* $\mathcal{I} : \mathrm{Pol}(\mathrm{Mat}_n)_q \hookrightarrow \mathbb{C}[X]_{q,x}$ *таке, що* $\mathcal{I}z_a^\alpha = t^{-1} t^{\wedge n}_{\{1,2,\dots,n\}J_{a\alpha}}$, *де* $J_{a\alpha} = \{a\} \cup \{n+1, n+2, \dots, 2n\} \backslash \{2n+1-\alpha\}$.

Наслідок A.7.4. $\mathcal{I}y = x^{-1}$, *де*

$$y = 1 + \sum_{k=1}^m (-1)^k \sum_{\{J'|\ \mathrm{card}(J')=k\}} \sum_{\{J''|\ \mathrm{card}(J'')=k\}} z^{\wedge k}{}^{J'}_{J''} \left(z^{\wedge k}{}^{J'}_{J''}\right)^*. \qquad (\text{A.7.2})$$

Формальний граничний перехід для $q \to 1$ призводить до співвідношення $y = \det(1 - \mathbf{z}\mathbf{z}^*)$.

Твердження A.7.5 (див. Главу 11 з [169]). *Нехай* $1 \le \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k \le n$, $1 \le a_1 < a_2 < \dots < a_k \le n$, $J = \{n+1, n+2, \dots, 2n\} \setminus \{n+\alpha_1, n+\alpha_2, \dots, n+\alpha_k\} \cup \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. *Тоді*

$$\mathcal{I} z^{\wedge k \{n+1-\alpha_k, n+1-\alpha_{k-1}, \dots, n+1-\alpha_1\}}_{\{a_1, a_2, \dots, a_k\}} = t^{-1} t^{\wedge n}_{\{1,2,\dots,n\}J}. \qquad (\text{A.7.3})$$

Ми будемо ототожнювати твірні z_a^α, $a, \alpha = 1, 2, \dots, n$, і їх образи відносно $\mathcal{I}$.

Розглянемо підалгебру в $\mathbb{C}[X]_{q,x}$, генеровану $\mathrm{Pol}(\mathrm{Mat}_n)_q \overset{\mathcal{I}}{\hookrightarrow} \mathbb{C}[X]_{q,x}$, разом із $t^{\pm 1}$, $t^{*\pm 1}$. Елементи цієї підалгебри мають єдиний розклад вигляду

$$\sum_{(i,j) \notin (-\mathbb{N}) \times (-\mathbb{N})} t^i t^{*j} f_{ij}, \qquad f_{ij} \in \mathrm{Pol}(\mathrm{Mat}_n)_q \qquad (\text{A.7.4})$$

(вибір множини пар (i,j) пов'язаний із тим фактом, що $t^{-1}t^{*-1} \in \mathrm{Pol}(\mathrm{Mat}_n)_q$).

Облаштуємо $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$ півторалінійною формою $(\cdot,\cdot)_1 - (\cdot,\cdot)_2$. У класичному випадку $q = 1$ межа Шилова матричної кулі є групою U_n. Графіки унітарних операторів утворюють ізотропний грасманіан (його точками є підпростори, на яких зазначена вище форма на $\mathbb{C}^{2n}$ зануляється). Нашим завданням є опис її q-аналогу, у якім ізотропний грасманіан замінено на однорідне координатне кільце.

Розглянемо розширення $\mathbb{C}[\Xi]_q$ алгебри $\mathbb{C}[S(\mathbb{D})]_q$ у класі $U_q\mathfrak{su}_{n,n}$-модульних $*$-алгебр. Воно здійснюється доданням твірної t і співвідношень

$$tt^* = t^*t; \quad tz_a^\alpha = q^{-1}z_a^\alpha t; \quad t^*z_a^\alpha = q^{-1}z_a^\alpha t^*, \quad a, \alpha = 1, 2, \ldots, n. \tag{A.7.5}$$

Дія алгебри $U_q\mathfrak{su}_{n,n}$ поширюється на $\mathbb{C}[\Xi]_q$ у такий спосіб:

$$E_j t = F_j t = (K_j^{\pm 1} - 1)t = 0, \qquad j \neq n,$$

$$F_n t = (K_n^{\pm 1} - 1)t = 0, \qquad E_n t = q^{-1/2} t z_n^n.$$

Нехай $\xi = tt^*$. Можна розглянути локалізацію $\mathbb{C}[\Xi]_{q,\xi}$ алгебри $\mathbb{C}[\Xi]_q$ відносно мультиплікативної множини $\xi^{\mathbb{Z}_+}$. Інволюція $*$ і структура $U_q\mathfrak{su}_{n,n}$-модульної алгебри у єдиний спосіб поширюються з $\mathbb{C}[\Xi]_q$ на $\mathbb{C}[\Xi]_{q,\xi}$.

