Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Вєркіна
Національна академія наук України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Тєплова Дар'я Павлівна

УДК 519.213

ДИСЕРТАЦІЯ

«ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ МАТРИЦЬ ДО БАГАТОВИМІРНИХ ЧАСОВИХ РЯДІВ»

111 «математика»
11 «Математика і статистика»

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії. Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

________________ Тєплова Д.П.

Наукові керівники: Пастур Леонід Андрійович, академік НАН України, доктор фізико-математичних наук, головний науковий співробітник;
Лубатон Філіпп, професор в університеті Париж-Схід Марн ла Валлє.

Харків – 2020

АНОТАЦІЯ

Тєплова Д. П. Застосування теорії випадкових матриць до багатовимірних часових рядів. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – Математика. — Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Вєркіна Національної академії наук України, Харків, 2020.

У **вступі** обґрунтовано актуальність досліджуваних задач, наведено зв'язок роботи з науковими програмами, планами і темами. Сформульовано мету, задачі та методи дослідження. Визначено наукову новизну і значення отриманих результатів. Надано відомості про публікації, особистий внесок здобувача та апробацію результатів дисертації.

Перший розділ присвячений огляду та аналізу літератури. **Підрозділи 1.2** та **1.3** містять ключові результати по двом ансамблям, що розглядаються у роботі, а саме: ансамбль матриць автоковаріацій та матриць коваріацій, компоненти яких представлені тензорними добутками.

Матриця автоковаріацій між минулим та майбутнім деякого часового ряду грає важливу роль у проблемах статистичного висновування, які пов'язані з багатовимірними часовими рядами, що мають раціональний спектр. Тим не менш, існуючи методи, що дозволяють отримати необхідну інформацію з матриці автоковаріацій, можуть бути використані лише у випадку, коли кількість спостережень набагато більша за їх розмірність. Проте, сучасні тенденції великих даних приводять до випадків, коли розмірність спостережень пропорційна кількості спостережень. Таким чином, доречно дослідити поведінку емпіричної матриці автоковаріацій у випадку, коли обидва параметри, кількість спостережень та їх розмірність, прямують до $+\infty$ так, що їх відношення прямує до ненульової константи.

Другий розділ присвячений дослідженню асимптотичної поведінки розподілу власних значень матриць автоковаріацій. Ми розглядаємо послідовність натуральних чисел $(M(N))_{N\geq 1}$ та додатно визначних $M(N)\times M(N)$ ермітових матриць $(R_N)_{N\geq 1}$. Для кожного N ми визначимо послідовність незалежних однаково розподілених Гауссових векторів $(y_n)_{n\geq 1}$ (що залежать також від N) з нульовим математичним сподіванням та розмірністю $M(N)$ і та-

ких, що $y_n = R_N^{1/2}\xi_n$, де компоненти M–вимірного вектора ξ_n є комплексними незалежними однаково розподіленими стандартними Гауссовими величинами (тобто їх дійсні та уявні частини незалежні та мають розподіл $\mathcal{N}(0, 1/2)$). Далі, фіксуємо натуральне число L і розглядаємо дві блокові матриці Ханкеля $W_{p,N}$ та $W_{f,N}$ розмірністю $ML \times N$

$$W_{p,N} = \frac{1}{\sqrt{N}} Y_{p,N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{N-1} & y_N \\ y_2 & y_3 & \cdots & y_N & y_{N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_L & y_{L+1} & \cdots & y_{N+L-2} & y_{N+L-1} \end{pmatrix}$$

та

$$W_{f,N} = \frac{1}{\sqrt{N}} Y_{f,N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} y_{L+1} & y_{L+2} & \cdots & y_{N-1+L} & y_{N+L} \\ y_{L+2} & y_{L+3} & \cdots & y_{N+L} & y_{N+L+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{2L} & y_{2L+1} & \cdots & y_{N+2L-2} & y_{N+2L-1} \end{pmatrix}.$$

Вивчається поведінка нормованої рахуючої міри $\hat{\nu}_N$ матриці $W_{f,N}W_{p,N}^*W_{p,N}W_{f,N}^*$ розмірністю $ML \times ML$ при асимптотичному режимі, коли M та N прямують до $+\infty$ таким чином, що

$$c_N = \frac{ML}{N} \to c_*,\ c_* > 0.$$

Підрозділ 2.1: оцінки дисперсії нормованого сліду та квадратичної форми резольвенти $Q_N(z) = (W_{f,N}W_{p,N}^*W_{p,N}W_{f,N}^* - z)^{-1}$. Для їх доведення використовується нерівність Пуанкаре-Неша.

Підрозділ 2.2: декілька корисних результатів, що стосуються перетворень Стілтьєса спеціального вигляду.

Підрозділ 2.3: за допомогою формул інтегрування частинами доведено, що математичне сподівання резольвенти $Q_N(z)$ є

$$\mathbb{E}\{Q_N(z)\} = I_L \otimes S_N(z) + \Delta_N(z),$$

де $\mathbb{E}\{\cdot\}$ – операція математичного сподівання та

$$S_N(z) = -\left(zI_M + \frac{c_N z \alpha_N(z)}{1 - c_N^2 \alpha_N(z)^2} R_N\right)^{-1},$$
$$\alpha_N(z) = \frac{1}{ML} \mathrm{Tr}\mathbb{E}(Q_N(z))(I_L \otimes R_N)$$

і $\Delta_N(z)$ – малий доданок(помилка).

Підрозділ 2.4: оцінка доданку $\Delta_N(z)$, а саме, що $(ML)^{-1}|\mathrm{Tr}\Delta_N(z)| \leq \kappa N^{-2} P_1(z) P_2((\mathrm{Im} z)^{-1})$, для деяких хороших поліномів P_1, P_2, тобто степені і коефіцієнти яких є незалежними від N.

Підрозділ 2.5: доведено, що для усіх $z \in \mathbb{C}^+$,

$$\frac{1}{M} \mathrm{Tr}\left((S_N(z) - T_N(z))F_N\right) \to 0,$$

де $(F_N)_{N \geq 1}$ – будь-яка послідовність невипадкових матриць, для яких $\sup_N \|F_N\| < +\infty$, і матриця $T_N(z)$ є

$$T_N(z) = -\left(zI_M + \frac{z c_N t_N(z)}{1 - z c_N^2 t_N^2(z)} R_N\right)^{-1},$$

де $t_N(z)$ – єдиний розв'язок рівняння

$$t_N(z) = \frac{1}{M} \mathrm{Tr} R_N \left(-zI_M - \frac{z c_N t_N(z)}{1 - z c_N^2 t_N^2(z)} R_N\right)^{-1}, \tag{0.1}$$

для якого $t_N(z)$ та $z t_N(z)$ належать до $\mathbb{C}^+$, якщо $z \in \mathbb{C}^+$. Показано, що $t_N(z)$ та $T_N(z)$ є перетвореннями Стілтьєса скалярної міри μ_N та додатної $M \times M$-вимірної матрично-значної міри ν_N^T, відповідно. Також виявляється, що $\nu_N = (M)^{-1} \mathrm{Tr}(\nu_N^T)$ є ймовірнісною мірою, для якої $\hat{\nu}_N - \nu_N \to 0$ слабко, майже напевно. Тобто, ν_N є так званою невипадковою еквівалентою міри $\hat{\nu}_N$.

Підрозділ 2.6: показано, що використання методів вільної ймовірності є альтернативним підходом до вивчення асимптотичної поведінки міри $\hat{\nu}_N$. При цьому головною проблемою є довести, що матриці $W_{f,N}^* W_{f,N}$ та $W_{p,N}^* W_{p,N}$ є асимптотично вільними. Виявляється, що цей факт є наслідком Леми 6 [24]. Тим не менш, не зважаючи на те, що цей підхід здається набагато простішим, ніж описаний вище, важливо зауважити, що методи вільної ймовірності не дозволяють дослідити поведінку резольвенти матриці $W_{f,N} W_{p,N}^* W_{p,N} W_{f,N}^*$. Тим не менш, для вирішення подальших задач, таких як оцінка найбільших власних значень та відповідних власних векторів матриці $W_{f,N}W_{p,N}^*W_{p,N}W_{f,N}^*$ з присутнім корисним сигналом, необхідно знати асимптотичну поведінку резольвенти моделі лише з шумом.

Третій розділ присвячений детальному вивченню властивостей міри ν_N та її носія.

Підрозділ 3.1: характеризація поведінки рішення $t_N(z)$ рівняння (0.1), коли аргумент z наближається до осі дійсних чисел. Для усіх $x > 0$, існує кінцева границя $t_N(z)$, коли $z \in \mathbb{C}^+$ прямує до x. Якщо $c_N \leq 1$, ми отримали, що ν_N абсолютно неперервна по відношенню до міри Лебега. Відповідна щільність $g_N(x)$ є дійсною аналітичною функцією на $\mathbb{R}^+$ і прямує до $+\infty$ коли $x \to 0, x > 0$. У випадку $c_N < 1$, справедливо $g_N(x) = \mathcal{O}(x^{-1/2})$, $x \to 0$ та $g_N(x) = \mathcal{O}(x^{-2/3})$, $x \to 0$ якщо $c_N = 1$. Нарешті, якщо $c_N > 1$, ν_N містить масу Дірака у 0 зі значенням $1 - \frac{1}{c_N}$ та абсолютно неперервну компоненту, подібно тому, як це має місце для стандартних емпіричних матриць коваріацій [Марченко, Пастур, 1967].

Підрозділ 3.2: проаналізовано носій міри ν_N, для цього ми встановили, що функція

$$w_N(z) = zc_N t_N(z) - \frac{1}{c_N t_N(z)}$$

є розв'язком рівняння $\phi_N(w_N(z)) = z$ для кожного $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$, де $\phi_N(w)$ визначається як

$$\phi_N(w) = c_N w^2 \frac{1}{M} \mathrm{Tr} R_N \left(R_N - wI\right)^{-1} \left(c_N \frac{1}{M} \mathrm{Tr} R_N \left(R_N - wI\right)^{-1} - 1\right).$$

Більш того, якщо ми визначимо $t_N(x)$ для $x > 0$ як границю $t_N(z)$ при $z \to x, z \in \mathbb{C}^+$, рівняння $\phi_N(w_N(x)) = x$ залишається справедливим на $\mathbb{R}^+$. Доведено, що якщо x лежить ззовні носія міри ν_N, тоді

$$\phi_N(w_N(x)) = x,\ \phi^{'}(w_N(x)) > 0,\ w_N(x) \frac{1}{M} \mathrm{Tr} R_N \left(R_N - w(x)I\right)^{-1} < 0.$$

Ці властивості дозволяють довести, що окрім $\{0\}$ коли $c_N > 1$, носій міри ν_N є об'єднанням інтервалів, кінцеві точки яких є екстремумами функції ϕ_N, аргументи яких задовольняють $\frac{1}{M}\mathrm{Tr} R \left(R - wI\right)^{-1} < 0$. Наведена достатня умова на власні значення матриці R_N, коли носій міри ν_N стає лише одним інтервалом.

Підрозділ 3.3: на основі підходу [Haagerup-Thornbjornsen, 2005], доведено, що для достатньо великих N, усі власні значення матриці $W_{f,N}\, W_{p,N}^*\, W_{p,N}\, W_{f,N}^*$ належать околу носія невипадкової міри ν_N. Зауважимо, що з цього не випливає існування кінцевої границі послідовності нормованих рахуючих мір $\hat{\nu}_N$ матриць $W_{f,N}W_{p,N}^*W_{p,N}W_{f,N}^*$. Для отримання такого результату необхідні додаткові припущення, такі як існування границі нормованої рахуючої міри власних значень матриці R_N коли $N \to +\infty$.

Четвертий розділ присвячений аналізу ансамблю матриць коваріацій, компоненти яких є тензорними добутками. Ми розглядаємо $N^2 \times N^2$ дійсну симетричну або ермітову матрицю $\mathcal{M}_N$, яка є сумою M_N тензорних добутків $X^\mu \otimes X^\mu$ векторів $X^\mu = B_N(Y^\mu \otimes Y^\mu)$, $\mu = 1, \ldots, M_N$, де вектори Y^μ є незалежними однаково розподіленими векторами з $\mathbb{R}^N(\mathbb{C}^N)$ з нульовим математичним сподіванням та одиничною дисперсією. Матриця B_N є додатно визначеною невипадковою матрицею розмірності $N^2 \times N^2$. Визначимо також $N^2 \times N^2$ матрицю $J_N = \{J_{p_1p_2,q_1q_2}\}_{p_1,p_2,q_1,q_2=1}^N$, де $J_{p_1p_2,q_1q_2}$ є елементом, що знаходиться у рядку $(p_1 - 1)N + p_2$ та стовпчику $(q_1 - 1)N + q_2$ та дорівнює $\delta_{p_1,q_1}\delta_{p_2,q_2} + \delta_{p_2,q_1}\delta_{p_1,q_2}$.

Підрозділ 4.1: доведення головного результату цього розділу, а саме наступної теореми.

Теорема. Нехай послідовність нормованих рахуючих мір σ_N матриць $B_NJ_NB_N$ слабко збігається до ймовірнісної міри σ:

$$\lim_{N\to\infty} \sigma_N = \sigma,$$

та матриці B_N рівномірно обмежені по N та $\{M_N\}$ є послідовністю натуральних чисел, для якої

$$M_N \to +\infty,\ N \to +\infty,\ c_N = M_N/N^2 \to c \in [0, +\infty).$$

Тоді нормована рахуюча міра ν_n власних значень матриці $\mathcal{M}_N$ слабко збігається з ймовірністю 1 до невипадкової ймовірнісної міри ν та, якщо $f^{(0)}$ – це перетворення Стілтьєса міри σ, тоді перетворення Стілтьєса f міри ν однозначно визначається рівнянням

$$f(z) = f^{(0)}\left(\frac{z}{c - zf(z) - 1}\right)(c - zf(z) - 1)^{-1}$$

у класі перетворень Стілтьєса ймовірнісних мір.

Підрозділ 4.2: доведення деяких допоміжних оцінок математичного сподівання та дисперсії функціоналів резольвенти.

Ключові слова: теорія випадкових матриць, випадкові матриці з незалежними елементами, Гаусові випадкові матриці, матриця автоковаріацій, перетворення Стілтьєса, матриця коваріацій, тензорний добуток, розподіл власних значень.

ABSTRACT

Tieplova D. Application of large random matrices to multivariate time series analysis. — Qualification scientific paper, manuscript.

A thesis to obtain a Doctor of Philosophy degree in the speciality 111 – Mathematics. — B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, 2020.

The **introduction** explains the relevance of the problem under study and provides a link between thesis and scientific programs, plans and themes. The research goal, tasks and methods are stated there. The scientific novelty and the significance of the obtained results are indicated. The information about the publications, the personal applicant contribution and thesis results approbation testing the results of the thesis is given.

Section 1 is devoted to the review and analysis of the literature. **In Subsections 1.3** and **1.2** the key results on two studied ensembles are given, more precisely: an ensemble of autocovariance matrices and an ensemble of sample covariance matrices with tensor product samples.

The autocovariance matrix between the past and the future of time series plays a key role in statistical inference problems related to multivariate time series with rational spectrum. However the existing methods which allow one to recover the necessary information from the autocovariance matrix can be used only in the case when the number of observations is much bigger than the dimension of observations. On the other hand, modern Big Data trends lead to the cases where the dimension of observations is of the same order of magnitude as the number of observations. It is thus relevant to study the behaviour of the empirical autocovariance matrix in asymptotic regimes where both dimensions tend to $+\infty$ in such a way that their ratio converges to a non zero constant.

In Section 2 we consider a sequence of integer $(M(N))_{N\geq 1}$, and positive definite $M(N) \times M(N)$ hermitian matrices $(R_N)_{N\geq 1}$. For each N, we define a sequence $(y_n)_{n\geq 1}$ (which depends also on N) of independent identically distributed (i.i.d.) complex Gaussian $M(N)$–dimensional vectors with zero mean such that $y_n = R_N^{1/2}\xi_n$, where the components of the M–dimensional vector

ξ_n are complex Gaussian standard i.i.d. random variables (i.e., their real and imaginary parts are i.i.d. and $\mathcal{N}(0, 1/2)$ distributed). If L is a fixed integer, we consider the 2 block-Hankel $ML \times N$ matrices $W_{p,N}$ and $W_{f,N}$

$$W_{p,N} = \frac{1}{\sqrt{N}} Y_{p,N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{N-1} & y_N \\ y_2 & y_3 & \cdots & y_N & y_{N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_L & y_{L+1} & \cdots & y_{N+L-2} & y_{N+L-1} \end{pmatrix}$$

and

$$W_{f,N} = \frac{1}{\sqrt{N}} Y_{f,N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} y_{L+1} & y_{L+2} & \cdots & y_{N-1+L} & y_{N+L} \\ y_{L+2} & y_{L+3} & \cdots & y_{N+L} & y_{N+L+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{2L} & y_{2L+1} & \cdots & y_{N+2L-2} & y_{N+2L-1} \end{pmatrix}$$

and study the behaviour of the empirical eigenvalue distribution $\hat{\nu}_N$ of the $ML \times ML$ matrix $W_{f,N}W_{p,N}^*W_{p,N}W_{f,N}^*$ in the asymptotic regime (*mpl*-regime in the following) where M and N tend to $+\infty$ but

$$c_N = \frac{ML}{N} \to c_*,\ c_* > 0.$$

In Subsection 2.1 we estimate the variance of the normalized trace and the quadratic form of the resolvent $Q_N(z) = (W_{f,N}W_{p,N}^*W_{p,N}W_{f,N}^* - z)^{-1}$ using the Poincaré-Nash inequality. The main result of this subsection is Lemma 2.3.

In Subsection 2.2 we establish some useful lemmas related to certain Stieltjes transforms. The main result of this subsection is Lemma 2.5.

In Subsection 2.3 we use the integration by parts formula to establish that

$$\mathbb{E}\{Q_N(z)\} = I_L \otimes S_N(z) + \Delta_N(z)$$

where $\mathbb{E}\{\cdot\}$ – is the operation of mathematical expextation and

$$S_N(z) = -\left(zI_M + \frac{c_N z \alpha_N(z)}{1 - c_N^2 \alpha_N(z)^2} R_N \right)^{-1},$$

$$\alpha_N(z) = \frac{1}{ML} \mathrm{Tr}\mathbb{E}(Q_N(z))(I_L \otimes R_N$$

and $\Delta_N(z)$ is an error term.

In Subsection 2.4 we find bounds for the error term $\Delta_N(z)$, i.e. we prove that $(ML)^{-1}|\mathrm{Tr}\Delta_N(z)| \leq \kappa N^{-2} P_1(z) P_2((\mathrm{Im} z)^{-1})$ for some good polynomials P_1, P_2, which means that their degrees and coefficients do not depend on N.

In Subsection 2.5 we prove that for each $z \in \mathbb{C}^+$,

$$\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}\left((S_N(z) - T_N(z))F_N\right) \to 0$$

where $(F_N)_{N\geq 1}$ is any deterministic sequence of matrices such that $\sup_N \|F_N\| < +\infty$, and $T_N(z)$ is defined by

$$T_N(z) = -\left(zI_M + \frac{zc_N t_N(z)}{1 - zc_N^2 t_N^2(z)} R_N\right)^{-1},$$

with $t_N(z)$ being the unique solution of the equation

$$t_N(z) = \frac{1}{M}\mathrm{Tr} R_N \left(-zI_M - \frac{zc_N t_N(z)}{1 - zc_N^2 t_N^2(z)} R_N\right)^{-1}$$

such that $t_N(z)$ and $zt_N(z)$ belong to $\mathbb{C}^+$ when $z \in \mathbb{C}^+$ and $t_N(z)$, $T_N(z)$ are the Stieltjes transforms of a scalar measure μ_N and of a $M \times M$ positive matrix valued measure ν_N^T respectively. It is also proved that $\nu_N = M^{-1}\mathrm{Tr}(\nu_N^T)$ is a probability measure such that $\hat{\nu}_N - \nu_N \to 0$ weakly almost surely. The measure ν_N is referred to as the deterministic equivalent of $\hat{\nu}_N$.

In Subsection 2.6 we show that the use of free probability tools is an alternative approach to characterize the asymptotic behaviour of $\hat{\nu}_N$. Here the main difficulty is to prove the asymptotic freeness of $W_{f,N}^* W_{f,N}$ and $W_{p,N}^* W_{p,N}$. It appear that this result is a consequence of Lemma 6 in [24]. While this approach seems to be simpler than the use of the Gaussian tools proposed in the present paper, we mention that the free probability theory argument does not allow us to study the asymptotic behaviour of the resolvent of $W_{f,N} W_{p,N}^* W_{p,N} W_{f,N}^*$. We recall that in order to evaluate the largest eigenvalues and corresponding eigenvectors of $W_{f,N} W_{p,N}^* W_{p,N} W_{f,N}^*$ in the presence of a useful signal, the asymptotic behaviour of the full resolvent in the absence of signal has to be available.

In Section 3 we study the properties and the support of ν_N. To this end, we study **in subsection 3.1** the behaviour of $t_N(z)$ when z converges towards the real axis. For each $\mathrm{Re} z > 0$, the limit of $t_N(z)$ when $z \in \mathbb{C}^+$ converges towards

x exists and is finite. If $c_N \leq 1$ of *mpl*-regime, we deduce from this that ν_N is absolutely continuous w.r.t. the Lebesgue measure. The corresponding density $g_N(x)$ is real analytic on $\mathbb{R}^+$, and converges towards $+\infty$ when $x \to 0, x > 0$. If $c_N < 1$, then $g_N(x) = \mathcal{O}(x^{-1/2})$, while $g_N(x) = \mathcal{O}(x^{-2/3})$ if $c_N = 1$. If $c_N > 1$, ν_N contains a Dirac mass at 0 with weight $1 - \frac{1}{c_N}$ and an absolutely continuous component.

In Subsection 3.2 we analyse the support of ν_N. We establish that the function

$$w_N(z) = zc_N t_N(z) - \frac{1}{c_N t_N(z)}$$

is solution of the equation $\phi_N(w_N(z)) = z$ for each $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ where

$$\phi_N(w) = c_N w^2 \frac{1}{M}\mathrm{Tr}R_N \left(R_N - wI\right)^{-1} \left(c_N \frac{1}{M}\mathrm{Tr}R_N \left(R_N - wI\right)^{-1} - 1\right).$$

Moreover, if we define $t_N(x)$ for $x > 0$ by the limit of $t_N(z)$ when $z \to x, z \in \mathbb{C}^+$, the equality $\phi_N(w_N(z)) = z$ is also valid on $\mathbb{R}^+$. We establish that if x is outside the support of ν_N, then, it holds that

$$\phi_N(w_N(x)) = x,\ \phi^{'}(w_N(x)) > 0,\ w_N(x)\frac{1}{M}\mathrm{Tr}R_N \left(R_N - w(x)I\right)^{-1} < 0.$$

This property allows us to prove that apart $\{0\}$ when $c_N > 1$, the support of ν_N is a union of intervals whose endpoints are the extrema of ϕ_N whose arguments verify $\frac{1}{M}\mathrm{Tr}R\left(R - wI\right)^{-1} < 0$. A sufficient condition on the eigenvalues of R_N ensuring that the support of ν_N is a single interval is also given.

In Subsection 3.3 we use the Haagerup-Thornbjornsen approach [31] to prove that for each N large enough, all the eigenvalues of $W_{f,N}\, W_{p,N}^*\, W_{p,N}\, W_{f,N}^*$ lie in a neighbourhood of the support of the measure ν_N. We remark that above results do not imply that $\hat{\nu}_N$ converges towards a limit distribution. In order to obtain this kind of result, some extra assumptions have to be formulated, such as the existence of a limiting empirical eigenvalue distribution for R_N when $N \to +\infty$.

In Section 4 we consider $N^2 \times N^2$ real symmetric and hermitian matrices $\mathcal{M}_N$, which are equal to the sum of M_N tensor products of vectors $X^\mu = B_N(Y^\mu \otimes Y^\mu)$, $\mu = 1, \ldots, M_N$, where Y^μ are i.i.d. random vectors from $\mathbb{R}^N(\mathbb{C}^N)$ with zero mean and unit variance of components, and B_N is an $N^2 \times N^2$ positive definite non-random matrix. We also define $N^2 \times N^2$ matrix $J_N = \{J_{p_1p_2,q_1q_2}\}_{p_1,p_2,q_1,q_2=1}^N$, where by $J_{p_1p_2,q_1q_2}$ we mean an element from row $(p_1-1)N+p_2$ and column $(q_1-1)N+q_2$ and it is equal to $\delta_{p_1,q_1}\delta_{p_2,q_2}+\delta_{p_2,q_1}\delta_{p_1,q_2}$. The main result of this section is

Theorem. Assume that the sequence σ_N of Normalized Counting Measure (NCM) of matrices $B_N J_N B_N$ converges weakly to a probability measure σ:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma,$$

B_N is bounded uniformly in N, and $\{M_N\}$ is a sequence of positive integers such that

$$M_N \to +\infty,\ N \to +\infty,\ c_N = M_N/N \to c \in [0, +\infty).$$

Then the NCM μ_N of eigenvalues of $\mathcal{M}_N$ converges weakly in probability to a non-random probability measure μ, and if $f^{(0)}$ is the Stieltjes transform of σ, then the Stieltjes transform f of μ is uniquely determined by the equation

$$f(z) = f^{(0)}\left(\frac{z}{c - zf(z) - 1}\right)(c - zf(z) - 1)^{-1}$$

in the class of Stieltjes transforms of probability measures.

Key words: random matrix theory, large Gaussian random matrices, Autocovariance matrices, Stieltjes transform, independent entry random matrices, sample covariance matrix, tensor product, distribution of eigenvalues.

Список публікацій здобувача

Публікації у фахових виданнях України і виданнях України, що входять до міжнародних наукометричних баз:

1. Tieplova, D.: Distribution of eigenvalues of sample covariance matrices with tensor product samples. Журнал математичної фізики, аналізу, геометрії. 13(1), 82–98 (2017)

   (Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Web of Science, MathSciNet, Google Scholar; Impact Factor: 0.424; квартиль Q3)

Публікації у зарубіжних виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз:

2. Loubaton, P., Tieplova, D.: On the Behaviour of Large Empirical Autocovariance Matrices Between the Past and the Future. Random Matrices: Theory and Applications, doi: 10.1142/S2010326321500210

   (Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Web of Science, MathSciNet, Google Scholar, zbMATH; Impact Factor: 1.02; квартиль Q2)

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

3. Tieplova, D.: Distribution of eigenvalues of some random matrices of large order. In: II International Conference "ANALYSIS AND MATHEMATICAL PHYSICS": Book of abstracts, p. 31. B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv (2015)

4. Tieplova, D.: Distribution of eigenvalues of sample covariance matrices with tensor product samples. In: Abstracts of Lectures and Talks: Trilateral German-Russian-Ukrainian Summer School "Spectral Theory, Differential Equations and Probability", p. 22. Johannes Gutenberg Universität Mainz, Mainz (2016)

5. Tieplova, D., Loubaton, P., Pastur, L.: On the behaviour of the singular values of empirical autocovariance matrices in the high-dimensional case.

In: International Conference “XXVII Colloque francophone de traitement du signal et des images”, p. 95. L’Universite de Lille, France, 26–29 august (2019)

6. Tieplova, D., Loubaton, P., Pastur, L.: ”On the Limit Distribution of the Canonical Correlation Coefficients Between the Past and the Future of a High-Dimensional White Noise. In: International Conference “2020 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), pp. 8772–8776. Barcelona, Spain (2020)

Зміст

Перелік умовних позначень

$\mathbb{C}^+(\mathbb{C}^-)$ – множина усіх комплексних чисел з додатною(від'ємною) уявною частиною;

$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$;

$\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$;

$\mathbb{R}^{+*} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$;

$\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ – множина усіх $\mathcal{C}^\infty$ дійснозначних функцій з компактним носієм, які визначені на $\mathbb{R}$.

Нехай ξ – деяка випадкова величина, тоді:

– $\mathbb{E}\{\xi\}$ –математичне сподівання;

– $\xi^\circ = \xi - \mathbb{E}\{\xi\}$;

– $\mathbf{Var}(\xi) = \mathbb{E}\{(\xi^\circ)^2\}$ – дисперсія.

I_N – одинична матриця розмірністю $N \times N$.

$\delta_{x,y} = \begin{cases} 1, \ x = y \\ 0, \ x \neq y \end{cases}$ –символ Кронекера.

δ_x – міра Дірака у точці x: для кожної борелівської множини A, маємо $\delta_x(A) = 0$, якщо $x \notin A$ та $\delta_x(A) = 1$, якщо $x \in A$.

$\mathcal{S}_M(A)$ – множина перетворень Стілтьєса усіх $M \times M$ матрично-значних, невід'ємних та обмежених мір, визначених на A, де A – борелівська множина на $\mathbb{R}$.

$\mathcal{S}(A)$ – множина $\mathcal{S}_1(A)$.

Тензорним добутком двох матриць A та B розмірністю $P \times Q$ та $K \times L$

відповідно, є матриця розмірністю $PK \times QL$:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{11}B & \dots & A_{1J}B \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{I1}B & \dots & A_{IJ}B \end{pmatrix}.$$

Матриці $\mathbf{G}$ розмірністю $2ML \times 2ML$ будуть записуватися як

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{G_{pp}} & \mathbf{G_{pf}} \\ \mathbf{G_{fp}} & \mathbf{G_{ff}} \end{pmatrix},$$

де 4 матриці $(\mathbf{G_{ij}})_{i,j\in p,f}$ мають розмірність $ML \times ML$. Іноді блоки будуть позначатися через $\mathbf{G}(pp)$, $\mathbf{G}(pf)$, ...

У подальшому κ буде позначати загальну константу, що не залежить від M, N та комплексної величини z, та чиє значення може змінюватися упродовж обчислень.

Хороший поліном $P(z)$ це поліном, чия степінь та коефіцієнти не залежать від M, N та z.

$f_N(z) = \mathcal{O}_z(\alpha_N)$ якщо z належить області $\Omega \in \mathbb{C}$ та існує два хороших полінома P_1 та P_2 таких, що $f_N(z) \leq \alpha_N P_1(|z|)P_2(\frac{1}{|\mathrm{Im} z|})$ для усіх $z \in \Omega$. Якщо $\Omega = \mathbb{C}^+$, ми будемо писати тільки $f_N(z) = \mathcal{O}_z(\alpha_N)$, не згадуючи область.

Вступ

Обґрунтування вибору теми дослідження. Завдяки вражаючому розвитку пристроїв збору даних і сенсорних мереж, доволі часто доводиться стикатися з багатовимірними часовими рядами в різних областях, таких як цифровий зв'язок, зондування навколишнього середовища, електроенцефалографія, аналіз фінансовий даних, промисловий контроль, ... У цьому контексті не завжди є можливість зібрати достатньо велику кількість результатів спостережень для виконання статистичного висновування, оскільки тривалість сигналів обмежена і / або тому, що їх статистичні дані не є інваріантними за часом на досить великих відрізках. Як наслідок, основні схеми виведення не можуть бути застосовані так, як у класичних випадках малої розмірності. Це, за останні десять років, значно стимулювало розробку нових статистичних підходів, спрямованих на вирішення вищезгаданих труднощів. Зокрема, існує багато робіт, у яких пропонується використовувати теорію випадкових матриць у контексті обробки багатовимірних статистичних сигналів, які традиційно моделюються подвійним асимптотичним режимом, в якому розмір часового ряду і розмір вибірки зростають до нескінченності. Результати теорії випадкових матриць були використані для оцінки поведінки функціоналів, що залежать від матриць коваріацій вибірки спостереження у багатовимірному випадку, та було запропоновано нові вдосконалені методи. Проте фундаментальні задачі багатовимірних часових рядів ґрунтуються на більш складних матрицях, ніж матриці коваріацій.

Дана дисертаційна робота присвячена вивченню поведінки власних значень двох видів ансамблів випадкових матриць. Перший ансамбль грає важливу роль у проблемах статистичного висновування, які пов'язані з багатовимірними часовими рядами, що мають раціональний спектр. Тим не менш, існуючи методи, що дозволяють отримати необхідну інформацію з матриці автоковаріацій, можуть бути використані лише у випадку, коли кількість спостережень набагато більша за їх розмірність. На жаль, у деяких випадках розмірність векторів настільки велика, що збір необхідної кількості спостережень виявляється неможливим або занадто витратним. Таким чином, доречно дослідити поведінку емпіричної матриці автоковаріацій у випадку, коли обидва параметри, кількість спостережень та їх розмірність, збігаються до $+\infty$ так, що їх відношення збігається до ненульової константи. Другий ансамбль є модифікацією моделі великих випадкових матриць, що з'явилася у проблемах теорії квантової інформації. У роботі розглядається випадок, коли компоненти матриці коваріацій є тензорними добутками одного вектора, що ускладнює доведення у порівнянні з випадком, коли береться тензорний добуток незалежних векторів.

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є дослідження розподілу власних значень матриць автоковаріацій та матриць коваріацій, компоненти яких є тензорними добутками.

Об'єкт дослідження — матриці автоковаріацій та матриці коваріацій, компоненти яких є тензорними добутками.

Предмет дослідження — розподіл власних значень матриці автоковаріацій та матриці коваріацій, компоненти яких є тензорними добутками.

Завдання дослідження:

- дослідити асимптотичну поведінку резольвенти матриці автоковаріацій;
- дослідити носій нормованої рахуючої міри матриць автоковаріацій;
- локалізувати власні значення матриць автоковаріацій;
- встановити границю нормованої рахуючої міри матриць коваріацій, компоненти яких є тензорними добутками.

Методи дослідження. Для отримання результатів дисертаційної роботи використовуються метод Гауссових змінних та метод кінцевих збурень.

Наукова новизна одержаних результатів. В роботі досліджено асимптотичну поведінку розподілу власних значень матриці автоковаріацій та матриці коваріацій, компоненти якої є тензорними добутками, це є новим результатом. Зокрема, отримано такі результати:

- встановлено асимптотичну поведінку розподілу власних значень матриці автоковаріацій, досліджено її носій та локалізовано власні значення у випадку моделі з нульовим "корисним"сигналом, це є новим результатом;

- встановлено границю розподілу власних значень матриці коваріацій, компоненти якої є тензорними добутками, це є новим результатом.

Практичне значення отриманих результатів. Робота має теоретичний характер. Отримані результати поглиблюють наше уявлення про випадкові матриці, а також можуть бути використані в теорії телекомунікацій.

Особистий внесок здобувача. Постановки задач належать науковим керівникам. Робота [50] написана у співавторстві з науковим керівником, особистий внесок здобувача у статті [50] - це Section 3,4,5,6, Proposition 7.1, Theorem 7.1, Proposition 7.4, Proposition 7.6, Theorem 7.2, Proposition 7.7, Section 8,9. Решта результатів отримані автором дисертації самостійно. Результати, що належать іншим математикам, згадуються за необхідністю для повноти викладу та супроводжуються відповідними посиланнями.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися й обговорювалися на наступних міжнародних конференціях:

1. III Міжнародна конференція «Аналіз та математична фізика», Харків, 15–19 червня 2015 р.

2. Тристороння німецько-російсько-українська літня школа «Spectral Theory, Differential Equations and Probability», Майнц (Німеччина), 4–15 вересня 2016 р.

3. Конференція «Random Matrices and Random Graphs», Марсель (Франція), 15–19 квітня 2019 р.

4. Літня школа «Randomness in Physics and Mathematics», Білефельд (Німеччина), 12–24 серпня 2019 р.

5. Конференція «XXVII Colloque francophone de traitement du signal et des images», Ліль (Франція), 26–29 серпня 2019 р.

6. Конференція «Random Matrices and Complex Data Analysis Workshop», Шанхай (Китай), 10–12 грудня 2019 р.

7. Конференція «2020 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)», Барселона (Іспанія), 4–8 квітня 2020 р.

Публікації. Усі основні результати дисертації в повній мірі опубліковані у журналах, внесених до міжнародних наукометричних баз та віднесених до другого й третього квартилів (Q2 та Q3) відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank, пройшли апробацію на наукових конференціях та семінарах. Результати дисертації знайшли відображення в 6 наукових публікаціях, в тому числі в 2 статтях [50, 71] і в тезах доповідей [69, 70, 72, 73] на 4 конференціях.

Структура дисертації. Дисертація складається з анотації, змісту, переліку умовних позначень, вступу, чотирьох розділів, висновків до дисертації, списку використаних джерел, якій містить 81 найменувань, та додатка. Повний обсяг роботи — 148 сторінок. Обсяг основної частини дисертації — 122 сторінок. Розділ, присвячений огляду літератури, займає 12 сторінок.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційну роботу виконано у відділі математичної фізики математичного відділення Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б. І. Вєркіна Національної академії наук України у відповідності до тематики пріоритетних досліджень відділу та в рамках державної науково-дослідної роботи за темою «Матричні та диференціальні оператори та їх застосування в квантовій інформатиці, інтегрованих системах та статистичній фізиці» (шифр М24/5, номер держреєстрації 0106U002561).

Розділ 1

Огляд літератури

1.1 Основні означення та корисні результати теорії випадкових матриць

Теорія випадкових матриць бере свій початок у 1920-1930 роках у математичний статистиці з емпіричних матриць коваріацій, двадцять років потому Вігнер запропонував використовувати матриці з незалежними випадковими елементами для моделювання енергетичного спектра складних квантових систем. З тих часів теорія випадкових матриць активно розвивається та знаходить застосування у самих різноманітних галузях, таких як: теоретична фізика [81], [42], [55], комбінаторика та алгебраїчна геометрія [35], [61], комплексний аналіз та задача Рімана-Гільберта [43], операторна алгебра [79], теорія телекомунікацій [74], фінансова математика [14], теорія чисел [41].

Взагалі під випадковою матрицею мається на увазі матриця, усі елементи якої розподілені деяким випадковим чином. У теорії випадкових матриць вивчається статистика власних значень та власних векторів багатовимірних випадкових матриць, тобто коли розмірність матриці прямує до нескінченності. Тут і далі під ансамблем випадкових матриць мається на увазі послідовність випадкових матриць. Одне з перших питань, що постає при вивчені нового ансамблю, це вивчення нормованої рахуючої міру власних значень. У теорії випадкових матриць зустрічаються ансамблі як ермітові (симетричні, у випадку дійсних елементів) так і неермітові (див. [1], [5], [28], [29], [62]). Оскільки у цій роботі ми зосереджені на ермітових матрицях, щоб не ускладнювати визначення, ми наведемо необхідні поняття та результати лише для випадку ермітових (симетричних) випадкових матриць.

Нехай задано ансамбль ермітових (симетричних) випадкових матриць $\mathcal{M}_N$ розмірністю $N \times N$ та власними значеннями $(\lambda_1^N, \lambda_2^N, \dots, \lambda_N^N)$.

Означення 1.1. Нормованою рахуючою мірою власних значень матриці $\mathcal{M}_N$ називається міра μ_N, що визначається на будь-якому інтервалі $\Delta \subset \mathbb{R}$ як

$$\mu_N(\Delta) = Card\{i \in [1, N] : \lambda_i^N \in \Delta\}/N.$$

Легко побачити, що нормована рахуюча міра є випадковою мірою, проте у багатьох випадках існує границя послідовності μ_N, яка зазвичай невипадкова.

Одним з основних методів теорії випадкових матриць є резольвентний метод. Він базується на зв'язку міри та її перетворення Стілтьєса.

Означення 1.2. Перетворенням Стілтьєса f міри μ називається функція, яка задана на $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ та визначається наступним чином

$$f(z) = \int \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda - z}, \quad \mathrm{Im} z \neq 0.$$

Виявляється, що перетворення Стілтьєса має низку корисних властивостей, найважливіша з яких це взаємно однозначна відповідність між класом перетворень Стілтьєса та скінченими невід'ємними мірами. Більш детально, маємо наступну Пропозицію.

Пропозиція 1.1. *1. Нехай f це перетворення Стілтьєса скінченної невід'ємної міри μ, тоді*

– функція f аналітична на $\mathbb{C}^+$,

– якщо $z \in \mathbb{C}^+$, тоді $f(z) \in \mathbb{C}^+$,

– $|f(z)| \leq \frac{\mu(\mathbb{R})}{\mathrm{Im} z}$, для $z \in \mathbb{C}^+$

– якщо $\mu(-\infty, 0) = 0$, тоді її перетворення Стілтьєса f аналітичне на $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$. Більш того, з $z \in \mathbb{C}^+$ випливає $zf(z) \in \mathbb{C}^+$.

– для усіх $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ маємо

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(\lambda) d\mu(\lambda) = \frac{1}{\pi} \lim_{y \downarrow 0} \mathrm{Im} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \phi(x) f(x + iy) dx \right\} \tag{1.1}$$

2. Обернено, нехай f це аналітична на $\mathbb{C}^+$ функція, така, що $f(z) \in \mathbb{C}^+$ для $z \in \mathbb{C}^+$ та для деякого $\epsilon > 0$ виконується $\sup_{y \geq \epsilon} |iyf(iy)| < +\infty$. Тоді, існує єдина скінчена невід'ємна міра μ, така, що f це її перетворення Стілтьєса та $\mu(\mathbb{R}) = \lim_{y \to +\infty} -iyf(iy)$. Більш того, справедлива наступна формула обернення:

$$\mu([a, b]) = \lim_{\nu \to 0+} \frac{1}{\pi} \int_a^b \mathrm{Im} f(\xi + i\nu) d\xi, \tag{1.2}$$

для a та b точок неперервності μ. Якщо крім того $zf(z) \in \mathbb{C}^+$ для z з $\mathbb{C}^+$, тоді, $\mu(\mathbb{R}^-) = 0$. Зокрема, f задається

$$f(z) = \int_0^{+\infty} \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda - z}$$

та аналітично подовжується на $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$.

3. Нехай F – $P \times P$ матрично-значна функція, яка аналітична на $\mathbb{C}^+$ та задовольняє $\mathrm{Im}(F(z)) > 0$ if $z \in \mathbb{C}^+$ і $\sup_{y > \epsilon} \|iyF(iy)\| < +\infty$ для деякого $\epsilon > 0$. Тоді, $F \in \mathcal{S}_P(\mathbb{R})$ та, якщо μ^F це відповідна $P \times P$ невід'ємна міра, виконується

$$\mu^F(\mathbb{R}) = \lim_{y \to +\infty} -iyF(iy) \tag{1.3}$$

Якщо більш того $\mathrm{Im}(zF(z)) > 0$, тоді $F \in \mathcal{S}_P(\mathbb{R}^+)$.

Для доведення див. наприклад [2, Section 59] та [26].

Нескладно помітити, що перетворення Стілтьєса f_N міри μ_N задовольняє $f_N(z) = \frac{1}{N} \mathrm{Tr}(\mathcal{M}_N - z)^{-1}$. Як ми можемо побачити права частина є нормованим слідом резольвенти матриці $\mathcal{M}_N$. Наступна пропозиція надає добре відомі властивості резольвенти ермітових та дійсних симетричних матриць.

Пропозиція 1.2. *Нехай M – дійсна симетрична (ермітова) матриця та*

$$G_M(z) = (M - z)^{-1}, \mathrm{Im} z \neq 0$$

її резольвента. Тоді маємо:

(i)

$$\|G_M(z)\| \leq |\mathrm{Im} z|^{-1}; \tag{1.4}$$

(ii) (резольвентна тотожність) якщо $G_1(z)$ та $G_2(z)$ резольвенти двох дійсних симетричних (ермітових) матриць M_1 та M_2 відповідно, тоді:

$$G_2(z) = G_1(z) - G_1(z)(M_2 - M_1)G_2(z); \tag{1.5}$$

(iii) якщо $Y \in \mathbb{R}^N$ (чи, відповідно, $Y \in \mathbb{C}^N$), тоді

$$G_{M+YY^*} = G_M - \frac{G_M(YY^*)G_M}{1 + (G_M Y, Y)}, \quad \mathrm{Im} z \neq 0. \tag{1.6}$$

Нарешті, при вивченні випадкових матриць, елементи яких є функціоналами гауссівських випадкових величин, потужним інструментом з оцінки резольвенти є поєднання наступних двох Пропозицій.

Пропозиція 1.3. ***(Формула інтегрування частинами.)*** *Нехай $\xi = [\xi_1, \ldots, \xi_K]^T$ це комплексний Гауссів випадковий вектор, такий, що $\mathbb{E}\{\xi\} = 0$, $\mathbb{E}\{\xi\xi^T\} = 0$ та $\mathbb{E}\{\xi\xi^*\} = \Omega$. Якщо $\Gamma : (\xi) \mapsto \Gamma(\xi, \bar{\xi})$ є $\mathcal{C}^1$ комплексною функцією, яка, разом із своїми похідними, може бути обмежена поліномами, тоді*

$$\mathbb{E}\{\xi_i \Gamma(\xi)\} = \sum_{k=1}^{K} \Omega_{ik} \mathbb{E}\left\{\frac{\partial \Gamma(\xi)}{\partial \bar{\xi}_k}\right\}. \tag{1.7}$$

Пропозиція 1.4. ***(Нерівність Пуанкаре-Неша.)*** *Нехай $\xi = [\xi_1, \ldots, \xi_K]^T$ це комплексний Гауссів випадковий вектор, такий, що $\mathbb{E}\{\xi\} = 0$, $\mathbb{E}\{\xi\xi^T\} = 0$ та $\mathbb{E}\{\xi\xi^*\} = \Omega$. Якщо $\Gamma : (\xi) \mapsto \Gamma(\xi, \bar{\xi})$ є $\mathcal{C}^1$ комплексною функцією, яка, разом із своїми похідними, може бути обмежена поліномами, тоді позначимо $\nabla_\xi \Gamma = [\frac{\partial \Gamma}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi_K}]^T$ та $\nabla_{\bar{\xi}} \Gamma = [\frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{\xi}_1}, \ldots, \frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{\xi}_K}]^T$. Маємо*

$$\mathbf{Var}\{\Gamma(\xi)\} \leq \mathbb{E}\left\{\nabla_\xi \Gamma(\xi)^T \Omega \overline{\nabla_\xi \Gamma(\xi)}\right\} + \mathbb{E}\left\{\nabla_{\bar{\xi}} \Gamma(\xi)^* \Omega \nabla_{\bar{\xi}} \Gamma(\xi)\right\}. \tag{1.8}$$

Доведення цих результатів наведено у багатьох посиланнях, наприклад [19], [38], [44], [63]. Цей метод використовувався для вирішення багатьох задач, таких як знаходження граничного розподілу власних значень, доведення центральної граничної теореми гауссівських ансамблів, емпіричних матриць коваріацій, тощо .

1.2 Ансамбль матриць коваріацій

У цьому розділі ми зупинимось більш детально на емпіричних матрицях коваріацій. Для цього розглядається багатовимірний часовий ряд $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, де $y_n = \{y_{n\alpha}\}_{\alpha=1}^M$ – стаціонарний гауссівський процес з нульовим очікуванням та матрицею коваріацій $R_M = \{R_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1}^M$, $R_{\alpha\beta} = \mathbb{E}\{y_{n\alpha}\bar{y}_{n\beta}\}$, яка, взагалі то не відома. Однією з основних задач є отримання інформації про R_M зі спостережень $(y_n)_{n=1}^N$.

У випадку класичної статистики припускається, що $M << N$, тобто вважається, що M – фіксовано та $N \to +\infty$. Тоді вводиться емпірична матриця коваріацій

$$\hat{R}_{M,N} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} y_n y_n^*, \tag{1.9}$$

яка є достатньо хорошим наближенням матриці R_M, тобто $\hat{R}_{M,N} \to R_M$ при $N \to +\infty$.

Але виявляється, що у багатьох випадках розмірність векторів y_n є настільки великою, що зібрати достатню кількість спостережень N, для того, щоб виконувалась умова $M << N$ стає занадто складно. Тоді вважається, що $M, N \to +\infty$ таким чином, що $M/N \to c \in (0, +\infty)$. Проблема полягає в тому, що при такому режимі

$$\hat{R}_{M,N} \not\to R_M$$

Тому у цьому випадку достатньо природнім є вивчення спектру $\{\lambda_1^N, \ldots, \lambda_M^N\}$ матриці $\hat{R}_{M,N}$, зокрема її нормованої рахуючої міри $\hat{\mu}_{M,N}$.

Перший строгий результат для моделі (1.9) було отримано Марченко та Пастуром у [54] (1967), де доведена наступна теорема.

Теорема. *Нехай $\{M_N\}$ – послідовність натуральних чисел, для яких*

$$M_N \to +\infty,\ N \to +\infty,\ c_N = M_N/N \to c \in [0, +\infty),$$

Позначимо через σ_M нормовану рахуючу міру власних значень $\{\tau_i\}_{i=1}^M$ матриці R_M. Якщо послідовність мір σ_M слабко збігається до ймовірнісної *міри σ:*

$$\lim_{N\to\infty} \sigma_M = \sigma,$$

тоді нормована рахуюча міра ν_N власних значень матриці $\hat{R}_{M,N}$ слабко збігається з ймовірністю один до невипадкової ймовірнісної міри ν ($\nu(\mathbb{R}) = 1$). Перетворення Стілтьєса f міри ν визначається однозначно рівнянням

$$f(z) = \Big(c\int \frac{\tau d\sigma(\tau)}{1+\tau f(z)} - z\Big)^{-1}.$$

З того часу ця модель стала класичною у теорії випадкових матриць та вивчалась у багатьох роботах. У випадку з $R_M = I_M$ була отримана універсальність локального режиму всередині спектру [60], у [8] вивчалася асимптотична поведінка найбільшого власного значення моделі з $R_M = I_M + D$, де матриця D – малого рангу, ця задача з більш загальним спектром R_M розглядається у [66], також варто відмітити результати, що стосуються центральної граничної теореми [65], [6].