Алгебра $\mathbb{C}[\Xi]_q$ облаштована $U_q\mathfrak{sl}_{2n}$-інваріантним біградуюванням

$$\deg z_a^\alpha = \deg(z_a^\alpha)^* = (0,0), \qquad \deg t = (1,0), \qquad \deg t^* = (0,1),$$

яке поширюється на локалізацію $\mathbb{C}[\Xi]_{q,\xi}$. Як було показано в [186], однорідна компонента $\mathbb{C}[\Xi]_{q,\xi}^{(-n,-n)}$ несе на собі ненульовий $U_q\mathfrak{sl}_{2n}$-інваріантний інтеграл η такий, що

$$\eta(t^{*-n} f t^{-n}) = \int\limits_{S(\mathbb{D})_q} f d\nu.$$

Оскільки t, t^* нормалізують кожну $U_q\mathfrak{s}(\mathfrak{u}_n \times \mathfrak{u}_n)$-ізотипічну компоненту в $\mathbb{C}[S(\mathbb{D})]_q$ і дія $U_q\mathfrak{s}(\mathfrak{u}_n \times \mathfrak{u}_n)$ в $\mathbb{C}[S(\mathbb{D})]_q$ не має кратностей [14, твердження 4], з визначення інтегралу на межі Шилова випливає

$$\eta(t^{*-n} t^{-n} f) = \eta(f t^{*-n} t^{-n}) = \int\limits_{S(\mathbb{D})_q} f d\nu. \tag{A.7.6}$$

A.8 Таблиці співвідношень для квантових алгебр з ідемпотентами

Таблиця 1.

$U_{K,L,norm}^{(alg)22}$	$U_{K,L,twist}^{(alg)22}$
$K\overline{K}K = K, \quad \overline{K}K\overline{K} = \overline{K},$	$K\overline{K}K = K, \quad \overline{K}K\overline{K} = \overline{K},$
$K\overline{K} = \overline{K}K,$	$K\overline{K} = \overline{K}K,$
$L\overline{L}L = L, \quad \overline{L}L\overline{L} = \overline{L},$	$L\overline{L}L = L, \quad \overline{L}L\overline{L} = \overline{L},$
$L\overline{L} = \overline{L}L,$	$L\overline{L} = \overline{L}L,$
$K\overline{K} + L\overline{L} = \mathbf{1},$	$K\overline{K} + L\overline{L} = \mathbf{1},$
$KE = q^2EK, \quad LE = q^2EL,$	$KE = q^2EL, \quad LE = q^2EK,$
$\overline{K}E = q^{-2}E\overline{K}, \quad \overline{L}E = q^{-2}E\overline{L},$	$\overline{K}E = q^{-2}E\overline{L}, \quad \overline{L}E = q^{-2}E\overline{K},$
$KF = q^{-2}FK, \quad LF = q^{-2}FL,$	$KF = q^{-2}FL, \quad LF = q^{-2}FK,$
$\overline{K}F = q^2F\overline{K}, \quad \overline{L}F = q^2F\overline{L},$	$\overline{K}F = q^2F\overline{L}, \quad \overline{L}F = q^2F\overline{K},$
$EF - FE = \dfrac{(K+L) - \left(\overline{K} + \overline{L}\right)}{q - q^{-1}}$	$EF - FE = \dfrac{(K+L) - \left(\overline{K} + \overline{L}\right)}{q - q^{-1}}$

Таблиця 2.

$U_{K,L,norm}^{(alg)31}$	$U_{K,L,twist}^{(alg)31}$
$K\overline{K}K = K, \quad \overline{K}K\overline{K} = \overline{K}$	$K\overline{K}K = K, \quad \overline{K}K\overline{K} = \overline{K}$
$K\overline{K} = \overline{K}K,$	$K\overline{K} = \overline{K}K$
$L\overline{L}L = L, \quad \overline{L}L\overline{L} = \overline{L}$	$L\overline{L}L = L, \quad \overline{L}L\overline{L} = \overline{L}$
$L\overline{L} = \overline{L}L$	$L\overline{L} = \overline{L}L$
$K\overline{K} + L\overline{L} = \mathbf{1}$	$K\overline{K} + L\overline{L} = \mathbf{1}$
$KE\overline{K} = q^2EK\overline{K},\ LE\overline{L} = q^2EL\overline{L}$	$KE\overline{L} = q^2EL\overline{L},\ LE\overline{K} = q^2EK\overline{K}$
$\overline{K}EK = q^{-2}EK\overline{K},\ \overline{L}EL = q^{-2}EL\overline{L}$	$\overline{K}EL = q^{-2}EL\overline{L},\ \overline{L}EK = q^{-2}EK\overline{K}$
$KF\overline{K} = q^{-2}FK\overline{K},\ LF\overline{L} = q^{-2}FL\overline{L}$	$KF\overline{L} = q^{-2}FL\overline{L},\ LF\overline{K} = q^{-2}FK\overline{K}$
$\overline{K}FK = q^2FK\overline{K},\ \overline{L}FL = q^2FL\overline{L}$	$\overline{K}FL = q^2FL\overline{L},\ \overline{L}FK = q^2FK\overline{K}$
$K\overline{K}(EF - FE) = \dfrac{K - \overline{K}}{q - q^{-1}}$	$K\overline{K}(EF - FE) = \dfrac{K - \overline{K}}{q - q^{-1}}$
$L\overline{L}(EF - FE) = \dfrac{L - \overline{L}}{q - q^{-1}}$	$L\overline{L}(EF - FE) = \dfrac{L - \overline{L}}{q - q^{-1}}$

Таблиця 3.