Зокрема, однією з модифікацій цього ансамблю стала так звана модель "інформація+шум" де замість y_n розглядається часовий ряд $v_n = y_n + u_n$. Складова u_n як раз представляє "корисну інформацію"та не залежить від y_n. Багато різних результатів стосовно цієї моделі може бути знайдено у [7], [25].

Пізніше виявилось, що в таких галузях, як теорія квантової інформації або теорія телекомунікацій з'являються більш складні версії цього ансамблю, коли елементи емпіричної матриці коваріацій залежать від четвертих моментів елементів векторів y_n. У главі 4 цієї дисертації розглядається одна з модифікацій цього класичного ансамблю (1.9). А саме випадок, коли замість векторів y_n розглядаються їх тензорний добуток $y_n \otimes y_n$. Тобто емпірична матриця коваріацій набуваю вигляду

$$\hat{R}_{M,N} = \frac{1}{N^2}\sum_{n=1}^{N}(y_n \otimes y_n)(y_n \otimes y_n)^*.$$

Пов'язані задачі раніше зустрічалися переважно у контексті теорії квантової інформації, див. [21] та відповідні посилання. Крім цього, застосовуючи схожі техніки з теорії випадкових матриць Ambainis та Harrow [4] отримали граничні властивості найбільшого власного значення та граничного спектрального розподілу випадкових тензорів. Литова у [52] довела центральну граничну теорему для лінійної спектральної статистики матриці коваріацій з компонентами $y_n^1 \otimes \ldots \otimes y_n^k$. Також Shi et al. [67] застосували граничні властивості випадкових тензорів для виявлення проблем у мережах розповсюдження (distribution networks).

1.3 Емпіричні матриці автоковаріацій

На жаль у деяких галузях, наприклад теорії телекомунікацій, для вирішення певних задач використовуються більш складні моделі, ніж матриця коваріацій, а саме матриця автоковаріацій часового ряду. У цьому розділи ми спробуємо пояснити мотивацію для вивчення таких матриць.

Розглядається багатовимірний часовий ряд $(v_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ розмірністю M, який було згенеровано наступним чином

$$v_n = u_n + y_n, \tag{1.10}$$

де $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$– це складова, яка представляє гауссівський шум така, що $\mathbb{E}(y_{n+k}y_n^*) = R\delta_k$ для деякої невідомої додатно визначеної матриці R, і складова $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ є "корисним" сигналом з раціональним спектром, який залишається невідомим. Зокрема, це означає, що u_n може бути описано рівняннями системи простору станів

$$x_{n+1} = Ax_n + B\omega_n,\ u_n = Cx_n + D\omega_n, \tag{1.11}$$

де $(\omega_n)_{n\in\mathbb{Z}}$– послідовність білого шуму, розмірністю $K \le M$, тобто $\mathbb{E}(\omega_{n+k}\omega_n^*) = I_K\,\delta_k$, A– невипадкова матриця розмірністю $P \times P$, чий спектральний радіус $\rho(A)$ строго менший за 1, та B, C, D– деякі невипадкові матриці з розмірностями $P \times K$, $M \times P$ та $M \times K$ відповідно. P-вимірна Маркова послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ називається послідовністю векторів станів, що відповідає простору станів (1.11).

Однією з важливих задач є характеризація мінімального простору станів послідовності $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ (тобто простору, для якого розмірність P мінімальна можлива) з даної послідовності матриць автоковаріацій $(R_{u,n})_{n\in\mathbb{Z}}$ векторів u, яка задається як $R_{u,n} = \mathbb{E}(u_{k+n}u_k^*)$ для усіх n. Більш детальна інформація представлена у працях [47] та [76].

Ми зупинимось на наближенні лише деяких параметрів системи (1.11), а саме на розмірності P та відповідних матрицях C та A. Визначення цих параметрів базується на спостереженні, що послідовність матриць автоковаріацій u може бути представлена у вигляді

$$R_{u,n} = \mathbb{E}(u_{n+k} u_n^*) = C A^{n-1} G \tag{1.12}$$

для усіх $n \geq 1$, де матриці (A, C, G) однозначно визначенні, з точністю до подібних перетворень, звідки випливає, що матриці C та A, що відповідають мінімальній реалізації визначаються однозначно (з точністю до подібності). Більш того, якщо ми визначимо матрицю автоковаріацій $R^L_{f|p,u}$ між минулим та майбутнім часового ряду u

$$R^L_{f|p,u} = \mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} u_{n+L} \\ u_{n+L+1} \\ \vdots \\ u_{n+2L-1} \end{pmatrix} (u_n^*, u_{n+1}^*, \ldots, u_{n+L-1}^*)\right]$$

виявляється, що матриця $R^L_{f|p,u}$ також представляється як

$$R^{(L)}_{f|p,u} = \mathcal{O}^{(L)}\, \mathcal{C}^{(L)}, \tag{1.13}$$

де матриця $\mathcal{O}^{(L)}$, розмірністю $ML \times P$, є матрицею "спостереження"

$$\mathcal{O}^{(L)} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{L-1} \end{pmatrix}, \tag{1.14}$$

та матриця $\mathcal{C}^{(L)}$, розмірністю $P \times ML$, відома як матриця "керування"

$$\mathcal{C}^{(L)} = \left(A^{L-1}G, A^{L-2}G, \ldots, G\right). \tag{1.15}$$

Якщо ми виберемо $L \geq P$, тоді ранг матриці $R^{(L)}_{f|p,u}$ залишається рівним P, та будь яке мінімальне розкладання за рангом матриці $R^{(L)}_{f|p,u}$ може бути записано як (1.13) для деякої трійки (A, C, G). Зокрема, якщо $R^{(L)}_{f|p,u} = \Theta\Gamma\tilde{\Theta}^*$ –

це сингулярне розкладання, тоді матриця $\Theta\Gamma^{1/2}$ співпадає із матрицею спостереження $\mathcal{O}^{(L)}$ пари (C, A). І матриці C та A можуть бути безпосередньо отримані з відомої особливої структури матриці $\mathcal{O}^{(L)}$. З цього випливає, що матриці автоковаріацій послідовності u дають змогу легко оцінити такі параметри, як P, C та A. Раніше ми зауважили, що у той час, як матриці C та A визначаються, по суті, єдиним чином, пар матриць (B, D), які задовольняють (1.11), існує декілька можливих. Більш детально з цією темою можливо ознайомитись у таких працях, як [47] або [76].

Оскільки послідовність $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ у (1.10) некорельована, матриця $R_{v,n} = \mathbb{E}(v_{n+k}v_k^*)$ співпадає з $R_{u,n}$ для усіх $n \geq 1$. Отже, P і матриці C та A досі можуть бути знайдені з послідовності матриць автоковаріацій векторів v_n, які є "шумними" версіями векторів u_n. Тим не менш, на практиці, сама послідовність автоковаріацій $(R_{v,n})_{n\geq 1}$ невідома, що робить необхідним оцінку P та (C, A) з лише наявних N зразків $v_1 = u_1 + y_1, v_2 = u_2 + y_2, \ldots, v_N = u_N + y_N$. Для цього спершу необхідно оцінити P як число показових сингулярних значень емпіричного наближення $\hat{R}^L_{f|p,v}$ справжньої матриці $R^L_{f|p,v} = R^L_{f|p,u}$, яка визначається наступним чином

$$\hat{R}^L_{f|p,v} = \frac{V_{f,N}V^*_{p,N}}{N},$$

де матриці $V_{f,N}$ (майбутнє) та $V_{p,N}$ (минуле) задаються як

$$V_p^{(L)} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_{N-1} & v_N \\ v_2 & v_3 & \ldots & v_N & v_{N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_L & v_{L+1} & \ldots & v_{N+L-2} & v_{N+L-1} \end{pmatrix}$$

та

$$V_f^{(L)} = \begin{pmatrix} v_{L+1} & v_{L+2} & \ldots & v_{N-1+L} & v_{N+L} \\ v_{L+2} & v_{L+3} & \ldots & v_{N+L} & v_{N+L+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{2L} & v_{2L+1} & \ldots & v_{N+2L-2} & v_{N+2L-1} \end{pmatrix}.$$

Далі, для того, щоб знайти наближення матриць A, C ми позначимо P найбільших сингулярних значень матриці $\hat{R}^{(L)}_{f|p,v}$ та їх відповідних лівих сингулярних векторів через $(\hat{\gamma}_p)_{p=1,\ldots,P}$ та $\hat{\Theta} = (\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_P)$, та побудуємо $P \times P$ діагональну матрицю $\hat{\Gamma}$ з елементами $(\hat{\gamma}_p)_{p=1,\ldots,P}$ на головній діагоналі, тоді $ML \times P$ матриця $\hat{\mathcal{O}}^{(L)} = \hat{\Theta}\hat{\Gamma}^{1/2}$ є наближенням матриці "спостереження" $\mathcal{O}^{(L)}$. Одержана матриця $\hat{\mathcal{O}}^{(L)}$ може не мати таку ж саму структуру, як справжня матриця спостереження, але матрицю A досі можливо оцінити, знайшовши мінімум квадратичної функції

$$\left\| \hat{\mathcal{O}}^{(L)}_{\text{down}} A - \hat{\mathcal{O}}^{(L)}_{\text{up}} \right\|,$$

де оператор "down"(відповідно "up") прибирає останні (відповідно перші) M рядків $ML \times P$ матриці $\hat{\mathcal{O}}^{(L)}$. Цей метод дає слушну оцінку для P, C, A у випадку, коли $N \to +\infty$ у той час як параметри M, L та P зафіксовані. Більш детальний аналіз та опис методу може бути знайдений у [20].

Проблема полягає у тому, що якщо розмірність спостережень (M) велика та обсяг вибірки N не може бути значно більший за M, у такому разі співвідношення ML/N не буде достатньо малим, щоб описана схема була надійною. Таким чином, доречно дослідити поведінку наведених оцінок при асимптотичному режимі, коли M та N прямують до $+\infty$ так, що $\frac{ML}{N}$ прямує до ненульової константи. У цьому випадку усічений сингулярний розклад матриці $\hat{R}^{(L)}_{f|p,v}$ не дає вірну оцінку матриці спостереження $\mathcal{O}$, тому доречно почати з вивчення найбільших сингулярних значень та відповідних сингулярних векторів матриці $\hat{R}^{(L)}_{f|p,v}$ коли M та N прямують до $+\infty$ та знайти зв'язок з матрицею $\mathcal{O}^{(L)}$.

На жаль, ця задача занадто складна, якщо не робити додаткові припущення для u. У минулому, у багатьох роботах розглядалися багатовимірні схеми статистичних висновків, що засновуються на власних значеннях та власних векторах емпіричної матриці коваріацій спостережень (див., наприклад, [58], [56], [59], [33], [77], [78], [22], [75]) коли корисний сигнал належить невипадковому простору малої розмірності. Результати, що засновані на методах кінцевого збурення (див., наприклад, [11] [12], [64]), дають змогу вирішення багатьох питань у статистиці за допомогою теорії багатовимірних випадкових матриць. Тим не менш, для того, щоб отримати будь-які результати (наприклад наближення P, A, C) для спостережень с сигналом u малого рангу, першим кроком буде дослідити поведінку системи, коли корисний сигнал відсутній.

Таким чином, у Главах 2, 3 цієї роботи ми вивчаємо асимптотику сингулярних значень матриці автоковаріацій $W_{f,N}W_{p,N}^* = N^{-1}Y_{f,N}Y_{p,N}^*$, або, що еквівалентно, квадратні корені власних значень матриці $W_{f,N}W_{p,N}^*W_{p,N}W_{f,N}^*$. Отримані результати можливо використати для оцінки найбільшого сингулярного значення та відповідного лівого сингулярного вектора у випадку присутнього корисного сигналу та розробити метод наближення для P, C, A.

Багатовимірні матриці автоковаріацій вивчалися набагато менше, ніж багатовимірні матриці коваріацій. У роботі B. Jin, C. Wang, Z.D. Bai, K.K. Nair, M. Harding [39] було досліджено асимптотичну поведінку розподілу власних значень ермітової матриці $\hat{R}_\tau + \hat{R}_\tau^*$, де

$$\hat{R}_\tau = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_{n+\tau}x_n^*$$

і $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ є послідовністю M-вимірних однаково розподілених незалежних векторів, більш того виконується $\mathbb{E}(x_n x_n^*) = I$. У роботі доведено, що емпіричний розподіл власних значень матриць $\hat{R}_\tau + \hat{R}_\tau^*$ прямує до деякої границі, що не залежить від $\tau \geq 1$. Також було знайдено рівняння третього порядку для перетворення Стілтьєса граничного розподілу. Розв'язавши це рівняння автори отримали явний вираз для щільності граничного розподілу. H. Liu, A. Aue, D. Paul [48] поширив ці результати на випадок, де $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ є лінійним процесом $x_n = \sum_{l=0}^{+\infty} A_l z_{n-l}$б і $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ – незалежні, однаково розподілені та матриці $(A_l)_{l\geq 0}$ спільно діагоналізовні. Граничний розподіл власних значень було описано за допомогою його перетворення Стілтьєса. Доведення засновується на спостереженні, що у Гауссовому випадку корельовані вектори $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ можна замінити незалежними, використовуючи стандартну схему декореляції. Після цього результат узагальнили на випадок не Гауссових величин за допомогою принципу Ліндберга.

M. Bhattachargee, A. Bose [9] (див. також [10]) довели існування граничного розподілу будь-якого симетричного поліному від $(\hat{R}_\tau, \hat{R}_\tau^*)_{\tau\in T}$ для кінцевої множини T. Для цього вони застосовували метод моментів у випадку, коли x є лінійним не Гауссовим процесом. Z. Li, G. Pan, J. Yao [45] дослідили поведінку асимптотичну поведінку $\hat{R}_\tau \hat{R}_\tau^*$ у випадку, коли $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ є послідовністю M-вимірним незалежних однаково розподілених векторів з незалежними елементами. З допомогою метода кінцевих збурень було доведено, що існує граничний розподіл власних значень та його перетворення Стілтьєса є розв'язком рівняння 3 порядку. Аналогічно з [39], це дозволило знайти вираз для щільності граничного розподілу. Також, застосовуючи комбінаторний метод, у [45] доведено, що усі власні значення матриці $\hat{R}_\tau \hat{R}_\tau^*$ знаходяться у околі носія граничного розподілу.

Розділ 2

Асимптотична поведінка нормованої рахуючої міри $\hat{\nu}_N$

У цьому та наступному розділах ми вивчаємо розподіл сингулярних значень емпіричної матриці автоковаріацій у випадку, коли корисний сигнал відсутній, тобто $v_n = y_n$ – гауссівський вектор з нульовим математичним сподіванням та матицею коваріацій – R_N. Позначимо

$$W_{p,N} = \frac{1}{\sqrt{N}} Y_{p,N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{N-1} & y_N \\ y_2 & y_3 & \cdots & y_N & y_{N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_L & y_{L+1} & \cdots & y_{N+L-2} & y_{N+L-1} \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

та

$$W_{f,N} = \frac{1}{\sqrt{N}} Y_{f,N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} y_{L+1} & y_{L+2} & \cdots & y_{N-1+L} & y_{N+L} \\ y_{L+2} & y_{L+3} & \cdots & y_{N+L} & y_{N+L+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{2L} & y_{2L+1} & \cdots & y_{N+2L-2} & y_{N+2L-1} \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Тоді емпірична матриця автоковаріацій часового ряду y_n визначається як $\hat{R}^{(L)}_{f|p,v} = W_{f,N} W^*_{p,N}$, як вже було згадано, замість вивчення сингулярних значень матриці $\hat{R}^{(L)}_{f|p,v}$, ми краще будемо розглядати їх квадрати, або власні значення матриці $\hat{R}^{(L)}_{f|p,v}(\hat{R}^{(L)}_{f|p,v})^* = W_{f,N}W^*_{p,N}W_{p,N}W^*_{f,N}$.

У цьому розділі ми знайдемо невипадкову міру ν_N яка має таку ж асимптотичну поведінку, що і емпіричний розподіл власних значень матриці $W_{f,N}W^*_{p,N}W_{p,N}W^*_{f,N}$. У подальшому ми розглядаємо режим з фіксованим параметром L, де M і N прямують до $+\infty$ при цьому

$$c_N = \frac{ML}{N} \to c_*,\ c_* > 0. \tag{2.3}$$

Саме цей режим буде матися на увазі під $N \to +\infty$, тобто M розцінюється як число $M = M(N)$, що залежить від N. Таким чином, матриці, які були описані вище, залежать від N та будуть позначатися $R_N, Y_{f,N}, Y_{p,N}, \ldots$. Але для полегшення позначень ми іноді можемо знехтувати залежністю від N. Головним результатом цього розділу є наступна теорема:

Теорема 2.1. *Для усіх $z \in \mathbb{C}^+$, рівняння*

$$t_N(z) = \frac{1}{M}\mathrm{Tr}R_N\left(-z\left(I_M + \frac{c_N t_N(z)}{1 - z(c_N t_N(z))^2}R_N\right)\right)^{-1}$$

має єдиний розв'язок. Більш того, функція

$$s_N(z) = \frac{1}{M}\mathrm{Tr}\left(-z\left(I_M + \frac{c_N t_N(z)}{1 - z(c_N t_N(z))^2}R_N\right)\right)^{-1}$$

є перетворенням Стілтьєса деякої міри ν_N, для якої справедливо $\hat{\nu}_N - \nu_N \to 0$ слабко майже напевно для $N \to +\infty$.

Нагадаємо, що резольвента $Q_N(z)$ матриці $W_{f,N}W^*_{p,N}W_{p,N}W^*_{f,N}$ визначається як

$$Q_N(z) = \left(W_{f,N}W^*_{p,N}W_{p,N}W^*_{f,N} - zI_{ML}\right)^{-1}. \tag{2.4}$$

Оскільки елементи матриці $W_{f,N}W^*_{p,N}W_{p,N}W^*_{f,N}$ є функціями четвертого порядку від елементів векторів $y_1, \ldots, y_{N+2L-1}$, ми застосуємо так званий "лінеаризаційний трюк", тобто замість резольвенти $Q_N(z)$ матриці $W_{f,N}W^*_{p,N}W_{p,N}W^*_{f,N}$ ми будемо розглядати резольвенту $\mathbf{Q}_N(z)$ нової ермітової матриці розмірністю $2ML \times 2ML$:

$$\mathbf{M}_N = \begin{pmatrix} 0 & W_{f,N}W^*_{p,N} \\ W_{p,N}W^*_{f,N} & 0 \end{pmatrix}.$$

Добре відомо, що з допомогою формули обернення блочних матриць, матриця $\mathbf{Q}_N(z)$ може бути виражена як

$$\mathbf{Q}_N(z) = \begin{pmatrix} zQ_N(z^2) & Q_N(z^2)W_{f,N}W_{p,N}^* \\ W_{p,N}W_{f,N}^*Q_N(z^2) & z\tilde{Q}_N(z^2) \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

де $\tilde{Q}_N(z)$– це резольвента матриці $W_{p,N}W_{f,N}^*W_{f,N}W_{p,N}^*$. Як ми побачимо, можливо оцінити асимптотичну поведінку $\mathbf{Q}_N(z)$, використовуючи нерівність Пуанкаре-Неша і формулу інтегрування частинами (Пропозиції 1.4 та 1.3). Таким чином, з асимптотичної поведінки $\mathbf{Q}_N(z)$ та формули (2.5) ми отримаємо відповідні результати і для $Q_N(z)$.

У подальшому, усі матриці $\mathbf{G}$ розміром $2ML \times 2ML$ будуть записуватися як

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{G_{pp}} & \mathbf{G_{pf}} \\ \mathbf{G_{fp}} & \mathbf{G_{ff}} \end{pmatrix},$$

де 4 матриці $(\mathbf{G_{ij}})_{i,j \in p,f}$ мають розмірність $ML \times ML$. Іноді блоки будуть позначатися через $\mathbf{G}(pp)$, $\mathbf{G}(pf)$, ...

Позначимо через W_N матрицю розміром $2ML \times N$, що визначається як

$$W_N = \begin{pmatrix} W_{p,N} \\ W_{f,N} \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Її елементи $(W_{i,j}^m)_{i \le 2L, j \le N, m \le M}$ задовольняють

$$\mathbb{E}\{W_{i,j}^m W_{i',j'}^{m'}\} = \frac{1}{N} R_{mm',N} \delta_{i+j,i'+j'},$$

де $W_{i,j}^m$ представляє елемент, що належить стовпцю j та рядку $(m+M(i-1))$ для усіх $1 \le m \le M$, $1 \le i \le 2L$ та $1 \le j \le N$. Аналогічно, $\mathbf{Q}_{i_1 i_2}^{m_1 m_2}$, де $1 \le m_1, m_2 \le M$ та $1 \le i_1, i_2 \le 2L$, позначає елемент $(m_1 + M(i_1-1)), (m_2 + M(i_2-1))$ матриці $\mathbf{Q}$. Для усіх $j = 1, \ldots, N$, вектори $\{w_j\}_{j=1}^N, \{w_{p,j}\}_{j=1}^N$ та $\{w_{f,j}\}_{j=1}^N$ є стовпцями матриць W, W_p та W_f відповідно. Для усіх $1 \le i \le 2L$ та $1 \le m \le M$, вектор $\mathbf{f}_i^m$ представляє вектор канонічного базису простору $\mathbb{C}^{2ML}$ з 1 на позиції $m + (i-1)M$ та and нулями на усіх інших містах. Для спрощення позначень у випадку, якщо $i \leq L$, вектор $\mathbf{f}_i^m$ може також представляти вектор канонічного базису простора $\mathbb{C}^{ML}$, з 1 на позиції $m+(i-1)M$ та нулями на усіх інших містах. Вектор $\mathbf{e}_j$ з $1 \leq j \leq N$ представляє j –й вектор канонічного базису простору $\mathbb{C}^N$. Також, для будь-якого натурального числа k, J_k відповідає $k \times k$ "shift" матриці, визначеної як

$$(J_k)_{ij} = \delta_{j-i,1} \tag{2.7}$$

Для спрощення позначень, матриця J_k^* буде позначатися як J_k^{-1}, незважаючи на те, що матриця J_k вироджена.

У подальшому κ буде позначати загальну константу, що не залежить від M, N та комплексної величини z, та чиє значення може змінюватися упродовж обчислень. Хороший поліном $P(z)$ це поліном, чия степінь та коефіцієнти не залежать від M, N та z. Нарешті, ми будемо говорити, що $f_N(z) = \mathcal{O}_z(\alpha_N)$ якщо z належить області $\Omega \in \mathbb{C}$ та існує два хороших полінома P_1 та P_2 таких, що $f_N(z) \leq \alpha_N P_1(|z|) P_2(\frac{1}{|\mathrm{Im} z|})$ для усіх $z \in \Omega$. Якщо $\Omega = \mathbb{C}^+$, ми будемо писати тільки $f_N(z) = \mathcal{O}_z(\alpha_N)$, не згадуючи область. Зауважимо, що якщо поліноми P_1, P_2 та Q_1, Q_2 хороші, тоді $P_1(|z|)P_2(\frac{1}{|\mathrm{Im} z|}) + Q_1(|z|)Q_2(\frac{1}{|\mathrm{Im} z|}) \leq (P_1 + Q_1)(|z|)(P_2 + Q_2)(\frac{1}{|\mathrm{Im} z|})$, з чого випливає, що якщо функції f_1 та f_2 є $\mathcal{O}_z(\alpha)$, тоді їх сума $f_1(z) + f_2(z) = \mathcal{O}_z(\alpha)$.

Важливим припущенням для існування асимптотичної еквіваленти є обмеженість матриці коваріацій:

Припущення 2.1. Послідовність матриць коваріацій $(R_N)_{N\geq 1}$ векторів $(y_n)_{n=1,\ldots,N}$ розмірністю M має задовольняти

$$a\, I \leq R_N < b\, I$$

для усіх N, де $a > 0$ та $b > 0$ хороші константи.

Позначимо $\lambda_{1,N} \geq \lambda_{2,N} \geq \ldots \geq \lambda_{M,N}$ власні значення матриці R_N, які розташовані у порядки зменшення та $f_{1,N}, \ldots, f_{M,N}$ – їх відповідні власні вектори. Іншим чином, Припущення 2.1 може бути записано як $\lambda_{M,N} \geq a$ та $\lambda_{1,N} \leq b$ для усіх N.

Власні значення та власні вектори матриці $W_{f,N}W_{p,N}^*W_{p,N}W_{f,N}^*$ ми позначимо відповідно через $\hat{\lambda}_{1,N} \geq \ldots \geq \hat{\lambda}_{M,N}$ та $\hat{f}_{1,N}, \ldots, \hat{f}_{M,N}$.

2.1 Використання нерівності Пуанкаре-Неша.

У цьому підрозділі доведено з використанням Нерівності Пуанкаре-Неша деякі корисні результати з обмеження дисперсії деяких функціоналів резольвенти $\mathbf{Q}_N(z)$. Тим не менш для початку необхідно довести, що моменти величини $\|W_N\|$ кінцеві.

Лема 2.1. *Для усіх* $l \in \mathbb{N}$ *маємо* $\sup_{N\geq 1} \mathbb{E}\{\|W_N\|^{2l}\} < +\infty$.

Доведення. На початку зауважимо, що оскільки $(y_n)_{n\geq 1}$ незалежні однаково розподіленні Гауссові вектори, існують незалежні однаково розподіленні $(\mathcal{N}_c(0, I_M))$ вектори $(y_{iid,n})_{n\geq 1}$ такі, що $\mathbb{E}(y_{iid,n}y_{iid,n}^*) = I_M$ та задовольняють $y_n = R_N^{1/2} y_{iid,n}$. Звідси ми отримуємо, що блокова $2ML \times N$ матриця Ханкеля $W_{iid,N}$, яка побудована аналогічно до W_N, але з векторів $(y_{n,iid})_{n\geq 1}$, задовольняє

$$W_N = \begin{pmatrix} R_N^{1/2} & & \\ & \ddots & \\ & & R_N^{1/2} \end{pmatrix} W_{iid,N}. \tag{2.8}$$

Оскільки, згідно з Припущенням 2.1, норма R_N рівномірно обмежена при зростанні N, твердження леми еквівалентно до $\sup_N \mathbb{E}\{\|W_{iid}\|^{2l}\} < +\infty$. В праці [49] доведено, що емпіричний розподіл власних значень матриці $W_{iid,N}W_{iid,N}^*$ збігається до розподілу Марченко-Пастура та її мінімальне додатне та максимальне (що також дорівнює до $\|W_{iid,N}\|^2$) власні значення відповідно збігаються майже напевно до $(1 - \sqrt{c_*})^2$ та $(1 + \sqrt{c_*})^2$. Виразимо $\mathbb{E}\{\|W_{iid}\|^{2l}\}$ як

$$\mathbb{E}\{\|W_{iid}\|^{2l}\} = \mathbb{E}\{\|W_{iid}\|^{2l}\mathbf{1}_{\|W_{iid}\|^2 \leq (1+\sqrt{c_*})^2+\delta}\} + \mathbb{E}\{\|W_{iid}\|^{2l}\mathbf{1}_{\|W_{iid}\|^2 > (1+\sqrt{c_*})^2+\delta}\}$$
$$\leq \kappa + \mathbb{E}\{\|W_{iid}\|_F^{2l}\mathbf{1}_{\|W_{iid}\|^2 > (1+\sqrt{c_*})^2+\delta}\} \leq \kappa + \mathbb{E}\{\|W_{iid}\|_F^{4l}\}^{1/2}\mathbb{E}\{\mathbf{1}_{\|W_{iid}\|^2 > (1+\sqrt{c_*})^2+\delta}\}^{1/2},$$

де $\delta > 0$ – деяка хороша константа. Оскільки $\mathbb{E}\{\|W_{i.i.d.}\|_F^{4l}\} = \mathcal{O}(N^{2l})$, достатньо довести, що $\mathbb{E}\{\mathbf{1}_{\|W_{iid}\|^2 > (1+\sqrt{c_*})^2+\delta}\}$ менша за будь-яку степінь N^{-1}.

Розглянемо гладку функцію ϕ_0, визначену на $\mathbb{R}$ наступним чином

$$\phi_0(\lambda) = \begin{cases} 1, \text{ for } \lambda \in [-\infty,\, -\delta] \cup [(1+\sqrt{c_*})^2 + \delta,\, +\infty], \\ 0, \text{ for } \lambda \in [-\delta/2,\, (1+\sqrt{c_*})^2 + \delta/2] \end{cases}$$

та $\phi_0(\lambda) \in (0,\, 1)$ для інших λ. Тоді,

$$\mathbb{E}\{\mathbf{1}_{\|W_{iid}\|^2 > (1+\sqrt{c_*})^2+\delta}\} = \mathbb{E}\{\mathbf{1}_{\lambda_{max}(W_{iid}W_{iid}^*) > (1+\sqrt{c_*})^2+\delta}\} \leq \mathbf{P}[\mathrm{Tr}\phi_0(W_{iid}W_{iid}^*) \geq 1]$$
$$\leq \mathbb{E}\{\mathrm{Tr}\phi_0(W_{iid}W_{iid}^*)^{2k}\}$$

виконується для усіх $k \in \mathbb{N}$. Щоб завершити доведення нам знадобиться наступна лема.

Лема 2.2. *Для будь-якої гладкої функції ϕ, для якої $\phi(\lambda) = 0$ на $\lambda \in [-\delta/2,\, (1+\sqrt{c_*})^2 + \delta/2]$ та $\phi(\lambda)$ незмінна на інтервалі $[-\infty,\, -\delta] \cup [(1+\sqrt{c_*})^2 + \delta,\, +\infty]$, виконується $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}\left\{(\mathrm{Tr}\phi(W_{iid}W_{iid}^*))^{2k}\right\} \leq \dfrac{\kappa}{N^{2k}}$.*

Доведення. Ми будемо доводити цю Лему методом математичної індукції. Спершу розглянемо випадок $k = 1$. Для зручності ми будемо писати W замість W_{iid} упродовж доведення. Тут і далі сума береться по усім можливим значенням індексів, якщо не зауважено іншого. Застосовуючи нерівність Пуанкаре-Неша (1.8), маємо

$$\mathbf{Var}\{\mathrm{Tr}\phi(WW^*)\} \leq \sum \mathbb{E}\left\{\left(\frac{\partial \mathrm{Tr}\phi(WW^*)}{\partial \overline{W}^{m_1}_{i_1,j_1}}\right)^* \mathbb{E}\{W^{m_1}_{i_1,j_1}\overline{W}^{m_2}_{i_2,j_2}\} \frac{\partial \mathrm{Tr}\phi(WW^*)}{\partial \overline{W}^{m_2}_{i_2,j_2}}\right\}$$
$$+ \sum \mathbb{E}\left\{\frac{\partial \mathrm{Tr}\phi(WW^*)}{\partial W^{m_1}_{i_1,j_1}} \mathbb{E}\{W^{m_1}_{i_1,j_1}\overline{W}^{m_2}_{i_2,j_2}\} \left(\frac{\partial \mathrm{Tr}\phi(WW^*)}{\partial W^{m_2}_{i_2,j_2}}\right)^*\right\}. \tag{2.9}$$

Ми позначимо перший доданок правої частини (2.9) через ψ та будемо оцінювати лише його, оскільки другий оцінюється аналогічно. Для цього спершу зауважимо, що

$$\frac{\partial \mathrm{Tr}\phi(WW^*)}{\partial \overline{W}^{m_1}_{i_1,j_1}} = \mathrm{Tr}\left(\phi'(WW^*)\frac{\partial WW^*}{\partial \overline{W}^{m_1}_{i_1,j_1}}\right) = (\phi'(WW^*)W)^{m_1}_{i_1,j_1}.$$

Підставивши цей вираз у (2.9), ми маємо

$$\psi = \sum \frac{1}{N}\mathbb{E}\left\{(\phi'(WW^*)W)^{*m_1}_{j_1,i_1}\,\delta_{m_1,m_2}\delta_{i_1+j_1,i_2+j_2}\,(\phi'(WW^*)W)^{m_2}_{i_2,j_2}\right\}.$$

Позначимо $l = i_1 - i_2$, тоді нескладно перевірити, що ψ записується як

$$\psi = \frac{1}{N} \sum_{l=-(L-1)}^{L-1} \mathbb{E}\{\mathrm{Tr}\,(\phi'(WW^*)W)^* \,(J_L^l \otimes I_M)\,(\phi'(WW^*)W)\, J_N^l\}, \qquad (2.10)$$

де матриця J_L визначена у (2.7). Для будь-яких матриць A та B розмірністю $ML \times N$, нерівність Шварца та нерівність між середнім арифметичнім та геометричнім дає

$$\left|\frac{1}{N}\mathrm{Tr}A^*(J_L^{*u} \otimes I_M)BJ_N^{*u}\right| \leq \frac{1}{2N}\mathrm{Tr}A^*(J_L^{*u}J_L^u \otimes I_M)A + \frac{1}{2N}\mathrm{Tr}B^*J_N^{*u}J_N^uB.$$

Таким чином, оскільки $J_L^{*u}J_L^u \otimes I_M \leq I_{ML}$ та $J_N^{*u}J_N^u \leq I_N$

$$\left|\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}A^*(J_L^{*u} \otimes I_M)BJ_N^{*u}\right| \leq \frac{\kappa}{N}(\mathrm{Tr}A^*A + \mathrm{Tr}B^*B). \qquad (2.11)$$

Покладемо $A = B = \phi'(WW^*)W$, тоді беручи до уваги (2.9) та (2.10), ми отримаємо

$$\mathbf{Var}\{\mathrm{Tr}\phi(WW^*)\} \leq \frac{\kappa}{N}\mathbb{E}\left\{\mathrm{Tr}\,(\phi'(WW^*))^2\, WW^*\right\}. \qquad (2.12)$$

Тепер розглянемо функцію $\eta(\lambda) = (\phi'(\lambda))^2\lambda$. Зрозуміло, що $\eta(\lambda)$ є гладкою функцією з компактним носієм. Таким чином (див. наприклад [49]) ми маємо

$$\mathbb{E}\left\{\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}\left((\phi'(WW^*))^2WW^*\right)\right\} = \int_{\mathcal{S}_N} \eta(\lambda)d\mu_{MP,N}(\lambda) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right),$$

де $\mu_{MP,N}$ – міра, що відповідає розподілу Марченко-Пастура с параметрами $(1,\, c_N)$, та з відповідним носієм $\mathcal{S}_{MP,N} \subset [0, (1+\sqrt{c_N})^2]$. Зрозуміло, що для достатньо великих N носій функції ϕ' та $\mathcal{S}_{MP,N}$ не перетинаються, тому $\int_{\mathcal{S}_N} \eta(\lambda)d\mu_{MP,N}(\lambda) = 0$. З чого ми отримуємо, що

$$\mathbb{E}\left\{\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}\left((\phi'(WW^*))^2WW^*\right)\right\} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

Поєднуючи цю оцінку з (2.12), приходимо до висновку, що $\mathbf{Var}\{\mathrm{Tr}\phi(WW^*)\} = \mathcal{O}\left(N^{-2}\right)$. Нарешті, щоб закінчити з випадком $k = 1$, ми розписуємо $\mathbb{E}\{(\mathrm{Tr}\phi(WW^*))^2\}$ як $\mathbb{E}\{(\mathrm{Tr}\phi(WW^*))^2\} = \mathbf{Var}\{\mathrm{Tr}\phi(WW^*)\} + \mathbb{E}\{\mathrm{Tr}\phi(WW^*)\}^2$. Результат з [49, Lemma 10.1] дає $\mathbb{E}\{\mathrm{Tr}\phi(WW^*)\} = \mathcal{O}(N^{-1})$, що завершує доведення для $k = 1$.

Тепер ми вважаємо, що для усіх $n \le k$ маємо $\mathbb{E}\{(\mathrm{Tr}\phi(WW^*))^{2n}\} = \mathcal{O}(N^{-2n})$ та доведемо, що це виконується і для $n = k+1$. Аналогічно з попереднім випадком ми записуємо

$$\mathbb{E}\{(\mathrm{Tr}\phi(WW^*))^{2(k+1)}\} = \mathbf{Var}\{(\mathrm{Tr}\phi(WW^*))^{k+1}\} + \Big(\mathbb{E}\{(\mathrm{Tr}\phi(WW^*))^{k+1}\}\Big)^2. \tag{2.13}$$

Щоб оцінити другий доданок правої частини (2.13) ми використовуємо нерівність Шварца та припущення індукції

$$\mathbb{E}\{(\mathrm{Tr}\phi(WW^*))^{k+1}\} \le \Big(\mathbb{E}\{(\mathrm{Tr}\phi(WW^*))^{2k}\}\mathbb{E}\{(\mathrm{Tr}\phi(WW^*))^{2}\}\Big)^{1/2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^{k+1}}\right). \tag{2.14}$$

Для оцінки першого доданку правої частини (2.13) ми наслідуємо схему доведення для випадку $k = 1$. А саме, нерівність Гельдера дає

$$\mathbf{Var}\{(\mathrm{Tr}\phi(WW^*))^{k+1}\} \le \frac{\kappa}{N}\mathbb{E}\left\{(\mathrm{Tr}\phi(WW^*))^{2k+2}\right\}^{\frac{k}{k+1}} \times \\ \mathbb{E}\left\{\left(\mathrm{Tr}(\phi'(WW^*)^2WW^*)\right)^{k+1}\right\}^{\frac{1}{k+1}}. \tag{2.15}$$

Легко помітити, що функція $\eta(\lambda) = \phi'(\lambda)^2\lambda$ задовольняє умовам індукції, тому згідно з (2.14) також маємо $\mathbb{E}\left\{(\mathrm{Tr}(\phi'(WW^*)^2WW^*))^{k+1}\right\} = \mathcal{O}(N^{k+1})$. Це у поєднані з (2.15) дає

$$\mathbf{Var}\{(\mathrm{Tr}\phi(WW^*))^{k+1}\} \le \frac{\kappa}{N^2}\mathbb{E}\left\{(\mathrm{Tr}\phi(WW^*))^{2k+2}\right\}^{\frac{k}{k+1}}.$$

Беручи до уваги також (2.14) та (2.13), ми одразу отримуємо

$$\mathbb{E}\{(\mathrm{Tr}\phi(WW^*))^{2k+2}\} \le \frac{\kappa_1}{N^2}\mathbb{E}\{(\mathrm{Tr}\phi(WW^*))^{2k+2}\}^{\frac{k}{k+1}} + \frac{\kappa_2}{N^{2k+2}}. \tag{2.16}$$

Нарешті, покладемо $z_{k,N} = N^{2k+2}\,\mathbb{E}\{(\mathrm{Tr}\phi(WW^*))^{2k+2}\}$. Тоді останній вираз (2.16) можна переписати як

$$z_{k,N} \le \kappa_1\,(z_{k,N})^{k/(k+1)} + \kappa_2.$$

З цієї нерівності випливає, що послідовність $(z_{k,N})_{N\ge 1}$ обмежена, або еквівалентно, що $\mathbb{E}\{(\mathrm{Tr}\phi(WW^*))^{2k+2}\} \le \frac{\kappa}{N^{2k+2}}$, що і треба було довести. $\square$

Легко побачити, що це також завершує доведення Леми 2.1. $\blacksquare$

У наступній лемі ми доведемо оцінки дисперсії деяких корисних виразів резольвенти $\mathbf{Q}_N(z)$.

Лема 2.3. *Нехай $(F_N)_{N\geq 1}$, $(G_N)_{N\geq 1}$ – послідовності невипадкових матриць розмірності $2ML\times 2ML$ та $(H_N)_{N\geq 1}$ – послідовність невипадкових матриць розмірності $N\times N$ такі, що $\max\{\sup_N\|F_N\|,\sup_N\|G_N\|,\sup_N\|H_N\|\}\leq\kappa$, також розглянемо $2ML$–вимірні вектори $(a_{1,N})_{N\geq 1}$, $(a_{2,N})_{N\geq 1}$, для яких $sup_N\|a_{i,N}\|\leq\kappa$ для $i=1,2$. Тоді, для усіх $z\in\mathbb{C}^+$ виконуються нерівності*

$$\mathbf{Var}\left\{\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}F\mathbf{Q}\right\}\leq\frac{C(z)\kappa^2}{N^2}, \tag{2.17}$$

$$\mathbf{Var}\left\{\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}F\mathbf{Q}GWHW^*\right\}\leq\frac{C(z)\kappa^6}{N^2}., \tag{2.18}$$

$$\mathbf{Var}\left\{a_1^*\mathbf{Q}a_2\right\}\leq\frac{C(z)\kappa^4}{N}, \tag{2.19}$$

де $C(z)$ може бути записано як $C(z)=P_1(|z|)P_2\left(\frac{1}{\mathrm{Im}z}\right)$ для деяких хороших поліномів P_1 та P_2.

Доведення. На початку доведемо (2.17), для цього покладемо $\xi=\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}F\mathbf{Q}$. Нерівність Пуанкаре-Неша дає

$$\mathbf{Var}\{\xi\}\leq\sum_{\substack{i_1,j_1,m_1\\ i_2,j_2,m_2}}\mathbb{E}\left\{\left(\frac{\partial\xi}{\partial\overline{W}^{m_1}_{i_1,j_1}}\right)^*\mathbb{E}\{W^{m_1}_{i_1,j_1}\overline{W}^{m_2}_{i_2,j_2}\}\frac{\partial\xi}{\partial\overline{W}^{m_2}_{i_2,j_2}}\right\}$$
$$+\sum_{\substack{i_1,j_1,m_1\\ i_2,j_2,m_2}}\mathbb{E}\left\{\frac{\partial\xi}{\partial W^{m_1}_{i_1,j_1}}\mathbb{E}\{W^{m_1}_{i_1,j_1}\overline{W}^{m_2}_{i_2,j_2}\}\left(\frac{\partial\xi}{\partial W^{m_2}_{i_2,j_2}}\right)^*\right\}.$$

Як і у попередньому доведені, ми позначимо перший доданок правої частини нерівності через ϕ, та будемо оцінювати лише його. Для цього необхідно виразити часткову похідну $\mathbf{Q}$ по комплексно спряженим елементам W. Покладемо $\Pi_{pf}=\left(\begin{smallmatrix}0&I_{ML}\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ and $\Pi_{fp}=\left(\begin{smallmatrix}0&0\\I_{ML}&0\end{smallmatrix}\right)$ (розмірністю $2ML\times 2ML$). Після нескладних обчислень ми отримаємо

$$\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial\overline{W}^m_{i,j}}=-\mathbf{Q}\left(\begin{smallmatrix}w_{j,f}\\0\end{smallmatrix}\right)(\mathbf{f}^m_{i+L})^T\mathbf{Q}\,\mathbf{1}_{i\leq L}-\mathbf{Q}\left(\begin{smallmatrix}0\\w_{j,p}\end{smallmatrix}\right)(\mathbf{f}^m_{i-L})^T\mathbf{Q}\,\mathbf{1}_{i>L}$$
$$=-\mathbf{Q}\Pi_{pf}W\mathbf{e}_j\,(\mathbf{f}^m_i)^T\Pi_{pf}\mathbf{Q}-\mathbf{Q}\Pi_{fp}W\mathbf{e}_j\,(\mathbf{f}^m_i)^T\Pi_{fp}\mathbf{Q}. \tag{2.20}$$

З чого миттєво випливає

$$\frac{\partial\xi}{\partial\overline{W}^{m_1}_{i_1,j_1}}=-\frac{1}{ML}\left(\Pi_{pf}\mathbf{Q}F\mathbf{Q}\Pi_{pf}W+\Pi_{fp}\mathbf{Q}F\mathbf{Q}\Pi_{fp}W\right)^{m_1}_{i_1,j_1}.$$

Нагадаємо, що $\mathbb{E}\{W^{m_1}_{i_1,j_1}\overline{W}^{m_2}_{i_2,j_2}\} = \frac{1}{N}R_{m_1m_2}\delta_{i_1+j_1,i_2+j_2}$, тоді ϕ має вигляд

$$\phi = \frac{1}{N(ML)^2}\sum_{\substack{i_1,j_1,m_1\\ i_2,j_2,m_2}}(\mathbf{e}_{j_1})^T(\Pi_{pf}\mathbf{Q}F\mathbf{Q}\Pi_{pf}W + \Pi_{fp}\mathbf{Q}F\mathbf{Q}\Pi_{fp}W)^*\mathbf{f}^{m_1}_{i_1}R_{m_1m_2}$$
$$\times\,\delta_{i_1+j_1,i_2+j_2}(\mathbf{f}^{m_2}_{i_2})^T(\Pi_{pf}\mathbf{Q}F\mathbf{Q}\Pi_{pf}W + \Pi_{fp}\mathbf{Q}F\mathbf{Q}\Pi_{fp}W)\mathbf{e}_{j_2}.$$

Покладемо $u = i_1 - i_2$ та зауважимо, що $\sum_{m_1,m_2,i_1-i_2=u}\mathbf{f}^{m_1}_{i_1}R_{m_1m_2}(\mathbf{f}^{m_2}_{i_2})^T = J^{*u}_L\otimes R$ та $\sum_{j_2-j_1=u}\mathbf{e}_{j_2}\mathbf{e}^T_{j_1} = J^{*u}_N$. Тому ϕ може бути записано як

$$\phi = \frac{1}{MLN}\mathbb{E}\Big\{\sum_{u=-(L-1)}^{L-1}\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}(\Pi_{pf}\mathbf{Q}F\mathbf{Q}\Pi_{pf}W + \Pi_{fp}\mathbf{Q}F\mathbf{Q}\Pi_{fp}W)^*(J^{*u}_L\otimes R)$$
$$\times\,(\Pi_{pf}\mathbf{Q}F\mathbf{Q}\Pi_{pf}W + \Pi_{fp}\mathbf{Q}F\mathbf{Q}\Pi_{fp}W)J^{*u}_N\Big\}. \qquad (2.21)$$

Кожний доданок цієї суми по індексу u насправді має вигляд $\dfrac{1}{ML}\mathrm{Tr}A^*(I_L\otimes R^{1/2})(J^{*u}_L\otimes I)(I_L\otimes R^{1/2})AJ^{*u}_N$, для відповідної $ML\times N$ матриці A. Оскільки $\|R\|$ обмежена хорошою константою b (див. Припущення 2.1), з (2.11) та (2.21) випливає, що достатньо оцінити $\frac{1}{ML}\mathbb{E}\{\mathrm{Tr}A^*A\}$. Використовуючи нерівність Шварца, ми негайно отримуємо, що

$$\mathbb{E}\{\mathrm{Tr}A^*A\} \le 2\mathbb{E}\{\mathrm{Tr}\left((\Pi_{pf}\mathbf{Q}F\mathbf{Q}\Pi_{pf}W)^*\Pi_{pf}\mathbf{Q}F\mathbf{Q}\Pi_{pf}W\right)\}$$
$$+\,2\mathbb{E}\{\mathrm{Tr}\left((\Pi_{fp}\mathbf{Q}F\mathbf{Q}\Pi_{fp}W)^*\Pi_{fp}\mathbf{Q}F\mathbf{Q}\Pi_{fp}W\right)\}. \qquad (2.22)$$

Оскільки $(\Pi_{pf}\mathbf{Q}F\mathbf{Q}\Pi_{pf})^*\,\Pi_{pf}\mathbf{Q}F\mathbf{Q}\Pi_{pf} \le \|\mathbf{Q}\|^4\|F\|^2\,I$ та $\|\mathbf{Q}\| \le \frac{1}{\mathrm{Im}z}$, маємо

$$\frac{1}{ML}\mathbb{E}\{\mathrm{Tr}\left((\Pi_{pf}\mathbf{Q}F\mathbf{Q}\Pi_{pf}W)^*\Pi_{pf}\mathbf{Q}F\mathbf{Q}\Pi_{pf}W\right)\}$$
$$\le \frac{1}{(\mathrm{Im}z)^4}\,\|F\|^2\,\frac{1}{ML}\mathbb{E}\{\mathrm{Tr}W^*W\} \le \frac{1}{(\mathrm{Im}z)^4}\,\|F\|^2\,\mathbb{E}(\|W\|^2).$$

Таким чином Лема 2.1 тягне за собою

$$\frac{1}{ML}\mathbb{E}\{\mathrm{Tr}\left((\Pi_{pf}\mathbf{Q}F\mathbf{Q}\Pi_{pf}W)^*\Pi_{pf}\mathbf{Q}F\mathbf{Q}\Pi_{pf}W\right)\} \le \kappa^2 P\left(\frac{1}{\mathrm{Im}z}\right),$$

для деякого хорошого поліному P. Доданок
$\frac{1}{ML}\mathbb{E}\{\mathrm{Tr}\left(\Pi_{fp}\mathbf{Q}F\mathbf{Q}\Pi_{fp}W^*\Pi_{fp}\mathbf{Q}F\mathbf{Q}\Pi_{fp}W\right)\}$ ми можемо оцінити аналогічно. Отже, (2.21) дає $\phi \le \kappa^2\,\frac{1}{N^2}P\left(\frac{1}{\mathrm{Im}z}\right)$. Що доводить (2.17).

Для того, щоб довести (2.18) необхідно також використовувати нерівність Пуанкаре-Неша, але цього разу для функції $\xi = \frac{1}{ML}\mathrm{Tr}F\mathbf{Q}GWHW^*$. Після нескладних обчислень ми отримуємо, що дисперсія ξ обмежена зверху наступним виразом

$$\frac{\kappa_1}{N^2}\Big(\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}(F\mathbf{Q}GWH)^*(F\mathbf{Q}GWH)+ \\ \frac{1}{ML}\mathrm{Tr}(F\mathbf{Q}WH)^*(F\mathbf{Q}WH)+\eta_1+\eta_2\Big), \quad (2.23)$$

де κ_1 деяка хороша константа та η_1, η_2 визначаються як

$$\eta_1 = \frac{1}{ML}\mathrm{Tr}(\Pi_{pf}\mathbf{Q}GWHW^*F\mathbf{Q}\Pi_{pf}W)^*(\Pi_{pf}\mathbf{Q}GWHW^*F\mathbf{Q}\Pi_{pf}W) \quad (2.24)$$
$$\eta_2 = \frac{1}{ML}\mathrm{Tr}(\Pi_{fp}\mathbf{Q}GWHW^*F\mathbf{Q}\Pi_{fp}W)^*(\Pi_{fp}\mathbf{Q}GWHW^*F\mathbf{Q}\Pi_{fp}W).$$

Використовуючи Лему 2.1 та факт, що $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^* \le \frac{1}{\mathrm{Im}^2 z}I$, ми негайно отримуємо (2.18).

Неважко помітити, що (2.19) є наслідком (2.17), оскільки $a_1^*\mathbf{Q}a_2 = \mathrm{Tr}\mathbf{Q}a_2a_1^* = \mathrm{Tr}\mathbf{Q}F$ для $F = a_2a_1^*$. Таким чином, Лема 2.3 доведена. ■

Наступний результат є наслідком Леми 2.3 та особливості будови матриці $\mathbf{Q}(z)$ (див. (2.5)).

Наслідок 2.1. *Нехай $(F_{1,N})_{N\ge1}$– послідовність невипадкових матриць розмірністю $ML\times ML$, для яких $\sup_N\|F_{1,N}\|\le\kappa$, та $(H_N)_{N\ge1}$– послідовність матриць розмірністю $N\times N$, що задовольняють $\sup_N\|H_N\|\le 1$. Тоді, якщо $\mathrm{Im}z^2>0$, виконуються наступні нерівності*

$$\mathbf{Var}\left\{\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}F_1\mathbf{Q}_{ij}(z)\right\}\le\kappa^2\frac{1}{N^2}P_1(|z^2|)P_2\left(\frac{1}{\mathrm{Im}z^2}\right), \quad (2.25)$$

де i та j належать до $\{p,f\}$;

$$\mathbf{Var}\left\{\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}\left[HW^*\Pi_{i_1j_1}\begin{pmatrix}F_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\mathbf{Q}(z)\Pi_{i_2j_2}W\right]\right\}\le\kappa^2\frac{1}{N^2}P_1(|z^2|)P_2\left(\frac{1}{\mathrm{Im}z^2}\right) \quad (2.26)$$

де i_1, j_1, i_2, j_2 також належать до $\{p,f\}$, але $i_1\ne j_1$ та $i_2\ne j_2$.

Доведення. Спершу доведемо (2.25) у випадку, коли $i=j=p$. Позначимо $2ML\times 2ML$ матрицю $F=\begin{pmatrix}F_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ та зауважимо, що $\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}F_1\mathbf{Q}_{pp}(z)$

співпадає з $\xi = \frac{1}{ML}\mathrm{Tr}F\mathbf{Q}(z)$. Повторюючи доведення нерівності (2.17), ми можемо оцінити праву частину (2.22) більш точно, беручи до уваги особливу побудову F. Легко перевірити, що

$$\frac{1}{ML}\mathbb{E}\{\mathrm{Tr}\,(\Pi_{pf}\mathbf{Q}F\mathbf{Q}\Pi_{pf}W)^*\Pi_{pf}\mathbf{Q}F\mathbf{Q}\Pi_{pf}W)\}$$
$$= \frac{1}{ML}\mathbb{E}\{\mathrm{Tr}\left(W_f^*\mathbf{Q}_{pp}^*F_1^*\mathbf{Q}_{fp}^*\mathbf{Q}_{fp}F_1\mathbf{Q}_{pp}W_f\right)\}.$$

Оскільки $\mathbf{Q}_{fp}(z) = W_pW_f^*Q(z^2)$, ми отримуємо, що

$$\mathbf{Q}_{fp}^*(z)\mathbf{Q}_{fp}(z) = (Q(z^2))^*W_fW_p^*W_pW_f^*Q(z^2) \le \|W\|^4\frac{1}{(\mathrm{Im}z^2)^2}\,I$$

для $\mathrm{Im}(z^2) > 0$. Таким чином, справедлива оцінка

$$F_1^*\mathbf{Q}_{fp}^*\mathbf{Q}_{fp}F_1 \le \kappa^2\|W\|^4\frac{1}{(\mathrm{Im}z^2)^2}\,I,$$

звідки випливає, з нерівністю $\|\mathbf{Q}_{pp}\| = \|zQ(z^2)\| \le |z|(\mathrm{Im}z^2)^{-1}$, що

$$\|W_f^*\mathbf{Q}_{pp}^*F_1^*\mathbf{Q}_{fp}^*\mathbf{Q}_{fp}F_1\mathbf{Q}_{pp}W_f\| \le \kappa^2\|W\|^6\frac{|z|^2}{(\mathrm{Im}z^2)^4}$$

Також з Леми 2.1 негайно маємо

$$\frac{1}{ML}\mathbb{E}\{\mathrm{Tr}\left(W_f^*\mathbf{Q}_{pp}^*F_1^*\mathbf{Q}_{fp}^*\mathbf{Q}_{fp}F_1\mathbf{Q}_{pp}W_f\right)\} \le \kappa^2\frac{\kappa_1|z|^2}{(\mathrm{Im}z^2)^4}.$$

де κ_1 хороша константа така, що $\mathbb{E}\{\|W_N\|^6\} \le \kappa_1$ для усіх достатньо великих N. Аналогічно ми отримуємо, що

$$\frac{1}{ML}\mathbb{E}\{\mathrm{Tr}\,(\Pi_{fp}\mathbf{Q}F\mathbf{Q}\Pi_{fp}W)^*\Pi_{fp}\mathbf{Q}F\mathbf{Q}\Pi_{fp}W)\} \le \kappa^2\frac{\kappa_1|z^2|^2}{(\mathrm{Im}z^2)^4}.$$

Це у свою чергу доводить (2.25) для $i = j = p$. Для усіх інших випадків доведення аналогічні, тому ми їх опустимо.

Щоб довести другу частину, а саме (2.26), ми наслідуємо міркування (2.18) для $F = \Pi_{i1j_1}\begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \Pi_{i_2j_2}$. Необхідно перевірити, що усі 4 доданки, які з'являються у (2.23) можуть бути оцінені виразами виду $\kappa^2P_1(|z^2|)P_2(\frac{1}{\mathrm{Im}z^2})$ для деяких хороших поліномів P_1 та P_2. Знову, відповідні обчислення дуже схожі з попередніми, тому ми не будемо їх тут приводити. ■

2.2 Деякі результати стосовно перетворень Стілтьєса

У цьому підрозділі ми доведемо деякі корисні результати стосовно перетворення Стілтьєса особливого вигляду. Нагадаємо, що для будь-якої борелівської множини A на $\mathbb{R}$, під $\mathcal{S}_M(A)$ ми розуміємо множину перетворень Стілтьєса усіх $M \times M$ матрично-значних, невід'ємних та обмежених мір, визначених на A. Множина $\mathcal{S}_1(A)$ записується просто, як $\mathcal{S}(A)$.

Лема 2.4. *Нехай $\beta(z) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$, розглянемо функцію $\boldsymbol{\beta}(z) = z\beta(z^2)$. Тоді $\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Більш того, для будь-якої додатно визначеної матриці R розмірністю $M \times M$ виконуються наступні твердження*

$$\mathbf{G}(z) = \left(-zI_M - \frac{c\boldsymbol{\beta}(z)}{1 - c^2\boldsymbol{\beta}^2(z)}R\right)^{-1} \in \mathcal{S}_M(\mathbb{R}), \tag{2.27}$$

$$G(z) = \left(-zI_M - \frac{cz\beta(z)}{1 - zc^2\beta^2(z)}R\right)^{-1} \in \mathcal{S}_M(\mathbb{R}^+) \tag{2.28}$$

та

$$\mathbf{G}(z)\left(\mathbf{G}(z)\right)^* \le \frac{I_M}{(\mathrm{Im} z)^2},\ G(z)\left(G(z)\right)^* \le \frac{I_M}{(\mathrm{Im} z)^2}. \tag{2.29}$$

Нарешті, матриці $\mathbf{G}(z)$ та $G(z)$ зв'язанні відношенням

$$\mathbf{G}(z) = zG(z^2) \tag{2.30}$$

для усіх $z \in \mathbb{C}^+$.

Доведення. Нехай τ – міра, що відповідає перетворенню Стілтьєса $\beta(z)$. Ми почнемо з доведення, що функція $\boldsymbol{\beta}(z)$ також є перетворенням Стілтьєса. Спершу зауважимо, що якщо $z \in \mathbb{C}^+$, тоді $z^2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$. Оскільки функція β аналітична на $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$, з цього випливає, що $\boldsymbol{\beta}(z)$ аналітична на $\mathbb{C}^+$. Більш того, легко отримати, що

$$\mathrm{Im}\boldsymbol{\beta}(z) = \mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}^+} \frac{z\,d\tau(\lambda)}{\lambda - z^2} = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\mathrm{Im} z(\lambda + |z|^2)d\tau(\lambda)}{|\lambda - z^2|^2} > 0, \text{ коли } \mathrm{Im} z > 0.$$

Для того, щоб оцінити $\boldsymbol{\beta}(z)$ для $z \in \mathbb{C}^+$, запишемо

$$|\boldsymbol{\beta}(z)| = \left|\int_{\mathbb{R}^+} \frac{z\,d\tau(\lambda)}{\lambda - z^2}\right| \le \int_{\mathbb{R}^+} \frac{d\tau(\lambda)}{\left|\frac{\lambda}{z} - z\right|}.$$

Використовуючи факт, що $\left|\frac{\lambda}{z}-z\right| \geq \left|\mathrm{Im}(\frac{\lambda}{z}-z)\right| \geq \mathrm{Im}z$ для $z \in \mathbb{C}^+$ та $\lambda \geq 0$, маємо

$$|\boldsymbol{\beta}(z)| \leq \int_{\mathbb{R}^+} \frac{d\,\tau(\lambda)}{\mathrm{Im}z} = \frac{\tau(\mathbb{R}^+)}{\mathrm{Im}z},$$

що у поєднанні з Пропозицією 1.1 дає, що $\boldsymbol{\beta}(z) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Щоб довести (2.27), спершу необхідно показати, що $\mathbf{G}$ аналітична на $\mathbb{C}^+$. Для цього треба спочатку перевірити, що $m(z) = 1 - c^2\boldsymbol{\beta}^2(z) \neq 0$ для $z \in \mathbb{C}^+$. Дійсно, покладемо $\boldsymbol{\beta}(z) = x + iy$, де $y > 0$, тоді $m(z) = 1 - c^2\, x^2 + c^2\, y^2 - 2cxyi$. Якщо $x = 0$, маємо $m(z) = 1 + c^2y^2 > 0$, та для $x \neq 0$ уявна частина $\mathrm{Im}m(z) = 2xy \neq 0$. Далі необхідно перевірити, що матриця $\left(-zI_M - \dfrac{c\boldsymbol{\beta}(z)}{1-c^2\boldsymbol{\beta}^2(z)}R\right)$ невироджена на $\mathbb{C}^+$. Для цього ми доведемо, що

$$\mathrm{Im}\left(-zI_M - \frac{c\boldsymbol{\beta}(z)}{1-c^2\boldsymbol{\beta}^2(z)}R\right) < 0 \tag{2.31}$$

на $\mathbb{C}^+$. Легко перевірити, що

$$\mathrm{Im}\left(-zI_M - \frac{c\boldsymbol{\beta}(z)}{1-c^2\boldsymbol{\beta}^2(z)}R\right) = -\mathrm{Im}z\, I_M - \frac{c\mathrm{Im}\boldsymbol{\beta}(z)(1+c^2|\boldsymbol{\beta}(z)|^2)}{|1-c^2\boldsymbol{\beta}^2(z)|^2}\, R < -\mathrm{Im}z\, I_M.$$

Тому, з нерівностей $\mathrm{Im}z > 0$ та $\mathrm{Im}\boldsymbol{\beta}(z) > 0$ випливає (2.31). Уявна частина матриці $\mathbf{G}(z)$ дорівнює

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(\mathbf{G}(z)) = -\mathbf{G}(z)\mathrm{Im}\left(-zI_M - \frac{c\boldsymbol{\beta}(z)}{1-c^2\boldsymbol{\beta}^2(z)}R\right)(\mathbf{G}(z))^*& \\ > \mathrm{Im}z\,\left(\mathbf{G}(z)\,(\mathbf{G}(z))^*\right) > 0.&\end{aligned} \tag{2.32}$$

Таким чином, $\mathrm{Im}\mathbf{G}(z) > 0$ для $z \in \mathbb{C}^+$. Нарешті зауважимо, що $\lim_{y\to+\infty} -iy\mathbf{G}(iy) = I_M$, з чого випливає, що $\sup_{y>\epsilon} \|iy\mathbf{G}(iy)\| < +\infty$ для усіх $\epsilon > 0$. Тепер з Пропозиції 1.1 негайно маємо $\mathbf{G} \in \mathcal{S}_M(\mathbb{R})$. Більш того, якщо $\boldsymbol{\tau}^{\mathbf{G}}$ – відповідна $M \times M$ невід'ємна матрично-значна міра, (1.3) тягне за собою, що $\boldsymbol{\tau}^{\mathbf{G}}(\mathbb{R}) = I_M$.

Схожим чином ми доведемо аналітичність $G(z)$ на $\mathbb{C}^+$. На початку перевіримо, що $1 - zc^2\beta^2(z) \neq 0$ для $z \in \mathbb{C}^+$, або, що еквівалентно, $|1 - zc^2\beta^2(z)| \neq 0$ для $z \in \mathbb{C}^+$. Зауважимо, що

$$|1 - zc^2\beta^2(z)| = |z\beta(z)||c^2\beta(z) - \frac{1}{z\beta(z)}| > \mathrm{Im}z\,\mathrm{Im}\beta(z)\,\mathrm{Im}\left(c^2\beta(z) - \frac{1}{z\beta(z)}\right). \tag{2.33}$$

Оскільки $\beta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$, легко побачити, що $\mathrm{Im}\left(c^2\beta(z) - \frac{1}{z\beta(z)}\right) > 0$ для $z \in \mathbb{C}^+$. Таким чином маємо $1 - zc^2\beta^2(z) \neq 0$ для $z \in \mathbb{C}^+$.

Наступним кроком, як і раніше, перевіримо невиродженість відповідної матриці

$$\mathrm{Im}\left(-zI_M - \frac{cz\beta(z)}{1 - z(c\beta(z))^2}R\right) = -\mathrm{Im}z\, I_M - \mathrm{Im}\left(\frac{cz\beta(z)}{1 - z(c\beta(z))^2}\right) R < -\mathrm{Im}z\, I_M. \tag{2.34}$$

Дійсно, це випливає з факту, що

$$\mathrm{Im}\left(\frac{cz\beta(z)}{1 - z(c\beta(z))^2}\right) = \frac{c}{|1 - z(c\beta(z))^2|^2}\left(\mathrm{Im}(z\beta(z)) + |zc\beta(z)|^2\mathrm{Im}\beta(z)\right) > 0$$

для $z \in \mathbb{C}^+$. Отже, матриця $\left(-zI_M - \dfrac{cz\beta(z)}{1 - z(c\beta(z))^2}R\right)$ невироджена для $z \in \mathbb{C}^+$, та G аналітична на $\mathbb{C}^+$. Більш того, ми негайно отримуємо

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(G(z)) &= G(z)\left(\mathrm{Im}z\, I_M + \mathrm{Im}\left(\frac{cz\beta(z)}{1 - z(c\beta(z))^2}\right) R\right)(G(z))^* \\ &> \mathrm{Im}z\ (G(z)G(z)^*) > 0 \\ \mathrm{Im}(zG(z)) &= G(z)\mathrm{Im}\left(\frac{cz\beta(z)}{1 - z(c\beta(z))^2}\right) R(G(z))^* > 0\end{aligned} \tag{2.35}$$

для $z \in \mathbb{C}^+$. Як і у попередньому міркуванні, $\lim_{y\to+\infty} -iyG(iy) = I_M$ та $\sup_{y>\epsilon}\|iyG(iy)\| < +\infty$ для усіх $\epsilon > 0$. З цього випливає $G \in \mathcal{S}_M(\mathbb{R}^+)$ та якщо τ^G– відповідна $M \times M$ матрично-значна міра, тоді $\tau^G(\mathbb{R}^+) = I_M$.

Для доведення останньої частини Леми, а саме нерівностей (2.29), ми наслідуємо доведення [31, Lemma 3.1]. Більш детально, маємо

$$\mathrm{Im}G(z) = \mathrm{Im}z \int_{\mathbb{R}^+} \frac{d\tau^G(\lambda)}{|\lambda - z|^2} < \frac{\tau^G(\mathbb{R}^+)}{\mathrm{Im}z} = \frac{I}{\mathrm{Im}z}.$$

Таким чином, з (2.35) випливає, що $(G(z)G(z)^*) \leq \frac{I}{(\mathrm{Im}z)^2}$. Друге твердження (2.29) доводиться аналогічно, що завершує доведення леми. ■

Лема 2.5. *Розглянемо послідовність $(\beta_N)_{N\geq 1}$ елементів множини $\mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$ з відповідними невід'ємними мірами $(\tau_N)_{N\geq 1}$. Якщо для усіх $N \geq 1$ виконується*

$$\tau_N(\mathbb{R}^+) = \frac{1}{M}\mathrm{Tr}R_N, \tag{2.36}$$

де, нагадаємо, $R_N = \mathbb{E}\{y_n y_n^*\}$ *– матриця коваріацій векторів* y_n*, так само, як*

$$\int_{\mathbb{R}^+} \lambda \, d\,\tau_N(\lambda) = c_N \, \frac{1}{M}\mathrm{Tr}R_N \, \frac{1}{M}\mathrm{Tr}R_N^2, \tag{2.37}$$

тоді існують хороші константи ω, κ *для яких*

$$\mathrm{Im}\beta_N(z) \geq \frac{\kappa \, \mathrm{Im}z}{(\omega^2 + |z|^2)} \tag{2.38}$$

та

$$\left|1 - z\,(c_N \beta_N(z))^2\right| \geq \frac{\kappa\,(\mathrm{Im}z)^3}{(\omega^2 + |z|^2)^2} \tag{2.39}$$

для усіх $z \in \mathbb{C}^+$ *та* $N \geq 1$*. Більш того, для функції* $\boldsymbol{\beta}_N(z)$*, яка визначається, як* $\boldsymbol{\beta}_N(z) = z\,\beta_N(z^2)$*, виконується*

$$\mathrm{Im}\boldsymbol{\beta}_N(z) \geq \frac{\kappa\ (\mathrm{Im}z)^3}{(\omega^2 + |z|^4)} \tag{2.40}$$

та

$$\left|1 - (c_N \boldsymbol{\beta}_N(z))^2\right| \geq \frac{\kappa\,(\mathrm{Im}z)^6}{(\omega^2 + |z|^4)^2} \tag{2.41}$$

для усіх $z \in \mathbb{C}^+$ *та* $N \geq 1$*.*

Доведення. Почнемо з доведення (2.38). Уявна частина $\beta_N(z)$ задається як

$$\mathrm{Im}\beta_N(z) = \mathrm{Im}z \int_{\mathbb{R}^+} \frac{d\,\tau_N(\lambda)}{|\lambda - z|^2}.$$

Для будь-якої $\omega > 0$, маємо

$$\int_{\mathbb{R}^+} \frac{d\,\tau_N(\lambda)}{|\lambda - z|^2} \geq \int_0^\omega \frac{d\,\tau_N(\lambda)}{|\lambda - z|^2} \geq \frac{\tau_N([0,\omega])}{2(\lambda^2 + |z|^2)}.$$

З Припущення 2.1 та (2.37) випливає, що послідовність $(\tau_N)_{N\geq 1}$ щільна. Це означає, що для усіх $\epsilon > 0$ існує $\omega > 0$ таке, що $\tau_N(]\omega, +\infty[) < \epsilon$ для усіх N або, що еквівалентно, $\tau_N([0,\omega]) > \tau_N(\mathbb{R}^+) - \epsilon$. Оскільки $\tau_N(\mathbb{R}^+) = \frac{1}{M}\mathrm{Tr}(R_N) > a$, оберемо $\epsilon = a/2$ та отримаємо, що ω задовольняє $\tau_N([0,\omega]) > a/2$ для усіх N. Це завершує доведення (2.38).

Тепер перевіримо (2.39). Для цього ми будемо використовувати (2.33). Оскільки $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z\beta_N(z)}\right) < 0$, ми маємо $\mathrm{Im}\left(c_N^2 \beta_N(z) - \frac{1}{z\beta_N(z)}\right) \geq c_N^2 \mathrm{Im}\beta_N(z)$. Таким чином ми отримуємо

$$\left|1 - z\,(c_N \beta_N(z))^2\right| \geq c_N^2\,\mathrm{Im}z\ (\mathrm{Im}\beta_N(z))^2, \tag{2.42}$$

оскільки $c_N \to c_*$, починаючи з деякого N_0 коефіцієнт c_N можна обмежити деякою хорошою константою, з чого випливає (2.39).

Нарешті, щоб довести (2.40) та (2.41) ми запишемо $\boldsymbol{\beta}_N(z)$ як

$$\boldsymbol{\beta}_N(z) = z\beta_N(z^2) = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{z}{\lambda - z^2} d\,\tau_N(\lambda)$$

що негайно дає

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\boldsymbol{\beta}_N(z) = \mathrm{Im}z \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\lambda + |z|^2}{|\lambda - z^2|^2} d\,\tau_N(\lambda) &\geq \mathrm{Im}z\,|z|^2 \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{|\lambda - z^2|^2} d\,\tau_N(\lambda) \\ &\geq (\mathrm{Im}z)^3 \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{|\lambda - z^2|^2} d\,\tau_N(\lambda).\end{aligned}$$

Зауважимо, що для $\omega > 0$ маємо

$$\int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{|\lambda - z^2|^2} d\,\tau_N(\lambda) \geq \int_0^\omega \frac{1}{|\lambda - z^2|^2} d\,\tau_N(\lambda) \geq \frac{1}{2(\omega^2 + |z|^4)}\,\tau_N([0,\omega]).$$

Вище ми обґрунтували, що можливо вибрати ω таким чином, що $\tau_N([0,\omega]) \geq \frac{a}{2}$ для усіх N. З чого випливає (2.40).

Для доведення останньої частини запишемо $|1 - c_N^2\boldsymbol{\beta}_N^2| = |\boldsymbol{\beta}_N||\frac{1}{\boldsymbol{\beta}_N} - c_N^2\boldsymbol{\beta}_N|$. Оскільки $\mathrm{Im}\boldsymbol{\beta}_N > 0$ на $\mathbb{C}^+$, маємо

$$\left|\frac{1}{\boldsymbol{\beta}_N} - c_N^2\boldsymbol{\beta}_N\right| \geq \left|\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\boldsymbol{\beta}_N} - c_N^2\boldsymbol{\beta}_N\right)\right| \geq c_N^2\mathrm{Im}\boldsymbol{\beta}_N.$$

Використовуючи очевидний факт, що $|\boldsymbol{\beta}_N| \geq \mathrm{Im}\boldsymbol{\beta}_N$, ми безпосередньо отримуємо, що

$$|1 - c_N^2\boldsymbol{\beta}_N^2| \geq c_N^2\,\left(\mathrm{Im}\boldsymbol{\beta}_N\right)^2,$$

з чого, у свою чергу випливає (2.41). ■

2.3 Отримання виразу для матриці $\mathbb{E}\{\mathbf{Q}\}$ з використанням формули інтегрування частинами

Цей підрозділ присвячено отриманню рівняння для $\mathbb{E}\{\mathbf{Q}\}$ з використанням формули інтегрування частинами (див. Пропозицію 1.3).

На початку ми наведемо декілька корисних властивостей $\mathbb{E}\{\mathbf{Q}(z)\}$, які випливають з інваріантних властивостей розподілу спостережень $(y_n)_{n=1,\ldots,N}$. У подальшому для $k, l \in \{1, 2, \ldots, L\}$, ми позначимо через $\mathbf{Q}_{pp}^{k,l}$ та $\mathbf{Q}_{ff}^{k,l}$ матриці розмірністю $M \times M$, елементи яких визначаються $\left(\mathbf{Q}_{pp}^{k,l}\right)_{m,n} = (\mathbf{Q}_{pp})_{(k-1)M+m,(l-1)M+n}$ та $\left(\mathbf{Q}_{ff}^{k,l}\right)_{m,n} = (\mathbf{Q}_{ff})_{(k-1)M+m,(l-1)M+n}$ для усіх $m, n \in \{1, 2, \ldots, M\}$.

Лема 2.6. *Матриці* $\mathbb{E}\{\mathbf{Q_{pp}}\}$ *та* $\mathbb{E}\{\mathbf{Q_{ff}}\}$ *є блочно діагональними, тобто* $\mathbb{E}\left(\mathbf{Q}_{pp}^{k,l}\right) = \mathbb{E}\left(\mathbf{Q}_{ff}^{k,l}\right) = 0$ *якщо* $k \neq l$, *та*

$$\mathrm{Tr}\mathbb{E}\{\mathbf{Q_{pp}}\}(I_L \otimes R) = \mathrm{Tr}\mathbb{E}\{\mathbf{Q_{ff}}\}(I_L \otimes R), \tag{2.43}$$

$$\mathbb{E}\{\mathbf{Q_{pf}}\} = \mathbb{E}\{\mathbf{Q_{fp}}\} = 0. \tag{2.44}$$

Доведення. Ми почнемо з доведення (2.44), для цього розглянемо нову послідовність векторів $z_k = e^{-ik\theta} y_k$ та побудуємо матриці Z_p, Z_f за зразком матриць Y_p та Y_f. Зрозуміло, що розподіл ймовірностей послідовності $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ співпадає з розподілом $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. У той же час Z_p та Z_f виражаються як

$$Z_p = \begin{pmatrix} e^{-i\theta} I_M & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & e^{-Li\theta} I_M \end{pmatrix} Y_p \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & e^{-(N-1)i\theta} \end{pmatrix},$$

$$Z_f = e^{-Li\theta} \begin{pmatrix} e^{-i\theta} I_M & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & e^{-Li\theta} I_M \end{pmatrix} Y_f \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & e^{-(N-1)i\theta} \end{pmatrix}.$$

З чого легко знаходиться вираз для $Z_f Z_p^* Z_p Z_f^*$:

$$Z_f Z_p^* Z_p Z_f^* = \begin{pmatrix} e^{-i\theta} I_M & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & e^{-Li\theta} I_M \end{pmatrix} Y_f Y_p^* Y_p Y_f^* \begin{pmatrix} e^{i\theta} I_M & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & e^{Li\theta} I_M \end{pmatrix}.$$

Далі, аналогічно з $\mathbf{Q}$ визначимо матрицю $\mathbf{Q}^{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} -zI_{ML} & \frac{1}{N} Z_f Z_p^* \\ \frac{1}{N} Z_p Z_f^* & -zI_{ML} \end{pmatrix}^{-1}$ та отримаємо негайно, що

$$\mathbb{E}\{\mathbf{Q_{pp}^Z}\} = \begin{pmatrix} e^{-i\theta} I_M & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & e^{-Li\theta} I_M \end{pmatrix} \mathbb{E}\{\mathbf{Q_{pp}}\} \begin{pmatrix} e^{i\theta} I_M & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & e^{Li\theta} I_M \end{pmatrix}.$$

З іншого боку, оскільки розподіл двох послідовностей співпадає, ми маємо $\mathbb{E}\{\mathbf{Q}^{\mathbf{Z}}_{\mathbf{pp}}\} = \mathbb{E}\{\mathbf{Q}_{\mathbf{pp}}\}$. Це безпосередньо тягне, що будь-який $M \times M$ блок $\mathbb{E}\{{\mathbf{Q}_{\mathbf{pp}}}^{j,k}\}$ має задовольняти

$$\mathbb{E}\{{\mathbf{Q}_{\mathbf{pp}}}^{j,k}\} = e^{-ji\theta}\mathbb{E}\{{\mathbf{Q}_{\mathbf{pp}}}^{j,k}\}e^{ki\theta} = e^{(k-j)i\theta}\mathbb{E}\{{\mathbf{Q}_{\mathbf{pp}}}^{j,k}\}.$$

З цього негайно випливає, що $\mathbb{E}\{{\mathbf{Q}_{\mathbf{pp}}}^{j,k}\} = 0$ для $k \neq j$. Аналогічне міркування доводить, що матриця $\mathbb{E}\{\mathbf{Q}_{\mathbf{ff}}\}$ також блочна діагональна. Більш того, якщо ми проведемо подібні міркування і для $\mathbb{E}\{\mathbf{Q}_{\mathbf{fp}}\}$, отримаємо що також виконується і $\mathbb{E}\{\mathbf{Q}^{\mathbf{Z}}_{\mathbf{fp}}\} = \mathbb{E}\{\mathbf{Q}_{\mathbf{fp}}\}$ та

$$\mathbb{E}\{\mathbf{Q}^{\mathbf{Z}}_{\mathbf{fp}}\} = e^{-Li\theta}\begin{pmatrix} e^{-i\theta}I_M & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{-Li\theta}I_M \end{pmatrix}\mathbb{E}\{\mathbf{Q}_{\mathbf{fp}}\}\begin{pmatrix} e^{i\theta}I_M & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{Li\theta}I_M \end{pmatrix}$$

Це тягне за собою, що будь-який $M \times M$ блок ${\mathbf{Q}_{\mathbf{fp}}}^{j,k}$ матриці $\mathbf{Q}_{\mathbf{fp}}$ задовольняє $\mathbb{E}\{{\mathbf{Q}_{\mathbf{fp}}}^{j,k}\} = e^{-(L+j-k)i\theta}\mathbb{E}\{{\mathbf{Q}_{\mathbf{fp}}}^{j,k}\}$. Оскільки $j - k \in \{-(L-1), \dots, L-1\}$, це можливо лише, якщо $\mathbb{E}\{{\mathbf{Q}_{\mathbf{fp}}}^{j,k}\} = 0$, звідки $\mathbb{E}\{\mathbf{Q}_{\mathbf{fp}}\} = 0$. Аналогічно $\mathbb{E}\{\mathbf{Q}_{\mathbf{pf}}\} = 0$.

Щоб встановити (2.43) ми розглянемо іншу послідовність, а саме $z_n = y_{-n+N+2L}$. Як і у попередній частині, розподіл ймовірностей нової послідовності z_n не змінюється та нескладно виразити відповідні матриці Z_p та Z_f через Y_p та Y_f:

$$Z_f = \begin{pmatrix} 0 & \dots & I_M \\ \vdots & & \vdots \\ I_M & \dots & 0 \end{pmatrix} Y_p \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$Z_p = \begin{pmatrix} 0 & \dots & I_M \\ \vdots & & \vdots \\ I_M & \dots & 0 \end{pmatrix} Y_f \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

З чого ми отримуємо

$$\mathbb{E}\{\mathbf{Q}^{\mathbf{Z}}_{\mathbf{pp}}\} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & I_M \\ \vdots & & \vdots \\ I_M & \dots & 0 \end{pmatrix}\mathbb{E}\{\mathbf{Q}_{\mathbf{ff}}\}\begin{pmatrix} 0 & \dots & I_M \\ \vdots & & \vdots \\ I_M & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\mathbb{E}\{\mathbf{Q}_{\mathbf{pp}}^{\mathbf{Z}}\} = \mathbb{E}\{\mathbf{Q}_{\mathbf{pp}}\}$, негайно випливає, що $\mathbb{E}\{\mathbf{Q}_{\mathbf{ff}}{}^{j,j}\} = \mathbb{E}\{\mathbf{Q}_{\mathbf{pp}}{}^{L-j,L-j}\}$ та, як наслідок, що $\mathbb{E}\{\mathrm{Tr}\mathbf{Q}_{\mathbf{pp}}(I_L \otimes R)\} = \mathbb{E}\{\mathrm{Tr}\mathbf{Q}_{\mathbf{ff}}(I_L \otimes R)\}$. Це завершує доведення леми. ■

Тепер ми можемо повернутися до резольвенти $\mathbf{Q}(z)$. Використовуючи резольвентну тотожність (1.5), маємо

$$z\mathbf{Q}(z) = -I_{2ML} + \mathbf{Q}(z)\mathbf{M} = -I_{2ML} + \sum_{j=1}^{N} \mathbf{Q}(z) \begin{pmatrix} 0 & w_{f,j}w_{p,j}^* \\ w_{p,j}w_{f,j}^* & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

Нагадаємо, що $w_{p,k}$, $w_{f,j}$ – це стовпчики матриць W_p та W_f відповідно. Визначимо для усіх $m_1, m_2 = 1, \dots, M$, $i_1 = 1, \dots, 2L$ та $i_2 = 1, \dots, L$ матриці $\hat{\mathbf{A}}_{i_1 i_2}^{m_1 m_2}$ розмірністю $2N \times 2N$ наступним чином

$$\begin{aligned}
(\hat{\mathbf{A}}_{i_1 i_2}^{m_1 m_2}(pf))_{jk} &= \left(\mathbf{Q}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ w_{p,j} \end{smallmatrix}\right)\right)_{i_1}^{m_1} (w_{f,k}^*)_{i_2}^{m_2}, \\
(\hat{\mathbf{A}}_{i_1 i_2}^{m_1 m_2}(pp))_{jk} &= \left(\mathbf{Q}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ w_{p,j} \end{smallmatrix}\right)\right)_{i_1}^{m_1} (w_{p,k}^*)_{i_2}^{m_2}, \\
(\hat{\mathbf{A}}_{i_1 i_2}^{m_1 m_2}(ff))_{jk} &= \left(\mathbf{Q}\left(\begin{smallmatrix} w_{f,j} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right)_{i_1}^{m_1} (w_{f,k}^*)_{i_2}^{m_2}, \\
(\hat{\mathbf{A}}_{i_1 i_2}^{m_1 m_2}(fp))_{jk} &= \left(\mathbf{Q}\left(\begin{smallmatrix} w_{f,j} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right)_{i_1}^{m_1} (w_{p,k}^*)_{i_2}^{m_2}.
\end{aligned} \quad (2.46)$$

Також позначимо через $\mathbf{A}_{i_1 i_2}^{m_1 m_2}$ відповідне математичне сподівання, $\mathbf{A}_{i_1 i_2}^{m_1 m_2} = \mathbb{E}\{\hat{\mathbf{A}}_{i_1 i_2}^{m_1 m_2}\}$. Тоді, з (2.45) випливає

$$z\mathbb{E}\{\mathbf{Q}_{i_1 i_2}^{m_1 m_2}(z)\} = -\delta_{i_1,i_2}\delta_{m_1,m_2} + \mathrm{Tr}\mathbf{A}_{i_1 i_2}^{m_1 m_2}(pf) + \mathrm{Tr}\mathbf{A}_{i_1 i_2}^{m_1 m_2}(fp). \quad (2.47)$$

У подальшому ми оцінюємо для усіх i_1, i_2, m_1, m_2 елементи матриць $\mathbf{A}_{i_1 i_2}^{m_1 m_2}$, з використанням Гауссових методів обчислення (1.7) та (2.20). Як ми побачимо, кожний елемент матриці $\mathbf{A}_{i_1 i_2}^{m_1 m_2}$ може бути записаний як функціонал матриці $\mathbb{E}\{\mathbf{Q}\}$ плюс деякий "малий" доданок, який зникає з $N \to +\infty$. Підставляючи отриманні вирази $\mathbf{A}_{i_1 i_2}^{m_1 m_2}$ у (2.47), ми отримаємо наближений вираз резольвенти $\mathbb{E}\{\mathbf{Q}\}$. Оскільки повне обчислення дуже довге та одноманітне, ми наведемо розрахунки лише для елементів $(\mathbf{A}_{i_1 i_2}^{m_1 m_2}(ff))_{j,k}$ матриці $\mathbf{A}_{i_1 i_2}^{m_1 m_2}(ff)$.

Використовуючи формулу частинного інтегрування (1.3), маємо

$$\mathbb{E}\left\{\left(\mathbf{Q}\begin{pmatrix} w_{f,j}\\ 0\end{pmatrix}\right)^{m_1}_{i_1}(w^*_{f,k})^{m_2}_{i_2}\right\}=\sum_{i_3=1}^{L}\sum_{m_3}\mathbb{E}\{\mathbf{Q}^{m_1m_3}_{i_1i_3}W^{m_3}_{i_3+L,j}\overline{W}^{m_2}_{i_2+L,k}\}$$

$$=\sum_{i_3=1}^{L}\sum_{\substack{i',j'\\ m',m_3}}\mathbb{E}\{W^{m_3}_{i_3+L,j}\overline{W}^{m'}_{i',j'}\}\times\mathbb{E}\left\{\frac{\partial\left(\mathbf{Q}^{m_1m_3}_{i_1i_3}\overline{W}^{m_2}_{i_2+L,k}\right)}{\partial\overline{W}^{m'}_{i',j'}}\right\}=\frac{1}{N}\sum_{i_3=1}^{L}\sum_{\substack{i',j'\\ m',m_3}}R_{m_3m'}$$

$$\times\,\delta_{i_3+L+j,i'+j'}\mathbb{E}\left\{\mathbf{Q}^{m_1m_3}_{i_1i_3}\delta_{m_2,m'}\delta_{i_2+L,i'}\delta_{k,j'}+\overline{W}^{m_2}_{i_2+L,k}\frac{\partial\mathbf{Q}^{m_1m_3}_{i_1i_3}}{\partial\overline{W}^{m'}_{i',j'}}\right\}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{i_3=1}^{L}\sum_{m_3=1}^{M}\mathbb{E}\left\{\mathbf{Q}^{m_1m_3}_{i_1i_3}R_{m_3m_2}\delta_{i_3,i_2-(j-k)}\right\}-\frac{1}{N}\sum_{\substack{i_3,j'\\ m_3,m'}}\sum_{i'=1}^{L}R_{m_3m'}\delta_{i_3+L+j,i'+j'}$$

$$\times\,\mathbb{E}\left\{\overline{W}^{(f)m_2}_{i_2,k}\left(\mathbf{Q}\left(\begin{smallmatrix} w_{f,j'}\\ 0\end{smallmatrix}\right)\right)^{m_1}_{i_1}\mathbf{Q}^{m'm_3}_{i'+Li_3}\right\}-\frac{1}{N}\sum_{\substack{i_3,j'\\ m_3,m'}}\sum_{i'=L+1}^{2L}R_{m_3m'}\delta_{i_3+L+j,i'+j'}$$

$$\times\,\mathbb{E}\left\{\overline{W}^{(f)m_2}_{i_2,k}\left(\mathbf{Q}\left(\begin{smallmatrix} 0\\ w_{p,j'}\end{smallmatrix}\right)\right)^{m_1}_{i_1}\mathbf{Q}^{m'm_3}_{i'-Li_3}\right\}=\frac{1}{N}\sum_{i_3=1}^{L}\mathbb{E}\Big\{\left(\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Q_{pp}}\\ \mathbf{Q_{fp}}\end{smallmatrix}\right)(I_L\otimes R)\right)^{m_1m_2}_{i_1i_3}$$

$$\times\,\delta_{i_3,i_2-(j-k)}\Big\}-\frac{1}{N}\sum_{m',j'}\sum_{i_3,i'=1}^{L}\delta_{i_3+L+j,i'+j'}\mathbb{E}\left\{\left(\hat{A}^{m_1m_2}_{i_1i_2}(ff)\right)_{j',k}(\mathbf{Q_{fp}}(I_L\otimes R))^{m'm'}_{i'i_3}\right\}$$

$$-\frac{1}{N}\sum_{m',j'}\sum_{i_3,i'=1}^{L}\delta_{i_3+j,i'+j'}\mathbb{E}\left\{\left(\hat{\mathbf{A}}^{m_1m_2}_{i_1i_2}(pf)\right)_{j',k}(\mathbf{Q_{pp}}(I_L\otimes R))^{m'm'}_{i'i_3}\right\}\quad(2.48)$$

Далі, визначимо для кожних $i_1=1,\dots,2L$, $i_2=1,\dots,L$ та $m_1,m_2=1,\dots,M$ $2N\times 2N$ матриці $\mathbf{B}^{m_1m_2}_{i_1i_2}$, блоки якої визначаються як

$$\left(\mathbf{B}^{m_1m_2}_{i_1i_2}(fp)\right)_{j,k}=\frac{1}{N}\mathbb{E}\left\{\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Q_{pp}}\\ \mathbf{Q_{fp}}\end{smallmatrix}\right)(I_L\otimes R)\right\}^{m_1,m_2}_{i_1,i_2-(j-k)-L}\mathbf{1}_{1\le i_2-(j-k)-L\le L},$$

$$\left(\mathbf{B}^{m_1m_2}_{i_1i_2}(ff)\right)_{j,k}=\frac{1}{N}\mathbb{E}\left\{\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Q_{pp}}\\ \mathbf{Q_{fp}}\end{smallmatrix}\right)(I_L\otimes R)\right\}^{m_1,m_2}_{i_1,i_2-(j-k)}\mathbf{1}_{1\le i_2-(j-k)\le L},$$

$$\left(\mathbf{B}^{m_1m_2}_{i_1i_2}(pp)\right)_{j,k}=\frac{1}{N}\mathbb{E}\left\{\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Q_{pf}}\\ \mathbf{Q_{ff}}\end{smallmatrix}\right)(I_L\otimes R)\right\}^{m_1,m_2}_{i_1,i_2-(j-k)}\mathbf{1}_{1\le i_2-(j-k)\le L},$$

$$\left(\mathbf{B}^{m_1m_2}_{i_1i_2}(pf)\right)_{j,k}=\frac{1}{N}\mathbb{E}\left\{\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Q_{pf}}\\ \mathbf{Q_{ff}}\end{smallmatrix}\right)(I_L\otimes R)\right\}^{m_1,m_2}_{i_1,i_2-(j-k)+L}\mathbf{1}_{1\le i_2-(j-k)+L\le L}.$$

Також нам знадобиться послідовність $(\tau^{(M)}(\mathbf{D})(l))_{l=-L+1,\dots,L-1}$, яка визначається для кожної $ML \times ML$ блочної матриці $\mathbf{D}$ як

$$\tau^{(M)}(\mathbf{D})(l) = \frac{1}{ML}\mathrm{Tr}\mathbf{D}(J_L^l \otimes I_M) = \frac{1}{ML}\sum_{m=1}^{M}\sum_{i-i'=l}\mathbf{D}_{i,i'}^{m,m} \tag{2.49}$$

та $N \times N$ матриця Тепліца $\mathcal{T}_{N,L}^{(M)}(\mathbf{D})$, що дорівнює

$$\mathcal{T}_{N,L}^{(M)}(\mathbf{D}) = \sum_{l=-L+1}^{L-1}\tau^{(M)}(\mathbf{D})(l)J_N^{-l}. \tag{2.50}$$

Інакше кажучи, елементи $\mathcal{T}_{N,L}^{(M)}(\mathbf{D})$ записуються як

$$\left[\mathcal{T}_{N,L}^{(M)}(\mathbf{D})\right]_{j_1,j_2} = \tau^{(M)}(\mathbf{D})(j_1 - j_2)\,\mathbf{1}_{-(L-1)\le j_1-j_2\le L-1}. \tag{2.51}$$

Зауважимо, що якщо матриця $\mathbf{D}$ блочна діагональна, тобто $\mathbf{D}_{i_1,i_2}^{m_1,m_2} = 0$ для усіх m_1, m_2 якщо $i_1 \neq i_2$, тоді, матриця $\mathcal{T}_{N,L}^{(M)}(\mathbf{D})$ співпадає з діагональною матрицею $\mathcal{T}_{N,L}^{(M)}(\mathbf{D}) = \left(\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}\mathbf{D}\right) I_N$.