$U^{(coalg)}_{K,L,norm}$	$U^{(coalg)}_{K,L,twist}$
$\Delta(K) = K \otimes K$	$\Delta(K) = K \otimes K + L \otimes L$
$\Delta(\overline{K}) = \overline{K} \otimes \overline{K}$	$\Delta(\overline{K}) = \overline{K} \otimes \overline{K} + \overline{L} \otimes \overline{L}$
$\Delta(L) = L \otimes L + L \otimes K + K \otimes L$	$\Delta(L) = L \otimes K + K \otimes L$
$\Delta(\overline{L}) = \overline{L} \otimes \overline{L} + \overline{L} \otimes \overline{K} + \overline{K} \otimes \overline{L}$	$\Delta(\overline{L}) = \overline{L} \otimes \overline{K} + \overline{K} \otimes \overline{L}$
$\Delta(E) = \mathbf{1} \otimes E + E \otimes (K + L)$	$\Delta(E) = \mathbf{1} \otimes E + E \otimes (K + L)$
$\Delta(F) = F \otimes \mathbf{1} + \left(\overline{K} + \overline{L}\right) \otimes F$	$\Delta(F) = F \otimes \mathbf{1} + (\overline{K} + \overline{L}) \otimes F$
$\varepsilon(E) = \varepsilon(F) = 0$	$\varepsilon(E) = \varepsilon(F) = 0$
$\varepsilon(K) = 1, \quad \varepsilon(\overline{K}) = 1$	$\varepsilon(K) = 1, \quad \varepsilon(\overline{K}) = 1$
$\varepsilon(L) = \varepsilon(\overline{L}) = 0$	$\varepsilon(L) = \varepsilon(\overline{L}) = 0$

A.9 Повний перелік структур $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-модульної алгебри на квантовій площині

Символічні матриці	$\mathrm{U_q}(\mathfrak{sl}_2)$ – симетрії	дії $\mathfrak{sl}_2$, що є класичними границями
$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_0; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_1\right]$	$k(x) = \pm x,\ k(y) = \pm y,$ $e(x) = e(y) = 0,$ $f(x) = f(y) = 0,$	$h(x) = 0, \quad h(y) = 0,$ $e(x) = e(y) = 0,$ $f(x) = f(y) = 0,$
$\left[\begin{pmatrix} 0 & \star \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_0; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_1\right]$	$k(x) = qx,$ $k(y) = q^{-2}y,$ $e(x) = 0, \quad e(y) = b_0,$ $f(x) = b_0^{-1}xy,$ $f(y) = -qb_0^{-1}y^2$	$h(x) = x,$ $h(y) = -2y,$ $e(x) = 0, \quad e(y) = b_0,$ $f(x) = b_0^{-1}xy,$ $f(y) = -b_0^{-1}y^2$
$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \star & 0 \end{pmatrix}_0; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_1\right]$	$k(x) = q^2x,$ $k(y) = q^{-1}y,$ $e(x) = -qc_0^{-1}x^2,$ $e(y) = c_0^{-1}xy,$ $f(x) = c_0, \quad f(y) = 0,$	$h(x) = 2x,$ $h(y) = -y,$ $e(x) = -c_0^{-1}x^2,$ $e(y) = c_0^{-1}xy,$ $f(x) = c_0, \quad f(y) = 0.$
$\left[\begin{pmatrix} \star & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_0; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_1\right]$	$k(x) = q^{-2}x,$ $k(y) = q^{-1}y,$ $e(x) = a_0, \quad e(y) = 0,$ $f(x) = -qa_0^{-1}x^2 + ty^4,$ $f(y) = -qa_0^{-1}xy + sy^3.$	$h(x) = -2x,$ $h(y) = -y,$ $e(x) = a_0, \quad e(y) = 0,$ $f(x) = -a_0^{-1}x^2 + ty^4,$ $f(y) = -a_0^{-1}xy + sy^3.$
$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \star \end{pmatrix}_0; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_1\right]$	$k(x) = qx,\ k(y) = q^2y,$ $e(x) = -qd_0^{-1}xy + sx^3,$ $e(y) = -qd_0^{-1}y^2 + tx^4,$ $f(x) = 0, \quad f(y) = d_0,$	$h(x) = x, \quad h(y) = 2y,$ $e(x) = -d_0^{-1}xy + sx^3,$ $e(y) = -d_0^{-1}y^2 + tx^4,$ $f(x) = 0, \quad f(y) = d_0,$
$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_0; \begin{pmatrix} 0 & \star \\ \star & 0 \end{pmatrix}_1\right]$	$k(x) = qx,$ $k(y) = q^{-1}y,$ $e(x) = 0, \quad e(y) = \tau x,$ $f(x) = \tau^{-1}y,\ f(y) = 0,$	$h(x) = x,$ $h(y) = -y,$ $e(x) = 0, \quad e(y) = \tau x,$ $f(x) = \tau^{-1}y,\ f(y) = 0.$