Тепер кожний доданок правої частини (2.48) можна спростити, почнемо з першого. Зрозуміло, що

$$\frac{1}{N}\sum_{i_3=1}^{L}\mathbb{E}\left\{\left(\begin{pmatrix}\mathbf{Q_{pp}}\\ \mathbf{Q_{fp}}\end{pmatrix}(I_L \otimes R)\right)_{i_1 i_3}^{m_1 m_2}\delta_{i_3,i_2-(j-k)}\right\} = \left(\mathbf{B}_{i_1 i_2}^{m_1 m_2}(ff)\right)_{j,k}.$$

Щоб представити вираз

$$\frac{1}{N}\sum_{m',j'}\sum_{i_3,i'=1}^{L}\delta_{i_3+L+j,i'+j'} \times \mathbb{E}\left\{\left(\hat{A}_{i_1 i_2}^{m_1 m_2}(ff)\right)_{j',k}(\mathbf{Q_{fp}}(I_L \otimes R))_{i' i_3}^{m' m'}\right\}$$

у більш зручному вигляді, покладемо $l = i' - i_3$, та зауважимо

$$\frac{1}{N}\sum_{m',j'}\sum_{i_3,i'=1}^{L}\delta_{i_3+L+j,i'+j'} \times \mathbb{E}\left\{\left(\hat{A}_{i_1 i_2}^{m_1 m_2}(ff)\right)_{j',k}(\mathbf{Q_{fp}}(I_L \otimes R))_{i' i_3}^{m' m'}\right\} =$$
$$\frac{ML}{N}\sum_{m'}\sum_{l=-(L-1)}^{L-1}\mathbb{E}\left\{\left(\hat{A}_{i_1 i_2}^{m_1 m_2}(ff)\right)_{L+j-l,k}\frac{1}{ML}\sum_{i'-i_3=l}(\mathbf{Q_{fp}}(I_L \otimes R))_{i' i_3}^{m' m'}\right\}.$$

Це, з використанням (2.49), послідовності $\tau^{(M)}(\mathbf{D})(l)$, можна записати як

$$c_N\sum_{l=-(L-1)}^{L-1}\mathbb{E}\left\{\left(\hat{A}_{i_1 i_2}^{m_1 m_2}(ff)\right)_{L+j-l,k}\tau^M\left(\mathbf{Q_{fp}}(I_L \otimes R)\right)(l)\right\}.$$

Нарешті, покладемо $j' = L + j - l$, тоді, беручи до уваги (2.51) та (2.7), ми отримаємо

$$\frac{1}{N}\sum_{m',j'}\sum_{i_3,i'=1}^{L}\delta_{i_3+L+j,i'+j'}\times\mathbb{E}\left\{\left(\hat{A}_{i_1i_2}^{m_1m_2}(ff)\right)_{j',k}(\mathbf{Q_{fp}}(I_L\otimes R))_{i'i_3}^{m'm'}\right\} =$$

$$c_N\,\mathbb{E}\left\{\sum_{j'=1}^{N}\left[\mathcal{T}_{N,L}^{(M)}\left(\mathbf{Q_{fp}}(I_L\otimes R)\right)\right]_{L+j,j'}\left(\hat{A}_{i_1i_2}^{m_1m_2}(ff)\right)_{j',k}\right\} =$$

$$c_N\mathbb{E}\left\{\left(J_N^L\mathcal{T}_{N,L}^{(M)}(\mathbf{Q_{fp}}(I_L\otimes R))\hat{\mathbf{A}}_{i_1i_2}^{m_1m_2}(ff)\right)_{j,k}\right\}.$$

Аналогічно запишемо останній доданок правої частини (2.48)

$$\frac{1}{N}\sum_{m',j'}\sum_{i_3,i'=1}^{L}\delta_{i_3+j,i'+j'}\mathbb{E}\left\{\left(\hat{\mathbf{A}}_{i_1i_2}^{m_1m_2}(pf)\right)_{j',k}(\mathbf{Q_{pp}}(I_L\otimes R))_{i'i_3}^{m'm'}\right\} =$$

$$c_N\mathbb{E}\left\{\left(\mathcal{T}_{N,L}^{(M)}(\mathbf{Q_{pp}}(I_L\otimes R))\hat{\mathbf{A}}_{i_1i_2}^{m_1m_2}(pf)\right)_{j,k}\right\}.$$

Підводячи підсумок, $\mathbf{A}_{i_1i_2}^{m_1m_2}(ff)$ можна виразити наступним чином

$$\left(\mathbf{A}_{i_1i_2}^{m_1m_2}(ff)\right)_{j,k} = \left(\mathbf{B}_{i_1i_2}^{m_1m_2}(ff)\right)_{j,k} - c_N\mathbb{E}\left\{\left(J_N^L\mathcal{T}_{N,L}^{(M)}(\mathbf{Q_{fp}}(I_L\otimes R))\hat{\mathbf{A}}_{i_1i_2}^{m_1m_2}(ff)\right)_{j,k}\right\}$$
$$- c_N\mathbb{E}\left\{\left(\mathcal{T}_{N,L}^{(M)}(\mathbf{Q_{pp}}(I_L\otimes R))\hat{\mathbf{A}}_{i_1i_2}^{m_1m_2}(pf)\right)_{j,k}\right\}.$$

Розкладемо $\mathbf{Q_{fp}}$ та $\mathbf{Q_{pp}}$ як $\mathbf{Q_{fp}} = \mathbb{E}\{\mathbf{Q_{fp}}\} + \mathbf{Q}_{\mathbf{fp}}^{\circ} = \mathbf{Q}_{\mathbf{fp}}^{\circ}$ (з огляду на Лему 2.6) та $\mathbf{Q_{pp}} = \mathbb{E}\{\mathbf{Q_{pp}}\} + \mathbf{Q}_{\mathbf{pp}}^{\circ}$, тоді попередня рівність набуває вигляду

$$\left(\mathbf{A}_{i_1i_2}^{m_1m_2}(ff)\right)_{j,k} = \left(\mathbf{B}_{i_1i_2}^{m_1m_2}(ff)\right)_{j,k} - c_N\mathbb{E}\left\{\left(\mathcal{T}_{N,L}^{(M)}(\mathbf{Q_{pp}}(I_L\otimes R))\mathbf{A}_{i_1i_2}^{m_1m_2}(pf)\right)_{j,k}\right\}$$
$$- c_N\mathbb{E}\left\{\left(J_N^L\mathcal{T}_{N,L}^{(M)}(\mathbf{Q}_{\mathbf{fp}}^{\circ}(I_L\otimes R))\hat{\mathbf{A}}_{i_1i_2}^{m_1m_2}(ff)\right)_{j,k}\right\}$$
$$- c_N\mathbb{E}\left\{\left(\mathcal{T}_{N,L}^{(M)}(\mathbf{Q}_{\mathbf{pp}}^{\circ}(I_L\otimes R))\hat{\mathbf{A}}_{i_1i_2}^{m_1m_2}(pf)\right)_{j,k}\right\}.$$

Визначимо $N\times N$ матрицю $\mathbf{\Delta}_{i_1i_2}^{m_1m_2}(ff)$ як

$$\mathbf{\Delta}_{i_1i_2}^{m_1m_2}(ff) = -c_N\mathbb{E}\left\{J_N^L\mathcal{T}_{N,L}^{(M)}(\mathbf{Q}_{\mathbf{fp}}^{\circ}(I_L\otimes R))\hat{\mathbf{A}}_{i_1i_2}^{m_1m_2}(ff)\right\}$$
$$- c_N\mathbb{E}\left\{\mathcal{T}_{N,L}^{(M)}(\mathbf{Q}_{\mathbf{pp}}^{\circ}(I_L\otimes R))\hat{\mathbf{A}}_{i_1i_2}^{m_1m_2}(pf)\right\}.$$

Тоді, залишивши індекси i_1, i_2, m_1, m_2, ми нарешті маємо

$$\mathbf{A}_{\mathbf{ff}} = \mathbf{B}_{\mathbf{ff}} - c_N \mathbb{E}\left\{ \mathcal{T}_{N,L}^{(M)}(\mathbf{Q}_{\mathbf{pp}}(I_L \otimes R)) \right\} \mathbf{A}_{\mathbf{pf}} + \mathbf{\Delta}_{\mathbf{ff}}.$$

Аналогічно ми отримуємо вирази для решти матриць

$$\mathbf{A}_{\mathbf{pf}} = \mathbf{B}_{\mathbf{pf}} - c_N \mathbb{E}\left\{ \mathcal{T}_{N,L}^{(M)}(\mathbf{Q}_{\mathbf{ff}}(I_L \otimes R)) \right\} \mathbf{A}_{\mathbf{ff}} + \mathbf{\Delta}_{\mathbf{pf}}$$
$$\mathbf{A}_{\mathbf{fp}} = \mathbf{B}_{\mathbf{fp}} - c_N \mathbb{E}\left\{ \mathcal{T}_{N,L}^{(M)}(\mathbf{Q}_{\mathbf{pp}}(I_L \otimes R)) \right\} \mathbf{A}_{\mathbf{pp}} + \mathbf{\Delta}_{\mathbf{fp}}$$
$$\mathbf{A}_{\mathbf{pp}} = \mathbf{B}_{\mathbf{pp}} - c_N \mathbb{E}\left\{ \mathcal{T}_{N,L}^{(M)}(\mathbf{Q}_{\mathbf{ff}}(I_L \otimes R)) \right\} \mathbf{A}_{\mathbf{fp}} + \mathbf{\Delta}_{\mathbf{pp}},$$

де $\mathbf{\Delta}_{\mathbf{pf}}$, $\mathbf{\Delta}_{\mathbf{fp}}$ та $\mathbf{\Delta}_{\mathbf{pp}}$ визначаються схожим чином з $\mathbf{\Delta}_{i_1 i_2}^{m_1 m_2}(ff)$:

$$\mathbf{\Delta}_{\mathbf{pf}} = -c_N \mathbb{E}\left\{ \mathcal{T}_{N,L}^{(M)}(\mathbf{Q}_{\mathbf{pf}}^{\circ}(I_L \otimes R)) J_N^{*L} \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{pf}} \right\} - c_N \mathbb{E}\left\{ \mathcal{T}_{N,L}^{(M)}(\mathbf{Q}_{\mathbf{ff}}^{\circ}(I_L \otimes R)) \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{ff}} \right\},$$
$$\mathbf{\Delta}_{\mathbf{fp}} = -c_N \mathbb{E}\left\{ J_N^{L} \mathcal{T}_{N,L}^{(M)}(\mathbf{Q}_{\mathbf{fp}}^{\circ}(I_L \otimes R)) \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{fp}} \right\} - c_N \mathbb{E}\left\{ \mathcal{T}_{N,L}^{(M)}(\mathbf{Q}_{\mathbf{pp}}^{\circ}(I_L \otimes R)) \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{pp}} \right\},$$
$$\mathbf{\Delta}_{\mathbf{pp}} = -c_N \mathbb{E}\left\{ \mathcal{T}_{N,L}^{(M)}(\mathbf{Q}_{\mathbf{pf}}^{\circ}(I_L \otimes R)) J_N^{*L} \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{pp}} \right\} - c_N \mathbb{E}\left\{ \mathcal{T}_{N,L}^{(M)}(\mathbf{Q}_{\mathbf{ff}}^{\circ}(I_L \otimes R)) \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{fp}} \right\}.$$

Згідно з Лемою 2.6, матриці $\mathbb{E}\left(\mathbf{Q}_{\mathbf{ff}}\right)$ та $\mathbb{E}\left(\mathbf{Q}_{\mathbf{pp}}\right)$ блочні діагональні. Таким чином, як було зауважено раніше, $\mathbb{E}\{\mathcal{T}_{N,L}^{(M)}(\mathbf{Q}_{\mathbf{ff}}(I_L \otimes R))\}$ та $\mathbb{E}\{\mathcal{T}_{N,L}^{(M)}(\mathbf{Q}_{\mathbf{pp}}(I_L \otimes R))\}$ спрощуються відповідно до $\frac{1}{ML}\mathbb{E}\{\mathrm{Tr}\mathbf{Q}_{\mathbf{ff}}(I_L \otimes R)\}\, I_N$ та $\frac{1}{ML}\mathbb{E}\{\mathrm{Tr}\mathbf{Q}_{\mathbf{pp}}(I_L \otimes R)\}\, I_N$. Оскільки $\mathbb{E}\{\mathrm{Tr}\mathbf{Q}_{\mathbf{ff}}(I_L \otimes R)\} = \mathbb{E}\{\mathrm{Tr}\mathbf{Q}_{\mathbf{pp}}(I_L \otimes R)\}$ (див. (2.43)), отриману систему для блоків матриці $\boldsymbol{A}$ можна записати у наступному вигляді

$$\begin{pmatrix} I_N & \dfrac{c_N}{ML}\mathbb{E}\left\{\mathrm{Tr}\mathbf{Q}_{\mathbf{pp}}(I_L \otimes R)\right\} I_N \\ \dfrac{c_N}{ML}\mathbb{E}\left\{\mathrm{Tr}\mathbf{Q}_{\mathbf{pp}}(I_L \otimes R)\right\} I_N & I_N \end{pmatrix} \mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{\Delta}. \tag{2.52}$$

Для того, щоб розв'язати відносно $\boldsymbol{A}$ отриману систему, у першу чергу необхідно довести, що відповідна матриця у правій частині системи невироджена. Для цього ми визначимо $\boldsymbol{\alpha}(z)$ та $\alpha(z)$:

$$\boldsymbol{\alpha}(z) = \frac{1}{ML}\mathbb{E}\left\{\mathrm{Tr}\mathbf{Q}_{\mathbf{pp}}(z)(I_L \otimes R)\right\}, \tag{2.53}$$
$$\alpha(z) = \frac{1}{ML}\mathbb{E}\{\mathrm{Tr}\left(Q(z)(I_L \times R)\right)\}.$$

Очевидно, що α є елементом $\mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$. Щоб оцінити відповідну їй невід'ємну міру $\overline{\mu}_N$, ми розглянемо випадкову невід'ємну міру $\hat{\mu}_N$, яка визначається як

$$d\hat{\mu}_N(\lambda) = \frac{1}{ML}\sum_{i=1}^{ML} \hat{f}_i^*(I_L \otimes R)\hat{f}_i\, \delta_{\hat{\lambda}_i}, \tag{2.54}$$

де $(\hat{\lambda}_i)_{i=1,\dots,ML}$ та $(\hat{f}_i)_{i=1,\dots,ML}$ це відповідно власні значення та вектори матриці $W_f W_p^* W_p W_f^*$. Зауважимо, що міра $\hat{\mu}$ визначена на $\mathbb{R}^+$ та її повна маса $\hat{\mu}(\mathbb{R}^+)$ співпадає з $\frac{1}{M}\mathrm{Tr}R$. Зрозуміло, що міра $\overline{\mu}_N$ визначається як

$$\int_{\mathbb{R}^+} \phi(\lambda)\, d\overline{\mu}_N(\lambda) = \mathbb{E}\left\{\int_{\mathbb{R}^+} \phi(\lambda)\, d\hat{\mu}_N(\lambda)\right\}. \tag{2.55}$$

Більш того, оскільки $\mathbf{Q}_{\mathbf{pp}}(z) = zQ(z^2)$, маємо

$$\boldsymbol{\alpha}(z) = z\alpha(z^2).$$

Таким чином, з Леми 2.4 випливає, що $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ та

$$1 - c_N^2 \boldsymbol{\alpha}(z)^2 \neq 0$$

для $z \in \mathbb{C}^+$. Що безпосередньо тягне за собою, що відповідна матриця системи у правій частини системи (2.52) невироджена для $z \in \mathbb{C}^+$. Позначимо її обернену матрицю через $\mathbf{H}$, тобто

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} I_N & c_N\boldsymbol{\alpha}(z)\, I_N \\ c_N\boldsymbol{\alpha}(z)\, I_N & I_N \end{pmatrix}^{-1}.$$

Блоки матриці $\mathbf{H}$ легко знаходяться:

$$\mathbf{H}_{\mathbf{pp}} = \mathbf{H}_{\mathbf{ff}} = \frac{1}{1 - c_N^2 \boldsymbol{\alpha}(z)^2}\, I_N$$
$$\mathbf{H}_{\mathbf{pf}} = \mathbf{H}_{\mathbf{fp}} = -\frac{c_N\boldsymbol{\alpha}(z)}{1 - c_N^2 \boldsymbol{\alpha}(z)^2}\, I_N.$$

Таким чином система (2.52) дає $\mathbf{A} = \mathbf{H}\mathbf{B} + \mathbf{H}\boldsymbol{\Delta}$. Зауважимо, що згідно з (2.47) ми зацікавлені лише в блоках $\mathbf{A}_{\mathbf{pf}}$ та $\mathbf{A}_{\mathbf{fp}}$. Тепер легко отримати, що

$$\mathbf{A}_{\mathbf{pf}} = \mathbf{H}_{\mathbf{pp}}\mathbf{B}_{\mathbf{pf}} + \mathbf{H}_{\mathbf{pf}}\mathbf{B}_{\mathbf{ff}} + \mathbf{H}_{\mathbf{pp}}\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{pf}} + \mathbf{H}_{\mathbf{pf}}\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{ff}},$$
$$\mathbf{A}_{\mathbf{fp}} = \mathbf{H}_{\mathbf{fp}}\mathbf{B}_{\mathbf{pp}} + \mathbf{H}_{\mathbf{ff}}\mathbf{B}_{\mathbf{fp}} + \mathbf{H}_{\mathbf{fp}}\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{pp}} + \mathbf{H}_{\mathbf{ff}}\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{fp}}.$$

Згадаємо визначення (2.46) матриць $\mathbf{A}_{i_1 i_2}^{m_1 m_2}$ та $\mathbf{H}$ та запишемо

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{E}\left\{\mathbf{Q}\left(\begin{smallmatrix} 0 & W_f W_p^* \\ W_p W_f^* & 0 \end{smallmatrix}\right)\right\}\right)_{i_1 i_2}^{m_1 m_2} &= \mathrm{Tr}\mathbf{A}_{i_1 i_2}^{m_1 m_2}(pf)\mathbf{1}_{i_2 \le L} + \mathrm{Tr}\mathbf{A}_{i_1 i_2 - L}^{m_1 m_2}(pf)\mathbf{1}_{i_2 > L} = \\ \frac{1}{1 - c_N^2\boldsymbol{\alpha}^2}&\mathrm{Tr}\Big(\mathbf{B}_{\mathbf{pf}} - c_N\boldsymbol{\alpha}\mathbf{B}_{\mathbf{ff}} + \boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{pf}} - c_N\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{ff}}\Big)_{i_1 i_2}^{m_1 m_2}\mathbf{1}_{i_2 \le L} \\ + \frac{1}{1 - c_N^2\boldsymbol{\alpha}^2}&\mathrm{Tr}\Big(\mathbf{B}_{\mathbf{fp}} - c_N\boldsymbol{\alpha}\mathbf{B}_{\mathbf{pp}} + \boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{fp}} - c_N\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{pp}}\Big)_{i_1 i_2 - L}^{m_1 m_2}\mathbf{1}_{i_2 > L}.\end{aligned} \tag{2.56}$$

Залишилось помітити, що $\mathrm{Tr}\,(\mathbf{B_{fp}})^{m_1m_2}_{i_1i_2} = \mathrm{Tr}\,(\mathbf{B_{pf}})^{m_1m_2}_{i_1i_2} = 0$ та $\mathrm{Tr}\,(\mathbf{B_{pp}})^{m_1m_2}_{i_1i_2} = \mathbb{E}\{(\mathbf{Q}\Pi_{ff}(I_{2L}\otimes R))^{m_1m_2}_{i_1i_2+L}\}$, $\mathrm{Tr}\,(\mathbf{B_{ff}})^{m_1m_2}_{i_1i_2} = \mathbb{E}\{(\mathbf{Q}\Pi_{pp}(I_{2L}\otimes R))^{m_1m_2}_{i_1i_2}\}$, де $\Pi_{ff} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{ML}\end{smallmatrix}\right)$ та $\Pi_{pp} = \left(\begin{smallmatrix} I_{ML} & 0 \\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$. Таким чином, попередня рівність набуває вигляду

$$\left(\mathbb{E}\left\{\mathbf{Q}\left(\begin{smallmatrix} 0 & W_fW_p^* \\ W_pW_f^* & 0\end{smallmatrix}\right)\right\}\right)^{m_1m_2}_{i_1i_2} = -\frac{c_N\boldsymbol{\alpha}}{1-c_N^2\boldsymbol{\alpha}^2}\Big(\mathbb{E}\{\mathbf{Q}\Pi_{pp}(I_{2L}\otimes R)\}$$
$$+\mathbb{E}\{\mathbf{Q}\Pi_{ff}(I_{2L}\otimes R)\}\Big)^{m_1m_2}_{i_1i_2} + \mathcal{E}^{m_1m_2}_{i_1i_2} = -\frac{c_N\boldsymbol{\alpha}}{1-c_N^2\boldsymbol{\alpha}^2}\Big(\mathbb{E}\{\mathbf{Q}(I_{2L}\otimes R)\}\Big)^{m_1m_2}_{i_1i_2} + \mathcal{E}^{m_1m_2}_{i_1i_2},$$

де $\mathcal{E}^{m_1m_2}_{i_1i_2}$ містить усі доданки, які залежать від матриці $\boldsymbol{\Delta}^{m_1m_2}_{i_1i_2}$. Використовуючи тотожність (2.45), ми нарешті маємо

$$z\mathbb{E}\{\mathbf{Q}\} + I_{2ML} = \mathbb{E}\left\{\mathbf{Q}\left(\begin{smallmatrix} 0 & W_fW_p^* \\ W_pW_f^* & 0\end{smallmatrix}\right)\right\} = -\frac{c_N\boldsymbol{\alpha}}{1-c_N^2\boldsymbol{\alpha}^2}\mathbb{E}\{\mathbf{Q}\}(I_{2L}\otimes R) + \mathcal{E}, \tag{2.57}$$

що негайно дає

$$-\mathbb{E}\{\mathbf{Q}\}\left(\frac{c_N\boldsymbol{\alpha}}{1-c_N^2\boldsymbol{\alpha}^2}(I_{2L}\otimes R) + z\right) = I_{2ML} - \mathcal{E}.$$

Оскільки матриця $\mathbb{E}(\mathbf{Q})$ блочно діагональна, з (2.57) випливає, що матриця $\mathcal{E}$ також блочно діагональна, тобто $\mathcal{E}_{fp} = \mathcal{E}_{pf} = 0$. Застосовуючи Лему 2.4 з $\beta(z) = \alpha(z)$, ми отримуємо, що матриця $-\left(\frac{c_N\boldsymbol{\alpha}}{1-c_N^2\boldsymbol{\alpha}^2}(I_{2L}\otimes R) + z\right)$ невироджена для усіх $z\in\mathbb{C}^+$ та матриця $\mathbf{S}_N(z)$, що визначена як

$$\mathbf{S}_N(z) = -\left(\frac{c_N\boldsymbol{\alpha}(z)}{1-c_N^2\boldsymbol{\alpha}^2(z)}R + z\right)^{-1}, \tag{2.58}$$

належить до $\mathcal{S}_M(\mathbb{R})$ та задовольняє $\|\mathbf{S}_N(z)\| \le \frac{1}{\mathrm{Im}z}$. Таким чином ми отримали, що

$$\mathbb{E}\{\mathbf{Q}\} = -\left(\frac{c_N\boldsymbol{\alpha}}{1-c_N^2\boldsymbol{\alpha}^2}(I_{2L}\otimes R) + z\right)^{-1} + \mathcal{E}\left(\frac{c_N\boldsymbol{\alpha}}{1-c_N^2\boldsymbol{\alpha}^2}(I_{2L}\otimes R) + z\right)^{-1}$$

або, що еквівалентно,

$$\mathbb{E}\{\mathbf{Q}(z)\} = I_{2L}\otimes\mathbf{S}(z) - \mathcal{E}(z)\ (I_{2L}\otimes\mathbf{S}(z)). \tag{2.59}$$

Для оцінки $\mathbb{E}(Q(z))$ нам необхідно виділити з цієї рівності лише перший діагональний $ML\times ML$ блок. Для цього визначимо $M\times M$ матрично-значну функцію $S_N(z)$ як

$$S_N(z) = -\left(zI_M + \frac{c_N z\alpha_N(z)}{1-c_N^2\alpha_N(z)^2}R_N\right)^{-1}. \tag{2.60}$$

Як і раніше, з Леми 2.4 випливає, що S_N належить $\mathcal{S}_M(\mathbb{R}^+)$ та задовольняє $\|S_N(z)\| \le \frac{1}{\mathrm{Im}z}$, також матриці $\mathbf{S}(z)$ та $S(z)$ зв'язані рівнянням $\mathbf{S}(z) = zS(z^2)$. Оскільки $\mathbb{E}(\mathbf{Q}_{pp}(z)) = z\mathbb{E}(Q(z^2))$, з (2.59) негайно випливає, що

$$\mathbb{E}(Q(z^2)) = I_L \otimes S(z^2) - \mathcal{E}_{pp}(z)\, I_L \otimes S(z^2) \tag{2.61}$$

для усіх $z \in \mathbb{C}^+$. Легко помітити, що $\mathcal{E}_{pp}(z)$ також залежить лише від z^2. Оскільки множина $\mathbb{C}^+$ при перетворені $z \to z^2$ переходить у $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$, ми маємо, що $\mathcal{E}_{pp}(z) = E_{pp}(z^2)$, для деякої функції E_{pp}, аналітична на $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$. Це міркування дозволяє нам записати (2.61) як

$$\mathbb{E}(Q(z)) = I_L \otimes S(z) - E_{pp}(z)\, \left(I_L \otimes S(z)\right). \tag{2.62}$$

для усіх $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$.

У подальшому ми доведемо, що

$$\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}(Q_N(z)) - I_L \otimes S_N(z)\right) = -\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}(E_{pp}(z)(I_L \otimes S_N(z))) = \mathcal{O}_z(\frac{1}{N^2}). \tag{2.63}$$

2.4 Оцінка доданку помилки $\mathcal{E}$

У цьому підрозділи ми доведемо (2.63), що є твердженням наступної пропозиції.

Пропозиція 2.1. *Для будь якої послідовності $ML \times ML$ матриць $(F_{1,N})_{N \ge 1}$, таких, що $\sup_{N\ge 1} \|F_{1,N}\| \le \kappa$, виконуеться*

$$\left|\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}(\mathcal{E}_{pp}(z)\, F_{1,N})\right| \le \kappa\, \frac{1}{N^2}\, P_1(|z^2|) P_2\left(\frac{1}{\mathrm{Im}z^2}\right) \tag{2.64}$$

для усіх z, для яких $\mathrm{Im}z^2 > 0$, де P_1 та P_2 деякі хороші поліноми.

Доведення. Покладемо $2ML \times 2ML$ матриці $F_N = \begin{pmatrix} F_{1,N} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, та зауважимо, що згідно з визначенням (2.56), матриця $\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}\mathcal{E}F =$

$\dfrac{1}{ML}\mathrm{Tr}(\mathcal{E}_{pp}(z)\,F_{1,N})$ дорівнює

$$\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}\mathcal{E}F = \frac{1}{ML}\frac{1}{1-c^2\boldsymbol{\alpha}^2}\sum_{\substack{i_1,i_2\\ m_1,m_2}}\Big(\big(\mathrm{Tr}\boldsymbol{\Delta}^{m_1m_2}_{i_1i_2}(pf) - c\boldsymbol{\alpha}\mathrm{Tr}\boldsymbol{\Delta}^{m_1m_2}_{i_1i_2}(ff)\big)\,\mathbf{1}_{i_2\le L}$$
$$+\big(\mathrm{Tr}\boldsymbol{\Delta}^{m_1m_2}_{i_1i_2-L}(fp) - c\boldsymbol{\alpha}\mathrm{Tr}\boldsymbol{\Delta}^{m_1m_2}_{i_1i_2-L}(pp)\big)\,\mathbf{1}_{i_2>L}\Big)F^{m_2m_1}_{i_2i_1}. \quad (2.65)$$

Оскільки $F^{m_2,m_1}_{i_2,i_1} = 0$ якщо $i_2 > L$, другий доданок правої частини рівності (2.65) зникає, тому оцінювання виразу $\dfrac{1}{ML}\mathrm{Tr}\mathcal{E}F$ еквівалентно оцінюванню його складових $\sum_{\substack{i_1,i_2\\ m_1,m_2}}\mathrm{Tr}\boldsymbol{\Delta}^{m_1m_2}_{i_1i_2}(pf)F^{m_2m_1}_{i_2i_1}$, $\sum_{\substack{i_1,i_2\\ m_1,m_2}}\mathrm{Tr}\boldsymbol{\Delta}^{m_1m_2}_{i_1i_2}(ff)F^{m_2m_1}_{i_2i_1}$ та множників $\frac{1}{1-c^2\boldsymbol{\alpha}^2}$, $\frac{\boldsymbol{\alpha}}{1-c^2\boldsymbol{\alpha}^2}$. Почнемо з $\boldsymbol{\Delta}^{m_1m_2}_{i_1i_2}(pf)$:

$$\sum_{\substack{i_1,i_2\\ m_1,m_2}}\mathrm{Tr}\boldsymbol{\Delta}^{m_1m_2}_{i_1i_2}(pf)F^{m_2m_1}_{i_2i_1}\mathbf{1}_{i_2\le L} = c\sum_{\substack{i_1,i_2\\ m_1,m_2}}\sum_{j,k}\mathbb{E}\Big\{\mathcal{T}^M_{N,L}(\mathbf{Q}^\circ_{\mathbf{ff}}(I_L\otimes R))_{jk}\Big(\mathbf{Q}\left(\begin{smallmatrix} w_{f,k}\\ 0\end{smallmatrix}\right)\Big)^{m_1}_{i_1}$$
$$\times\Big(w^*_{f,j}\Big)^{m_2}_{i_2}F^{m_2m_1}_{i_2i_1}+(\mathcal{T}^M_{N,L}(\mathbf{Q}^\circ_{\mathbf{pf}}(I_L\otimes R))J^{*L}_N)_{jk}\Big(\mathbf{Q}\left(\begin{smallmatrix} 0\\ w_{p,k}\end{smallmatrix}\right)\Big)^{m_1}_{i_1}\Big(w^*_{f,j}\Big)^{m_2}_{i_2}F^{m_2m_1}_{i_2i_1}\Big\}\mathbf{1}_{i_2\le L}$$
$$= c\,\mathrm{Tr}\mathbb{E}\Big\{\mathcal{T}^M_{N,L}(\mathbf{Q}^\circ_{\mathbf{ff}}(I_L\otimes R))\left(\begin{smallmatrix} W_f\\ 0\end{smallmatrix}\right)^* F\mathbf{Q}\left(\begin{smallmatrix} W_f\\ 0\end{smallmatrix}\right)+\mathcal{T}^M_{N,L}(\mathbf{Q}^\circ_{\mathbf{pf}}(I_L\otimes R))J^{*L}_N\left(\begin{smallmatrix} W_f\\ 0\end{smallmatrix}\right)^* F\mathbf{Q}\left(\begin{smallmatrix} 0\\ W_p\end{smallmatrix}\right)\Big\}$$
$$= c\,\mathrm{Tr}\mathbb{E}\Big\{\mathcal{T}^M_{N,L}(\mathbf{Q}^\circ_{\mathbf{ff}}(I_L\otimes R))\,(\Pi_{pf}W)^*\,F\mathbf{Q}\,(\Pi_{pf}W)$$
$$+\,\mathcal{T}^M_{N,L}(\mathbf{Q}^\circ_{\mathbf{pf}}(I_L\otimes R))J^{*L}_N\,(\Pi_{pf}W)^*\,F\mathbf{Q}\,(\Pi_{fp}W)\Big\}.$$

Аналогічно ми виразимо доданок з $\boldsymbol{\Delta}^{m_1m_2}_{i_1i_2}(ff)$ та отримаємо кінцевий вираз для $\dfrac{1}{ML}\mathrm{Tr}\mathcal{E}F$:

$$\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}\mathcal{E}F = \frac{c}{(1-c_N^2\boldsymbol{\alpha}^2)}\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}\mathbb{E}\Big\{\mathcal{T}^M_{N,L}(\mathbf{Q}^\circ_{\mathbf{ff}}(I_L\otimes R))\,(\Pi_{pf}W)^*\,F\mathbf{Q}\,(\Pi_{pf}W)$$
$$+\,\mathcal{T}^M_{N,L}(\mathbf{Q}^\circ_{\mathbf{pf}}(I_L\otimes R))J^{*L}_N\,(\Pi_{pf}W)^*\,F\mathbf{Q}\,(\Pi_{fp}W)$$
$$-\,c\boldsymbol{\alpha}\mathcal{T}^M_{N,L}(\mathbf{Q}^\circ_{\mathbf{pp}}(I_L\otimes R))\,(\Pi_{pf}W)^*\,F\mathbf{Q}\,(\Pi_{fp}W)$$
$$-\,c\boldsymbol{\alpha}J^L_N\mathcal{T}^M_{N,L}(\mathbf{Q}^\circ_{\mathbf{fp}}(I_L\otimes R))\,(\Pi_{pf}W)^*\,F\mathbf{Q}\,(\Pi_{pf}W)\Big\} \quad (2.66)$$

Для оцінки першого доданку правої частини (2.66) ми застосуємо нерівність Шварца

$$\left|\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}\mathbb{E}\Big\{\mathcal{T}_{N,L}^{M}(\mathbf{Q}_{\mathbf{ff}}^{\circ}(I_L\otimes R))\,(\Pi_{pf}W)^*\,F\mathbf{Q}\,(\Pi_{pf}W)\,\Big\}\right|$$

$$=\left|\sum_{l=-L+1}^{L-1}\mathbb{E}\Big\{\tau^{(M)}(\mathbf{Q}_{\mathbf{ff}}^{\circ}(I_L\otimes R))(l)\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}\Big(J_N^{*l}\,(\Pi_{pf}W)^*\,F\mathbf{Q}\,(\Pi_{pf}W)\,\Big)\Big\}\right|$$

$$=\left|\sum_{l=-L+1}^{L-1}\mathbb{E}\Big\{\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}(\mathbf{Q}_{\mathbf{ff}}^{\circ}(I_L\otimes R)(J_L^l\otimes I_M))\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}\Big(J_N^{*l}\,(\Pi_{pf}W)^*\,F\mathbf{Q}\,(\Pi_{pf}W)\,\Big)^{\circ}\Big\}\right|$$

$$\leq\sum_{l=-L+1}^{L-1}\mathbf{Var}\left\{\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}(\mathbf{Q}_{\mathbf{ff}}(I_L\otimes R)(J_L^l\otimes I_M))\right\}^{1/2}$$

$$\times\,\mathbf{Var}\left\{\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}\Big(J_{(N)}^{*l}\,(\Pi_{pf}W)^*\,F\mathbf{Q}\,(\Pi_{pf}W)\,\Big)\right\}^{1/2}$$

Оскільки усі матриці $I_L\otimes R$, $(J_L^l\otimes I_M)$, J_N^{*l}, Π_{pf}, F, Π_{pf} обмежені за нормою, ми можемо застосувати Лему 2.3 та отримати, що

$$\mathbf{Var}\left\{\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}(\mathbf{Q}_{\mathbf{ff}}(I_L\otimes R)(J_L^l\otimes I_M))\right\}\leq\frac{1}{N^2}P_1(|z^2|)P_2\left(\frac{1}{\mathrm{Im}z^2}\right)$$

та

$$\mathbf{Var}\left\{\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}\Big(J_{(N)}^{*l}\,(\Pi_{pf}W)^*\,F\mathbf{Q}\,(\Pi_{pf}W)\,\Big)\right\}\leq\kappa^2\frac{1}{N^2}P_1(|z^2|)P_2\left(\frac{1}{\mathrm{Im}z^2}\right).$$

Згідно з нашим припущенням, L не зростає при зростанні N, це негайно дає

$$\left|\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}\mathbb{E}\Big\{\mathcal{T}_{N,L}^{M}(\mathbf{Q}_{\mathbf{ff}}^{\circ}(I_L\otimes R))\,(\Pi_{pf}W)^*\,F\mathbf{Q}\,(\Pi_{pf}W)\,\Big\}\right|\leq\kappa\frac{1}{N^2}P_1(|z^2|)P_2\left(\frac{1}{\mathrm{Im}z^2}\right).$$

Аналогічно ми можемо обмежити 3 інших доданки правої частини (2.66) схожими виразами. Залишилось оцінити множники $\frac{1}{1-(c_N\,\boldsymbol{\alpha}_N)^2}$ та $\frac{\boldsymbol{\alpha}_N}{1-(c_N\,\boldsymbol{\alpha}_N)^2}$. Для цього ми використовуємо Лему 2.5, беручи $\beta_N(z)=\alpha_N(z)$. Достатньо перевірити, що міра $(\overline{\mu}_N)_{N\geq 1}$, яка відповідає функції $(\alpha_N(z))_{N\geq 1}$ задовольняє (2.36) та (2.37). Дійсно, для усіх N маємо

$$\int_0^{+\infty}d\,\overline{\mu}_N(\lambda)=\mathbb{E}\left(\int_0^{+\infty}d\,\hat{\mu}_N(\lambda)\right)=\frac{1}{M}\mathrm{Tr}R_N$$

та

$$\int_0^{+\infty}\lambda\,d\,\overline{\mu}_N(\lambda)=\mathbb{E}\left(\int_0^{+\infty}\lambda\,d\,\hat{\mu}_N(\lambda)\right)=\mathbb{E}\left(\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}((I_L\otimes R)W_fW_p^*W_pW_f^*)\right).$$

Після нескладного обчислення маємо, що
$\mathbb{E}\left(\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}(W_f W_p^* W_p W_f^*)\right) = c_N \frac{1}{M}\mathrm{Tr}R_N \frac{1}{M}\mathrm{Tr}R_N^2$. Таким чином, (2.39) негайно дає

$$\frac{1}{|1 - z(c_N \alpha_N(z))^2|} \leq P_1(|z|)P_2(\frac{1}{\mathrm{Im}z}) \tag{2.67}$$

для усіх $z \in \mathbb{C}^+$ та якщо $z^2 \in \mathbb{C}^+$, справедливо

$$\frac{1}{|1 - z^2(c_N \alpha_N(z^2))^2|} \leq P_1(|z^2|)P_2(\frac{1}{\mathrm{Im}z^2}).$$

Оскільки $\boldsymbol{\alpha}_N(z) = z\alpha_N(z^2)$, також маємо

$$\frac{1}{1 - (c_N\, \boldsymbol{\alpha}_N)^2} \leq P_1(|z^2|)P_2(\frac{1}{\mathrm{Im}z^2}).$$

Нарешті, зауважимо, що $|\alpha_N(z)| \leq \frac{1}{M}\mathrm{Tr}R_N\, \frac{1}{\mathrm{Im}z} \leq b\,\frac{1}{\mathrm{Im}z}$ для усіх $z \in \mathbb{C}^+$. Тому, для $z^2 \in \mathbb{C}^+$ справедливо $|\alpha_N(z^2)| \leq b\,\frac{1}{\mathrm{Im}z^2}$ та $|\boldsymbol{\alpha}_N(z)| = |z||\alpha_N(z^2)|$ задовольняє

$$|\boldsymbol{\alpha}_N(z)| \leq b|z|\,\frac{1}{\mathrm{Im}z^2} \leq b(1 + |z|^2)\,\frac{1}{\mathrm{Im}z^2}.$$

Це завершує доведення Пропозиції 2.1. ■

З останньої пропозиції негайно випливає наступний Наслідок.

Наслідок 2.2. *Для послідовності невипадкових $ML\times ML$ матриць $(F_N)_{N\geq 1}$, для яких $\sup_{N\geq 1} \leq \kappa$, маємо*

$$\left|\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}\left[\left(\mathbb{E}(Q_N(z)) - I_L \otimes S_N(z)\right) F_N\right]\right| \leq \kappa\,\frac{1}{N^2}P_1(|z|)P_2(\frac{1}{\mathrm{Im}z}) \tag{2.68}$$

для усіх $z \in \mathbb{C}^+$. Зокрема, справедливо, що

$$\left|\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}\left[\left(\mathbb{E}(Q_N(z)) - I_L \otimes S_N(z)\right)\right]\right| \leq \kappa\,\frac{1}{N^2}P_1(|z|)P_2(\frac{1}{\mathrm{Im}z}) \tag{2.69}$$

Доведення. З (2.61) випливає, що

$$\left|\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}\left[\left(\mathbb{E}(Q_N(z^2)) - I_L \otimes S_N(z^2)\right) F_N\right]\right| = \left|\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}\mathcal{E}_{pp}(z)S_N(z^2)F_N\right|$$

Оскільки $\|S_N(z^2)\| \leq \frac{1}{\mathrm{Im}z^2}$ для $z^2 \in \mathbb{C}^+$, застосовування Пропозиції 2.1 до матриці $F_{1,N} = S_N(z^2)F_N$ дає

$$\left|\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}\left[\left(\mathbb{E}(Q_N(z^2)) - I_L \otimes S_N(z^2)\right) F_N\right]\right| \leq \kappa\frac{1}{N^2}P_1(|z^2|)P_2(\frac{1}{\mathrm{Im}z^2})$$

для усіх z таких, що $z^2 \in \mathbb{C}^+$. Заміна z^2 на z безпосередньо дає (2.68).

2.5 Невипадкова еквівалента нормованої рахуючої міри $\hat{\nu}_N$

У цьому підрозділі ми представимо невипадкову міру ν_N та доведемо, що на $N \to +\infty$ вона поводиться як нормована рахуюча міра власних значень матриці $W_f W_f^* W_p W_p^*$. На початку ми доведемо що така міра існує та наведемо рівняння для її перетворення Стилтьєса.

2.5.1 Канонічне рівняння

Пропозиція 2.2. *Для $z \in \mathbb{C}^+$, існує єдиний розв'язок рівняння*

$$t_N(z) = \frac{1}{M} \mathrm{Tr} R_N \left(-z I_M - \frac{z c_N t_N(z)}{1 - z c_N^2 t_N^2(z)} R_N \right)^{-1} \tag{2.70}$$

котрий задовольняє $t_N(z) \in \mathbb{C}^+$ та $z t_N(z) \in \mathbb{C}^+$. Функція $z \to t_N(z)$ належить $\mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$, та відповідна невід'ємна міра μ_N задовольняє

$$\mu_N(\mathbb{R}^+) = \frac{1}{M} \mathrm{Tr} R_N, \quad \int_{\mathbb{R}^+} \lambda \, d\, \mu_N(\lambda) = c_N \, \frac{1}{M} \mathrm{Tr} R_N \, \frac{1}{M} \mathrm{Tr} R_N^2. \tag{2.71}$$

Більш того, існують хороші константи β та κ для яких

$$\frac{1}{\left| 1 - z \left(c_N \, t_N(z) \right)^2 \right|} \leq \frac{\kappa \left(\beta^2 + |z|^2 \right)^2}{\left(\mathrm{Im} z \right)^3} \tag{2.72}$$

для усіх N. Нарешті, $M \times M$ матрично-значна функція $T_N(z)$, що визначається як

$$T_N(z) = -\left(z I_M + \frac{z c_N t_N(z)}{1 - z c_N^2 t_N^2(z)} R_N \right)^{-1} \tag{2.73}$$

належить до $\mathcal{S}_M(\mathbb{R}^+)$. Та для відповідної $M \times M$ невід'ємної матрично-значної міри ν_N^T, виконується

$$\nu_N^T(\mathbb{R}^+) = I_M \tag{2.74}$$

та

$$\mu_N = \frac{1}{M} \mathrm{Tr} R_N \nu_N^T. \tag{2.75}$$

Доведення. Оскільки N у цієї Пропозиції припускається незмінним, ми опустимо індекси у $t_N, T_N, \mu_N, \ldots$ упродовж доведення. На початку ми покажемо, що існує розв'язок $z \to t(z)$, який належить до $\mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$. Для цього будемо використовувати класичний метод простої ітерації. Покладемо $t_0(z) = -\frac{1}{z}$, що звичайно належить до $\mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$, та визначимо послідовність $(t_n(z))_{n\geq 1}$ за формулою

$$t_{n+1}(z) = \frac{1}{M}\mathrm{Tr}R\left(-zI_M - \frac{zct_n(z)}{1 - zc^2t_n^2(z)}R\right)^{-1}.$$

Доведемо методом математичної індукції, що для усіх n, $t_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$, відповідна міра μ_n задовольняє $\mu_n(\mathbb{R}^+) = \frac{1}{M}\mathrm{Tr}R$ та

$$\int_0^{+\infty} \lambda d\mu_n(\lambda) = c\frac{1}{M}\mathrm{Tr}(R)\frac{1}{M}\mathrm{Tr}(R^2). \tag{2.76}$$

Завдяки Припущенню 2.1, остання властивість тягне за собою, що послідовність мір $(\mu_n)_{n\geq 1}$ щільна. База індукції очевидна, далі вважаємо, що t_n задовольняє описаним властивостям та доведемо, що це справедливо також для $t_{n+1}(z)$. Згідно з Пропозицією 1.1, щоб довести, що $t_{n+1}(z) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$, необхідно перевірити, що $\mathrm{Im}t_{n+1}(z), \mathrm{Im}zt_{n+1}(z) > 0$ для $z \in \mathbb{C}^+$ та показати, що існує границя $\lim_{y\to+\infty} iyt_{n+1}(iy)$. З Леми 2.4 випливає, що функція $T_n(z) = \left(-zI_M - \dfrac{zct_n(z)}{1 - zc^2t_n^2}R\right)^{-1}$ належить до $\mathcal{S}_M(\mathbb{R}^+)$. Оскільки $t_{n+1}(z) = \frac{1}{M}\mathrm{Tr}RT_n(z)$, маємо негайно, що $\mathrm{Im}t_{n+1}(z)$, $\mathrm{Im}zt_{n+1}(z) > 0$. Нарешті, щоб знайти границю $\lim_{y\to+\infty} iyt_{n+1}(iy)$, розпишемо згідно з визначенням:

$$-iyt_{n+1}(iy) = \frac{1}{M}\mathrm{Tr}R\left(I_M + \frac{ciyt_n(iy)}{iy - (ciyt_n(iy))^2}R\right)^{-1}.$$

Оскільки $t_n(z)$ є перетворенням Стілтьєса, маємо $-iyt_n(iy) \to \mu_n(\mathbb{R}^+)$. З цього випливає, що якщо ми перейдемо до $y \to +\infty$ у попередньому виразі, ми отримаємо, що $-iyt_{n+1}(iy) \to \frac{1}{M}\mathrm{Tr}R$ та крім того $\mu_{n+1}(\mathbb{R}^+) = \frac{1}{M}\mathrm{Tr}R$.

Залишилось перевірити, що μ_{n+1} задовольняє (2.76). Для цього ми наслідуємо метод з [Lemma C.1, [32]]. Нескладно показати, що

$$\int_0^{+\infty} \lambda d\mu_{n+1}(\lambda) = \lim_{y\to+\infty} \Re\left(-iy(iy\frac{1}{M}\mathrm{Tr}RT_n(iy) + \frac{1}{M}\mathrm{Tr}R)\right).$$

Скориставшись двічі резольвентною тотожністю, ми можемо виразити T_n як

$$T_n = -\frac{1}{z}\left(I_M + \frac{ct_n}{1-zc^2t_n^2}R\right)^{-1} = -\frac{1}{z} + \frac{R}{z}\frac{ct_n}{1-zc^2t_n^2} - \left(\frac{ct_n}{1-zc^2t_n^2}\right)^2 R^2T_n,$$

з чого випливає, що

$$- z\left(\frac{1}{M}\mathrm{Tr}(zRT_n(z)) + \frac{1}{M}\mathrm{Tr}R\right) = -\frac{czt_n}{1-zc^2t_n^2}\frac{1}{M}\mathrm{Tr}R^2 + \left(\frac{czt_n}{1-zc^2t_n^2}\right)^2\frac{1}{M}\mathrm{Tr}R^3T_n.$$

Оскільки $-iyt_n(iy) \to \frac{1}{M}\mathrm{Tr}R$ та $t_n(iy) \to 0$ ми робимо висновок, що

$$-iy(iy\frac{1}{M}\mathrm{Tr}RT_n(iy) + \frac{1}{M}\mathrm{Tr}R) \to \frac{c}{M^2}\mathrm{Tr}R\mathrm{Tr}R^2,$$

що і треба було довести.

Тепер доведемо, що послідовність t_n збігається к деякій функції $t \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$, яка задовольняє рівнянню (2.70). Для цього ми спершу оцінимо різницю $\theta_n = t_{n+1} - t_n$. Використовуючи резольвенту тотожність (1.5), розкладемо

$$\theta_n = \frac{1}{M}\mathrm{Tr}R(T_n - T_{n-1}) = \frac{1}{M}\mathrm{Tr}RT_n\frac{zc(t_n - t_{n-1})(1+zc^2t_nt_{n-1})}{(1-zc^2t_n^2)(1-zc^2t_{n-1}^2)}RT_{n-1}$$
$$= \theta_{n-1}\frac{zc(1+zc^2t_nt_{n-1})}{(1-zc^2t_n^2)(1-zc^2t_{n-1}^2)}\frac{1}{M}\mathrm{Tr}RT_nRT_{n-1}.$$

Позначимо через $f_n(z)$ множник

$$f_n(z) = \frac{zc(1+zc^2t_nt_{n-1})}{(1-zc^2t_n^2)(1-zc^2t_{n-1}^2)}\frac{1}{M}\mathrm{Tr}RT_nRT_{n-1} \tag{2.77}$$

Якщо у Лемі 2.4 взяти $\beta(z) = t_k(z)$, отримуємо що $\|T_k\| \le \frac{1}{\mathrm{Im}z}$ та $|t_k| \le \frac{b}{\mathrm{Im}z}$ для усіх $k \ge 1$ та $z \in \mathbb{C}^+$. Таким чином, маємо

$$\left|zc(1+zc^2t_nt_{n-1})\frac{1}{M}\mathrm{Tr}RT_nRT_{n-1}\right| \le \kappa\left(\frac{|z|}{(\mathrm{Im}z)^2}\left(1+\frac{|z|}{(\mathrm{Im}z)^2}\right)\right).$$

Більш того, очевидно, що для усіх k справедливо $|1 - zc^2t_k^2| \ge (1 - c^2\frac{|z|}{(\mathrm{Im}z)^2})$. Далі розглянемо область $\mathcal{D}_\epsilon$ для достатньо малих $\epsilon > 0$, яка визначається наступним чином

$$\mathcal{D}_\epsilon = \{z \in \mathbb{C}^+, \frac{|z|}{(\mathrm{Im}z)^2} < \epsilon\}. \tag{2.78}$$

Тоді, для $z \in \mathcal{D}_\epsilon$ маємо

$$\frac{1}{|1 - zc^2t_n^2|}\frac{1}{|1 - zc^2t_{n-1}^2|} \leq \frac{1}{(1-c^2\epsilon)^2}$$

та, як наслідок,

$$|f_n(z)| \leq \frac{\kappa}{(1-c^2\epsilon)^2}\left(\epsilon + \epsilon^2\right).$$

Оберемо ϵ таким чином, що $\frac{\kappa}{(1-c^2\epsilon)^2}\left(\epsilon + \epsilon^2\right) < 1/2$. Тоді для усіх $z \in \mathcal{D}_\epsilon$, виконується

$$|\theta_n| \leq \frac{1}{2}|\theta_{n-1}|.$$

Це означає, що для усіх z, які належать до $\mathcal{D}_\epsilon$, послідовність $(t_n(z))_{n\geq 1}$ є послідовністю Коші. Тобто на області $\mathcal{D}_\epsilon$ вона має границю, яку ми позначимо через $t(z)$. Оскільки $(t_n(z))_{n\geq 1}$ рівномірно обмежена на компактній множині $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$, $(t_n(z))_{n\geq 1}$ утворює нормальну сім'ю функцій на $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$. Розглянемо тоді збіжну підпослідовність $(t_{n'}(z))_{n'\geq 1}$. Її відповідна границя $t_*(z)$ аналітична на $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^+$. Але, для $z \in \mathcal{D}_\epsilon$, $t_*(z)$ повинна співпадати з $t(z)$. Таким чином ми маємо, що границі усіх збіжних підпослідовностей послідовності $(t_n(z))_{n\geq 1}$ співпадають на $\mathcal{D}_\epsilon$, це тягне за собою, що вони співпадають також на $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^+$. З цього випливає, що $t_n(z)$ рівномірно збігається на кожній компактній підмножині до деякої функції, яка аналітична на $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^+$, та яку ми також позначимо через $t(z)$. Очевидно, що $t(z)$ задовольняє (2.70) та $t \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$, також очевидно виконуються (2.71). Більш того, з Леми 2.4 випливає, що $T \in \mathcal{S}_M(\mathbb{R}^+)$ та негайно отримуємо твердження (2.75) та (2.74).

Таким чином, твердження (2.71) очевидно виконується, (2.72) є наслідком Леми 2.5 для $\beta_N(z) = t_N(z)$.

Щоб показати, що такий розв'язок єдиний, ми доведемо, що якщо для $z \in \mathbb{C}^+$ функції $t_1(z)$, $t_2(z)$ є розв'язками рівняння (2.70) такі, що $t_i(z)$ та $zt_i(z)$ належать до $\mathbb{C}^+$, $i = 1, 2$, тоді $t_1(z) = t_2(z)$. Для цього нам знадобиться наступна Лема.

Лема 2.7. *Якщо для $z \in \mathbb{C}^+$ функція $t(z)$ задовольняє умовам Пропозиції 2.2, тоді справедливі нерівності*

$$1 - u(z) > 0 \tag{2.79}$$

та

$$\det(\mathbf{I}-\mathbf{D}) > 0, \tag{2.80}$$

де

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} u(z) & v(z) \\ |z|^2 v(z) & u(z) \end{pmatrix} \tag{2.81}$$

$$u(z) = c\,\frac{|czt(z)|^2\,\frac{1}{M}\mathrm{Tr}(RT(z)(T(z))^* R)}{|1-z(ct(z))^2|^2} \tag{2.82}$$

$$v(z) = c\,\frac{\frac{1}{M}\mathrm{Tr}(RT(z)(T(z))^* R)}{|1-z(ct(z))^2|^2}. \tag{2.83}$$

Доведення. Використовуючи рівність $t(z) = \frac{1}{M}\mathrm{Tr}RT(z)$, ми отримаємо після деяких обчислень, що

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{Im}(t(z))}{\mathrm{Im}(z)} \\ \frac{\mathrm{Im}(zt(z))}{\mathrm{Im}(z)} \end{pmatrix} = \mathbf{D} \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{Im}(t(z))}{\mathrm{Im}(z)} \\ \frac{\mathrm{Im}(zt(z))}{\mathrm{Im}(z)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{M}\mathrm{Tr}(RT(z)(T(z))^*) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.84}$$

Перша компонента (2.84) дає нам

$$(1-u(z))\,\frac{\mathrm{Im}(t(z))}{\mathrm{Im}(z)} = v(z)\,\frac{\mathrm{Im}(zt(z))}{\mathrm{Im}(z)} + \frac{1}{M}\mathrm{Tr}(RT(z)(T(z))^*).$$

З чого легко зробити висновок, що $(1-u(z)) > 0$. Далі підставимо рівність

$$\frac{\mathrm{Im}(t(z))}{\mathrm{Im}(z)} = \frac{v(z)}{1-u(z)}\,\frac{\mathrm{Im}(zt(z))}{\mathrm{Im}(z)} + \frac{1}{1-u(z)}\,\frac{1}{M}\mathrm{Tr}(RT(z)(T(z))^*)$$

у другу компоненту (2.84), отримаємо

$$\left(1-u(z)-\frac{|z|^2 v^2(z)}{1-u(z)}\right)\frac{\mathrm{Im}(zt(z))}{\mathrm{Im}(z)} = \frac{|z|^2 v(z)}{1-u(z)}\,\frac{1}{M}\mathrm{Tr}(RT(z)(T(z))^*) > 0,$$

що негайно дає (2.80). $\Box$

Повернемося до доведення єдиності розв'язку. З доведення Леми 2.4 (див. (2.33)) випливає, що $1 - z(ct_i(z))^2 \neq 0$ для $i = 1, 2$, та матриця $-zI_M - \dfrac{zct_i(z)}{1-zc^2t_i^2(z)}R$ невироджена. Позначимо через $T_1(z)$ та $T_2(z)$, матриці, які визначаються як у (2.73) для $t(z) = t_1(z)$ та $t(z) = t_2(z)$ відповідно. Також, схоже до (2.82) та (2.83), ми визначимо $u_i(z)$ та $v_i(z)$, $i = 1, 2$, беручи $t(z) = t_1(z)$

та $t(z) = t_2(z)$. Використовуючи факт, що $t_i(z) = \frac{1}{M}\mathrm{Tr}(RT_i(z))$ для $i = 1, 2$, ми негайно отримуємо

$$t_1(z) - t_2(z) = (u_{1,2}(z) + zv_{1,2}(z))\ (t_1(z) - t_2(z)),$$

де

$$u_{1,2}(z) = c\,\frac{czt_1(z)czt_2(z)\,\frac{1}{M}\mathrm{Tr}(RT_1(z)RT_2(z))}{(1 - z(ct_1(z))^2)\,(1 - z(ct_2(z))^2)} \tag{2.85}$$

та

$$v_{1,2}(z) = c\,\frac{\frac{1}{M}\mathrm{Tr}(RT_1(z)RT_2(z))}{(1 - z(ct_1(z))^2)\,(1 - z(ct_2(z))^2)}. \tag{2.86}$$

Таким чином, щоб довести, що $t_1(z) = t_2(z)$, достатньо показати, що $1 - u_{1,2}(z) - zv_{1,2}(z) \neq 0$. Для цього ми доведемо наступну нерівність:

$$|1 - u_{1,2}(z) - zv_{1,2}(z)| > \sqrt{(1 - u_1(z)) - |z|v_1(z)}\,\sqrt{(1 - u_2(z)) - |z|v_2(z)}, \tag{2.87}$$

яка, з Лемою 2.7, одразу дає $1 - u_{1,2}(z) - zv_{1,2}(z)) \neq 0$. Для початку зауважимо, що з нерівності Шварца випливає $|u_{1,2}(z)| \leq \sqrt{u_1(z)}\sqrt{u_2(z)}$ та $|v_{1,2}(z)| \leq \sqrt{v_1(z)}\sqrt{v_2(z)}$. Таким чином ми маємо

$$|1 - u_{1,2}(z) - zv_{1,2}(z)| \geq 1 - \sqrt{u_1(z)}\sqrt{u_2(z)} - \sqrt{|z|v_1(z)}\sqrt{|z|v_2(z)}.$$

Нескладно показати, що для невід'ємних дійсних чисел a, b, c, d, для яких $a \geq c$ та $b \geq d$, справедлива нерівність

$$\sqrt{ab} - \sqrt{cd} \geq \sqrt{a - c}\,\sqrt{b - d}. \tag{2.88}$$

Візьмемо $a = b = 1$ та $c = u_1(z)$, $d = u_2(z)$ у (2.88), тоді отримуємо $1 - \sqrt{u_1(z)}\sqrt{u_2(z)} \geq \sqrt{1 - u_1(z)}\sqrt{1 - u_2(z)}$, що тягне за собою

$$|1 - u_{1,2}(z) - zv_{1,2}(z)| \geq \sqrt{1 - u_1(z)}\sqrt{1 - u_2(z)} - \sqrt{|z|v_1(z)}\sqrt{|z|v_2(z)}.$$

Нарешті, застосуємо ще раз (2.88) для $a = 1 - u_1(z)$, $b = 1 - u_2(z)$, $c = |z|v_1(z)$ та $d = |z|v_2(z)$ та негайно отримаємо (2.87). Єдиність розв'язку рівняння (2.70) доведена, так само, як і Пропозиція 2.2. ■

Зауваження 2.1. *Нерівності (2.79) та (2.80) справедливі навіть для z з $\mathbb{R}^{-*}$. Для цього достатньо зауважити, що якщо $z = x \in \mathbb{R}^{-*}$, фундаментальне рівняння (2.84) досі виконується, але $\frac{\mathrm{Im}(t(z))}{\mathrm{Im}(z)}$ та $\frac{\mathrm{Im}(zt(z))}{\mathrm{Im}(z)}$ потрібно замінити на $t'(x)$ та $(xt(x))'$, де $'$ позначає похідну відносно до x. Висновок залишається незмінним, оскільки $t'(x) > 0$ та $(xt(x))' > 0$ для $x \in \mathbb{R}^{-*}$.*

2.5.2 Збіжність

У цій частині ми покажемо, що емпіричний розподіл власних значень $\hat{\nu}_N$ матриці $W_{f,N}W^*_{p,N}W_{p,N}W^*_{f,N}$ має майже напевно таку ж невипадкову поведінку, як і ймовірнісна міра ν_N, що визначається наступним чином

$$\nu_N = \frac{1}{M}\mathrm{Tr}\nu_N^T, \tag{2.89}$$

де ν_N^T є невід'ємною матрично-значною мірою, яка відповідає $T_N(z)$. Для цього спершу доведемо наступну Пропозицію.

Пропозиція 2.3. *Нехай $(F_N)_{N\geq 1}$– послідовність невипадкових $ML \times ML$ матриць, таких, що $\sup_{N\geq 1}\|F_N\| \leq \kappa$, тоді,*

$$\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}\left[\left(\mathbb{E}(Q_N(z)) - I_L \otimes T_N(z)\right)F_N\right] \to 0 \tag{2.90}$$

для усіх $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$.

Доведення. Наслідок 2.2 нам дає

$$\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}(\mathbb{E}\{Q_N\} - (I_L \otimes S_N))F_N = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

Таким чином насправді нам необхідно перевірити, що $\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}(I_L \otimes (S_N - T_N))F_N \to 0$. У подальшому ми опустимо індекс N. Для цього, як завжди, ми використовуємо резольвентну тотожність та розкладемо шуканий вираз

$$\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}\left(I_L \otimes (S-T)\right)F = \frac{1}{ML}\mathrm{Tr}(I_L \otimes S)\left(\frac{zc_N\alpha}{1 - zc_N^2\alpha^2} - \frac{zc_N t}{1 - zc_N^2 t^2}\right)\times$$
$$\times (I_L \otimes RT)F = \frac{zc_N(\alpha - t)(1 + zc_N^2\alpha t)}{(1 - zc_N^2\alpha^2)(1 - zc_N^2 t^2)}\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}(I_L \otimes SRT)F. \tag{2.91}$$

Запишемо множник $\alpha - t$ як $\alpha - \frac{1}{M}\mathrm{Tr}RS + \frac{1}{M}\mathrm{Tr}R(S-T)$, тоді (2.91) набуває вигляду

$$\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}\left(I_L \otimes (S-T)\right)F = \left(\alpha - \frac{1}{M}\mathrm{Tr}RS\right)\frac{zc_N(1 + zc_N^2\alpha t)}{(1 - zc_N^2\alpha^2)(1 - zc_N^2 t^2)}$$
$$\times\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}(I_L \otimes SRT)F + \frac{1}{M}\mathrm{Tr}R(S-T)\,\frac{zc_N(1 + zc_N^2\alpha t)}{(1 - zc_N^2\alpha^2)(1 - zc_N^2 t^2)}\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}(I_L \otimes SRT)F. \tag{2.92}$$

З (2.68) маємо $\alpha - \frac{1}{M}\mathrm{Tr}RS = \mathcal{O}_z(\frac{1}{N^2})$. Згідно з (2.67) та (2.72) відповідні множники обмежені, таким чином для (2.90) достатньо довести, що $\frac{1}{M}\mathrm{Tr}R(S - T) \to 0$. Для цього покладемо $F = I_L \otimes R$ у (2.92) та отримаємо

$$\frac{1}{M}\mathrm{Tr}R(S(z) - T(z)) = f_N(z)\,\frac{1}{M}\mathrm{Tr}R(S(z) - T(z)) + \mathcal{O}_z(\frac{1}{N^2}) \tag{2.93}$$

де функція $f_N(z)$ визначається як

$$f_N(z) = \frac{zc_N(1 + zc_N^2\alpha t)}{(1 - zc_N^2\alpha^2)(1 - zc_N^2 t^2)}\frac{1}{M}\mathrm{Tr}(RS(z)RT(z)).$$

Нескладно помітити, що $f_N(z)$ аналогічно виразу, який був визначений у (2.77). Тому, використовуючи схожі міркування, які були наведені при доведенні Пропозиції 2.2, ми отримаємо, що існує $\epsilon > 0$, для якого $\sup_{N\geq N_0}|f_N(z)| < \frac{1}{2}$ якщо $z \in \mathcal{D}_\epsilon$ та N_0 достатньо велике. Нагадаємо, що $\mathcal{D}_\epsilon$ визначається як у (2.78). Тепер, з допомогою (2.93) та (2.92), ми можемо легко зробити висновок, що $\frac{1}{M}\mathrm{Tr}R(S(z) - T(z)) \to 0$ та $\dfrac{1}{ML}\mathrm{Tr}\left(I_L \otimes (S(z) - T(z))\right)F \to 0$ для усіх $z \in \mathcal{D}_\epsilon$. Оскільки функція $z \to \dfrac{1}{ML}\mathrm{Tr}\left(I_L \otimes (S_N(z) - T_N(z))\right)F_N$ голоморфна на $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$ та рівномірно обмежена на будь-якій компактній підмножині області $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$, з теореми Монтеля випливає, що $\dfrac{1}{ML}\mathrm{Tr}\left(I_L \otimes (S_N(z) - T_N(z))\right)F_N \to 0$ також для усіх $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$. ■

Маємо наступний Наслідок.

Наслідок 2.3. *Для емпіричного розподілу власних значень $\hat{\nu}_N$ матриці $W_{f,N}W_{p,N}^*W_{p,N}W_{f,N}^*$ виконується*

$$\hat{\nu}_N - \nu_N \to 0, N \to +\infty, \text{ слабко, майже напевно.} \tag{2.94}$$

Доведення. З Пропозиції 2.3 випливає, що $\mathbb{E}(\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}Q_N(z)) - \frac{1}{M}\mathrm{Tr}(T_N(z)) \to 0$ для усіх $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$. Нерівність Пуанкаре-Неша та Лемма Бореля-Кантеллі дають, що $\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}(Q_N(z)) - \mathbb{E}\left(\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}Q_N(z)\right) \to 0$ майже напевно для усіх $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$. Таким чином, маємо

$$\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}(Q_N(z)) - \frac{1}{M}\mathrm{Tr}(T_N(z)) \to 0 \text{ майже напевно} \tag{2.95}$$

для усіх $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$. Наслідок 2.7 у [32] дасть нам, що $\hat{\nu}_N - \nu_N \to 0$ майже напевно, при умові, якщо послідовність $(\hat{\nu}_N)_{N\geq 1}$ майже напевно щільна та

$(\nu_N)_{N\geq 1}$ також щільна. Щоб це довести, запишемо

$$\int_{\mathbb{R}^+} \lambda\, d\,\hat{\nu}_N(\lambda) = \frac{1}{ML}\mathrm{Tr}W_{f,N}W_{p,N}^*W_{p,N}W_{f,N}^* \leq \|W_N\|^4,$$

де, нагадаємо,

$$W_N = \begin{pmatrix} W_{p,N} \\ W_{f,N} \end{pmatrix}.$$

Справедливо, що $\|W_N\| \leq \sqrt{b}\,\|W_{iid,N}\|$, де $W_{iid,N}$ визначається у (2.8). Оскільки $\|W_{iid,N}\| \to (1+\sqrt{c_*})$ майже напевно (див. [49]), ми можемо зробити висновок, що $\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}W_{f,N}W_{p,N}^*W_{p,N}W_{f,N}^*$ майже напевно рівномірно обмежена для достатньо великих N. З цього випливає, що послідовність $(\hat{\nu}_N)_{N\geq 1}$ щільна майже напевно. Для послідовності $(\nu_N)_{N\geq 1}$, ми показали раніше, що $\sup_N \int_{\mathbb{R}^+} \lambda\, d\,\mu_N(\lambda) < +\infty$. Оскільки $\mu_N = \frac{1}{M}\mathrm{Tr}R_N\nu_N^T$, з умови $R_N > aI$ для усіх N випливає, що

$$\int_{\mathbb{R}^+} \lambda\, d\,\mu_N(\lambda) \geq a \int_{\mathbb{R}^+} \lambda\, d\,\nu_N(\lambda)$$

Таким чином справедливо $\sup_N \int_{\mathbb{R}^+} \lambda\, d\,\nu_N(\lambda) < +\infty$, що негайно тягне за собою, що послідовність $(\nu_N)_{N\geq 1}$ щільна. ■

Зауваження 2.2. *Беручи до уваги Прирущення 2.1, з рівності (2.75) та визначення (2.89) міри ν_N негайно випливає, що для будь якого інтервалу $\Delta \subset \mathbb{R}$ маємо $a\nu_N(\Delta) \leq \mu_N(\Delta) \leq b\nu_N(\Delta)$. Тобто міри ν_N та μ_N – абсолютно неперервні одна по відношенню до іншої.*

2.6 Отримання границі нормованої рахуючої міри $\hat{\nu}_N$ з використанням методів вільної ймовірності

Метою цього підрозділу є показати, що границю емпіричного розподілу власних значень $\hat{\nu}_N$ матриці $W_{f,N}W_{p,N}^*W_{p,N}W_{f,N}^*$ можливо знайти використовуючи методи вільної ймовірності. На початку ми стисло наведемо головні результати та визначення.

Доведення методом вільної ймовірності базується на двох спостереженнях:

- З точністю до нульових власних значень, власні значення матриці $W_{f,N}W_{p,N}^*W_{p,N}W_{f,N}^*$ співпадають з власними значеннями матриці $W_{f,N}^*W_{f,N}W_{p,N}^*W_{p,N}$.
- Матриці $W_{f,N}^*W_{f,N}$ та $W_{p,N}^*W_{p,N}$ майже напевно асимптотично вільні. Таким чином, розподіл власних значень $W_{f,N}^*W_{f,N}W_{p,N}^*W_{p,N}$ збігається до вільної мультиплікативної згортки граничних розподілів матриць $W_{f,N}^*W_{f,N}$ та $W_{p,N}^*W_{p,N}$. Виявляється, що ці два розподіли співпадають з граничним розподілом моделі добре відомих випадкових матриць виду $\frac{1}{N}X_N^*(I_L \times R_N)X_N$, де X_N комплексна Гауссова випадкова матриця розмірністю $ML \times N$, одиничною матрицею коваріацій та елементи якої є незалежними, однаково розподіленими величинами.

У подальшому ми наслідуємо визначення асимптотичної вільності, яке надається у [36] (див. зокрема частину 4.3), для цього нам знадобиться існування деяких граничних розподілів. Цій підрозділ зосереджено на поведінці границі невипадкової еквіваленти. Тим не менш зауважимо, що останні праці з вільної ймовірності (див., наприклад, [57] та відповідні посилання, [13]) дозволяють уникнути необхідності представлення граничного розподілу та отримати попередні результати для невипадкової еквіваленти ν_N для $\hat{\nu}_N$.

Для того, щоб можливо було застосовувати теорію з [36], необхідно, щоб виконувалось наступне припущення:

Припущення 2.2. Емпіричний розподіл $\omega_N = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}\delta_{\lambda_{k,N}}$ власних значень матриці R_N збігається до граничного розподілу ω.

Зауважимо, що з Припущення 2.1 випливає, що ω має компактний носій. Більш того, нескладно показати, що міри $(\mu_N)_{N\geq 1}$ та $(\nu_N)_{N\geq 1}$ слабко збігаються до границь, які ми позначимо у цій частині через μ та ν. Крім того з Леми 3.7 випливає, що міри μ та ν мають компактні носії. Також, легко перевірити, що відповідне перетворення Стілтьєса $t(z)$ міри μ задовольняє рівнянню

$$t(z) = -\frac{1}{z} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\tau\, d\omega(\tau)}{1 + \dfrac{c_* \tau t(z)}{1 - z c_*^2 t^2(z)}} \tag{2.96}$$

та перетворення Стілтьєса t_ν міри ν задається як

$$t_\nu(z) = -\frac{1}{z} - \frac{c_* t(z)^2}{1 - z(c_* t(z))^2}. \tag{2.97}$$

Нагадаємо, що c_* є границею послідовності $c_N = \frac{ML}{N}$. У подальшому ми отримаємо (2.96) та (2.97) використовуючи методи вільної ймовірності.

Почнемо з ключових визначень, які представлені у [36].

Означення 2.1. Розглянемо кінцеву сім'ю послідовностей $((X_{i,N})_{N\geq 1})_{i=1,\ldots,r}$ можливо випадкових матриць розмірністю $N \times N$. Тоді говорять, що $(X_{i,N})_{i=1,\ldots,r}$ мають майже напевно сумісну границю, якщо для будь якого некомутативного полінома $P(x_1, \ldots, x_r)$ з r змінними, $\frac{1}{N}\mathrm{Tr}P(X_{1,N}, \ldots, X_{r,N})$ збігається майже напевно до $\mu(P)$, де розподіл μ - невипадковий та визначений на множині усіх некомутативних поліномів з r змінними (тобто μ - лінійна форма, для якої $\mu(1) = 1$).

Зауважимо, що у випадку $r = 1$ та $(X_{1,N})_{N\geq 1}$ – послідовності ермітових матриць, щойно описана умова еквівалентна існуванню граничного емпіричного розподілу власних значень.

Означення 2.2. Розглянемо p сімей $(X^{(1)}_{i,N})_{i=1,\ldots,r_1}, \ldots, (X^{(p)}_{i,N})_{i=1,\ldots,r_p}$ можливо випадкових матриць розмірністю $N \times N$. Тоді говорять, що множини $X^{(1)}, \ldots, X^{(p)}$ майже напевно асимптотично вільні, якщо виконуються наступні умови:

- Для усіх $q = 1, \ldots, p$, $(X^{(q)}_{i,N})_{i=1,\ldots,r_q}$ мають майже напевно сумісну границю

- $\forall m,\ i_1, \cdots, i_m \in \{1, 2, \ldots, p\}$ для яких $i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_m$, та для будь-яких некомутативних поліномів $(P_j)_{j=1,\ldots,m}$ від $(r_{i_j})_{j=1,\ldots,m}$ змінних, таких, що $\frac{1}{N}\mathrm{Tr}(P_j(X^{i_j}_{1,N}, \ldots, X^{i_j}_{r_{i_j},N})) \to 0$ майже напевно, виконується

$$\frac{1}{N}\mathrm{Tr}(P_1(X^{i_1}_{1,N}, \ldots, X^{i_1}_{r_{i_1},N}) \cdots P_m(X^{i_m}_{1,N}, \ldots, X^{i_m}_{r_{i_m},N})) \to 0 \quad a.s. \tag{2.98}$$

Зауважимо, що якщо кожна сім'я $X^{(q)}$ є лише послідовністю $(X_N^{(q)})_{N\geq 1}$ ермітових матриць розмірністю $N \times N$, або матриць подібних до ермітових [1], тоді має місце:

Означення 2.3. Послідовності $X^{(1)}, \dots, X^{(p)}$ майже напевно вільні, якщо

- Для кожного $q = 1, \dots, p$, $(X_N^{(q)})_{N\geq 1}$ має граничний розподіл власних значень
- $\forall m$, $i_1, \cdots, i_m \in \{1, 2, \dots, p\}$, таких, що $i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_m$ та для будь яких поліномів від однієї змінної $(P_j)_{j=1\cdots m}$, для яких $\frac{1}{N}\mathrm{Tr}(P_j(X_N^{i_j})) \to 0$ майже напевно, виконується
$$\frac{1}{N}\mathrm{Tr}(P_1(X_N^{(i_1)})P_2(X_N^{(i_2)})\cdots P_m(X_N^{(i_m)})) \to 0 \quad a.s. \tag{2.99}$$

Також нам знадобиться визначення S-перетворення ймовірнісної міри та пов'язаний з ним важливий результат.

Означення 2.4. Нехай μ–ймовірнісна міра з компактним носієм, що належить до $\mathbb{R}^+$, визначимо $\psi_\mu(z)$ як формальний степеневий ряд

$$\psi_\mu(z) = \sum_{k\geq 1} z^k \int t^k d\mu(t) = \int \frac{zt}{1 - zt} d\mu(t). \tag{2.100}$$

Позначимо через χ_μ єдину функцію, аналітичну в околі нуля, що задовольняє

$$\chi_\mu(\psi_\mu(z)) = z \tag{2.101}$$

для достатньо малих $|z|$. Тоді, ми визначимо S-перетворення міри μ як функцію $S_\mu(z)$, що визначена в околі нуля як

$$S_\mu(z) = \chi_\mu(z)\frac{1 + z}{z}. \tag{2.102}$$

Більш того, якщо ймовірнісні міри μ_1 та μ_2 мають компактний носій, що належить до $\mathbb{R}^+$, S-перетворення $S_{\mu_1 \boxtimes \mu_2}$ міри $\mu_1 \boxtimes \mu_2$ задовольняє

$$S_{\mu_1 \boxtimes \mu_2} = S_{\mu_1} S_{\mu_2}. \tag{2.103}$$

[1]мається на увазі, що $X_N^{(q)} = U_N^{(q)} H_N^{(q)} (U_N^{(q)})^{-1}$ для деякої $N \times N$ ермітової матриці $H_N^{(q)}$

Нарешті ми можемо навести головний результат розділу.

Пропозиція 2.4. *Матриці* $W_{f,N}^{*}W_{f,N}$ *та* $W_{p,N}^{*}W_{p,N}$ *майже напевно асимптотично вільні.*

Доведення. На початку зауважимо, що замість матриць W_f та W_p ми можемо розглядати їх кінцеве збурення, оскільки згідно з самим визначенням, кінцеве збурення не впливає на майже напевну асимптотичну вільність. Таким чином, ми замінимо W_p та W_f на $\tilde{W}_p = \frac{1}{\sqrt{N}}\tilde{Y}_p$ та $\tilde{W}_f = \frac{1}{\sqrt{N}}\tilde{Y}_f$, де $\tilde{Y}_p$ та $\tilde{Y}_f$ визначаються як

$$\tilde{Y}_p = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & y_N \\ y_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & y_N & y_1 \\ y_3 & \dots & \dots & \dots & y_N & y_1 & y_2 \\ \vdots & \dots & \dots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ y_L & \dots & y_N & y_1 & y_2 & \dots & y_{L-1} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{Y}_f = \begin{pmatrix} y_{L+1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & y_N & y_1 & \dots & y_L \\ y_{L+2} & \dots & \dots & \dots & \dots & y_N & y_1 & \dots & y_L & y_{L+1} \\ y_{L+3} & \dots & \dots & \dots & y_N & y_1 & \dots & y_L & y_{L+1} & y_{L+2} \\ \vdots & \dots & \dots & \iddots & \iddots & \dots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ y_{2L} & \dots & y_N & y_1 & \dots & y_L & y_{L+1} & y_{L+2} & \dots & y_{2L-1} \end{pmatrix}$$

Інакше кажучи, вектори $y_{N+1}, \dots, y_{N+L-1}, \dots, y_{N+2L-1}$ замінені векторами $y_1, \dots, y_{L-1}, \dots, y_{2L-1}$. Щоб спростити позначення, ми продовжимо використовувати Y_p, Y_f, W_p, W_f для змінених матриць. Визначимо $N \times N$ матрицю Π та $M \times N$ матрицю Y як

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ та } Y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$$

та запишемо Y_p і Y_f як

$$Y_p = \begin{pmatrix} Y \\ Y\Pi \\ \vdots \\ Y\Pi^{L-1} \end{pmatrix}, \quad Y_f = \begin{pmatrix} Y\Pi^{L} \\ Y\Pi^{L+1} \\ \vdots \\ Y\Pi^{2L-1} \end{pmatrix}.$$

Це дозволить нам отримати більш зручні вирази для матриць $W_p^* W_p$ та $W_f^* W_f$. Дійсно,

$$W_p^* W_p = \sum_{k=0}^{L-1} \Pi^{*k} \left(\frac{Y^* Y}{N} \right) \Pi^k, \tag{2.104}$$

$$W_f^* W_f = \sum_{k=L}^{2L-1} \Pi^{*k} \left(\frac{Y^* Y}{N} \right) \Pi^k. \tag{2.105}$$

Нагадаємо, що $N^{-1} Y^* Y$ може бути записана як $N^{-1} Y_{iid}^* R_N Y_{iid}$, де компоненти матриці Y_{iid} гауссівські, незалежні, однаково розподілені, звідси ермітова матриця $N^{-1} Y^* Y$ унітарно інваріантна. Більш того Припущення 2.2 дає, що $N^{-1} Y^* Y$ має граничний розподіл. Також легко помітити, що сім'я $\{I, \Pi^*, \Pi, \ldots, \Pi^{*2L-1}, \Pi^{2L-1}\}$ має такі ж властивості. З цього та Теореми 4.3.5 у [36] випливає, що $Y^* Y / N$ та $\{I, \Pi^*, \Pi, \ldots, \Pi^{*2L-1}, \Pi^{2L-1}\}$ майже напевно асимптотично вільні. Таким чином, пропозиція 2.4 виявляється прямим наслідком наступної Леми, що є варіантом Леми 6 з [24]. Для того, щоб встановити зв'язок між Лемою 2.8 Лемою 6 з [24], ми будемо використовувати аналогічні позначення.

Лема 2.8. *Розглянемо послідовність $N \times N$ ермітових матриць $(X^N)_{N \geq 1}$ та $N \times N$ невипадкових матриць $U_1^N, W_1^N, \ldots, U_m^N, W_m^N$, такі, що X_N та $\{U_1^N, W_1^N, \ldots, U_m^N, W_m^N\}$ майже напевно асимптотично вільні. Якщо крім того, $U_1^N, W_1^N, \ldots, U_m^N, W_m^N$ задовольняють*

$$U_i^N W_i^N = W_i^N U_i^N = I_N \tag{2.106}$$

для усіх $i = 1, \ldots, m$ та $\frac{1}{N} \mathrm{Tr}(U_i^N W_j^N) = \delta_{i,j}$ для усіх $i, j = 1 \ldots m$, тоді випадкові матриці $U_1^N X^N W_1^N, \ldots, U_m^N X^N W_m^N$ майже напевно асимптотично вільні.

Доведення. Ми будемо доводити цю Лему наслідуючи доведення відповідної Леми з [24]. У подальшому ми опустимо індекс N. Згідно з (2.106) маємо, що $W_i = U_i^{-1}$, тобто матриці $(U_i X W_i)_{i=1,\ldots,m}$ подібні до ермітової матриці X. Таким чином, ми маємо перевірити дві умови з Означення 2.3. Перша є очевидною. Для перевірки умови (2.99), ми розглянемо будь-які k індексів $i_1, \cdots, i_k$, для яких $i_1 \neq \cdots \neq i_k$ та поліноми P_j такі, що $\frac{1}{n} \mathrm{Tr}(P_j(U_{i_j} X W_{i_j})) \to 0$ майже напевно. Використовуючи знову (2.106), нескладно отримати, що

$P_j(U_{i_j}XW_{i_j}) = U_{i_j}P_j(X)W_{i_j}$ та як наслідок, $\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(P_j(X)) \to 0$ майже напевно. Позначимо через η_N вираз

$$\eta_N = \frac{1}{N}\mathrm{Tr}(P_1(U_{i_1}XW_{i_1})P_2(U_{i_2}XW_{i_2})\cdots(U_{i_k}XW_{i_k})) =$$

$$\frac{1}{N}\mathrm{Tr}(U_{i_1}P_1(X)W_{i_1}U_{i_2}P_2(X)W_{i_2}\cdots U_{i_k}P_k(X)W_{i_k}) = \frac{1}{N}\mathrm{Tr}\left(\prod_{j=1}^{k} W_{i_{j-1}}U_{i_j}P_j(X)\right),$$

де $i_0 = i_k$. Якщо $i_1 \neq i_k$, тоді згідно з припущенням маємо $\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(W_{i_{j-1}}U_{i_j}) = 0$ для $j = 1, \dots, k$. Оскільки ми також маємо, що $\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(P_j(X)) \to 0$ майже напевно, з майже напевно асимптотичної вільності матриць X та $\{U_1, W_1, \cdots, U_m, W_m\}$ випливає, що $\eta_N \to 0$ майже напевно. Якщо ж $i_1 = i_k$, маємо $W_{i_k}U_{i_1} = I_N$ та можна застосувати таке ж міркування. □

Нарешті, у контексті попередньої Леми покладемо $X = \frac{YY^*}{N}$, $U_i = \Pi^{*i-1}$ та $W_i = \Pi^{i-1}$, тоді негайно маємо, що $\frac{Y^*Y}{N}, \Pi^*(\frac{Y^*Y}{N})\Pi, \dots, \Pi^{*2L-1}(\frac{Y^*Y}{N})\Pi^{2L-1}$ майже напевно асимптотично вільні. Застосовуючи вирази (2.104, 2.105) для $W_p^*W_p$ та $W_f^*W_f$, ми отримуємо, що матриці $W_p^*W_p$ та $W_f^*W_f$ майже напевно асимптотично вільні. ■

Також ми можемо зробити висновок, що граничні розподіли матриць $W_p^*W_p$ та $W_f^*W_f$ співпадають з адитивною вільною згорткою L копій добре відомого граничного розподілу моделі $\frac{Y^*Y}{N}$. Легко побачити, що перетворення Стілтьєса цієї адитивної згортки, яке ми позначимо через $t_{MP}(z)$, задовольняє знайомому рівнянню

$$t_{MP}(z) = -\frac{1}{z - c_* \int \frac{\tau d\omega(\tau)}{1 + \tau t_{MP}(z)}}. \tag{2.107}$$

Позначимо також через μ_{MP} відповідну міру. Нескладно побачити, що (2.107) співпадає з рівнянням, яке визначає перетворення Стілтьєса граничного розподілу власних значень матриці $\frac{1}{N}X_N^*(I_L \times R_N)X_N$, де X_N комплексна гауссівська випадкова матриця розмірністю $ML \times N$, з одиничною матрицею коваріацій та незалежними, однаково розподіленими елементами. Зауважимо, що це може бути легко отримано, використовуючи гауссів метод, що був розроблений у [49], у випадку, коли R_N є лише кратним I_M.

Згідно з Пропозицією 2.4, граничним розподілом власних значень матриці $W_{f,N}^*W_{f,N}W_{p,N}^*W_{p,N}$ є $\mu_{MP}\boxtimes\mu_{MP}$. Позначимо цю міру через $\tilde{\nu}$ та її відповідне перетворення Стілтьєса через $\tilde{f}(z)$. Для того, щоб знайти рівняння, що визначатиме $\tilde{f}(z)$, ми використаємо властивість S–перетворення. З (2.102) та (2.103) негайно випливає, що

$$\chi_{\tilde{\nu}}(z)=\frac{1+z}{z}\chi_{MP}^2(z).$$

Підставимо у цьому виразі $z=\psi_{\tilde{\nu}}(z)$, тоді, згідно з визначенням (2.101), маємо

$$z=\frac{1+\psi_{\tilde{\nu}}(z)}{\psi_{\tilde{\nu}}(z)}\chi_{MP}^2(\psi_{\tilde{\nu}}(z)). \tag{2.108}$$

Зауважимо, що з визначення (2.100) можна отримати рівняння

$$\psi_{\tilde{\nu}}(z)=\int\frac{zt}{1-zt}d\tilde{\nu}(t)=\int\frac{d\tilde{\nu}(t)}{1-zt}-1=-\frac{1}{z}\tilde{f}\left(\frac{1}{z}\right)-1. \tag{2.109}$$

Підставивши його у (2.108) та замінивши z його оберненим $\frac{1}{z}$, ми маємо

$$\frac{z^2\tilde{f}(z)}{1+z\tilde{f}(z)}\chi_{MP}^2\left(\psi_{\tilde{\nu}}\left(\frac{1}{z}\right)\right)=1.$$

З останньої рівності можна безпосередньо отримати вираз для $\tilde{f}(z)$. Для зручності, покладемо $g(z)=\chi_{MP}(\psi_{\tilde{\nu}}(z^{-1}))$, ця функція аналітична в околі нескінченності. Тоді, отриманий вираз негайно дає наступне рівняння

$$\tilde{f}(z)=\left(z^2g^2(z)-z\right)^{-1}. \tag{2.110}$$

Залишилось лише виразити $g(z)$. Для цього зауважимо, що (2.109) також справедливо якщо замінити $\tilde{f}$ на t_{MP} та $\psi_{\tilde{\nu}}$ на ψ_{MP}. Тоді, підставивши $z=\chi_{MP}(z)$, з (2.101) отримуємо

$$z=-1-\frac{1}{\chi_{MP}(z)}t_{MP}\left(\frac{1}{\chi_{MP}(z)}\right)\Rightarrow t_{MP}(\chi_{MP}^{-1}(z))=-(1+z)\chi_{MP}(z).$$

Для того, щоб отримати рівняння для χ_{MP} достатньо використати щойно отриманий вираз для $t_{MP}(\chi_{MP}^{-1}(z))$, підставивши його у (2.107) з $z=\chi_{MP}^{-1}(z)$. Після чого ми отримаємо, що

$$(1+z)\chi_{MP}(z)=\frac{1}{\dfrac{1}{\chi_{MP}(z)}-c_*\displaystyle\int\frac{\tau d\omega_(\tau)}{1-\tau(1+z)\chi_{MP}(z)}}.$$

Нескладні перетворення приводять нас до рівняння

$$\frac{z}{(1+z)\chi_{MP}(z)} = c_* \int \frac{\tau d\omega_(\tau)}{1-\tau(1+z)\chi_{MP}(z)}.$$

Нарешті, підставимо $z = \psi_{\tilde{\nu}}(z^{-1})$. З (2.108) легко побачити, що ліва частина рівняння дорівнює до $zg(z)$. Для того, щоб розібратися з правою частиною, ми помітимо, що рівняння (2.108) також дає $\psi_{\tilde{\nu}}(z^{-1}) = \frac{zg^2(z)}{1-zg^2(z)}$, з чого отримуємо

$$g(z) = \frac{1}{z} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{c_* \tau \, d\omega(\tau)}{1 - \dfrac{\tau g(z)}{1-zg^2(z)}}. \tag{2.111}$$

Нагадаємо як виглядає рівняння, отримане раніше для $t(z)$

$$t(z) = -\frac{1}{z} \int \frac{\tau d\omega(\tau)}{1 + \dfrac{c_* \tau t(z)}{1 - zc_*^2 t^2(z)}}. \tag{2.112}$$

Легко помітити, що рівняння (2.111) та (2.112) співпадають з точністю до множника $-c_*$. Оскільки, як було доведено, рівняння (2.112) має єдиний розв'язок у множині перетворень Стілтьєса, ми можемо зробити висновок, що $g(z) = -c_* t(z)$. Таким чином, з (2.110) випливає рівняння

$$\tilde{f}(z) = -\frac{1}{z\left[1 - z(c_* t(z))^2\right]}.$$

Перетворення Стілтьєса граничного розподілу власних значень матриці $W_f W_p^* W_p W_f^*$ очевидно є $\frac{1}{c_*}\left(\tilde{f}(z) + \frac{1-c_*}{z}\right)$. Використовуючи вираз (2.97) для $t_\nu(z)$, ми негайно отримуємо

$$\frac{1}{c_*}\left(\tilde{f}(z) + \frac{1-c_*}{z}\right) = t_\nu(z).$$

Таким чином ми довели, що граничний розподіл власних значень матриці $W_{f,N} W_{p,N}^* W_{p,N} W_{f,N}^*$ може бути знайдений використовуючи методи вільної ймовірності.

2.7 Висновки до Розділу 2

У Розділі 2 вивчається нормована рахуюча міра $\hat{\nu}_N$ матриці $W_{f,N} W_{p,N}^* W_{p,N} W_{f,N}^*$. А саме, доведено існування невипадкової міри ν_N, яка є так званою асимптотичною еквівалентою міри $\hat{\nu}_N$, тобто $\hat{\nu}_N - \nu_N \to 0$, $N \to +\infty$ слабко майже напевно. Для цього, на початку було доведено низку допоміжних оцінок дисперсії нормованого сліду та квадратичної форми резольвенти матриці $W_{f,N}W_{p,N}^*W_{p,N}W_{f,N}^*$. Крім того, було наведено корисні властивості перетворень Стілтьєса деякого спеціального вигляду. Далі, використовуючи метод гауссівських змінних, ми знайшли вираз для математичного сподівання резольвенти, який дозволив нам отримати рівняння для перетворення Стілтьєса міри ν_N. Було встановлено, що існує лише одна функція з множини перетворень Стілтьєса, що задовольняє знайденому рівнянню. Як наслідок, ми отримали, що $\hat{\nu}_N - \nu_N \to 0$ слабко майже напевно при $\to +\infty$.

В останньому підрозділі ми показали, що з додатковим припущенням, а саме, якщо нормована рахуюча міра матриці R_N збігається до деякої кінцевої міри, міра $\hat{\nu}_N$ має границю (яка звичайно співпадає з границею міри ν_N). Для доведення ми використовували методи вільної ймовірності.

Варто зазначити, що незважаючи на те, що метод вільної ймовірності дозволив знайти границю розподілу власних значень матриці $W_{f,N}W_{p,N}^*W_{p,N}W_{f,N}^*$ набагато швидше та простіше, аніж метод гауссівських обчислень (Пропозиції 1.3, 1.4), оцінки резольвенти, що були отримані упродовж цього доведення необхідні для подальшого вивчення власних значень та знайдуть застосування у наступному Розділі.

До основних результатів цього розділу належать:

- Теорема 2.1, в якій наведено рівняння для перетворення Стілтьєса міри ν_N та зазначено, що асимптотично ν_N та шукана міра $\hat{\nu}_N$ матриці $W_{f,N}W_{p,N}^*W_{p,N}W_{f,N}^*$ співпадають, тобто $\hat{\nu}_N - \nu_N \to 0$, $N \to +\infty$ слабко майже напевно;

- Пропозиція 2.4, в якій встановлено, що матриці $W_{p,N}^*W_{p,N}$ та $W_{f,N}^*W_{f,N}$ є майже напевно асимптотично вільними. Цей результат є ключовим моментом для знаходження границі міри ν_N.

Результати досліджень даного розділу наведено у публікації автора [50].

Розділ 3

Детальне вивчення міри ν_N.

Цей розділ присвячений вивченню деяких властивостей міри ν_N. Як зазначено у Зауваженні 2.2, міри μ_N та ν_N – абсолютно неперервні по відношенню одна до одної. Між іншим, це означає, що вони мають однакові властивості та один носій, який ми позначимо через $\mathcal{S}_N$. Таким чином, замість ν_N ми будемо вивчати властивості міри μ_N. Зокрема, вивчено поведінку перетворення Стілтьєса t_N міри μ_N на осі дійсних чисел та знайдено вираз для щільності міри μ_N. Також ми охарактеризували носій $\mathcal{S}_N$ та довели, що майже напевно усі власні значення матриці $W_{f,N}W_{p,N}^*W_{p,N}W_{f,N}^*$ знаходяться у околі $\mathcal{S}_N$. У подальшому ми позначимо через $\overline{M}$ кількість різних власних значень $(\overline{\lambda}_{l,N})_{l=1,\dots,\overline{M}}$ матриці R_N, розташованих у порядку спадання і через $(m_{l,N})_{l=1,\dots,\overline{M}}$ їх кратності. Звичайно, $\sum_{l=1}^{\bar{M}} m_{l,N} = M$.

Основні результати цього розділу представлені у наступних теоремах.

Теорема. *(Щільність міри μ_N) Щільність $f_N(x)$ міри μ_N по відношенню до міри Лебега є неперервною функцією на $\mathbb{R}^{+*}$ та визначається як $f_N(x) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}(t_N(x))$ для усіх $x > 0$. Якщо $c_N \leq 1$, μ_N абсолютно неперервна, якщо ж $c_N > 1$, маємо $d\mu_N(x) = f_N(x)dx + \mu_N(\{0\})\delta_0$. Крім цього $0 \in \mathcal{S}_N$ та внутрішність $\mathcal{S}_N^\circ$ носія $\mathcal{S}_N$ має вигляд*

$$\mathcal{S}_N^\circ = \{x \in \mathbb{R}^+, \mathrm{Im}(t(x)) > 0\}.$$

Більш того, якщо $c_N < 1$, справедливо

$$f_N(x) \simeq \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{x\,c_N(1-c_N)}},$$

да $x \to 0^+$, якщо ж $c_N = 1$, маємо

$$f_N(x) \simeq \frac{1}{\pi}\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{M}\mathrm{Tr}\, R^{-1}\right)^{-1/3}\frac{1}{x^{2/3}}.$$

Теорема. *(Характеризація носія) Носій $\mathcal{S}_N$ має вигляд*

$$\mathcal{S}_N = \{0\}\mathbb{I}_{c_N>1} \cup [x_{-,N}, x^+_{1,N}] \cup [x^-_{2,N}, x^+_{2,N}] \cup \ldots [x^-_{q,N}, x_{+,N}]$$

Теорема. *(Локалізація власних значень) Припустимо існують $\epsilon > 0$, $\kappa_1 \in \mathbb{R}$, $\kappa_2 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ та натуральне число N_0 такі, що*

$$(\kappa_1 - \epsilon,\, \kappa_2 + \epsilon) \cap \mathcal{S}_N = \varnothing \qquad \forall\, N \geq N_0.$$

Тоді, з ймовірністю один, відрізок $[\kappa_1,\, \kappa_2]$ не містить жодного власного значення матриці $W_{f,N}W^*_{p,N}W_{p,N}W^*_{f,N}$ для усіх достатньо великих N.

3.1 Властивості $t(z)$ біля осі дійсних чисел.

У цьому підрозділі ми доведемо, що для усіх $x_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ існує кінцева границя $\lim_{z\to x_0, z\in\mathbb{C}^+} t(z)$. Щоб не ускладнювати позначення, ми продовжимо записувати її через $t(x_0)$. Більш того, якщо $c \leq 1$, маємо $\lim_{z\to 0, z\in\mathbb{C}^+\cup\mathbb{R}^*} |t(z)| = +\infty$ та $\lim_{z\to 0, z\in\mathbb{C}^+\cup\mathbb{R}^*} zt(z) = 0$. Результати [68] дозволяють зробити висновок, що міра μ_N абсолютно неперервна відносно міри Лебега та її щільність дорівнює $\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}(t(x))$ для усіх $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Якщо ж $c > 1$, в точці 0 з'являється маса Дірака.

Для початку ми розглянемо випадок, коли $x_0 \neq 0$. Щоб довести, що границя $\lim_{z\to x_0, z\in\mathbb{C}^+} t(z)$ існує, ми перевіримо справедливість наступних тверджень:

- Якщо послідовність $(z_n)_{n\geq 1}$ чисел з $\mathbb{C}^+$ збігається до x_0, тоді послідовність $|t(z_n)|_{n\geq 1}$ обмежена;
- Якщо послідовності $(z_{1,n})_{n\geq 1}$ і $(z_{2,n})_{n\geq 1}$ чисел з $\mathbb{C}^+$ збігаються до x_0 та задовольняють $\lim_{z_{i,n}\to x_0} = t_i$ для $i = 1, 2$, тоді $t_1 = t_2$.

Почнемо з першого твердження:

Лема 3.1. *Якщо $x_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ та для послідовності $(z_n)_{n\geq 1}$ комплексних чисел з $\mathbb{C}^+$ виконується $\lim_{n\to+\infty} z_n = x_0$, тоді множина $|t(z_n)|_{n\geq 1}$ обмежена.*

Доведення. Припустимо, що $|t(z_n)| \to +\infty$. Рівність (2.70) може бути записана, як

$$t(z_n) = \frac{1}{M} \sum_{l=1}^{\overline{M}} \frac{m_l \, \overline{\lambda}_l}{-z_n(1 + \frac{ct(z_n)\overline{\lambda}_l}{1-z\,(ct(z_n))^2})}. \tag{3.1}$$

Оскільки $x_0 \neq 0$, з умови $|t(z_n)| \to +\infty$ випливає, що існує l_0, для якого

$$(1 + \frac{ct(z_n)\overline{\lambda}_{l_0}}{1 - z\,(ct(z_n))^2}) \to 0$$

або, що еквівалентно,

$$z_n ct(z_n) - \frac{1}{ct(z_n)} \to \overline{\lambda}_{l_0}.$$

Оскільки $|t(z_n)| \to +\infty$, маємо $z_n ct(z_n) \to \overline{\lambda}_{l_0}$, що суперечить припущенню. ■

Лема 3.2. *Нехай $(z_{1,n})_{n\geq 1}$ та $(z_{2,n})_{n\geq 1}$– дві послідовності, які належать до $\mathbb{C}^+$ та збігаються до $x_0 \in \mathbb{R}^{+*}$, крім того $\lim_{z_{i,n}\to x_0} t(z_{i,n}) = t_i$ для $i = 1, 2$. Тоді справедливо $t_1 = t_2$.*

Доведення. Твердження Леми очевидно виконується, якщо x_0 не належить до $\mathcal{S}$. Тому ми припускаємо, що $x_0 \in \mathcal{S} - \{0\}$. Для початку помітимо, що якщо $\lim_{n\to+\infty} z_n = x_0$ $(z_n \in \mathbb{C}^+)$ та $t(z_n) \to t_0$, тоді

$$1 - x_0\,(ct_0)^2 \neq 0 \tag{3.2}$$

$$1 + \frac{ct_0\,\overline{\lambda}_l}{1 - x_0\,(ct_0)^2} \neq 0, \; l = 1, \ldots, \overline{M}. \tag{3.3}$$

Насправді, якщо (3.2) не виконується, з рівняння (3.1) випливає $t_0 = 0$, що неможливо, оскільки ми припустили, що $1 - x_0\,(ct_0)^2$ дорівнює 0. Аналогічно, якщо не виконується нерівність (3.3), границя $t(z_n)$ не може бути кінцевою. Таким чином, матриця

$$T_0 = -\left(x_0 \left[I + \frac{ct_0}{1 - x_0\,(ct_0)^2} R\right]\right)^{-1} \tag{3.4}$$

визначена коректно та справедливо, з чого випливає, що $T(z_n) \to T_0$ та $t_0 = \frac{1}{M}\mathrm{Tr}RT_0$. Зокрема, для $i = 1, 2$ маємо $T(z_{i,n}) \to T_i$, де матриця T_i визначається аналогічно з (3.4) але для $t_0 = t_i$, $i = 1, 2$ і відповідно $t_i = \frac{1}{M}\mathrm{Tr}RT_i$. Використовуючи рівність (2.70) для $z = z_{i,n}$, ми негайно отримуємо

$$\begin{pmatrix} t(z_{1,n}) - t(z_{2,n}) \\ z_{1,n}t(z_{1,n}) - z_{2,n}t(z_{2,n}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0(z_{1,n}, z_{2,n}) & v_0(z_{1,n}, z_{2,n}) \\ z_{1,n}z_{2,n}v_0(z_{1,n}, z_{2,n}) & u_0(z_{1,n}, z_{2,n}) \end{pmatrix} \tag{3.5}$$
$$\times \begin{pmatrix} t(z_{1,n}) - t(z_{2,n}) \\ z_{1,n}t(z_{1,n}) - z_{2,n}t(z_{2,n}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (z_{1,n} - z_{2,n}) \frac{1}{M}\mathrm{Tr}T(z_{1,n})RT(z_{2,n}) \\ 0 \end{pmatrix},$$

де $u_0(z_1, z_2)$ та $v_0(z_1, z_2)$ визначаються як

$$u_0(z_1, z_2) = c\, \frac{cz_1t(z_1)cz_2t(z_2)\, \frac{1}{M}\mathrm{Tr}(RT(z_1)RT(z_2))}{(1 - z_1(ct(z_1))^2)\,(1 - z_2(ct(z_2))^2)} \tag{3.6}$$

та

$$v_0(z_1, z_2) = c\, \frac{\frac{1}{M}\mathrm{Tr}(RT(z_1)RT(z_2))}{(1 - z_1(ct(z_1))^2)\,(1 - z_2(ct(z_2))^2)} \tag{3.7}$$

для $z_i \in \mathbb{C}^+$, $i = 1, 2$. Переходячи до границі у рівнянні (3.5), маємо

$$\begin{pmatrix} t_1 - t_2 \\ x_0(t_1 - t_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0(x_0, x_0) & v_0(x_0, x_0) \\ x_0^2 v_0(x_0, x_0) & u_0(x_0, x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 - t_2 \\ x_0(t_1 - t_2) \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

де $u_0(x_0, x_0)$ та $v_0(x_0, x_0)$ визначаються аналогічно з (3.6, 3.7), с заміною $z_i, t(z_i), T(z_i)$ на x_0, t_i, T_i для $i = 1, 2$. Якщо визначник $(1 - u_0(x_0, x_0))^2 - x_0^2 v_0(x_0, x_0)^2$ зазначеної системи лінійних рівнянь відмінний від нуля, то очевидно, що у такому випадку $t_1 = t_2$.

Тепер перейдемо до випадку коли $(1 - u_0(x_0, x_0))^2 - x_0^2 v_0(x_0, x_0)^2 = 0$. Для цього розглянемо границі $u(z_{i,n})$ та $v(z_{i,n})$, $i = 1, 2$ при $n \to +\infty$, які позначимо через $u_i(x_0)$ та $v_i(x_0)$, $i = 1, 2$. Нагадаємо, що $u(z)$ та $v(z)$ визначенні відповідно у (2.82) та (2.83). Зрозуміло, що $u_i(x_0)$ та $v_i(x_0)$ співпадають з (2.82) та (2.83), якщо замість $(z, t(z), T(z))$ узято (x_0, t_i, T_i). Таким чином, з нерівності (2.80) випливає

$$(1 - u_i(x_0))^2 - x_0^2 v_i(x_0)^2 \geq 0 \tag{3.9}$$

для $i = 1, 2$. Використовуючи нерівність Шварца та (2.88), як у доведенні єдності розв'язку рівняння (2.70) (див. Пропозиція 2.2), легко показати, що

$$\begin{aligned} |(1 - u_0(x_0, x_0))^2 - x_0^2(v_0(x_0, x_0))^2| &\geq (1 - \sqrt{u_1(x_0)}\sqrt{u_2(x_0)})^2 - x_0^2 v_1(x_0) v_2(x_0) \\ &\geq (1 - u_1(x_0))(1 - u_2(x_0)) - x_0^2 v_1(x_0) v_2(x_0) \\ &\geq \sqrt{(1 - u_1(x_0))^2 - x_0^2 v_1(x_0)^2}\sqrt{(1 - u_2(x_0))^2 - x_0^2 v_2(x_0)^2} \geq 0. \quad (3.10) \end{aligned}$$

Таким чином, рівність $(1 - u_0(x_0, x_0))^2 - x_0^2 v_0(x_0, x_0)^2 = 0$ можлива лише при умові, що у нерівності Шварца та (2.88) насправді має місце рівність. Отже, справедливо $|u_0(x_0, x_0)|^2 = u_1(x_0)u_2(x_0)$, або, що еквівалентно, $|\frac{1}{M}\mathrm{Tr}(RT_1RT_2)| = (\frac{1}{M}\mathrm{Tr}(RT_1T_1^*R))^{1/2}(\frac{1}{M}\mathrm{Tr}(RT_2T_2^*R))^{1/2}$. З цього випливає, що $T_1 = aT_2^*$ для деякої константи $a \in \mathbb{C}$. Більш того, оскільки $t_i = \frac{1}{M}\mathrm{Tr}(RT_i)$ для $i = 1, 2$, має виконуватися рівність $t_1 = at_2^*$. Нерівність (2.88) стає рівністю для невід'ємних дійсних чисел лише у випадку, коли $ad = bc$. Для наведення (3.10) ми використовували (2.88) двічі, для наборів $\{a = b = 1,\ c = u_1(x_0),\ d = u_2(x_0)\}$ та $\{a = (1 - u_1(x_0))^2,\ b = (1 - u_2(x_0))^2,\ c = x_0^2 v_1^2,\ d = x_0^2 v_2^2\}$. Таким чином, маємо

$$u_1(x_0) = u_2(x_0) \quad (3.11)$$

$$(1 - u_1(x_0))^2 x_0^2 v_2(x_0)^2 = (1 - u_2(x_0))^2 x_0^2 v_1(x_0)^2. \quad (3.12)$$

Оскільки $x_0 \neq 0$ та $(1 - u_1(x_0))^2 - x_0^2 v_1(x_0)^2 \geq 0$, якщо $u_1(x_0) = 1$, змінна $v_1(x_0)$ повинна дорівнювати нулю, що неможливо. Отже, $u_1(x_0) \neq 1$ та з (3.11)-(3.12), маємо $v_1(x_0) = v_2(x_0)$. Легко помітити, що з визначення u_i та v_i випливає, що $u_i(x_0) = c^2 x_0^2 |t_i|^2 v_i(x_0)$ та, як наслідок, $|t_1|^2 = |t_2|^2$, що негайно тягне за собою, що $|a| = 1$. З рівності $v_1(x_0) = v_2(x_0)$ та $T_1 = aT_2^*$, ми безпосередньо отримуємо

$$\frac{|a|^2 \frac{1}{M}\mathrm{Tr}(T_2^* R R T_2)}{|1 - x_0 c^2 a^2 (t_2^*)^2|^2} = \frac{\frac{1}{M}\mathrm{Tr}(RT_2T_2^*R)}{|1 - x_0 c^2 t_2^2|^2}.$$

Чисельники з обох сторін однакові та відмінні від нуля, з чого випливає, що знаменники також повинні бути однаковими, тобто

$$|1 - x_0 c^2 a^2 (t_2^*)^2| = |1 - x_0 c^2 t_2^2|.$$

Зауважимо, що якщо для w та z виконується $|1-w| = |1-z|$ та $|w| = |z|$, тоді маємо або $w = z$, або $w = \bar{z}$. Покладемо $w = x_0 c^2 t_2^2$ та $z = x_0 c^2 a^2 (t_2^*)^2$. Якщо

$w = z$, маємо $a^2(t_2^*)^2 = t_2^2 \Rightarrow t_1^2 = t_2^2$ та оскільки $\mathrm{Im} t_i \geq 0$, ми можемо зробити висновок $t_1 = t_2$. Якщо ж $w = \bar{z}$, маємо $a^2(t_2^*)^2 = (t_2^*)^2$. З цього випливає, що або $t_2 = 0$, у цьому випадку також маємо $t_1 = 0$, або $a = \pm 1$. Якщо $a = 1$, тоді умова $\mathrm{Im} t_i \geq 0$ тягне за собою, що t_1 та t_2 дійсні та співпадають. Нарешті, якщо $a = -1$, нагадаємо, що $T_1 = aT_2^* = -T_2^*$. Таким чином справедливо

$$x_0 I_M - \frac{x_0 t_2^*}{1 - x_0 c^2 (t_2^*)^2} R = -x_0 I_M - \frac{x_0 t_2^*}{1 - x_0 c^2 (t_2^*)^2} R,$$

що неможливо, оскільки $x_0 \neq 0$. Лема 3.2 доведена. ■

Леми 3.2, 3.1 та їх доведення передбачають наступний результат.

Пропозиція 3.1. *Для усіх $x > 0$, існує* $\lim_{z \to x, z \in \mathbb{C}^+} t(z) = t(x)$. *Більш того, $1 - x(ct(x))^2 \neq 0$, та матриця $(I + \frac{ct(x)}{1 - x(ct(x))^2} R)$ невироджена. Таким чином,* $\lim_{z \to x, z \in \mathbb{C}^+} T(z) = T(x)$, *де* $T(x) = \Big(-x(I + \frac{ct(x)}{1 - x(ct(x))^2} R)\Big)^{-1}$. *Окрім того, $t(x)$ є рішенням рівняння*

$$t(x) = \frac{1}{M} \mathrm{Tr}(RT(x)). \tag{3.13}$$

Якщо $u(x)$ та $v(x)$ визначаються як (2.82) та (2.83) з $z = x$, тоді справедливі нерівності

$$1 - u(x) > 0 \tag{3.14}$$

та

$$(1 - u(x))^2 - x^2 (v(x))^2 \geq 0 \tag{3.15}$$

для усіх $x \neq 0$. Більш того, нерівність (3.15) стає строгою, якщо $x \in \mathbb{R}^+ - \mathcal{S}$. Якщо також $\mathrm{Im}(t(x)) > 0$, тоді маємо

$$1 - u(x) - xv(x) = 0 \tag{3.16}$$

Доведення. Насправді нам залишилось довести лише (3.14), (3.15), та (3.16). Оскільки функція $z \to t(z)$ аналітична на $\mathbb{C} \setminus \mathcal{S}$, відповідна функція $x \to t(x)$ диференційовна на $\mathbb{R}^+ - \mathcal{S}$. Також, оскільки нерівності $(t(x))' > 0$ та $(xt(x))' > 0$ виконуються на $\mathbb{R}^+ - \mathcal{S}$, умови, які використовувались у Зауважені 2.1, досі справедливі на $\mathbb{R}^+ - \mathcal{S}$. Це доводить (3.14) та строгу нерівність (3.15). Крім того, беручи $z \to x$, $z \in \mathbb{C}^+$ у Пропозиції 2.1, маємо, що

$1-u(x)\geq 0$ та (3.15) також справедливі на $\mathcal{S}-\{0\}$. Оскільки $v(x)>0$ для усіх $x\neq 0$, строга нерівність (3.14) є наслідком (3.15).

Для того, щоб довести (3.16), ми використовуємо друге рівняння системи (2.84), з якого випливає, що

$$\operatorname{Im}(t(x))=(u(x)+xv(x))\operatorname{Im}(t(x))$$

Таким чином, оскільки $\operatorname{Im}(t(x))>0$, негайно отримуємо (3.16). ∎

Наступним, для повноти викладення, ми наведемо корисний результат зі спільної роботи [50].

Пропозиція 3.2. *Для усіх* $x\in\mathbb{R}^{+*}$, *маємо* $\operatorname{Re}(t(x))<0$.

Доведення. Нескладно (див. наприклад Лема 2.7) отримати систему

$$\begin{pmatrix}\operatorname{Re}(t(z)\\ \operatorname{Re}(zt(z))\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u(z) & -v(z)\\ -|z|^2v(z) & u(z)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\operatorname{Re}(t(z)\\ \operatorname{Re}(zt(z))\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\operatorname{Re}(z)\frac{1}{M}\operatorname{Tr}(RT(z)(T(z))^*)\\ -|z|^2\frac{1}{M}\operatorname{Tr}(RT(z)(T(z))^*\end{pmatrix},\quad (3.17)$$

що справедлива для усіх $z\in\mathbb{C}\setminus\mathcal{S}$. Більш того, оскільки усі доданки, які з’являються у (3.17) мають кінцеву границю при $z\to x$ для $x\neq 0$, система (3.17) досі справедлива на $\mathbb{R}^*$. Покладемо $z=x$, тоді перша компонента (3.17) дає

$$\operatorname{Re}(t(x))(1-u(x)+xv(x))=-x\frac{1}{M}\operatorname{Tr}(RT(x)T(x)^*).\qquad (3.18)$$

З Пропозиції 3.1 випливає, що $1-u(x)>0$, для $x\in\mathbb{R}^*$. Отже, $1-u(x)+xv(x)$ також є додатним, та виконується рівняння

$$\operatorname{Re}(t(x))=-x\,\frac{1}{1-u(x)+xv(x)}\,\frac{1}{M}\operatorname{Tr}(RT(x)T(x)^*).\qquad (3.19)$$

Таким чином, з $x>0$ випливає, що $\operatorname{Re}(t(x))<0$. ∎

Тепер ми можемо перейти до вивчення поведінки $t(z)$ коли $z\to 0$. На початку покажемо, що $\lim_{z\to 0,z\in\mathbb{C}^+\cup\mathbb{R}^*}|t(z)|=+\infty$ та після доведемо, що $\lim_{z\to 0,z\in\mathbb{C}^+\cup\mathbb{R}^*}zt(z)=0$ якщо $c\leq 1$ та є строго від’ємним якщо $c>1$. Для подальшого нагадаємо, що функція $t(x)$ для $x>0$ визначається як $t(x)=\lim_{z\to x,z\in\mathbb{C}^+}t(z)$.

Лема 3.3. *Справедливо, що* $\lim_{z \to 0, z \in \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}^*} |t(z)| = +\infty$.

Доведення. Припустимо супротивне, тобто нехай існує послідовність елементів $(z_n)_{n \geq 1}$ з $\mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}^*$ така, що $\lim_{n \to +\infty} z_n = 0$ та $t(z_n) \to t_0$. З (2.70) та (3.13) маємо

$$z_n t(z_n) = -\frac{1}{M} \sum_{l=1}^{\overline{M}} \frac{m_l \overline{\lambda}_l}{1 + \frac{ct(z_n)\overline{\lambda}_l}{1 - z_n (ct(z_n))^2}}. \tag{3.20}$$

Вираз $1 + \frac{ct(z_n)\overline{\lambda}_l}{1 - z_n (ct(z_n))^2}$ очевидно збігається до $1 + ct_0 \overline{\lambda}_l$. Оскільки ліва та права частини рівняння (3.20) збігається до 0 для усіх l, $1 + ct_0 \overline{\lambda}_l$ не може дорівнювати 0. Таким чином, матриця $I + ct_0 R$ невироджена, переходячи до границі у (3.20), маємо

$$\frac{1}{M} \mathrm{Tr} R (I + ct_0 R)^{-1} = 0.$$

Очевидно $\mathrm{Im} \frac{1}{M} \mathrm{Tr} R (I + ct_0 R)^{-1}$ не може дорівнювати нулю, якщо t_0 не дійсне, тому t_0 має бути дійсним. Зауважимо, що $|z_n| v(z_n) \leq 1$ для усіх n (див. Лема 2.7 для $z_n \in \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}^{+*}$ та Зауваження 2.1 для $z_n \in \mathbb{R}^{-*}$). Оскільки $|1 - z_n (ct(z_n))^2|^2 \to 1$ та $|z_n| v(z_n)$ обмежено, маємо, що $|z_n| \frac{1}{M} \mathrm{Tr}(RT(z_n) RT(z_n)^*)$ також обмежено. Легко перевірити, що

$$|z_n| \frac{1}{M} \mathrm{Tr}(RT(z_n) RT(z_n)^*) = \frac{1}{|z_n|} \frac{1}{M} \mathrm{Tr}(R(I + ct_0 R)^{-1} R (I + ct_0 R)^{-1}) + \mathcal{O}(1).$$

Таким чином, з обмеженості $|z_n| \frac{1}{M} \mathrm{Tr}(RT(z_n) RT(z_n)^*)$ випливає $\frac{1}{M} \mathrm{Tr}(R(I + ct_0 R)^{-1} R (I + ct_0 R)^{-1}) = 0$, що неможливо. Отже шукане твердження справедливе. ■

Лема 3.4. *Розглянемо послідовність* $(z_n)_{n \geq 1}$ *з елементами з* $\mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}^*$, *таку, що* $\lim_{n \to +\infty} z_n = 0$. *Тоді множина* $(z_n t(z_n))_{n \geq 1}$ *обмежена.*

Доведення. Знову припустимо суперечність, нехай послідовність $(z_n t(z_n))_{n \geq 1}$ є необмеженою. З цього випливає, що ми можемо виділити з $(z_n)_{n \geq 1}$ підпослідовність, яку ми досі позначатимемо через $(z_n)_{n \geq 1}$, таку, що $\lim_{n \to +\infty} |z_n t(z_n)| = +\infty$. Тоді маємо

$$\frac{ct(z_n)}{1 - z_n (ct(z_n))^2} = \frac{1}{\frac{1}{ct(z_n)} - z_n t(z_n)} \to 0.$$

Отже,

$$-\frac{1}{M}\mathrm{Tr}R\left(I+\frac{ct(z_n)}{1-z_n(ct(z_n))^2}R\right)^{-1}\to-\frac{1}{M}\mathrm{Tr}R,$$

що неможливо, оскільки ліва частина співпадає з $z_nt(z_n)$, що не збігається до кінцевої границі. Отримали суперечність. ■

Лема 3.5. *Розглянемо дві послідовності,* $(z_{1,n})_{n\geq 1}$ *та* $(z_{2,n})_{n\geq 1}$*, елементи яких належать до* $\mathbb{C}^+\cup\mathbb{R}^*$ *та виконується* $\lim_{n\to+\infty} z_{i,n}=0$ *і* $\lim_{n\to+\infty} z_{i,n}t(z_{i,n})=\delta_i$ *для* $i=1,2$. *Тоді,* $\delta_1=\delta_2$.

Доведення. З рівняння (2.70) негайно отримуємо

$$zt(z)=\left(zct(z)-\frac{1}{ct(z)}\right)\frac{1}{M}\mathrm{Tr}R\left(R+\frac{1}{ct(z)}-zct(z)\right)^{-1}. \tag{3.21}$$

Згідно з Леми 3.3, послідовність $|t(z_{i,n})|\to+\infty$, тому $\frac{1}{ct(z_{i,n})}\to 0$ та $z_{i,n}ct(z_{i,n})-\frac{1}{ct(z_{i,n})}\to c\delta_i$ для $i=1,2$. Отже, для $\delta_i\neq 0$, рівняння (3.21) негайно дає, що $c\frac{1}{M}\mathrm{Tr}R\left(R+\frac{1}{ct(z_{i,n})}-z_{i,n}ct(z_{i,n})\right)^{-1}$ збігається до 1, з чого випливає, що матриця $R-c\delta_iI$ невироджена. Таким чином ми отримали дві можливості: $\delta_i=0$ або δ_i є розв'язком рівняння

$$1=c\frac{1}{M}\mathrm{Tr}R(R-c\delta_iI)^{-1}, \tag{3.22}$$

це еквівалентно умові, що δ_i задовольняє

$$\delta_i=c\delta_i\frac{1}{M}\mathrm{Tr}R(R-c\delta_iI)^{-1}. \tag{3.23}$$

Зауважимо, що розв'язки цього рівняння дійсні, тому $\delta_i\in\mathbb{R}$ для $i=1,2$. З рівняння (3.5) маємо

$$\begin{aligned}z_{1,n}t(z_{1,n})-z_{2,n}t(z_{2,n})&=z_{1,n}z_{2,n}v_0(z_{1,n},z_{2,n})(t(z_{1,n})-t(z_{2,n}))\\&\quad+u_0(z_{1,n},z_{2,n})(z_{1,n}t(z_{1,n})-z_{2,n}t(z_{2,n})).\end{aligned}$$

Нескладно перевірити, що $z_{1,n}z_{2,n}v_0(z_{1,n},z_{2,n})(t(z_{1,n})-t(z_{2,n}))\to 0$ та $u_0(z_{1,n},z_{2,n})\to u_0(0,0)=c\frac{1}{M}\mathrm{Tr}R(R-c\delta_1I)^{-1}R(R-c\delta_2I)^{-1}$. Таким чином маємо

$$\delta_1-\delta_2=u_0(0,0)(\delta_1-\delta_2). \tag{3.24}$$

Нагадаємо, що $|u_0(z_{1,n}, z_{2,n})| \le \sqrt{u(z_{1,n})}\sqrt{u(z_{2,n})} \le 1$. Більш того, очевидно $u(z_{i,n}) \to u_i(0) = c\frac{1}{M}\mathrm{Tr}R(R - c\delta_i I)^{-1}R(R - c\delta_i I)^{-1}$ та з цього, $0 < u_i(0) \le 1$. Використовуючи нерівність Шварца, маємо

$$|u_0(0,0)| \le \sqrt{u_1(0)}\sqrt{u_2(0)} \le 1. \tag{3.25}$$

Якщо нерівність Шварца (3.25) строга та $|u_0(0,0)| < 1$, звідси негайно випливає, що $\delta_1 = \delta_2$. Якщо ж $u_0(0,0) = \sqrt{u_1(0)}\sqrt{u_2(0)} = 1$, отримуємо

$$R - c\delta_1 I = \kappa(R - c\delta_2 I)$$

для деякої константи κ, або, що еквівалентно, $\overline{\lambda}_l - c\delta_1 = \kappa(\overline{\lambda}_l - c\delta_2)$ для усіх $l = 1, \ldots, \overline{M}$. У випадку, якщо R не кратне I, κ має дорівнювати 1, бо інакше $\overline{\lambda}_l = \overline{\lambda}_{l'}$ для усіх l, l'. Умова $\kappa = 1$ негайно тягне за собою, що $\delta_1 = \delta_2$. Нарешті, залишився випадок $R = \sigma^2 I$. Тоді, з (3.23) випливає, що δ_i є розв'язком $\delta_i \frac{\sigma^2 c}{\sigma^2 - c\delta_i} = \delta_i$, тобто $\delta_i = 0$ або

$$\delta_i = \sigma^2 \left(\frac{1}{c} - 1\right). \tag{3.26}$$

Залишилось перевірити, що випадки, коли $\delta_1 = 0, \delta_2 = \sigma^2\left(\frac{1}{c} - 1\right)$ або $\delta_2 = 0, \delta_1 = \sigma^2\left(\frac{1}{c} - 1\right)$ неможливі. Якщо це правда, $u_1(0)$ та $u_2(0)$ не можуть удвох дорівнювати 1, що означає, що $|u_0(0,0)| < 1$. Таким чином, (3.24) дає суперечність та $\delta_1 = \delta_2$ дорівнює 0 або $\sigma^2\left(\frac{1}{c} - 1\right)$. ■

З Лем 3.4 та 3.5 ми маємо наступний наслідок.

Наслідок 3.1. *Для $c \le 1$ справедливо*

$$\lim_{z \to 0, z \in \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}^*} zt(z) = 0 \tag{3.27}$$

та

$$\mu(\{0\}) = 0. \tag{3.28}$$

Доведення. З Лем 3.4 та 3.5 можна зробити висновок, що $\lim_{z \to 0, z \in \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}^*} zt(z) = \delta$, де δ дорівнює 0, або є розв'язком рівняння (3.23). Для уточнення ми зауважимо, що $t(x) > 0$ якщо $x < 0$, з чого випливає, що $\delta \le 0$. Таким чином, δ співпадає з від'ємним розв'язком рівняння (3.23). Очевидно, що у випадку

$c \leq 1$, рівняння (3.23) не має від'ємних розв'язків, з чого випливає (3.27). Твердження (3.28) є прямим наслідком властивості перетворення Стілтьєса

$$\mu(\{0\}) = -\lim_{z \to 0, z \in \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}^*} zt(z).$$

Для того, щоб дослідити випадок $c > 1$ та точніше описати поведінку $\mathrm{Im}(t(z))$ коли $z \to 0, z \in \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}^*$ для $c \leq 1$, ми маємо оцінити $z(t(z))^2$ при $z \to 0$.

Лема 3.6.
- *Для $c = 1$ справедливо $\lim_{z \to \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}^*} |z(t(z))^2| = +\infty$.*
- *Якщо $c < 1$,*

$$\lim_{z \to \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}^*} z(t(z))^2 = -\frac{1}{c(1-c)}. \tag{3.29}$$

- *Та при $c > 1$, $\lim_{z \to 0, z \in \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}^*} zt(z) = \delta$ відмінне від нуля та співпадає з від'ємним розв'язком рівняння (3.23), також $\mu(\{0\}) = -\delta$.*

Доведення. З рівняння (2.70) маємо

$$z(t(z))^2 = -\frac{1}{M}\mathrm{Tr}R\left(\frac{I}{t(z)} + \frac{c}{1 - z(ct(z))^2}R\right)^{-1}. \tag{3.30}$$

Припустимо, що $\delta = 0$ (ми вже знаємо, що це правда для $c \leq 1$). Почнемо з доведення першого пункту Леми 3.6. Покладемо $c = 1$ та припустимо, що існує послідовність $(z_n)_{n \in \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}^*}$ така, що $z_n \to 0$ та $z_n t(z_n)^2 \to \alpha$. Оскільки $|t(z_n)| \to +\infty$, з (3.30) негайно випливає $\alpha = \alpha - 1$, що неможливо. Таким чином, якщо $c = 1$, $\lim_{z \to 0, \to \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}^*} |zt(z)^2| = +\infty$ що і треба було довести.

Для доведення останніх двох пунктів ми покажемо, що для $c \neq 1$, $|zt(z)^2|$ обмежено при $z \in \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}^*$ у околі 0. Для цього, як завжди, припустимо, що існує послідовність $(z_n)_{n \geq 1}$, елементи якої належать до $\mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}^*$ і яка задовольняє $z_n \to 0$ та $|z_n t(z_n)^2| \to +\infty$. Тоді, маємо

$$1 = -\frac{1}{M}\mathrm{Tr}R\left(z_n t(z_n) I + \frac{c z_n t(z_n)^2}{1 - z_n(ct(z_n))^2}R\right)^{-1}.$$

Припущення $|z_n t(z_n)^2| \to +\infty$ тягне за собою, що $\frac{c z_n t(z_n)^2}{1 - z_n(ct(z_n))^2} \to -\frac{1}{c}$. А оскільки $z_n t(z_n) \to 0$, ми отримуємо, що $c = 1$, що неможливо. Використовуючи знову (3.30), ми негайно маємо, що якщо $z_n(t(z_n))^2 \to \alpha$, тоді $\alpha = -\frac{1}{c(c-1)}$.

Та оскільки $|zt(z)^2|$ обмежено для $z \in \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}^*$ у околі 0, випливає, що $\lim_{z\to 0, z\in\mathbb{C}^+\cup\mathbb{R}^*} z(t(z))^2 = -\frac{1}{c(1-c)}$. Другий пункт доведено. Нарешті, для $z \in \mathbb{R}^{-*}$ щойно згадана границя від'ємна, що неможливо для випадку $c > 1$, оскільки тоді $-\frac{1}{c(1-c)}$ додатне. Таким чином, у випадку $c > 1$, значення δ, що є границею $zt(z)$, має бути відмінним від 0. Що означає, δ співпадає з від'ємним розв'язком рівняння (3.23) та $\mu(\{0\}) = -\delta > 0$. ■

Комбінуючи усе, що було доведено вище, ми отримуємо наступну характеризацію μ_N для $c \leq 1$.

Теорема 3.1. *Щільність $f_N(x)$ міри μ_N по відношенню до міри Лебега є неперервною функцією на $\mathbb{R}^{+*}$ та визначається як $f_N(x) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}(t_N(x))$ для усіх $x > 0$. Якщо $c_N \leq 1$, μ_N абсолютно неперервна та для $c_N > 1$ маємо $d\mu_N(x) = f_N(x)dx + \mu_N(\{0\})\delta_0$. Також $0 \in \mathcal{S}_N$ та внутрішність $\mathcal{S}_N^\circ$ носія $\mathcal{S}_N$ має вигляд*

$$\mathcal{S}_N^\circ = \{x \in \mathbb{R}^+, \mathrm{Im}(t(x)) > 0\} \tag{3.31}$$

Більш того, якщо $c_N < 1$, справедливо

$$f_N(x) \simeq \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{x\, c_N(1-c_N)}}, \tag{3.32}$$

да $x \to 0^+$, якщо ж $c_N = 1$, маємо

$$f_N(x) \simeq \frac{1}{\pi}\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{M}\mathrm{Tr}\, R^{-1}\right)^{-1/3}\frac{1}{x^{2/3}}. \tag{3.33}$$

Доведення. Оскільки $t(z)$ не є аналітичною функцією в околі точки 0, ми робимо висновок, що $0 \in \mathcal{S}$. Раніше було доведено, що існує границя $\lim_{z\to x, z\in\mathbb{C}^+} t(z) = t(x)$ для $x \neq 0$, тому з Теореми 2.1, [68] випливає, що для борелівської множини $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{+*}$ з нульовою мірою Лебега, виконується $\mu(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} f(x)dx = 0$. Неперервність функції f на $\mathbb{R}^{+*}$ також є наслідком [68].

Тепер доведемо (3.32). Для цього зауважимо, що з (3.29) випливає

$$\lim_{x\to 0, x>0} x(t(x))^2 = -\frac{1}{c(1-c)}. \tag{3.34}$$

Оскільки $\mathrm{Im}(t(x)) \geq 0$ для усіх $x \neq 0$, (3.34) тягне за собою, що $t(x) \simeq \frac{i}{\sqrt{x}\sqrt{c(1-c}}$ для $x \to 0^+$ або, що еквівалентно, $\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}(t(x)) \simeq \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{x\, c(1-c)}}$.

Залишилось отримати (3.33). Спершу покажемо, що

$$\lim_{x\to 0, x>0} x^2(t(x))^3 = \left(\frac{1}{M}\operatorname{Tr} R_N^{-1}\right)^{-1}. \tag{3.35}$$

Для цього запишемо (3.13) як

$$\frac{1}{M}\mathrm{Tr}R\left(-xt(x)I + \frac{1}{1-\frac{1}{x(t(x))^2}}R\right)^{-1} = 1. \tag{3.36}$$

Нагадаємо, що для $c = 1$, $xt(x) \to 0$ та $|x(t(x))^2| \to +\infty$ для $x \to 0, x > 0$. Ліву частину рівняння (3.36) можна розкласти наступним чином

$$\begin{aligned}\frac{1}{M}\mathrm{Tr}R\left(-xt(x)I + \frac{1}{1-\frac{1}{x(t(x))^2}}R\right)^{-1} &= 1 - \frac{1}{x(t(x))^2}\\ &+ \frac{1}{M}\operatorname{Tr} R^{-1}\, xt(x) + xt(x)\epsilon_1(x) + \frac{1}{x(t(x))^2}\epsilon_2(x),\end{aligned}$$

де $\epsilon_1(x)$ та $\epsilon_2(x)$ збігаються до 0 коли $x \to 0, x > 0$. Таким чином, з (3.36) випливає

$$\frac{1}{M}\operatorname{Tr} R^{-1}\, xt(x) - \frac{1}{x(t(x))^2} = xt(x)\tilde{\epsilon}_1(x) + \frac{1}{x(t(x))^2}\tilde{\epsilon}_2(x),$$

де $\tilde{\epsilon}_1(x)$ та $\tilde{\epsilon}_2(x)$ знову збігаються до 0 коли $x \to 0, x > 0$. Це негайно приводить до (3.35). Оскільки функція $x \to x^2(t(x))^3$ неперервна на $\mathbb{R}^{+*}$, справедливо, що

$$\lim_{x\to 0, x>0} x^{2/3}t(x) = e^{2ik\pi/3}\left(\frac{1}{M}\operatorname{Tr} R^{-1}\right)^{-1/3},$$

де k дорівнює $0, 1$ або 2. Якщо $k = 0$, дійсна частина $t(x)$ має бути додатною коли x знаходиться достатньо близько до 0. З чим Лема 3.2 дає суперечність. Якщо $k = 2$, $\mathrm{Im}(t(x)) < 0$ для достатньо малих x, що також неможливо. Таким чином, k має дорівнювати 1. Тоді маємо,

$$\lim_{x\to 0, x>0} x^{2/3}\mathrm{Im}(t(x)) = \sin 2\pi/3\,\left(\frac{1}{M}\operatorname{Tr} R^{-1}\right)^{-1/3}. \tag{3.37}$$

Що завершує доведення (3.33). ■

Наступним, для повноти викладення, ми наведемо наступний результат зі спільної статті [50], в якому доведено, що функції $x \to t(x)$ та $x \to f(x)$

можуть бути розкладені у степеневий ряд у околі кожної точки з $\mathcal{S}_N^\circ$. Більш детально:

Пропозиція 3.3. *Якщо $x_0 > 0$ та $\mathrm{Im}(t(x_0)) > 0$, тоді функції t та f можуть бути представлені як*

$$t(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k, f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k(x-x_0)^k,$$

де $|x - x_0|$ достатньо мале.

Доведення. Аналогічно з [68] та [23] доведення базується на теоремі про голоморфну неявну функцію (див. [17]). Позначимо $t(x_0)$ через t_0. Тоді, рівняння (3.13) у точці x_0 може бути записаним як $h(x_0, t_0) = 0$, де функція $h(z, t)$ визначається наступним чином

$$h(z,t) = t - \frac{1}{M}\mathrm{Tr}\left(R\left(-z(I + \frac{ct}{1-z(ct)^2}R)\right)^{-1}\right).$$

Оскільки $x_0 > 0$ та $\mathrm{Im}(t_0) > 0$, функція $(z,t) \to h(z,t)$ голоморфна у околі (x_0, t_0). Нескладно перевірити, що

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_{x_0,t_0} = 1 - u_0(x_0, x_0) - x_0^2 v_0(x_0, x_0), \tag{3.38}$$

де, нагадаємо, функції u_0 та v_0 визначені у (3.6) та (3.7). Наслідуючи доведення Леми 3.2, ми негайно отримуємо, що з $1 - u_0(x_0, x_0) - x_0^2 v_0(x_0, x_0) = 0$ випливає $T(x_0) = aT(x_0)^*$ та $t_0 = at_0^*$ для деякого $a \in \mathbb{C}$. З чого знову ж таки отримаємо рівність $t_0 = t_0^*$, що неможливо, оскільки $\mathrm{Im}(t(x_0)) > 0$. Таким чином, $\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_{x_0,t_0} \neq 0$. Тепер застосовуючи теорему про голоморфну неявну функцію, ми отримаємо, що існує голоморфна у околі Σ_{x_0} точці x_0 функція $z \to \tilde{t}(z)$, яка задовольняє $\tilde{t}(x_0) = t_0$ та $h(z, \tilde{t}(z)) = 0$ для усіх $z \in \Sigma_{x_0}$. Більш того, з умови $\mathrm{Im}(t_0) = \mathrm{Im}(\tilde{t}(x_0)) > 0$ маємо $\mathrm{Im}(\tilde{t}(z)) > 0$ та $\mathrm{Im}(z\tilde{t}(z)) > 0$ для $|z - x_0| < \epsilon$ з достатньо малим ϵ. Отже, якщо $z \in \mathbb{C}^+$ та $|z - x_0| < \epsilon$, повинно виконуватися $\tilde{t}(z) = t(z)$ (див. Пропозицію 2.2). Тому, $t(x) = \lim_{z\to x, z\in\mathbb{C}^+} t(z)$ має співпадати з $\tilde{t}(x)$ для $|x - x_0| < \epsilon$. Оскільки $\tilde{t}(z)$ голоморфна у околі точки x_0, функція $x \to t(x)$ розкладається у ряд

$$t(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k$$

для $|x - x_0| < \epsilon$. З цього негайно випливає, що функція f також розкладається у степеневий ряд на інтервалі $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$. ■

Нарешті, використовуючи отриманні результати, ми наведемо властивості міри ν_N, що відповідає перетворенню Стілтьєса

$$t_{N,\nu}(z) = \frac{1}{M}\mathrm{Tr}T_N(z).$$

Оскільки міри ν_N and μ_N абсолютно неперервні відносно одна одної, $d\nu_N(x)$ також може бути записано як $d\nu_N(x) = g_N(x)dx + \nu_N(\{0\})\delta_0$. Використовуючи тотожність

$$\frac{1}{M}\mathrm{Tr}\left[-z\left(I + \frac{ct(z)}{1 - z(ct(z))^2}R\right)\right] T(z) = 1,$$

ми отримаємо негайно

$$t_\nu(z) = -\frac{1}{z} - \frac{c(t(z))^2}{1 - z(ct(z))^2}. \tag{3.39}$$

Якщо $x > 0$, існує границя $t_\nu(x) = \lim_{z \to x, z \in \mathbb{C}^+}$ та вона визначається через праву частину рівняння (3.39) з $z = x$. Тому, для $x > 0$, $g(x) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}(t_\nu(x))$ або

$$g(x) = -\frac{1}{\pi}\frac{c\,\mathrm{Im}((t(x))^2)}{|1 - x(ct(x))^2|^2}. \tag{3.40}$$

Якщо $c > 1$, $|zt(z)^2| \to +\infty$ при $z \to 0$. Таким чином, з (3.39) випливає, що $\nu_N(\{0\}) = \lim_{z \to 0} -zt_\nu(z)$ співпадає з $1 - \frac{1}{c}$, як і очікувалося. Тепер опишемо поведінку g коли $x \to 0, x > 0$ та $c \leq 1$.

Пропозиція 3.4. *Якщо $c < 1$, має місце*

$$g(x) \simeq_{x \to 0} \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{c\,(1-c)}}\frac{1}{M}\mathrm{Tr}(R^{-1})\frac{1}{\sqrt{x}}. \tag{3.41}$$

У випадку ж $c = 1$, маємо

$$g(x) \simeq_{x \to 0} \frac{1}{\pi}\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{M}\mathrm{Tr}(R^{-1})\right)^{2/3}\frac{1}{x^{2/3}}. \tag{3.42}$$

Доведення. Нескладні перетворення рівняння (3.30) дають нам

$$z(t(z))^2 + \frac{1}{c(1-c)} \simeq_{z \to 0} \frac{1}{M}\mathrm{Tr}R^{-1}\frac{1}{c^2(1-c)^3}\frac{1}{t(z)}.$$

Оскільки $t(x) \simeq_{x\to 0, x>0} \frac{i}{\sqrt{x}\sqrt{c(1-c)}}$, маємо

$$\mathrm{Im}((t(x))^2) \simeq -i\,\frac{1}{M}\mathrm{Tr}R^{-1}\,\frac{1}{1-c}\,\frac{1}{(c(1-c))^{3/2}}\,\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Таким чином, з (3.40) негайно випливає (3.41). Твердження (3.42) є прямим наслідком (3.37). ■

Пропозиція 3.4 дає на практиці, що у випадку $c_N \le 1$ багато власних значень матриці $W_{f,N}W_{p,N}^*W_{p,N}W_{f,N}^*$ знаходяться біля 0. Більш того, факт, що швидкість збігання g_N до $+\infty$ більша для $c_N = 1$, показує, що у цьому випадку відсоток власних значень біля 0 навіть більший, ніж у випадку $c_N < 1$.

Наприкінці зауважимо, що функції $t_\nu(x)$ та $g(x)$ можуть бути розкладені у степеневий ряд біля кожної точки $x_0 \in \mathcal{S}^\circ$. Це є очевидним наслідком Пропозиції 3.3 та виразів для $s_\nu(x)$ та $g(x)$ через $t(x)$.

3.2 Властивості носія $\mathcal{S}_N$.

Цей підрозділ присвячено характеризації носія міри ν_N, він же носій міри μ_N.

Позначимо через $w_N(z)$ наступну функцію

$$w_N(z) = -\frac{(1 - z(c_N t_N(z))^2)}{c_N t_N(z)} = z c_N t_N(z) - \frac{1}{c_N t_N(z)}. \tag{3.43}$$

У подальшому ми опустимо індекс N. Нескладно побачити, що функція w є аналітичною на $\mathbb{C} \setminus \mathcal{S}$, що $\mathrm{Im}(w(z)) > 0$ для $z \in \mathbb{C}^+$ і існує границя $w(x) = \lim_{z\to x, z\in\mathbb{C}^+} w(z)$ для усіх $x \in \mathbb{R}^*$ так само, як і для $x = 0$. Якщо ми позначимо цю границю через $w(0)$, тоді $w(0) = 0$ для $c \le 1$ та $w(0) = c\delta$ якщо $c > 1$, де, нагадаємо, δ є розв'язком рівняння (3.22). Більш того, $w(x)$ є дійсним тоді і тільки тоді, коли $t(x)$ є дійсною функцією. Таким чином, внутрішність $\mathcal{S}^o$ носія $\mathcal{S}$ також визначається як

$$\mathcal{S}^o = \{x \in \mathbb{R}^+, \mathrm{Im}(w(x)) > 0\}. \tag{3.44}$$

Зокрема, оскільки $t(x)'$ та $(xt(x))'$ додатні для $x \in \mathbb{R} - \mathcal{S}$, похідна $w'(x)$ функції $w(x)$ по відношенню до x також є додатною на $\mathbb{R} - \mathcal{S}$. Легко помітити, що $t(z)$ можна виразити через $w(z)$ як

$$t(z) = \frac{1}{z} w(z) \frac{1}{M} \mathrm{Tr} R \left(R - w(z)I\right)^{-1}. \tag{3.45}$$

З визначення (3.43) маємо

$$1 + ct(z)w(z) - z(ct(z))^2 = 0. \tag{3.46}$$

Підставляючи (3.45) у (3.46), ми негайно отримуємо, що $w_N(z)$ задовольняє рівнянню

$$\phi_N(w_N(z)) = z, \tag{3.47}$$

де $\phi_N(w)$ визначається як

$$\phi_N(w) = c_N w^2 \frac{1}{M} \mathrm{Tr} R_N \left(R_N - wI\right)^{-1} \left(c_N \frac{1}{M} \mathrm{Tr} R_N \left(R_N - wI\right)^{-1} - 1 \right). \tag{3.48}$$

Зауважимо, що рівняння (3.47) справедливе не тільки на $\mathbb{C}\setminus\mathcal{S}$, але і на $x \in \mathcal{S}$. Таким чином, рівняння $\phi(w(x)) = x$ виконується для усіх $x \in \mathbb{R}$. З чого випливає, що $\phi^{'}(w(x))\, w^{'}(x) = 1$ для усіх $x \in \mathbb{R}-\mathcal{S}$. Як було відмічено, $w^{'}(x) > 0$ для $x \in \mathbb{R}-\mathcal{S}$, тому маємо, що $\phi^{'}(w(x)) > 0$ для усіх $x \in \mathbb{R}-\mathcal{S}$. Це означає, що для кожного $x \in \mathbb{R}-\mathcal{S}$, $w(x)$ є дійсним розв'язком поліноміального рівняння $\phi(w) = x$, для якого $\phi^{'}(w) > 0$. Більш того, Пропозиція 3.2 зазначає, що для $x \in \mathbb{R}^+ - \mathcal{S}$ значення $t(x) = \mathrm{Re}(t(x))$ є від'ємним. Отже, використовуючи рівняння (3.45) з $z = x$, ми робимо висновок, що для $x > 0$, яке не належать до $\mathcal{S}$, значення $w(x)$ також задовольняє $w(x)\frac{1}{M}\mathrm{Tr}R\left(R - w(x)I\right)^{-1} < 0$. Якщо ж $x < 0$, тоді, $t(x)$ є додатним та $w(x)$ все ще задовольняє $w(x)\frac{1}{M}\mathrm{Tr}R\left(R - w(x)I\right)^{-1} < 0$. Все це приводить до наступної Пропозиції.

Пропозиція 3.5. *Для усіх $x \in \mathbb{R} - \mathcal{S}_N$, $w_N(x)$ задовольняє наступним умовам:*

$$\phi_N(w_N(x)) = x,\ \phi_N^{'}(w_N(x)) > 0,\ w_N(x) \frac{1}{M} \mathrm{Tr} R_N \left(R_N - w_N(x) I_M\right)^{-1} < 0, \tag{3.49}$$

де $w_N(x)$ і $\phi_N(x)$ визначені відповідно у (3.43) і (3.48).

Як ми покажемо нижче, для $x \in \mathbb{R}-\mathcal{S}$, властивості (3.49) характеризують $w(x)$ в множині усіх розв'язків рівняння $\phi(w) = x$ та дозволяють визначити носій як підмножину $\mathbb{R}^+$ де рівняння $\phi(w) = x$ не має дійсних розв'язків, які задовольняють умовам (3.49). Ці результати випливають з елементарного вивчення функції $w \to \phi(w)$.

Ми почнемо з випадку $c \leq 1$ та знайдемо значення $x > 0$ для яких рівняння $\phi(w(x)) = x$ має дійсні розв'язки, що задовольняють (3.49), та значення $x > 0$, для яких таких розв'язків не існує. Легко помітити, що для $x > 0$, усі дійсні розв'язки рівняння $\phi(w) = x$ є додатними. Таким чином, третя умова у (3.49) еквівалентна $\frac{1}{M}\mathrm{Tr}R\left(R - w(x)I\right)^{-1} < 0$. Позначимо через $\omega_{1,N} < \omega_{2,N} < \ldots < \omega_{\overline{M},N}$ $\overline{M}$ коренів (які, звичайно, є дійсними числами) рівняння $\frac{1}{M}\mathrm{Tr}R_N(R_N - wI)^{-1} = \frac{1}{c_N}$ та через $\mu_{1,N} < \mu_{2,N} < \ldots < \mu_{\overline{M}-1,N}$ корені $\frac{1}{M}\mathrm{Tr}R_N(R_N - wI)^{-1} = 0$. Оскільки $c \leq 1$, легко побачити, що $\omega_1 \geq 0$ та $\omega_1 < \overline{\lambda}_{\overline{M}} < \mu_1 < \omega_2 < \overline{\lambda}_{\overline{M}-1} < \ldots < \mu_{\overline{M}-1} < \omega_{\overline{M}} < \overline{\lambda}_1$. Також зрозуміло, що $\frac{1}{M}\mathrm{Tr}R(R - wI)^{-1} < 0$ тоді і тільки тоді, коли $w \in (\overline{\lambda}_{\overline{M}}, \mu_1) \cup \ldots \cup (\overline{\lambda}_2, \mu_{\overline{M}-1}) \cup (\overline{\lambda}_1, +\infty)$.

Для $x > 0$ рівняння $\phi(w) = x$ є поліноміальним, степінь якого дорівнює $2\overline{M} + 1$. Таким чином, $\phi(w) = x$ має рівно $2\overline{M} + 1$ коренів. Для усіх $x > 0$, це рівняння має принаймні $2\overline{M} - 1$ дійсних розв'язків, які не можуть співпадати з $w(x)$ для $x \in (\mathcal{S}^\circ)^c$. Дійсно,

- $\overline{M}$ коренів належать до $]\omega_1, \overline{\lambda}_{\overline{M}}[, \ldots,]\omega_{\overline{M}}, \overline{\lambda}_1[$. Жодне з них не може відповідати $w(x)$ для $x \in (\mathcal{S}^\circ)^c$, оскільки $\frac{1}{M}\mathrm{Tr}R(R - wI)^{-1} > 0$ для цих коренів.

- На кожному інтервалі $]\overline{\lambda}_{\overline{M}}, \mu_1[, \ldots,]\overline{\lambda}_2, \mu_{\overline{M}-1}[$, рівняння $\phi(w) = x$ має дійсний розв'язок, для якого ϕ' від'ємне. Таким чином, $\phi(w) = x$ має ще $\overline{M} - 1$ дійсних коренів, які не можуть бути $w(x)$ для $x \in (\mathcal{S}^\circ)^c$.

Оскільки $\phi_N(w) \to +\infty$ коли $w \to \overline{\lambda}_{1,N}, w > \overline{\lambda}_{1,N}$ та $\phi_N(w) \to +\infty$ коли $w \to +\infty$, існує щонайменше одна точка в інтервалі $]\overline{\lambda}_{1,N}, +\infty[$, у якій ϕ_N' дорівнює нулю. Більш того, така точка єдина, бо інакше $\phi_N(w) = x$ буде мати більш ніж $2\overline{M} + 1$ розв'язків, для деяких значень x. Позначимо цю точку через $w_{+,N}$ та помітимо, що якщо $x > x_{+,N} = \phi_N(w_{+,N})$, $\phi_N(w) = x$ має

$2\overline{M}+1$ дійсних коренів: $2\overline{M}-1$ кореня, що були описані вище та ще 2 додаткових розв'язки, які належать відповідно до $]\overline{\lambda}_1, w_+[$ та $]w_+, +\infty[$. Таким чином, $w(x)$ дійсне та легко побачити, що $w(x)$ співпадає з розв'язком, який належить до $]w_+, +\infty[$. З цього випливає, що $]x_+, +\infty[\subset \mathbb{R}-\mathcal{S}$.

Якщо $\phi'(w)$ відмінна від нуля на $]\overline{\lambda}_{\overline{M}}, \mu_1[\cup\ldots\cup]\overline{\lambda}_2, \mu_{\overline{M}-1}[$, для усіх $x \in]0, x_+[$, ϕ спадає на цих інтервалах. З чого маємо, що жодне з дійсних розв'язків рівняння $\phi(w)=x$ не задовольняє властивостям $w(x)$ для $x \in \mathbb{R}^+ - \mathcal{S}$. Таким чином, $w(x)$ має бути комплексним, тобто маємо, що $\phi(w)=x$ має $2\overline{M}-1$ дійсних кореня та два комплексно спряжених кореня. У цьому разі $w(x)$ є додатною уявною частиною розв'язку, $x \in \mathcal{S}^\circ$ та носій $\mathcal{S}$ співпадає з $[0, x_+]$.

На Рис. 3.1 наведено приклад такої поведінки для $\overline{M}=3$. У цьому випадку носій представлений єдиним відрізком $[0, x_+]$, тому що $\phi'(w)\neq 0$ для $w \in [\overline{\lambda}_3, \mu_1]\cup[\overline{\lambda}_2, \mu_2]$.

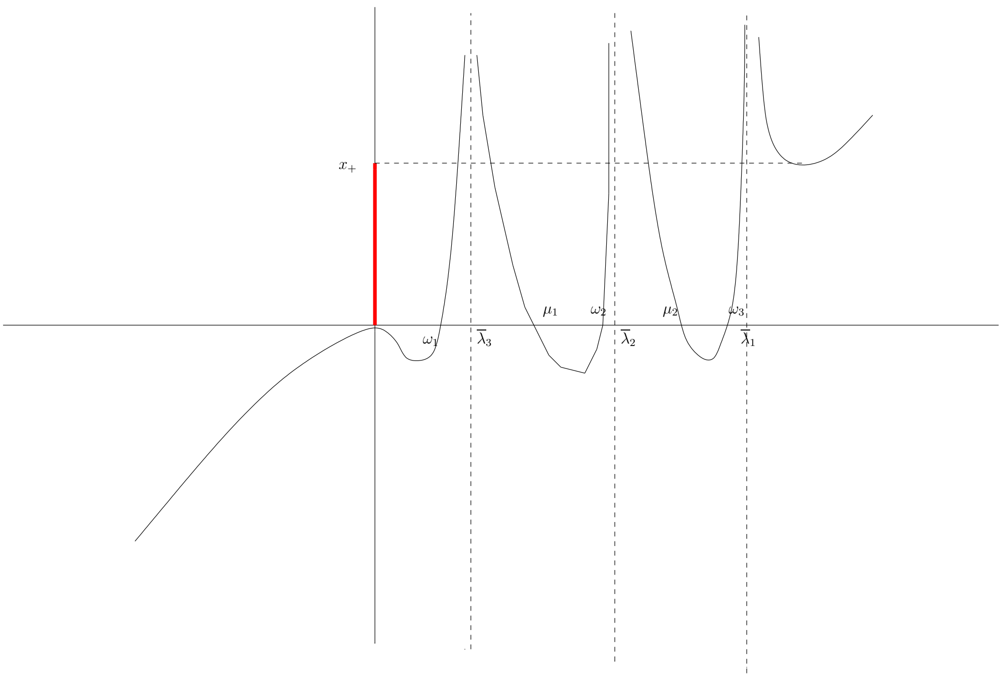

Рис. 3.1: Характерне представлення $\phi(w)$ як функції від w для $\overline{M}=3$. На відрізках $[\overline{\lambda}_3, \mu_1]$ та $[\overline{\lambda}_2, \mu_2]$ немає максимумів, тому $\mathcal{S}=[0, x_+]$.

Для того, щоб описати носій, коли ϕ' має корені на $]\overline{\lambda}_{\overline{M}}, \mu_1[\cup\ldots\cup]\overline{\lambda}_2, \mu_{\overline{M}-1}[$, необхідно дати більш детальну характеристику відповідним кореням. Для цього спочатку зауважимо, що ϕ' не має коренів з кратністю 2. Насправді, припустимо, що такий корінь існує на інтервалі $]\overline{\lambda}_{\overline{M}+1-l}, \mu_l[$ та позначимо його через w_l. Тоді, якщо $x_l = \phi(w_l)$, рівняння $\phi(w) = x_l$ має $2\overline{M} - 1$ простих коренів та корінь w_l з кратністю 3. Тобто, ми отримали, що $\phi(w) = x_l$ має $2\overline{M} + 2$ розв'язків, що неможливо. Далі наведемо корисний результат.

Пропозиція 3.6. *Число локальних екстремумів функції ϕ_N на $]\overline{\lambda}_{\overline{M}}, \mu_1[\cup \ldots \cup]\overline{\lambda}_2, \mu_{\overline{M}-1}[$ є парним, позначимо його через $2q$, та $0 \leq q \leq \overline{M} - 1$. Якщо $q \geq 1$, позначимо аргументи цих екстремумів через $w_{1,N}^+ < w_{2,N}^- < w_{2,N}^+ < \ldots < w_{q-1,N}^+ < w_{q,N}^-$, тоді $x_{1,N}^+ = \phi_N(w_{1,N}^+), x_{2,N}^- = \phi_N(w_{2,N}^-), \ldots, x_{q-1,N}^+ = \phi_N(w_{q-1,N}^+), x_{q,N}^- = \phi_N(w_{q,N}^-)$ задовольняє*

$$x_{1,N}^+ < x_{2,N}^- < x_{2,N}^+ < \ldots < x_{q-1,N}^+ < x_{q,N}^-. \tag{3.50}$$

Більш того, для кожного l, інтервал $]\overline{\lambda}_{\overline{M}-(l-1)}, \mu_l[$ містить щонайбільше один інтервал $[w_{p,N}^+, w_{p+1,N}^-]$, та $x_{p,N}^+$ (відповідно $x_{p+1,N}^-$) є локальним мінімумом (максимумом) функції ϕ_N.

Доведення. Ми покажемо, що якщо $w_1,\, w_2 \in \{w_1^+,\, w_2^-,\, \ldots,\, w_{q-1}^+,\, w_q^-\}$ та $w_1 > w_2$, образи $x_1 = \phi(w_1)$ та $x_2 = \phi(w_2)$ також задовольняють $x_1 > x_2$. Для цього достатньо показати, що відношення $(x_1 - x_2)/(w_1 - w_2)$ завжди додатне. Покладемо $f_n = \frac{c_N}{M}\mathrm{Tr}R_N(R_N - w_n I_M)^{-1} = \frac{c_N}{M}\sum_1^{\bar{M}} \frac{\overline{\lambda}_i m_i}{\overline{\lambda}_i - w_n}$ для $n = 1, 2$. Тоді ми можемо записати (3.48) як

$$x_n = \phi(w_n) = w_n^2 f_n(f_n - 1) = w_n^2 p_n(p_n - 1), \tag{3.51}$$

де $p_n = 1 - f_n$. Зауважимо, що екстремуми w_1 та w_2, згідно з визначенням, такі, що f_1 та f_2 від'ємні. Використовуючи (3.51) для x_1 та x_2, маємо

$$\begin{aligned} \frac{x_1 - x_2}{w_1 - w_2} &= \frac{(w_1^2 p_1^2 - w_2^2 p_2^2) - (w_1^2 p_1 - w_2^2 p_2)}{w_1 - w_2} \\ &= (w_1 p_1 + w_2 p_2)\frac{w_1 p_1 - w_2 p_2}{w_1 - w_2} - \frac{w_1^2 p_1 - w_2^2 p_2}{w_1 - w_2}. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Розкладемо перший доданок правої частини рівняння (3.52). Застосовуючи визначення $f_{1,2}$, отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{w_1 p_1 - w_2 p_2}{w_1 - w_2} &= 1 + \frac{c}{M}\sum_1^{\bar{M}} \frac{\overline{\lambda}_i m_1}{w_1 - w_2}\left(\frac{w_2}{\overline{\lambda}_i - w_2} - \frac{w_1}{\overline{\lambda}_i - w_1}\right) \\ &= 1 - \frac{c}{M}\sum_1^{\bar{M}} \frac{\overline{\lambda}_i^2 m_i}{(\overline{\lambda}_i - w_1)(\overline{\lambda}_i - w_2)}. \end{aligned}$$

Аналогічно, другий доданок розкладається у

$$\frac{w_1^2 p_1 - w_2^2 p_2}{w_1 - w_2} = (w_1 + w_2) + \frac{c}{M}\sum_1^{\bar{M}} \frac{\overline{\lambda}_i m_1}{w_1 - w_2}\left(\frac{w_2^2}{\overline{\lambda}_i - w_2} - \frac{w_1^2}{\overline{\lambda}_i - w_1}\right)$$

$$= (w_1 + w_2)\left(1 - \frac{c}{M}\sum_1^{\bar{M}} \frac{\overline{\lambda}_i^2 m_i}{(\overline{\lambda}_i - w_1)(\overline{\lambda}_i - w_2)}\right) + w_1 w_2 \frac{c}{M}\sum_1^{\bar{M}} \frac{\overline{\lambda}_i m_i}{(\overline{\lambda}_i - w_1)(\overline{\lambda}_i - w_2)}.$$

Підставляючи останні два вирази у (3.52), ми маємо

$$\frac{x_1 - x_2}{w_1 - w_2} = (w_1 p_1 + w_2 p_2 - w_1 - w_2)\left(1 - \frac{c}{M}\sum_1^{\bar{M}} \frac{\overline{\lambda}_i^2 m_i}{(\overline{\lambda}_i - w_1)(\overline{\lambda}_i - w_2)}\right)$$

$$- w_1 w_2 \frac{c}{M}\sum_1^{\bar{M}} \frac{\overline{\lambda}_i m_i}{(\overline{\lambda}_i - w_1)(\overline{\lambda}_i - w_2)} = -(w_1 f_1 + w_2 f_2)$$

$$\times \left(1 - \frac{c}{M}\sum_1^{\bar{M}} \frac{\overline{\lambda}_i^2 m_i}{(\overline{\lambda}_i - w_1)(\overline{\lambda}_i - w_2)}\right) - w_1 w_2 \frac{c}{M}\sum_1^{\bar{M}} \frac{\overline{\lambda}_i m_i}{(\overline{\lambda}_i - w_1)(\overline{\lambda}_i - w_2)}.$$

Очевидно, що нерівність

$$\frac{1}{(\overline{\lambda}_i - w_1)(\overline{\lambda}_i - w_2)} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(\overline{\lambda}_i - w_1)^2} + \frac{1}{(\overline{\lambda}_i - w_2)^2}\right)$$

виконується для усіх i. Ми можемо використати цю нерівність, оскільки, нагадаємо, що $-f_n$ додатне, так само, як і w_1, $w_2 > 0$, з цього випливає, що $-(w_1 f_1 + w_2 f_2) > 0$. Таким чином, маємо

$$\frac{x_1 - x_2}{w_1 - w_2} \ge -(w_1 f_1 + w_2 f_2)\left(1 - \frac{c}{2M}\sum_1^{\bar{M}} \frac{\overline{\lambda}_i^2 m_i}{(\overline{\lambda}_i - w_1)^2} - \frac{c}{2M}\sum_1^{\bar{M}} \frac{\overline{\lambda}_i^2 m_i}{(\overline{\lambda}_i - w_2)^2}\right)$$

$$- w_1 w_2 \frac{c}{M}\sum_1^{\bar{M}} \frac{\overline{\lambda}_i m_i}{(\overline{\lambda}_i - w_1)(\overline{\lambda}_i - w_2)}.$$

Беручи до уваги, що $\frac{c}{M}\sum \frac{\overline{\lambda}_i^2 m_i}{(\overline{\lambda}_i - w)^2} = f(w) + w f'(w)$, остання нерівність набуває вигляду

$$\frac{x_1 - x_2}{w_1 - w_2} \ge -\frac{1}{2}(w_1 f_1 + w_2 f_2)\,(2 - f_1 - w_1 f_1' - f_2 - w_2 f_2')$$

$$- w_1 w_2 \frac{c}{M}\sum_1^{\bar{M}} \frac{\overline{\lambda}_i m_i}{(\overline{\lambda}_i - w_1)(\overline{\lambda}_i - w_2)}. \quad (3.53)$$

Продиференціювавши вираз (3.51), маємо $\phi'(w_n) = 2w_n f_n^2 - 2w_n f_n + 2w_n^2 f_n f_n' - w_n^2 f_n'$. Згідно з визначенням, точки $w_{1,2}$ є екстремумами функції $\phi(w)$, тобто $\phi'(w_{1,2}) = 0$. Це негайно дає наступне рівняння $f_n + w_n f_n' - 1 = \frac{w_n f_n'}{2f_n}$. Підставимо його у (3.53) та трохи реорганізуємо вираз, отримаємо нерівність

$$\frac{x_1 - x_2}{w_1 - w_2} \geq \frac{1}{4}(w_1 f_1 + w_2 f_2)\left(\frac{w_1 f_1'}{f_1} + \frac{w_2 f_2'}{f_2}\right) - w_1 w_2 \frac{c}{M}\sum_1^{\bar{M}} \frac{\overline{\lambda}_i m_i}{(\overline{\lambda}_i - w_1)(\overline{\lambda}_i - w_2)}$$

$$= \frac{1}{4}(w_1^2 f_1' + w_2^2 f_2') + \frac{1}{4} w_1 w_2 \left(f_1' \frac{f_2}{f_1} + f_2' \frac{f_1}{f_2}\right) - w_1 w_2 \frac{c}{M}\sum_1^{\bar{M}} \frac{\overline{\lambda}_i m_i}{(\overline{\lambda}_i - w_1)(\overline{\lambda}_i - w_2)}.$$

Нарешті, позначимо отриманні у правій частині доданки відповідно через I_1, I_2, I_3 та покажемо, що $I_1 + \frac{1}{2}I_3$ та $I_2 + \frac{1}{2}I_3$ завжди додатні. Почнемо з $I_1 + \frac{1}{2}I_3$, знову використовуючи визначення $f_{1,2}$, $I_1 + \frac{1}{2}I_3$ можна розкласти у

$$\frac{1}{4}\left(w_1^2 f_1' + w_2^2 f_2' - 2w_1 w_2 \frac{c}{M}\sum_1^{\bar{M}} \frac{\overline{\lambda}_i m_i}{(\overline{\lambda}_i - w_1)(\overline{\lambda}_i - w_2)}\right)$$

$$= \frac{c}{4M}\sum \overline{\lambda}_i m_i \Big(\frac{w_1^2}{(\overline{\lambda}_i - w_1)^2} + \frac{w_2^2}{(\overline{\lambda}_i - w_2)^2} - \frac{2w_1 w_2}{(\overline{\lambda}_i - w_1)(\overline{\lambda}_i - w_2)}\Big)$$

$$= \frac{c}{4M}\sum \overline{\lambda}_i m_i \left(\frac{w_1}{\overline{\lambda}_i - w_1} - \frac{w_2}{\overline{\lambda}_i - w_2}\right)^2,$$

що, очевидно, додатне. Аналогічно, представляємо $I_2 + \frac{1}{2}I_3$ у вигляді

$$\frac{1}{4} w_1 w_2 \left(f_1' \frac{f_2}{f_1} + f_2' \frac{f_1}{f_2} - 2\frac{c}{M}\sum_1^{\bar{M}} \frac{\overline{\lambda}_i m_i}{(\overline{\lambda}_i - w_1)(\overline{\lambda}_i - w_2)}\right)$$

$$= w_1 w_2 \frac{c}{4M}\sum \overline{\lambda}_i m_i \left(\frac{f_2/f_1}{(\overline{\lambda}_i - w_1)^2} + \frac{f_1/f_2}{(\overline{\lambda}_i - w_2)^2} - \frac{2}{(\overline{\lambda}_i - w_1)(\overline{\lambda}_i - w_2)}\right)$$

$$= w_1 w_2 \frac{c}{4M}\sum \overline{\lambda}_i m_i \left(\frac{\sqrt{f_2/f_1}}{\overline{\lambda}_i - w_1} - \frac{\sqrt{f_1/f_2}}{\overline{\lambda}_i - w_2}\right)^2,$$

що знову є додатним. Таким чином, ми отримали, що $x_1 - x_2 > 0$ та справедливо (3.50). Залишилось обґрунтувати, що кожен інтервал $(]\overline{\lambda}_{\overline{M}-(l-1)}, \mu_l[)_{l=1,\ldots,\overline{M}-1}$ містить не більше одного інтервалу виду $[w_{p,N}^+, w_{p+1,N}^-]$. Дійсно, припустимо, що $]\overline{\lambda}_{\overline{M}-(l-1)}, \mu_l[$ містить 2 відрізка $[w_{p_1,N}^+, w_{p_1+1,N}^-]$ та $[w_{p_2,N}^+, w_{p_2+1,N}^-]$ з $p_1 < p_2$. Тоді, очевидно, $[w_{p_1+1,N}^+, w_{p_1+2,N}^-] \subset]\overline{\lambda}_{\overline{M}-(l-1)}, \mu_l[$. Значення $x_{p_1,N}^+$ є локальним мінімумом, тому що $x_{p_1,N}^+ < x_{p_1+1,N}^-$, у той час, як $x_{p_1+1,N}^-$ має бути локальним максимумом. Теж саме ми можемо сказати і про $x^+_{p_1+1,N}$ та $x^-_{p_1+2,N}$. Проте, це суперечить властивості $x^-_{p_1+1,N} < x^+_{p_1+1,N}$. ■

Пропозиція 3.6 дозволяє нам визначити носій $\mathcal{S}_N$.

Наслідок 3.2. *Якщо* $c_N \leq 1$, *носій* $\mathcal{S}_N$ *задається як*

$$\mathcal{S}_N = [0, x^+_{1,N}] \cup [x^-_{2,N}, x^+_{2,N}] \cup \ldots [x^-_{q,N}, x_{+,N}]. \tag{3.54}$$

Доведення. Якщо x належить внутрішності множини правої частини рівняння (3.54), тоді $\phi(w) = x$ має лише $2\overline{M} - 1$ дійсних кореня. З чого випливає, що останні 2 корені комплексні, тобто $x \in \mathcal{S}^\circ_N$. Таким чином, ми можемо зробити висновок, що

$$]0, x^+_{1,N}[\cup]x^-_{2,N}, x^+_{2,N}[\cup \ldots]x^-_{q,N}, x_{+,N}[\subset \mathcal{S}^\circ_N$$

та

$$[0, x^+_{1,N}] \cup [x^-_{2,N}, x^+_{2,N}] \cup \ldots [x^-_{q,N}, x_{+,N}] \subset \mathcal{S}_N.$$

І обернено, якщо $x \in \mathbb{R}^+ - \Big([0, x^+_{1,N}] \cup [x^-_{2,N}, x^+_{2,N}] \cup \ldots [x^-_{q,N}, x_{+,N}]\Big)$, рівняння $\phi(w) = x$ має $2\overline{M}+1$ дійсних коренів, з чого випливає, що $w(x)$ дійсне. Таким чином,

$$\mathbb{R}^+ - \big([0, x^+_{1,N}] \cup [x^-_{2,N}, x^+_{2,N}] \cup \ldots [x^-_{q,N}, x_{+,N}]\big) \subset \mathbb{R}^+ - \mathcal{S}_N$$

або, що еквівалентно,

$$\mathcal{S}_N \subset [0, x^+_{1,N}] \cup [x^-_{2,N}, x^+_{2,N}] \cup \ldots [x^-_{q,N}, x_{+,N}].$$

Що завершує доведення Наслідку (3.2).

На Рис. 3.2 наведено приклад такого випадку для $\overline{M} = 3$. Ми бачимо, що ϕ' має корені на відрізку $[\overline{\lambda}_3, \mu_1]$ але не на відрізку $[\overline{\lambda}_2, \mu_2]$. Таким чином, носій співпадає з $\mathcal{S}_N = [0, x^+_1] \cup [x^-_2, x_+]$.

Якщо матриця R_N представляється як $R_N = \sigma^2 I_M$, тобто $\overline{M} = 1$ та $\overline{\lambda}_1 = \sigma^2$, носій, звичайно, співпадає з $\mathcal{S}_N = [0, x_+]$, та x_+ задається як

$$x_+ = \sigma^4 c \left(1 + \frac{1}{\frac{1+\sqrt{1+8c}}{2}}\right)^2 \left(c + \frac{1+\sqrt{1+8c}}{2}\right). \tag{3.55}$$

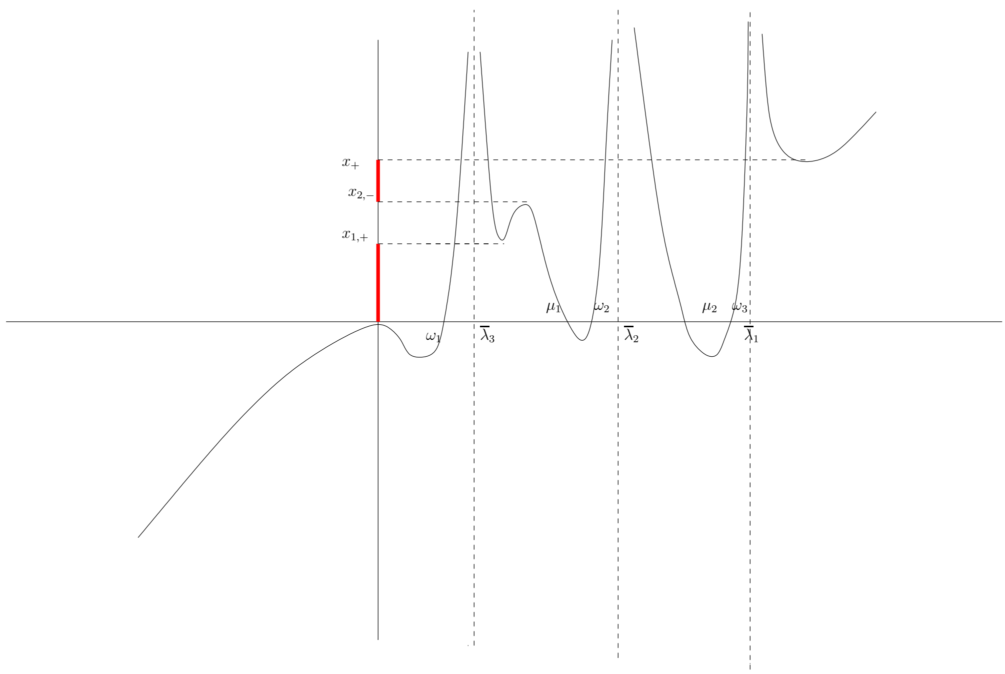

Рис. 3.2: Характерне представлення $\phi(w)$, як функції, залежної від w для $\overline{M} = 3$. Ми бачимо два локальних екстремуми на $[\overline{\lambda}_3, \mu_1]$ та жодного на $[\overline{\lambda}_2, \mu_2]$, що дає $\mathcal{S}_N = [0, x_1^-] \cup [x_1^+, x_+]$.

Більш того, w_+ дорівнює

$$w_+ = \sigma^2 \left(1 + \frac{1 + \sqrt{1 + 8c}}{2}\right). \tag{3.56}$$

Зауважимо, що (3.55) та (3.56) відповідають результатам, отриманим у [45].

Далі ми стисло обговоримо випадок $c_N > 1$. Поведінка ϕ_N суттєво не змінюється, у порівняні з випадком, коли $c_N \leq 1$, за винятком факту, що тепер перший корінь $\omega_{1,N}$ рівняння $\frac{1}{M}\mathrm{Tr}R_N(R_N - wI_M)^{-1} = \frac{1}{c_N}$ від'ємний. Оскільки $\phi_N(0) = 0$, з цього випливає, що існує $\omega_{1,N} < w_{N,-} < 0$, для якого $\phi_N'(w_{N,-}) = 0$. Більш того, така точка єдина, бо інакше рівняння $\phi_N(w) = x$ матиме більше, ніж $2\overline{M} + 1$ коренів для деякого значення $x > 0$. Таким чином, $x_{-,N} = \phi_N(w_{-,N}) > 0$ є локальним максимумом функції ϕ_N, чий аргумент є від'ємним. Також зауважимо, що $\phi_N(w) > 0$ якщо $0 < w < \overline{\lambda}_{\overline{M}}$. Окрім цього, поведінка ϕ_N для $w > \overline{\lambda}_{\overline{M}}$ залишається незмінною з випадком $c_N \leq 1$. Зокрема, Пропозиція 3.6 залишається справедливою. Проте, треба зауважити, що для $0 < x < x_{-,N}$, рівняння $\phi_N(w) = x$ досі має $2\overline{M} - 1$ дійсних додатних кореня та 2 додаткових дійсних розв'язка, найменше з яких не перевищує $w_{-,N}$ та друге є також від'ємним, але більшим за $w_{-,N}$. З цього випливає, що $w_N(x)$ дійсне. Також зауважимо, що $w_N(x)$ дорівнює меншому додатковому кореню, тому що він задовольняє умовам (3.49). Тому, інтервал $]0, x_{-,N}[$ належить до $\mathbb{R}^+ - \mathcal{S}_N$. Якщо ϕ_N' відмінне від нуля на $]\overline{\lambda}_{\overline{M}}, \mu_1[\cup \ldots \cup]\overline{\lambda}_2, \mu_{\overline{M}-1}[$, для $x \in]x_{-,N}, x_{+,N}[$, рівняння $\phi_N(w) = x$ має лише $2\overline{M} - 1$ дійсних коренів, які не задовольняють умовам (3.49) та 2 комплексних спряжених кореня. Таким чином, $]x_{-,N}, x_{+,N}[\subset \mathcal{S}_N^\circ$ та $[x_{-,N}, x_{+,N}] \subset \mathcal{S}_N$. І обернено, $]0, x_{-,N}[\cup]x_{+,N}, +\infty[\subset \mathbb{R}^+ - \mathcal{S}_N$, з чого випливає, що $\mathcal{S}_N \subset \{0\} \cup [x_{-,N}, x_{+,N}]$. Як було доведено раніше, $\{0\} \subset \mathcal{S}_N$, з чого маємо, що $\mathcal{S}_N = \{0\} \cup [x_{-,N}, x_{+,N}]$ якщо ϕ_N' відмінне від нуля на $]\overline{\lambda}_{\overline{M}}, \mu_1[\cup \ldots \cup]\overline{\lambda}_2, \mu_{\overline{M}-1}[$. Якщо ж ϕ_N' має корені на $]\overline{\lambda}_{\overline{M}}, \mu_1[\cup \ldots \cup]\overline{\lambda}_2, \mu_{\overline{M}-1}[$, тобто якщо $q \geq 1$ (нагадаємо, що q було визначено у Пропозиції 3.6), носій задається як

$$\mathcal{S}_N = \{0\} \cup [x_{-,N}, x_{1,N}^+] \cup [x_{2,N}^-, x_{2,N}^+] \cup \ldots [x_{q,N}^-, x_{+,N}]. \tag{3.57}$$

Щоб обґрунтувати це твердження, необхідно довести, що $x_{-,N} < x_{1,N}^+$. Для цього будемо використовувати такий же метод, як і у Наслідку 3.2. Покладемо $w_1 = w_{-,N}, w_2 = w_{1,N}^+$ та будемо в точності повторювати обчислення, які ми виконували для оцінювання $\phi(w_2) - \phi(w_1) > 0$. Зауважимо, що на відміну до того, що ми мали у Наслідку 3.2, тепер $w_1 < 0$ та $f_1 > 0$. Проте, $f_1 w_1$ досі від'ємне, тож $-(w_1 f_1 + w_2 f_2)$ досі додатне. Це дозволяє зробити висновок, що усі нерівності, які ми використовували у доведенні Наслідку 3.2, також справедливі і у новому випадку, окрім оцінки доданку $I_2 + I_3/2$, який ми трохи змінимо. Отож представимо $I_2 + I_3/2$ як

$$-w_1 w_2 \frac{c}{4M} \sum \lambda_i m_i \times \left(\frac{-f_2/f_1}{(\lambda_i - w_1)^2} + \frac{-f_1/f_2}{(\lambda_i - w_2)^2} + \frac{2}{(\lambda_i - w_1)(\lambda_i - w_2)} \right).$$

Оскільки $-f_2/f_1$ та $-f_1/f_2$ додатні, маємо

$$I_2 + I_3/2 = -w_1 w_2 \frac{c}{4M} \sum \lambda_i m_i \left(\frac{\sqrt{-f_2/f_1}}{\lambda_i - w_1} + \frac{\sqrt{-f_1/f_2}}{\lambda_i - w_2} \right)^2.$$

Таким чином, $I_2 + I_3/2 > 0$ та $\phi(w_2) - \phi(w_1) > 0$.

Для того, щоб об'єднати отримані результати для випадків $c_N \leq 1$ та $c_N > 1$, визначимо $x_{-,N}$ для $c_N \leq 1$ як $x_{-,N} = 0$, та підведемо підсумку у наступній теоремі.

Теорема 3.2. *Носій $\mathcal{S}_N$ має вигляд*

$$\mathcal{S}_N = \{0\}\mathbb{I}_{c_N>1} \cup [x_{-,N}, x^+_{1,N}] \cup [x^-_{2,N}, x^+_{2,N}] \cup \ldots [x^-_{q,N}, x_{+,N}] \tag{3.58}$$

Далі ми доведемо, що послідовності $(w_{+,N})_{N\geq 1}$ та $(x_{+,N})_{N\geq 1}$ обмежені. Інакше кажучи, для кожного N, носій $\mathcal{S}_N$ належить деякому компактному відрізку, який не залежить від N.

Лема 3.7.

$$\sup_{N\geq 1} w_{+,N} < +\infty, \ \sup_{N\geq 1} x_{+,N} < +\infty. \tag{3.59}$$

Доведення. Щоб довести цю лему, ми використовуємо факт, що $w_{+,N} > \lambda_{1,N}$ та $\phi'_N(w_{+,N}) = 0$. Нескладно перевірити, що

$$\phi'_N(w) = 2c_N^2 w \frac{1}{M}\mathrm{Tr}R(wI-R)^{-1} - (c_N w)^2 \frac{1}{M}\mathrm{Tr}R(wI-R)^{-2}$$
$$-2c_N^2 w\left(\frac{1}{M}\mathrm{Tr}R(wI-R)^{-1}\right)^2 - 2(c_N w)^2\frac{1}{M}\mathrm{Tr}R(wI-R)^{-2}\frac{1}{M}\mathrm{Tr}R(wI-R)^{-1}.$$

Для $w > b > \lambda_{1,N}$, очевидно виконується $\|(wI-R)^{-1}\| \leq \frac{1}{w-b}$. Запишемо, що $w\frac{1}{M}\mathrm{Tr}R(wI-R)^{-1} = \frac{1}{M}\mathrm{Tr}R + \frac{1}{M}\mathrm{Tr}R^2(wI-R)^{-1}$ та $w^2\frac{1}{M}\mathrm{Tr}R(wI-R)^{-2} = \frac{1}{M}\mathrm{Tr}R + w\left(\frac{1}{M}\mathrm{Tr}R(wI-R)^{-2}\right) - \frac{1}{M}\mathrm{Tr}R^2(wI-R)^{-1}$, тоді ми негайно отримуємо, що $\phi'_N(w)$ може бути представлено, як

$$\phi'_N(w) = c_N^2\,\frac{1}{M}\mathrm{Tr}R + \delta_N(w),$$

де $\delta_N(w)$ задовольняє $|\delta_N(w)| \leq \delta(w)$ та $w \to \delta(w)$ є раціональною функцією відносно w, яка не залежить від N та збігається до 0 коли $w \to +\infty$. Таким чином, для усіх $\eta > 0$ існує $w_1 > b$, таке, що $\phi'_N(w) > c_N^2\,\frac{1}{M}\mathrm{Tr}R - \eta$ для $w \geq w_1$. Оскільки $c_N \to c_*$ та $\frac{1}{M}\mathrm{Tr}R \geq a$, ми маємо $\phi'_N(w) > \frac{c_*^2}{2}\,a$ для $w \geq w_1$. З $\phi'_N(w_{+,N}) = 0$ ми робимо висновок, що $w_{+,N} < w_1$, але w_1 не залежить від N, що негайно дає $\sup_{N\geq 1} w_{+,N} < +\infty$. Щоб довести, що $x_{+,N}$ обмежено, ми зауважимо, що $x_{+,N} = \phi_N(w_{+,N}) < \phi_N(w_1)$. Оскільки $w_1 > b$, легко помітити, що

$$\phi_N(w_1) < 2c_N^2 w_1^2\left(\frac{b}{(w_1-b)^2} + \frac{b}{(w_1-b)}\right).$$

Таким чином, послідовності $(\phi_N(w_1))_{N\geq 1}$ та $(x_{+,N})_{N\geq 1}$ є обмеженими. ■

Наприкінці ми наведемо достатню умову для того, щоб носій був єдиним відрізком, тобто $\mathcal{S}_N = [0, x_{+,N}]$ для $c_N < 1$ та $\mathcal{S}_N = \{0\} \cup [x_{-,N}, x_{+,N}]$ для $c_N > 1$.

Пропозиція 3.7. *Припустимо, що існує константа $\kappa > 0$ така, що для усіх достатньо великих значень M виконується:*

$$|\lambda_{k,N} - \lambda_{l,N}| \leq \kappa \left(\frac{|k-l|}{M} \right)^{1/2} \tag{3.60}$$

для кожної пари (k, l), $1 \leq k \leq l \leq M$. Тоді, для усіх достатньо великих M, $\mathcal{S}_N = [0, x_{+,N}]$ якщо $c_N \leq 1$ та $\mathcal{S}_N = \{0\} \cup [x_{-,N}, x_{+,N}]$ якщо $c_N > 1$.

Доведення. Припустимо, що виконується (3.60) та $\mathcal{S}_N$ не співпадає з $[0, x_+]$ або $\mathcal{S}_N = \{0\} \cup [x_-, x_+]$, тобто $\phi'(w)$ має корінь w_0 такий, що $\lambda_1 < w_0 < \lambda_M$ та $\frac{1}{M}\mathrm{Tr} R(R - w_0 I)^{-1} < 0$. Нескладні перетворення дають нам, що w_0 задовольняє:

$$\frac{1}{M}\mathrm{Tr}\left(R(R - w_0 I)^{-1}\right)^2 = \frac{-\frac{1}{M}\mathrm{Tr} R(R - w_0 I)^{-1}}{1 - 2c\frac{1}{M}\mathrm{Tr} R(R - w_0 I)^{-1}}.$$

Оскільки $\frac{1}{M}\mathrm{Tr} R(R - w_0 I)^{-1} < 0$, ми робимо висновок, що

$$\frac{1}{M}\mathrm{Tr}\left(R(R - w_0 I)^{-1}\right)^2 = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_k - w_0}\right)^2 < -\frac{1}{M}\mathrm{Tr} R(R - w_0 I)^{-1}$$
$$\leq \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}\frac{\lambda_k}{|\lambda_k - w_0|}.$$

Нерівність Єнсена дає $\left(\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}\frac{\lambda_k}{|\lambda_k - w_0|}\right)^2 \leq \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_k - w_0}\right)^2$. Таким чином, ми отримали, що $\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}\frac{\lambda_k}{|\lambda_k - w_0|} < 1$ та

$$\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_k - w_0}\right)^2 < 1. \tag{3.61}$$

Розглянемо j_0 для якого $\lambda_{j_0} < w_0 < \lambda_{j_0+1}$. Тоді припущення 2.1 обмеженості R_N та умови (3.60) тягнуть за собою, що

$$\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_k - w_0}\right)^2 > \frac{a^2}{\kappa^2}\frac{M}{(|k - j_0| + 1)}.$$

З чого випливає, що

$$\frac{a^2}{\kappa^2}\sum_{k=1}^{M}\frac{1}{(|k-j_0|+1)}<1$$

для усіх достатньо великих M, але вираз $\sum_{k=1}^{M}\frac{1}{(|k-j_0|+1)}$ очевидно необмежений, що приводить до суперечності. ■

3.3 Відсутність власних значень за межами носія.

У цьому підрозділі ми доведемо наступну теорему.

Теорема 3.3. *Припустимо, що існують $\epsilon>0$, $\kappa_1\in\mathbb{R}$, $\kappa_2\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ та натуральне число N_0 такі, що*

$$(\kappa_1-\epsilon,\,\kappa_2+\epsilon)\cap\mathcal{S}_N=\varnothing\qquad\forall\,N\geq N_0. \tag{3.62}$$

Тоді, з ймовірністю один, відрізок $[\kappa_1,\,\kappa_2]$ не містить жодного власного значення матриці $W_{f,N}W_{p,N}^*W_{p,N}W_{f,N}^*$ для усіх достатньо великих N.

На початку зауважимо, що достатньо розглянути випадок $\kappa_2<+\infty$. Насправді, нагадаємо, що множина $\cup_{N\geq1}\mathcal{S}_N$ компактна (див. Лема 3.7) та виконується $\|W_{f,N}W_{p,N}^*W_{p,N}W_{f,N}^*\|\leq\|W_N\|^4$, де матриця W_N визначається як (2.6). Більш того, з (2.8) випливає майже напевно, що для достатньо великих N, $\|W_N\|^2\leq b\,(1+\delta+\sqrt{c_*})^2$, де $\delta>0$. Таким чином, майже напевно, найбільше власне значення матриці $W_{f,N}W_{p,N}^*W_{p,N}W_{f,N}^*$ обмежено зверху хорошою константою $b^2\,(1+\delta+\sqrt{c_*})^4$ для усіх достатньо великих N. Отже у подальшому ми вважаємо, що $\kappa_2<+\infty$.

Для того, щоб довести Теорему 3.3, ми будемо використовувати метод, запропонований Haagerup-Thornbjornsen ([31], див. також [15]). Головним етапом доведення є наступна Пропозиція.

Пропозиція 3.8. $\forall z\in\mathbb{C}^+$, *та для усіх достатньо великих N виконується*

$$\mathbb{E}\left\{\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}Q_N(z)\right\}=\frac{1}{M}\mathrm{Tr}T_N(z)+\frac{1}{N^2}r_N(z), \tag{3.63}$$

де r_N голоморфна на $\mathbb{C}^+$ функція, що задовольняє

$$|r_N(z)| \le P_1(|z|)P_2\left(\frac{1}{\mathrm{Im} z}\right) \tag{3.64}$$

для усіх $z \in \mathbb{C}^+$, де P_1 та P_2 хороші поліноми.

Доведення. Аналогічно з доведенням Пропозиції 2.3 ми розкладемо

$$\mathbb{E}\left\{\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}Q_N(z)\right\} - \frac{1}{M}\mathrm{Tr}T_N(z) = \frac{1}{ML}\mathrm{Tr}\left[\mathbb{E}\left\{Q_N(z)\right\} - I_L \otimes S_N(z)\right] \\ + \frac{1}{M}\mathrm{Tr}\left[S_N(z) - T_N(z)\right].$$

Оскільки справедливо (2.69), достатньо довести, що

$$\left|\frac{1}{M}\mathrm{Tr}[S_N(z) - T_N(z)]\right| \le \frac{1}{N^2}P_1(|z|)P_2(\mathrm{Im}^{-1}z) \tag{3.65}$$

для деяких хороших поліномів P_1 та P_2. У подальшому ми позначимо через $s_N(z)$ наступну функцію

$$s_N(z) = \frac{1}{M}\mathrm{Tr}R_N S_N(z).$$

Очевидно, що $s_N \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$. Більш того, якщо $\mu_{N,s}$ є відповідною невід'ємною мірою, маємо

$$\mu_{N,s}(\mathbb{R}^+) = \frac{1}{M}\mathrm{Tr}R_N, \quad \int_{\mathbb{R}^+}\lambda\, d\mu_{N,s}(\lambda) = c_N \frac{1}{M}\mathrm{Tr}R_N \frac{1}{M}\mathrm{Tr}R_N^2. \tag{3.66}$$

Це нескладно довести використовуючи аргументи з доведення Пропозиції 2.2.

Оскільки $\frac{1}{M}\mathrm{Tr}[S_N(z) - T_N(z)]$ визначається через (2.92) для $F = I$, оцінка (3.65) виявляється еквівалентною наступній властивості

$$\left|\frac{1}{M}\mathrm{Tr}[R_N(S_N(z) - T_N(z))]\right| = |s_N(z) - t_N(z)| \le \frac{1}{N^2}P_1(|z|)P_2(\mathrm{Im}^{-1}z). \tag{3.67}$$

Далі, необхідно визначити функції, які формально схожі на $u(z)$ та $v(z)$, що визначаються як (2.82) та (2.83), а саме:

$$u_\alpha(z) = c\frac{|cz\alpha(z)|^2\frac{1}{M}\mathrm{Tr}(RS(z)S^*(z)R)}{|1-z(c\alpha(z))^2|^2}$$
$$v_\alpha(z) = c\frac{\frac{1}{M}\mathrm{Tr}(RS(z)S^*(z)R)}{|1-z(c\alpha(z))^2|^2}$$
$$u_{t,\alpha}(z) = c\frac{|cz|^2t(z)\alpha(z)\frac{1}{M}\mathrm{Tr}(RS(z)T(z)R)}{(1-z(c\alpha(z))^2)(1-z(ct(z))^2)} \tag{3.68}$$
$$v_{t,\alpha}(z) = c\frac{\frac{1}{M}\mathrm{Tr}(RS(z)T(z)R)}{(1-z(c\alpha(z))^2)(1-z(ct(z))^2)} \tag{3.69}$$

Використовуючи рівність $t(z) = \frac{1}{M}\mathrm{Tr}RT(z)$ та визначення для $s(z)$ і $S(z)$, ми нескладно отримуємо

$$\begin{pmatrix} (s(z)-t(z)) \\ z(s(z)-t(z)) \end{pmatrix} = \mathbf{D}_{t,\alpha}(z)\begin{pmatrix} (s(z)-t(z)) \\ z(s(z)-t(z)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_1(z) \\ \epsilon_2(z) \end{pmatrix}, \tag{3.70}$$

де

$$\epsilon_1(z) = (\alpha(z)-s(z))(zv_{t,\alpha}(z)+u_{t,\alpha}(z))$$
$$\epsilon_2(z) = z(\alpha(z)-s(z))(zv_{t,\alpha}(z)+u_{t,\alpha}(z))$$
$$\mathbf{D}_{t,\alpha}(z) = \begin{pmatrix} u_{t,\alpha}(z) & v_{t,\alpha}(z) \\ z^2v_{t,\alpha}(z) & u_{t,\alpha}(z) \end{pmatrix}.$$

Очевидно, (3.70) може бути записано як

$$(\mathbf{I}-\mathbf{D}_{t,\alpha}(z))\begin{pmatrix} (s(z)-t(z)) \\ z(s(z)-t(z)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_1(z) \\ \epsilon_2(z) \end{pmatrix}. \tag{3.71}$$

З (2.68) негайно випливає, що $\alpha(z)-s(z) = \mathcal{O}_z(N^{-2})$. Таким чином, щоб довести, що $(\epsilon_i(z))_{i=1,2}$ є також $\mathcal{O}_z(N^{-2})$, ми маємо оцінити $u_{t,\alpha}$ та $v_{t,\alpha}$. Оскільки $t(z), \alpha(z), \|T(z)\|$ та $\|S(z)\|$ порядку $\mathcal{O}_z(1)$, достатньо оцінити знаменники правих частин (3.68)-(3.69). Зауважимо, що загальні маси та перші моменти мір μ та $\overline{\mu}$ (міра, що відповідає $\alpha(z)$) задовольняють умовам Леми 2.5, отже вона дає, що $(1-z(ct(z))^2)^{-1} = \mathcal{O}_z(1)$ та $(1-z(c\alpha(z))^2)^{-1} = \mathcal{O}_z(1)$. Таким чином, ми перевірили, що $(\epsilon_i(z))_{i=1,2}$ має порядок $\mathcal{O}_z(N^{-2})$.

Наступним кроком оцінки $s(z)-t(z)$ буде показати, що матриця $I-\mathbf{D}_{t,\alpha}(z)$ невироджена на $\mathbb{C}^+$ та дослідити вплив її оберненої на вектор $(\epsilon_1(z), \epsilon_1(z))^T$.

Для цього згадаємо матрицю $\mathbf{D}$, що визначається у (2.81) та позначимо

$$\mathbf{D}_\alpha(z) = \begin{pmatrix} u_\alpha(z) & v_\alpha(z) \\ z^2 v_\alpha(z) & u_\alpha(z) \end{pmatrix}.$$

Лема 3.8. *Для усіх $z \in \mathbb{C}^+$, існують хороші константи κ та β такі, що*

$$\det(I - \mathbf{D}(z)) \geq \frac{\kappa\ (\mathrm{Im} z)^8}{(|\beta|^2 + |z|^2)^4}. \tag{3.72}$$

Більш того, існують два хороших поліноми P_1 та P_2 для яких

$$1 - u_\alpha(z) > 0 \tag{3.73}$$

та

$$\det(I - \mathbf{D}_\alpha(z)) \geq \frac{\kappa\ (\mathrm{Im} z)^8}{(|\beta|^2 + |z|^2)^4} \tag{3.74}$$

для усіх $z \in B_N$, де B_N визначається як

$$\mathcal{B}_N = \left\{ z \in \mathbb{C}^+,\ \frac{1}{MN} P_1(|z|) P_2\left(\frac{1}{\mathrm{Im} z}\right) \leq 1 \right\}. \tag{3.75}$$

Нарешті, для усіх $z \in \mathcal{B}_N$, виконується

$$\det(I - \mathbf{D}_{t,\alpha}(z)) \geq \frac{\kappa\ (\mathrm{Im} z)^8}{(|\beta|^2 + |z|^2)^4} \tag{3.76}$$

.

Доведення. Щоб оцінити $\det(I - \mathbf{D}(z))$, ми використовуємо аналогічні розрахунки з Леми 2.7. Зокрема маємо

$$(I - \mathbf{D}(z)) \begin{pmatrix} \mathrm{Im} t(z) \\ \mathrm{Im} z t(z) \end{pmatrix} = \mathrm{Im} z \begin{pmatrix} \frac{1}{M} \mathrm{Tr} R T(z) T^*(z) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.77}$$

З цього випливає, що

$$\begin{aligned} 1 - u(z) = \frac{\mathrm{Im} z}{\mathrm{Im} t(z)} \cdot \frac{1}{M} \mathrm{Tr} R T(z) T^*(z) + \frac{\mathrm{Im} z t(z)}{\mathrm{Im} t(z)} v(z) \\ \geq \frac{\mathrm{Im} z}{\mathrm{Im} t(z)} \cdot \frac{1}{M} \mathrm{Tr} R T(z) T^*(z). \end{aligned}$$

Застосуємо правило Крамера для системи (3.77), тоді отримуємо

$$\det(I-\mathbf{D}(z)) = \frac{\mathrm{Im}z}{\mathrm{Im}t(z)}\cdot\frac{1}{M}\mathrm{Tr}RT(z)T^*(z)(1-u(z)) \\ \geq \left(\frac{\mathrm{Im}z}{\mathrm{Im}t(z)}\cdot\frac{1}{M}\mathrm{Tr}RT(z)T^*(z)\right)^2. \quad (3.78)$$

Очевидним є факт, що $\mathrm{Im}t(z)\leq|t(z)|\leq\frac{1}{M}\mathrm{Tr}R\,(\mathrm{Im}z)^{-1}\leq b\,(\mathrm{Im}z)^{-1}$. Таким чином, також виконується $\dfrac{\mathrm{Im}z}{\mathrm{Im}t(z)}\geq\frac{1}{b}\,(\mathrm{Im}t(z))^2$. Далі оцінимо $\frac{1}{M}\mathrm{Tr}RT(z)T^*(z)$. Для цього зауважимо, що

$$\frac{1}{M}\mathrm{Tr}RT(z)T^*(z)=\frac{1}{M}\mathrm{Tr}RT(z)T^*(z)RR^{-1}\geq\frac{1}{b}\frac{1}{M}\mathrm{Tr}(RT(z)T^*(z)R). \quad (3.79)$$

Нерівність Єнсена дає $\frac{1}{M}\mathrm{Tr}(RT(z)T^*(z)R)\geq\left|\frac{1}{M}\mathrm{Tr}RT(z)\right|^2=|t(z)|^2\geq(\mathrm{Im}\,t(z))^2$. Таким чином, застосовування Леми 2.5 для $\beta(z)=t(z)$ негайно дає

$$\left(\frac{\mathrm{Im}z}{\mathrm{Im}t(z)}\cdot\frac{1}{M}\mathrm{Tr}RT(z)T^*(z)\right)^2\geq\frac{\kappa\,(\mathrm{Im}z)^8}{(|\beta|^2+|z|^2)^4}$$

для деяких хороших констант κ та β. Тепер (3.72) негайно випливає з (3.78).

Перейдемо к доведенню (3.73) та (3.74). Для цього позначимо через $\epsilon(z)$ функцію $\epsilon(z)=\alpha(z)-s(z)$. Обчислимо $\mathrm{Im}\,s(z)$ та $\mathrm{Im}\,zs(z)$ використовуючи рівність $s(z)=\frac{1}{M}\mathrm{Tr}RS(z)$, маємо

$$(\mathbf{I}-\mathbf{D}_\alpha(z))\begin{pmatrix}\mathrm{Im}\alpha(z)\\ \mathrm{Im}z\alpha(z)\end{pmatrix}=\mathrm{Im}z\begin{pmatrix}\frac{1}{M}\mathrm{Tr}RS(z)S^*(z)\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathrm{Im}\epsilon(z)\\ \mathrm{Im}z\epsilon(z)\end{pmatrix}. \quad (3.80)$$

З першої компоненти (3.80) випливає

$$1-u_\alpha=\frac{\mathrm{Im}z}{\mathrm{Im}\alpha}\cdot\frac{1}{M}\mathrm{Tr}RSS^*+\frac{\mathrm{Im}\epsilon}{\mathrm{Im}\alpha}+\frac{\mathrm{Im}z\alpha}{\mathrm{Im}\alpha}v_\alpha\geq\frac{\mathrm{Im}z}{\mathrm{Im}\alpha}\cdot\frac{1}{M}\mathrm{Tr}RSS^*+\frac{\mathrm{Im}\epsilon}{\mathrm{Im}\alpha}. \quad (3.81)$$

Аналогічно попередньому, ми можемо довести оцінку $\frac{1}{M}\mathrm{Tr}RSS^*\geq\frac{1}{b}\,|s(z)|^2\geq\frac{1}{b}\,(\mathrm{Im}s(z))^2$. Оскільки виконується (3.66), ми маємо право знову використати Лему 2.5 для $\beta(z)=s(z)$ та отримаємо, що

$$\frac{\mathrm{Im}z}{\mathrm{Im}s(z)}\cdot\frac{1}{M}\mathrm{Tr}RS(z)S^*(z)\geq\frac{\kappa\,(\mathrm{Im}z)^4}{(|\beta|^2+|z|^2)^2}$$

для деяких хороших констант β та κ. Зауважимо, що $\frac{\mathrm{Im}\epsilon}{\mathrm{Im}\alpha} \geq -\frac{|\epsilon|}{\mathrm{Im}\alpha}$. Таким чином, згідно з Лемою 2.5 для $\beta(z) = \alpha(z)$, справедлива нерівність $\frac{\mathrm{Im}\epsilon}{\mathrm{Im}\alpha} \geq -\kappa_1|\epsilon|\frac{\beta_1^2+|z|^2}{\mathrm{Im}z}$ для хороших констант κ_1 та β_1. Також $|\epsilon(z)| \leq \frac{1}{N^2}Q_1(|z|)Q_2(\frac{1}{\mathrm{Im}z})$ для деяких хороших поліномів Q_1 та Q_2, з чого випливає, що

$$1 - u_\alpha \geq \frac{\mathrm{Im}z}{\mathrm{Im}\alpha} \cdot \frac{1}{M}\mathrm{Tr}RSS^* + \frac{\mathrm{Im}\epsilon}{\mathrm{Im}\alpha} \geq \frac{\mathrm{Im}z}{\mathrm{Im}\alpha} \cdot \frac{1}{M}\mathrm{Tr}RSS^* - \frac{|\epsilon|}{\mathrm{Im}\alpha} \geq \frac{1}{2}\,\frac{\kappa\,(\mathrm{Im}z)^4}{(|\beta|^2+|z|^2)^2} \tag{3.82}$$

для z з множини $\mathcal{B}_{1,N}$, що визначається як

$$\frac{\kappa\,(\mathrm{Im}z)^4}{(|\beta|^2+|z|^2)^2} - \frac{1}{N^2}Q_1(|z|)Q_2(\frac{1}{\mathrm{Im}z})\,\kappa_1\,\frac{\beta_1^2+|z|^2}{\mathrm{Im}z} \geq \frac{1}{2}\,\frac{\kappa\,(\mathrm{Im}z)^4}{(|\beta|^2+|z|^2)^2}.$$

Знову ми бачимо, що множина $\mathcal{B}_{1,N}$ визначається у такий же спосіб, як і $\mathcal{B}_N$, але для інших поліномів $P_{1,1}$ та $P_{2,1}$.

Застосуємо правило Крамера для системи (3.80), тоді $\det(\mathbf{I} - \mathbf{D}_\alpha)$ виражається як

$$\det(\mathbf{I} - \mathbf{D}_\alpha) = \left(\frac{\mathrm{Im}z}{\mathrm{Im}\alpha} \cdot \frac{1}{M}\mathrm{Tr}RSS^* + \frac{\mathrm{Im}\epsilon}{\mathrm{Im}\alpha}\right)(1-u_\alpha) + \frac{\mathrm{Im}z\epsilon}{\mathrm{Im}\alpha}v_\alpha.$$

Нарешті підставимо оцінку (3.82) у останню рівність, маємо, що

$$\det(\mathbf{I} - \mathbf{D}_\alpha) \geq \left(\frac{1}{2}\,\frac{\kappa\,(\mathrm{Im}z)^4}{(|\beta|^2+|z|^2)^2}\right)^2 - \frac{|z|\,|\epsilon|}{\mathrm{Im}\alpha}\,v_\alpha$$

справедливо для усіх $z \in \mathcal{B}_{1,N}$. Оскільки $v_\alpha = \mathcal{O}_z(1)$, нескладно побачити, що

$$\left(\frac{\kappa\,(\mathrm{Im}z)^4}{2(|\beta|^2+|z|^2)^2}\right)^2 - \frac{|z|\,|\epsilon|}{\mathrm{Im}\alpha}\,v_\alpha \geq \left(\frac{1}{4}\,\frac{\kappa\,(\mathrm{Im}z)^4}{(|\beta|^2+|z|^2)^2}\right)^2$$

для усіх $z \in \mathcal{B}_{2,N}$, де $\mathcal{B}_{2,N}$ визначається як $\mathcal{B}_N$ для поліномів $P_{1,2}$ та $P_{2,2}$. Покладемо $P_1(|z|) = P_{1,1}(|z|) + P_{1,2}(|z|)$ та $P_2(1/\mathrm{Im}z) = P_{2,1}(1/\mathrm{Im}z) + P_{2,2}(1/\mathrm{Im}z)$ та розглянемо нову множину $\mathcal{B}_N$, що визначається як (3.75). Очевидно, що $\mathcal{B}_N \subset \mathcal{B}_{1,N} \cap \mathcal{B}_{2,N}$ та (3.73), (3.74) виконуються для $z \in \mathcal{B}_N$.

Нам залишилось довести (3.76). Для цього зауважимо, що нерівності

$$
\begin{aligned}
&|\det(\mathbf{I}-\mathbf{D}_{t,\alpha}(z))| \geq |1-u_{t,\alpha}(z)|^2 - |z|^2|v_{t,\alpha}(z)|^2 \geq (1-|u_{t,\alpha}(z)|)^2 \\
&-|z|v_\alpha(z)\cdot|z|v_t(z) \geq (1-\sqrt{u(z)u_\alpha(z)})^2 - |z|v_\alpha(z)\cdot|z|v(z) \geq (1-u(z))(1-u_\alpha(z)) \\
&- |z|v_\alpha(z)\cdot|z|v(z) \geq \sqrt{((1-u(z))^2-|z|^2v(z))((1-u_\alpha(z))^2-|z|^2v_\alpha(z))} \\
&= \sqrt{\det(\mathbf{I}-\mathbf{D}(z))\det(\mathbf{I}-\mathbf{D}_\alpha(z))}
\end{aligned}
$$

виконуються для $z \in \mathcal{B}_N$. Таким чином, (3.76) випливає з (3.72) та (3.74). Лема 3.8 доведена. $\square$

Тепер розв'язавши систему (3.71) та використавши тільки що доведені нерівності, маємо, що існують два хороші поліноми Q_1 та Q_2 такі, що нерівність

$$
|s_N(z)-t_N(z)| \leq \frac{1}{MN} Q_1(|z|) Q_2(\frac{1}{\mathrm{Im} z})
$$

виконується для усіх $z \in \mathcal{B}_N$. Якщо ж $z \in \mathcal{B}_N^c$, ми наслідуємо міркування з [31]. Більш детально, для $z \in \mathcal{B}_N^c$, справедлива нерівність $1 < \frac{1}{MN}P_1(|z|)P_2(1/\mathrm{Im} z)$. Оскільки $|s_N(z)-t_N(z)| \leq 2\,\frac{1}{M}\mathrm{Tr}R_N\,\frac{1}{\mathrm{Im} z}$ на $\mathbb{C}^+$, ми можемо зробити висновок, що

$$
|s_N(z)-t_N(z)| \leq 2b\frac{1}{MN} P_1(|z|)\frac{P_2(1/\mathrm{Im} z)}{\mathrm{Im} z}
$$

для усіх $z \in \mathcal{B}_N^c$. З чого безпосередньо випливає, що $s_N(z)-t_N(z) = \mathcal{O}_z(\frac{1}{N^2})$ для усіх $z \in \mathbb{C}^+$. Таким чином, має місце оцінка (3.67) та $\frac{1}{M}\mathrm{Tr}(T_N(z) - S_N(z)) = \mathcal{O}_z(\frac{1}{N^2})$ як і очікувалось. Пропозиція 3.8 доведена. $\blacksquare$

Далі, наслідуючи [16] і [31] ми використовуємо наступну Лему.

Лема 3.9. *Нехай ϕ - дійсно-значна, гладка функція з компактним носієм, що визначена на $\mathbb{R}^+$, тобто $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$. Тоді,*

$$
\mathbb{E}\left\{\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}\phi(W_fW_p^*W_pW_f^*)\right\} - \int_{\mathcal{S}_N}\phi(\lambda)d\mu_N(\lambda) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right)
$$

Доведення. Завдяки Пропозиції 1.1 ми можемо записати

$$
\mathbb{E}\left\{\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}\phi(W_fW_p^*W_pW_f^*)\right\} = \frac{1}{\pi}\lim_{y\downarrow 0}\mathrm{Im}\left\{\int_{\mathbb{R}^+}\phi(x)\mathbb{E}\left\{\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}Q(x+iy)\right\}dx\right\}
$$

так само, як

$$
\int_{\mathcal{S}_N}\phi(\lambda)d\mu_N(\lambda) = \frac{1}{\pi}\lim_{y\downarrow 0}\mathrm{Im}\left\{\int_{\mathbb{R}^+}\phi(x)\mathbb{E}\left\{\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}T(x+iy)\right\}dx\right\}.
$$

З Пропозиції 3.8 випливає, що

$$\mathbb{E}\left\{\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}\phi(W_fW_p^*W_pW_f^*)\right\}-\int_{\mathcal{S}_N}\phi(\lambda)d\mu_N(\lambda)$$
$$=\frac{1}{N^2}\frac{1}{\pi}\lim_{y\downarrow 0}\mathrm{Im}\left\{\int_{\mathbb{R}^+}\phi(x)r_N(x+iy)dx\right\}. \quad (3.83)$$

Оскільки $r_N(z)=\mathcal{O}_z(1)$, ми можемо використати результат, що надано у [15, Section 3.3] та отримати

$$\limsup_{y\downarrow 0}\left|\int_{\mathbb{R}+}\phi(x)r_N(x+iy)dx\right|\leq\kappa$$

для деякої хорошої константи κ. Це з (3.83) завершують доведення. ■

Нарешті, для того, щоб довести Теорему 3.3, ми визначимо функцію $\phi\in\mathcal{C}_c^\infty$ таку, що $0\leq\phi(\lambda)\leq 1$ та

$$\phi(\lambda)=\begin{cases}1, \text{ for } \lambda\in[\kappa_1,\kappa_2],\\ 0, \text{ for } \lambda\in\mathbb{R}-(\kappa_1-\epsilon,\kappa_2+\epsilon).\end{cases}$$

Оскільки для достатньо великих N маємо $(\kappa_1-\epsilon,\kappa_2+\epsilon)\cap\mathcal{S}_N=\varnothing$, тоді, очевидно, $\int_{\mathcal{S}_N}\phi(\lambda)d\mu_N(\lambda)=0$ та згідно з Лемою 3.9

$$\mathbb{E}\left\{\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}\phi(W_fW_p^*W_pW_f^*)\right\}=\mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

Тепер покажемо, що

$$\mathbf{Var}\left\{\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}\phi(W_fW_p^*W_pW_f^*)\right\}=\mathcal{O}\left(\frac{1}{N^4}\right).$$

Для цього знову застосуємо нерівність Пуанкаре-Неша

$$\mathbf{Var}\{\mathrm{Tr}\phi(W_fW_p^*W_pW_f^*)\}\leq\sum\mathbb{E}\Bigg\{\left(\frac{\partial\mathrm{Tr}\phi(W_fW_p^*W_pW_f^*)}{\partial\overline{W}^{m_1}_{i_1,j_1}}\right)^*\mathbb{E}\{W^{m_1}_{i_1,j_1}\overline{W}^{m_2}_{i_2,j_2}\}$$
$$\times\frac{\partial\mathrm{Tr}\phi(W_fW_p^*W_pW_f^*)}{\partial\overline{W}^{m_2}_{i_2,j_2}}\Bigg\}+\sum\mathbb{E}\left\{\frac{\partial\mathrm{Tr}\phi(WW^*)}{\partial W^{m_1}_{i_1,j_1}}\mathbb{E}\{W^{m_1}_{i_1,j_1}\overline{W}^{m_2}_{i_2,j_2}\}\left(\frac{\partial\mathrm{Tr}\phi(WW^*)}{\partial W^{m_2}_{i_2,j_2}}\right)^*\right\}.$$

Як завжди, ми оцінимо лише перший доданок, який позначимо через ψ, оскільки для другого доведення абсолютно аналогічне. Отже спершу обчислимо

$$\frac{\partial \mathrm{Tr}\phi(W_f W_p^* W_p W_f^*)}{\partial \overline{W}_{i_1,j_1}^{m_1}} = \mathrm{Tr}\left(\phi'(W_f W_p^* W_p W_f^*)\frac{\partial W_f W_p^* W_p W_f^*}{\partial \overline{W}_{i_1,j_1}^{m_1}}\right)$$
$$= \begin{cases} 1 \le i_1 \le L,\ (W_p W_f^* \phi'(W_f W_p^* W_p W_f^*) W_f)_{i_1 j_1}^{m_1}, \\ L+1 \le i_1 \le 2L,\ (\phi'(W_f W_p^* W_p W_f^*) W_f^* W_f W_p)_{(i_1-L)j_1}^{m_1} \end{cases}.$$

Підставимо цей вираз у (2.9), маємо

$$\psi = \sum_{i_1 i_2 = 1}^{L} \sum_{j_1,j_2,m_1,m_2} \Big(\frac{1}{N}\mathbb{E}\Big\{ \big(W_p W_f^* \phi'(W_f W_p^* W_p W_f^*) W_f\big)_{i_1 j_1}^{*m_1} R_{m_1 m_2} \delta_{i_1+j_1, i_2+j_2}$$
$$\times \big(W_p W_f^* \phi'(W_f W_p^* W_p W_f^*) W_f\big)_{i_2,j_2}^{m_2} \Big\} + \frac{1}{N}\mathbb{E}\Big\{ \big(\phi'(W_f W_p^* W_p W_f^*) W_f W_p^* W_p\big)_{i_1 j_1}^{*m_1}$$
$$\times R_{m_1 m_2} \delta_{i_1+j_1,i_2+j_2} \big(\phi'(W_f W_p^* W_p W_f^*) W_f W_p^* W_p\big)_{i_2,j_2}^{m_2} \Big\}\Big).$$

Аналогічно з доведенням Леми 2.1, ми можемо отримати, що

$$\mathbf{Var}\{\mathrm{Tr}\phi(W_f W_p^* W_p W_f^*)\} \le \frac{C}{N}\mathbb{E}\{\mathrm{Tr} W_f^* \phi'(W_f W_p^* W_p W_f^*) W_f W_p^* W_p W_f^*$$
$$\times \phi'(W_f W_p^* W_p W_f^*) W_f\} + \frac{C}{N}\mathbb{E}\{\mathrm{Tr} W_f W_p^* W_p W_p^* W_p W_f^* \left(\phi'(W_f W_p^* W_p W_f^*)\right)^2\}. \tag{3.84}$$

Позначимо перший доданок правої частини через ψ_1 та покладемо $\eta(\lambda) = (\phi'(\lambda))^2\lambda$, тоді

$$\psi_1 \le \frac{C}{N}\mathbb{E}\left\{\|W_f\|^2 \mathrm{Tr}(\eta(W_f W_p^* W_p W_f^*))\right\}.$$

Нагадаємо, що з (2.8) випливає, що $\|W_f\|^2 \le b\|W_{iid}\|^2$. Таким чином, маємо

$$\psi_1 \le \frac{\kappa}{N}\mathbb{E}\{\|W_{iid}\|^2 \mathbf{1}_{\|W_{iid}\| \le (1+\sqrt{c_*})^2+\delta} \mathrm{Tr}(\eta(W_f W_p^* W_p W_f^*))\}$$
$$+ \frac{\kappa}{N}\mathbb{E}\{\|W_{iid}\|^2 \mathbf{1}_{\|W_{iid}\| > (1+\sqrt{c_*})^2+\delta} \mathrm{Tr}(\eta(W_f W_p^* W_p W_f^*))\}$$
$$\le \frac{\kappa}{N}\mathbb{E}\{\mathrm{Tr}(\eta(W_f W_p^* W_p W_f^*))\} + \kappa \mathbb{E}^{1/2}\{\|W_{iid}\|^4 \mathbf{1}_{\|W_{iid}\| > (1+\sqrt{c_*})^2+\delta}\}$$
$$\times \mathbb{E}^{1/2}\left\{\left(\frac{1}{N}\mathrm{Tr}(\eta(W_f W_p^* W_p W_f^*))\right)^2\right\}.$$

Лема 3.9 дає $\frac{1}{N}\mathbb{E}\{\mathrm{Tr}(\eta(W_f W_p^* W_p W_f^*))\} = \mathcal{O}(N^{-2})$. У ході доведення Леми 2.1 ми отримали, що $\mathbb{E}\|W_{iid}\|^4 \mathbf{1}_{\|W_{iid}\|>(1+\sqrt{c_*})^2+\delta} = \mathcal{O}(N^{-k})$ для усіх k. Оскільки $\phi' \in \mathcal{C}_c^\infty$, існує константа κ така, що $|\phi'(\lambda)| < \kappa$ для усіх λ та $\phi'(\lambda) = 0$ для $\lambda > b + 2\epsilon$. З цього можна зробити висновок, що існує хороша константа κ така, що $\|\eta(W_{f,N} W_{p,N}^* W_{p,N} W_{f,N}^*)\| < \kappa$ для усіх N. Тепер легко побачити, що $\psi_1 = \mathcal{O}(N^{-2})$.

Для другого доданку, який ми позначимо через ψ_2, правої частини нерівності (3.84), маємо

$$\psi_2 = \frac{\kappa}{N}\mathbb{E}\left\{\mathrm{Tr} W_p^* W_p W_p^* W_p W_f^* \left(\phi'(W_f W_p^* W_p W_f^*)\right)^2 W_f\right\}$$
$$\leq \kappa\mathbb{E}\left\{\|W_p\|^2 \frac{1}{N}\mathrm{Tr}\left(\phi'(W_f W_p^* W_p W_f^*)\right)^2 W_f W_p^* W_p W_f^*\right\}.$$

Очевидно, що ψ_2 можна оцінити аналогічно з ψ_1, з чого випливає, що $\psi_2 = \mathcal{O}(N^{-2})$. Таким чином, ми довели, що

$$\mathbf{Var}\{\mathrm{Tr}\phi(W_f W_p^* W_p W_f^*)\} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

Тепер ми можемо завершити доведення Теореми 3.3 аналогічно з [16]. Для цього застосуємо нерівність Маркова у поєднані з отриманими вище результатами

$$\mathbf{P}\left\{\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}\phi(W_f W_p^* W_p W_f^*) > \frac{1}{N^{4/3}}\right\} \leq N^{8/3}\mathbb{E}\left\{\left(\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}\phi(W_f W_p^* W_p W_f^*)\right)^2\right\}$$
$$= N^{8/3}\left(\mathbf{Var}\left\{\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}\phi(W_f W_p^* W_p W_f^*)\right\} + \left(\mathbb{E}\left\{\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}\phi(W_f W_p^* W_p W_f^*)\right\}\right)^2\right)$$
$$= \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^{4/3}}\right).$$

Лема Бореля-Кантеллі дає, що для достатньо великих N, з ймовірністю 1 маємо

$$\frac{1}{ML}\mathrm{Tr}\phi(W_f W_p^* W_p W_f^* *) \leq \frac{1}{N^{4/3}}.$$

Згідно з визначенням функції ϕ, число власних значень матриці $W_f W_p^* W_p W_f^*$, що належать до відрізка $[\kappa_1, \kappa_2]$, обмежено значенням $\mathrm{Tr}\phi(W_f W_p^* W_p W_f^*) \leq \frac{1}{N^{1/3}}$. Оскільки це число є цілим та невід'ємним, ми робимо висновок, що з ймовірністю 1, відрізок $[\kappa_1, \kappa_2]$ не містить жодного власного значення для достатньо великих N. Теорема 3.3 доведена.

Нарешті, наведемо конкретний приклад, для цього візьмемо $M = 500$, $N = 1500$ та $L = 2$, тобто $c_N = 2/3$. Власні значення матриці R_N визначаються як $\lambda_{k,N} = 1/2 + \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi(k-1)}{2M}\right)$ для $k = 1, \ldots, M$. Матриця R_N задовольняє $\frac{1}{M}\mathrm{Tr}(R_N) \simeq 1$. На Рис. 3.3 зображена гістограма власних значень реалізацій матриць $W_{f,N}W_{p,N}^*W_{p,N}W_{f,N}^*$ так само, як граф щільності $g_N(x)$. Зауважимо, що гістограма та граф g_N відповідають один одному та усі власні значення матриць $W_{f,N}W_{p,N}^*W_{p,N}W_{f,N}^*$ знаходяться всередині носія g_N.

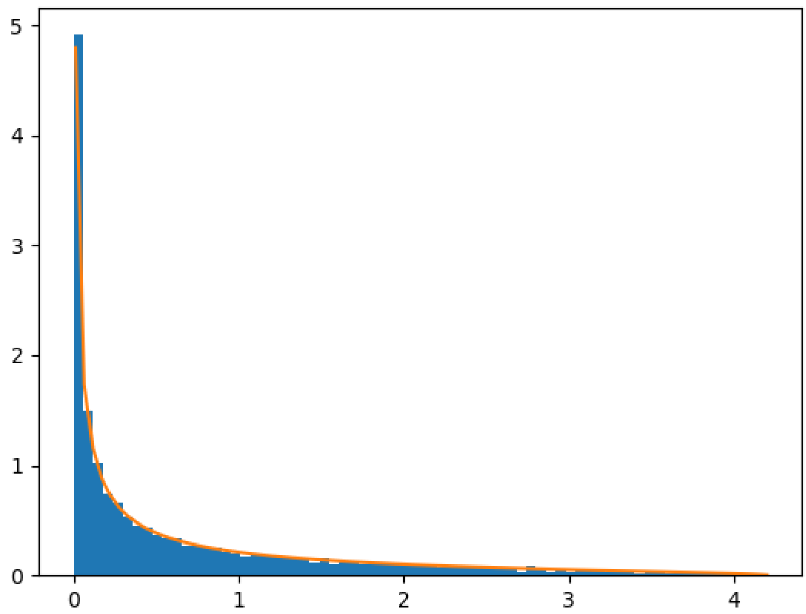

Рис. 3.3: Гістограма власних значень та граф функції $g_N(x)$ для $M = 500, N = 1500, L = 2$

.

3.4 Висновки до Розділу 3

Розділ 3 присвячений вивченню властивостей міри ν_N, що є невипадковою асимптотичною еквівалентою нормованої рахуючої міри $\hat{\nu}_N$ матриці $W_{f,N}W_{p,N}^*W_{p,N}W_{f,N}^*$ для $N \to +\infty$. Була детально досліджена поведінка її перетворення Стілтьєса біля осі дійсних чисел та доведені властивості для відповідних границь. Наприклад виявилось, що $\mathrm{Re}(t(x)) < 0$. Більш того, було отримано асимптотичну поведінку щільності g_N міри ν_N, яка залежить від параметру $c_N = \frac{ML}{N}$.

Далі, базуючись на отриманих результатах, ми охарактеризували носій $\mathcal{S}_N$ відповідної міри ν_N та показали залежність між формою носія та власними значеннями матриці коваріацій R_N. Також було показано, що носій $\mathcal{S}_N$ належить деякому компактному відрізку, що не залежить від N та наведена достатня умова для того, щоб носій $\mathcal{S}_N$ був представленим єдиним інтервалом.

Крім того, було встановлено, що з ймовірністю один усі власні значення матриці $W_{f,N}W_{p,N}^*W_{p,N}W_{f,N}^*$ належать околу носія $\mathcal{S}_N$ невипадкової міри ν_N для достатньо великих N.

До основних результатів цього розділу належать:

- Пропозиція 3.1, в якій визначена функція, що є границею перетворення Стілтьєса міри ν_N на дійсній осі;
- Теорема 3.1, в якій встановлено асимптотичну поведінку щільності міри μ_N;
- Теорема 3.2, в якій описано носій $\mathcal{S}_N$ та Пропозиція 3.7, яка дає достатню умову того, що носій представляється одним відрізком;
- Теорема 3.3, яка доводить, що з ймовірністю один усі власні значення матриці $W_{f,N}W_{p,N}^*W_{p,N}W_{f,N}^*$ належать околу носія $\mathcal{S}_N$ невипадкової міри ν_N для достатньо великих N.

Результати досліджень даного розділу наведено у публікації автора [50].

Розділ 4

Розподіл власних значень матриці коваріацій з компонентами тензорного добутку

У цьому розділі ми перейдемо до вивчення іншої моделі, а саме ансамблю матриць коваріацій, компоненти яких є тензорними добутками. Ціль цього розділу – знайти граничний розподіл її власних значень.

Більш детально, ми розглядаємо дійсну симетричну або ермітову випадкову емпіричну матрицю коваріацій розмірністю $N^2 \times N^2$, що має наступний вигляд

$$\mathcal{M}_N = \frac{1}{N^2} \sum_{\mu=1}^{M} X_N^\mu (X_N^\mu)^*, \tag{4.1}$$

де вектори X_N^μ, на відміну від класичного випадку (1.9), визначаються як

$$X_N^\mu = B_N(Y_N^\mu \otimes Y_N^\mu), \mu = 1, \dots, M \tag{4.2}$$

та вектори $Y_N^\mu = \{Y_{N,i}^\mu\}_{i=1}^N$, $\mu = 1, \dots, M$, належать до $\mathbb{R}^N$ (або $\mathbb{C}^N$), для яких $\{Y_{N,i}^\mu\}$ (або $\{\mathrm{Re}Y_{N,i}^\mu, \mathrm{Im}Y_{N,i}^\mu\}$) є випадковими величинами для усіх $i = \overline{1, N}$, $\mu = \overline{1, M}$ та

$$\mathbb{E}\{Y_{N,i}^\mu\} = 0, \quad \mathbb{E}\{Y_{N,i}^\mu Y_{N,k}^\nu\} = \delta_{ik}\delta_{\mu\nu} \tag{4.3}$$

у дійсному випадку та

$$\mathbb{E}\{Y^{\mu}_{N,i}\} = \mathbb{E}\{Y^{\mu}_{N,i}Y^{\nu}_{N,k}\} = 0, \quad \mathbb{E}\{Y^{\mu}_{N,i}\bar{Y}^{\mu}_{N,k}\} = \delta_{ik} \tag{4.4}$$

у ермітовому випадку. Матриця ж B_N є дійсною, симетричної або ермітовою матрицею розмірністю $N^2 \times N^2$

$$B_N = \{B_{\mathbf{i},\mathbf{j}}\}, \tag{4.5}$$

де через $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ ми позначатимемо мульті-індекси, тобто $\mathbf{i} = (i_1, i_2)$, де $i_1, i_2 = \overline{1, N}$ та $\bar{\mathbf{i}} = (i_2, i_1)$ є його оберненим мульті-індексом. У подальшому для будь-якої $N^2 \times N^2$ матриці A, під $A_{\mathbf{i},\mathbf{j}}$ ми маємо на увазі елемент, що знаходиться у рядку $(i_1 - 1)N + i_2$ та стовпчику $(j_1 - 1)N + j_2$ та відповідно для будь-якого вектору C розмірністю N^2 під $C_{\mathbf{i}}$ ми маємо на увазі елемент, що знаходиться на $(i_1 - 1)N + i_2$ місці.

У подальшому нам знадобиться $N^2 \times N^2$ матриця J_N з елементами

$$J_{\mathbf{p},\mathbf{q}} = \delta_{\mathbf{pq}} + \delta_{\bar{\mathbf{p}}\mathbf{q}}. \tag{4.6}$$

Також позначимо через ν_N та σ_N нормовані рахуючи міри власних значень матриць $\mathcal{M}_N$ та $B_N J_N B_N$ відповідно.

У подальшому під обмеженою матрицею ми матимемо на увазі, що її евклідова (або ермітова) норма $|...| < \kappa$ для деякої константи. Головним результатом розділу є наступна Теорема.

Теорема 4.1. *Нехай матриця $\mathcal{M}_N$ визначається як (4.5) – (4.1). Припустимо, що послідовність мір σ_N слабко збігається до ймовірнісної міри σ:*

$$\lim_{N\to\infty} \sigma_N = \sigma,$$

B_N рівномірно обмежена по N та $\{M_N\}$ є послідовністю натуральних чисел, для якої

$$M_N \to +\infty,\ N \to +\infty,\ c_N = M_N/N^2 \to c \in [0, +\infty).$$

Тоді нормована рахуюча міра ν_N власних значень матриці $\mathcal{M}_N$ слабко збігаються з ймовірністю 1 до невипадкової ймовірнісної міри ν та якщо $f^{(0)}$

це перетворення Стілтьєса міри σ, тоді перетворення Стілтьєса f міри ν однозначно визначаєтьcя рівнянням

$$f(z) = f^{(0)}\left(\frac{z}{c - zf(z) - 1}\right)(c - zf(z) - 1)^{-1}$$

у класі перетворень Стілтьєса ймовірнісних мір.

4.1 Доведення Теореми 4.1

На відміну від першої моделі, що розглядалася у цій роботі, для цього ансамблю матриць коваріацій ми припускаємо, що випадкові величини не є обов'язково гауссівськими, тому метод, який застосовувався у Главі 2, не може бути використаний для нової моделі. Таким чином у цій главі ми представимо інший класичний метод теорії випадкових матриць, а саме метод обурення рангу один, який ґрунтується на формулі (1.6) та мартингальних оцінок дисперсії резольвенти. Ми будемо доводити теорему для технічно менш складного випадку ермітових матриць. У випадку дійсних симетричних матриць доведення аналогічне.

Оскільки ми маємо лише умову існування другого моменту елементів Y^μ, на початку ми доведемо, що вони можуть бути замінені (тобто нормалізований слід резольвенти зміниться при цьому несуттєво) на їх "усічену" версію, усі моменти якої є кінцевими. Тут і у подальшому ми опустимо залежність від N.

Покладемо

$$Y_i^{\mu(\tau)} = Y_i^\mu \mathbf{1}_{|Y_i^\mu| \le \tau\sqrt{N}}, \quad Y_i^{\mu(\tau)\circ} = Y_i^{\mu(\tau)} - \mathbb{E}\{Y_i^{\mu(\tau)}\}.$$

Легко помітити, що ці випадкові змінні задовольняють умовам

$$\mathbb{E}\{Y_i^{\mu(\tau)\circ}\} = \mathbb{E}\{(Y_i^{\mu(\tau)\circ})^2\} = 0, \quad \mathbb{E}\{|Y_i^{\mu(\tau)\circ}|^2\} = 1 + o(1), \ N \to +\infty, \tag{4.7}$$

$$\mathbb{E}\{|Y_i^{\mu(\tau)\circ}|^k\} \le N^{(k-2)/2}\tau^{k-2}. \tag{4.8}$$

Аналогічно до X^μ та $\mathcal{M}$ побудуємо

$$X^{\mu(\tau)} = B(Y^{\mu(\tau)\circ} \otimes Y^{\mu(\tau)\circ}), \quad \mathcal{M}^\tau = \frac{1}{N^2}\sum_{\mu=1}^{M} X^{\mu(\tau)}(X^{\mu(\tau)})^*.$$

Також розглянемо $N^2 \times N^2$ матриці

$$K_N = \frac{1}{N^2}\sum_{\mu=1}^{M} C^\mu (C^\mu)^*, \quad \widehat{K}_N = \frac{1}{N^2}\sum_{\mu=1}^{M} C^\mu (X^\mu)^*,$$

де

$$C^\mu_{\mathbf{i}} = \sum_{\mathbf{p}} B_{\mathbf{i},\mathbf{p}} (Y^\mu_{p_1} Y^\mu_{p_2}(1-\delta_{p_1,p_2}) + Y^{\mu(\tau)\circ}_{p_1} Y^{\mu(\tau)\circ}_{p_2} \delta_{p_1,p_2}), \tag{4.9}$$

тут і далі $\sum\limits_{\mathbf{p}} = \sum\limits_{p_1=1}^{N}\sum\limits_{p_2=1}^{N}$.

На початку ми доведемо, що на будь-якому інтервалі $\Delta \subset \mathbb{R}$, різниця між нормованими рахуючими мірами ν_N, $\nu_N^{(1)}$ матриць $\mathcal{M}_N$, K_N є малою. Для цього ми використовуємо наступний корисний відомий факт (див. наприклад [40], Section I.6.10).

Пропозиція 4.1. *Нехай $\mathcal{M}_1$ та $\mathcal{M}_2$ – $n \times n$ ермітові матриці з відповідними нормованими рахуючими мірами власних значень ν_1 та ν_2. Тоді для будь-якого інтервалу $\Delta \subset \mathbb{R}$ виконується:*

$$|\nu_1(\Delta) - \nu_2(\Delta)| \le \mathrm{rank}(\mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_2)/n. \tag{4.10}$$

Ми застосуємо цю пропозицію для мір ν_N, $\nu_N^{(1)}$ та міри $\widehat{\nu}_N^{(1)}$, що є відповідно нормованою рахуючею мірою власних значень матриці $\widehat{K}_N$. Тоді згідно з (4.10) та (4.9) маємо

$$\begin{aligned}|\nu_N - \nu_N^{(1)}| &\le |\nu_N - \widehat{\nu}_N^{(1)}| + |\widehat{\nu}_N^{(1)} - \nu_N^{(1)}| \le \mathrm{rank}(\mathcal{M}_N - \widehat{K}_N)/N^2 \\ &+ \mathrm{rank}(\widehat{K}_N - K_N)/N^2 \le \frac{1}{N^2}\Big(\mathrm{rank}\{\sum_{\mathbf{p}} B_{\mathbf{i},\mathbf{p}}\Big(\sum_{\mu=1}^{M}(Y^{\mu(\tau)\circ}_{p_1} Y^{\mu(\tau)\circ}_{p_2} \\ &- Y^\mu_{p_1}Y^\mu_{p_2})\delta_{p_1,p_2}\bar{X}^\mu_{\mathbf{q}}\Big)\}_{\mathbf{i},\mathbf{q}} + \mathrm{rank}\{\sum_{\mathbf{q}}\{\sum_{\mu=1}^{M} C^\mu_{\mathbf{p}}(\bar{Y}^{\mu(\tau)\circ}_{q_1}\bar{Y}^{\mu(\tau)\circ}_{q_2} - \bar{Y}^\mu_{q_1}\bar{Y}^\mu_{q_2})\delta_{q_1,q_2}\}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}\bar{B}_{\mathbf{q},\mathbf{i}}\}_{\mathbf{p},\mathbf{i}}\Big) \\ &\le \frac{1}{N^2}\Big(\mathrm{rank}\{\sum_{\mu=1}^{M}(Y^{\mu(\tau)\circ}_{p_1}Y^{\mu(\tau)\circ}_{p_2} - Y^\mu_{p_1}Y^\mu_{p_2})\delta_{p_1,p_2}\bar{X}^\mu_{\mathbf{q}}\}_{\mathbf{p},\mathbf{q}} \\ &+ \mathrm{rank}\{\sum_{\mu=1}^{M} C^\mu_{\mathbf{p}}(\bar{Y}^{\mu(\tau)\circ}_{q_1}\bar{Y}^{\mu(\tau)\circ}_{q_2} - \bar{Y}^\mu_{q_1}\bar{Y}^\mu_{q_2})\delta_{q_1,q_2}\}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}\Big) = \frac{2}{N}.\end{aligned}$$

Лема 4.1. *Нехай $G^{(1)}(z)$ та $G^{\tau}(z)$ – резольвенти відповідно матриць K_N та $\mathcal{M}_N^{\tau}$. Тоді*

$$\frac{1}{N^2}|\mathbb{E}\{\mathrm{Tr}(G^{(1)}(z) - G^{\tau}(z))\}| = o(1),\ N \to +\infty.$$

Доведення. Розглянемо $(N^2+M)\times(N^2+M)$ блокові матриці $\widetilde{M}_N$ та $\widetilde{M}_N^{\tau}$, що визначаються як

$$\widetilde{M}_N = \begin{pmatrix} 0 & A^* \\ A & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{M}_N^{\tau} = \begin{pmatrix} 0 & (A^{\tau})^* \\ A^{\tau} & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.11}$$

де A, A^{τ} це матриці розмірністю $N^2 \times M$ вигляду

$$A_{\mathbf{i},\mu} = N^{-1}C_{\mathbf{i}}^{\mu}, \quad A_{\mathbf{i},\mu}^{\tau} = N^{-1}X_{\mathbf{i}}^{\mu(\tau)}.$$

Позначимо через $\widetilde{G}(z)$ та $\widetilde{G}^{\tau}(z)$ резольвенти відповідно матриць $\widetilde{M}_N$ та $\widetilde{M}_N^{\tau}$. З формули обернення для блокових матриць легко отримати, що

$$\mathrm{Tr}(G^{(1)}(z^2) - G^{\tau}(z^2)) = -\frac{z}{2}\mathrm{Tr}(\widetilde{G}(z) - \widetilde{G}^{\tau}(z)). \tag{4.12}$$

Таким чином, необхідно оцінити останній доданок. Для зручності у подальшому ми опустимо аргумент z. Використаємо резольвентну тотожність (1.5) та запишемо

$$\begin{aligned}|\mathrm{Tr}(\widetilde{G} - \widetilde{G}^{\tau})| &= |\mathrm{Tr}(\widetilde{G}\widetilde{G}^{\tau}(\widetilde{M} - \widetilde{M}^{\tau}))| \\ &\le (\mathrm{Tr}(\widetilde{G}\widetilde{G}^{\tau}\widetilde{G}^{*}\widetilde{G}^{\tau *}))^{1/2}(\mathrm{Tr}(\widetilde{M} - \widetilde{M}^{\tau})(\widetilde{M}^{*} - \widetilde{M}^{\tau *}))^{1/2}.\end{aligned}$$

З нерівності (1.4) та визначення (4.11) випливає, що права частина останньої нерівності може бути оцінена як

$$|\mathrm{Tr}(\widetilde{G}-\widetilde{G}^{\tau})| \le \frac{N}{\mathrm{Im}z^2}(\mathrm{Tr}(2(A-A^{\tau})(A^*-(A^{\tau})^*)))^{1/2}$$

$$= \frac{1}{N\mathrm{Im}z^2}\Big(2\sum_{\mu=1}^{M}\sum_{\mathbf{i}}(C_{\mathbf{i}}^{\mu}-X_{\mathbf{i}}^{\mu(\tau)})(\bar{C}_{\mathbf{i}}^{\mu}-\bar{X}_{\mathbf{i}}^{\mu(\tau)})\Big)^{1/2}$$

$$= \frac{N}{\mathrm{Im}z^2}\Big(2\sum_{\mu=1}^{M}\sum_{\mathbf{i},\mathbf{p},\mathbf{q}}B_{\mathbf{i},\mathbf{p}}(1-\delta_{p_1,p_2})(Y_{p_1}^{\mu}Y_{p_2}^{\mu}-Y_{p_1}^{\mu(\tau)\circ}Y_{p_2}^{\mu(\tau)\circ})$$

$$\times B_{\mathbf{q},\mathbf{i}}(1-\delta_{q_1,q_2})(\bar{Y}_{q_1}^{\mu}\bar{Y}_{q_2}^{\mu}-\bar{Y}_{q_1}^{\mu(\tau)\circ}\bar{Y}_{q_2}^{\mu(\tau)\circ})\Big)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{Im}z^2}\Big(2\sum_{\mu=1}^{M}\sum_{\substack{p_1\neq p_2\\ q_1\neq q_2}}B_{\mathbf{q},\mathbf{p}}^2(Y_{p_1}^{\mu}Y_{p_2}^{\mu}\bar{Y}_{q_1}^{\mu}\bar{Y}_{q_2}^{\mu}-Y_{p_1}^{\mu(\tau)\circ}Y_{p_2}^{\mu(\tau)\circ}\bar{Y}_{q_1}^{\mu}\bar{Y}_{q_2}^{\mu}$$

$$-Y_{p_1}^{\mu}Y_{p_2}^{\mu}\bar{Y}_{q_1}^{\mu(\tau)\circ}\bar{Y}_{q_2}^{\mu(\tau)\circ}+Y_{p_1}^{\mu(\tau)\circ}Y_{p_2}^{\mu(\tau)\circ}\bar{Y}_{q_1}^{\mu(\tau)\circ}\bar{Y}_{q_2}^{\mu(\tau)\circ})\Big)^{1/2}.$$

Зауважимо, що згідно з (4.7) та (4.4) доданки, для яких хоча б один індекс з $\{p_1,p_2,q_1,q_2\}$ відрізняється від інших, дорівнюють нулю. Таким чином нерівність набуває вигляду

$$|\mathrm{Tr}(\widetilde{G}-\widetilde{G}^{\tau})| \le \frac{1}{\mathrm{Im}z^2}\Big(2\sum_{\mu=1}^{M}\sum_{\substack{\mathbf{p}=\mathbf{q}\\ \bar{\mathbf{p}}=\mathbf{q}}}B_{\mathbf{q},\mathbf{p}}^2(Y_{p_1}^{\mu}Y_{p_2}^{\mu}\bar{Y}_{q_1}^{\mu}\bar{Y}_{q_2}^{\mu}-Y_{p_1}^{\mu(\tau)\circ}Y_{p_2}^{\mu(\tau)\circ}\bar{Y}_{q_1}^{\mu}\bar{Y}_{q_2}^{\mu}$$

$$-Y_{p_1}^{\mu}Y_{p_2}^{\mu}\bar{Y}_{q_1}^{\mu(\tau)\circ}\bar{Y}_{q_2}^{\mu(\tau)\circ}+Y_{p_1}^{\mu(\tau)\circ}Y_{p_2}^{\mu(\tau)\circ}\bar{Y}_{q_1}^{\mu(\tau)\circ}\bar{Y}_{q_2}^{\mu(\tau)\circ})\Big)^{1/2}.$$

Рівняння (4.7) та (4.4) тягнуть за собою, що

$$\mathbb{E}\{|Y_{p_1}^{\mu}|^2|Y_{p_2}^{\mu}|^2-Y_{p_1}^{\mu(\tau)\circ}Y_{p_2}^{\mu(\tau)\circ}\bar{Y}_{p_1}^{\mu}\bar{Y}_{p_2}^{\mu}-Y_{p_1}^{\mu}Y_{p_2}^{\mu}\bar{Y}_{p_1}^{\mu(\tau)\circ}\bar{Y}_{p_2}^{\mu(\tau)\circ}+|Y_{p_1}^{\mu(\tau)\circ}|^2|Y_{p_2}^{\mu(\tau)\circ}|^2\}$$
$$=1-(1+o(1))-(1+o(1))+(1+o(1))=o(1).$$

З усім вище сказаним, ми миттєво отримуємо

$$\frac{1}{N^2}|\mathbb{E}\{\mathrm{Tr}(\widetilde{G}-\widetilde{G}^{\tau})\}| < \frac{(2M\mathrm{Tr}(JB)^2o(1))^{1/2}}{N\mathrm{Im}z^2} = \frac{\sqrt{2M}}{N\mathrm{Im}z^2}o(1).$$

Нарешті, з (4.12) маємо шукану нерівність

$$\frac{1}{N^2}|\mathbb{E}\{\mathrm{Tr}(G(z)^{(1)}-G^{\tau}(z))\}| < \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{2}N|\mathrm{Im}z|}o(1)=o(1).$$

□

Лема 4.1 доводить, що насправді для наших цілей достатньо довести Теорему 4.1 для матриці $\mathcal{M}_N^\tau$. Таким чином, у подальшому, ми припускаємо, що матриця $\mathcal{M}_N$ замінена на $\mathcal{M}_N^\tau$, але, щоб полегшити позначення, ми опустимо індекс τ та покладемо

$$G(z) = (\mathcal{M}_M - z)^{-1},\ G^\mu(z) = G\,|_{X^\mu=0}\,.$$

Для доведення Теореми 4.1 нам знадобиться наступні корисні оцінки

Лема 4.2. *Нехай F – невипадкова матриця розмірністю $N^2 \times N^2$, для якої $|F| \le c$, тоді*

(i)

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\{(FG^\mu X^\mu, X^\mu)\} = \mathrm{Tr}(FG^\mu BJB), \\ &\mathbf{Var}\{N^{-2}(FG^\mu X^\mu, X^\mu)\} = o(1),\ N \to +\infty; \end{aligned} \tag{4.13}$$

(ii)

$$\frac{1}{N^2}|\mathrm{Tr}F(G - G^\mu)| = O(N^{-2}); \tag{4.14}$$

(iii)

$$\mathbf{Var}\{N^{-2}\mathrm{Tr}(FG)\} \le \frac{c}{N^2}. \tag{4.15}$$

Доведення цієї Леми наведено у Розділі 4.2.

Повернемося до Теореми 4.1. Згідно з (1.6), ми можемо записати

$$G_{\mathbf{i},\mathbf{j}} = G^\mu_{\mathbf{i},\mathbf{j}} - N^{-2}\frac{(G^\mu X^\mu)_\mathbf{i}(G^\mu \bar{X}^\mu)_\mathbf{j}}{1 + N^{-2}(G^\mu X^\mu, X^\mu)}.$$

Таким чином, маємо

$$(GX^\mu)_\mathbf{i} = \frac{(G^\mu X^\mu)_\mathbf{i}}{1 + N^{-2}(G^\mu X^\mu, X^\mu)}.$$

Нехай K – довільна обмежена матриця розмірності $N^2 \times N^2$. Тоді запишемо

$$\begin{aligned} &\frac{1}{N^2}\mathrm{Tr}(KGM) = \frac{1}{N^4}\sum_{\mu=1}^{M}\sum_{\mathbf{i},\mathbf{j}} K_{\mathbf{j},\mathbf{i}}(GX^\mu)_\mathbf{i}\bar{X}^\mu_\mathbf{j} \\ &= \frac{1}{N^4}\sum_{\mu=1}^{M}\sum_{\mathbf{j}}\frac{(KG^\mu X^\mu)_\mathbf{j}\bar{X}^\mu_\mathbf{j}}{1 + N^{-2}(G^\mu X^\mu, X^\mu)} = \frac{1}{N^4}\sum_{\mu=1}^{M}\frac{(KG^\mu X^\mu, X^\mu)}{1 + N^{-2}(G^\mu X^\mu, X^\mu)}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Для того, щоб оцінити праву частину (4.16), спершу покажемо, що для випадкових величин $\mathcal{C}$ та $\mathcal{D}$, для яких $\mathbf{E}\{|\mathcal{C}|^2+|\mathcal{D}|^2\}<\kappa$ та

$$\bar{\mathcal{C}}=\mathbb{E}\{\mathcal{C}\},\quad \mathcal{C}^\circ=\mathcal{C}-\bar{\mathcal{C}},\quad \bar{\mathcal{D}}=\mathbb{E}\{\mathcal{D}\},\quad \mathcal{D}^\circ=\mathcal{D}-\bar{\mathcal{D}},$$

виконується рівність

$$\mathbb{E}\left\{\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{D}}\right\}=\frac{\bar{\mathcal{C}}}{\bar{\mathcal{D}}}+O\left(\mathbb{E}\left\{\frac{|\mathcal{C}^\circ|^2}{|\bar{\mathcal{D}}|^2}+\frac{|\mathcal{D}^\circ|^2}{|\bar{\mathcal{D}}|^2}\right\}\right). \tag{4.17}$$

Насправді, очевидно, що

$$\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{D}}=\frac{\bar{\mathcal{C}}+\mathcal{C}^\circ}{\bar{\mathcal{D}}}-\frac{(\bar{\mathcal{C}}+\mathcal{C}^\circ)\mathcal{D}^\circ}{\bar{\mathcal{D}}^2}+O\left(\left(\frac{\mathcal{D}^\circ}{\bar{\mathcal{D}}}\right)^3\right).$$

З чого негайно маємо

$$\mathbb{E}\left\{\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{D}}\right\}=\frac{\bar{\mathcal{C}}}{\bar{\mathcal{D}}}+\mathbb{E}\left\{\frac{\mathcal{C}^\circ\mathcal{D}^\circ}{\bar{\mathcal{D}}^2}\right\}+O\left(\frac{|\mathcal{D}^\circ|^3}{\bar{\mathcal{D}}^3}\right)\le\frac{\bar{\mathcal{C}}}{\bar{\mathcal{D}}}+\mathbb{E}\left\{\frac{|\mathcal{C}^\circ|^2}{|\bar{\mathcal{D}}|^2}+c\frac{|\mathcal{D}^\circ|^2}{|\bar{\mathcal{D}}|^2}\right\}.$$

Остання нерівність, у свою чергу, тягне за собою (4.17).

Підставимо $\mathcal{C}=N^{-2}(KG^\mu X^\mu,X^\mu)$, $\mathcal{D}=1+2N^{-2}(G^\mu X^\mu,X^\mu)$. Оскільки матриця K обмежена, з (4.13) випливає, що

$$\mathbb{E}_\mu\{|\mathcal{C}^\circ|^2\}=\mathbb{E}_\mu\{|\mathcal{D}^\circ|^2\}=o(1),\ N\to+\infty.$$

Таким чином, остання рівність та вирази (4.16) - (4.17) дають

$$\frac{1}{N^2}\mathbb{E}\{\mathrm{Tr}(KGM)\}=\frac{1}{N^2}\sum_{\mu=1}^{M}\Big(\mathbb{E}\Big\{\frac{N^{-2}\mathrm{Tr}(KG^\mu BJB)}{1+N^{-2}\mathrm{Tr}(G^\mu BJB)}\Big\}+o(1)\Big). \tag{4.18}$$

Оцінка (4.14) дозволяє замінити G^μ матрицею G у правій частині (4.18)

$$\frac{1}{N^2}\mathbb{E}\{\mathrm{Tr}(KGM)\}=\mathbb{E}\Big\{\frac{c_N N^{-2}\mathrm{Tr}(KGBJB)}{1+N^{-2}\mathrm{Tr}(GBJB)}+o(1))\Big\}. \tag{4.19}$$

Останнім кроком буде замінити множники $N^{-2}\mathrm{Tr}(KGBJB)$ та $N^{-2}\mathrm{Tr}(GBJB)$ у (4.19) на їх математичне сподівання. Для цього ми знову використовуємо (4.17) для $\mathcal{C}=N^{-2}\mathrm{Tr}(KGBJB)$, $\mathcal{D}=1+N^{-2}\mathrm{Tr}(GBJB)$. Таким чином, з (4.19) та (4.15) маємо

$$\frac{1}{N^2}\mathbb{E}\{\mathrm{Tr}(KGM)\}=\frac{c_N N^{-2}\mathbb{E}\{\mathrm{Tr}(KGBJB)\}}{1+N^{-2}\mathbb{E}\{\mathrm{Tr}(GBJB)\}}+o(1). \tag{4.20}$$

Зауважимо, що

$$\frac{1}{N^2}\mathbb{E}\{\mathrm{Tr}(KGM)\} = \frac{1}{N^2}\mathbb{E}\{\mathrm{Tr}(K(G(\mathcal{M}-z)+Gz))\} = \frac{1}{N^2}\mathbb{E}\{\mathrm{Tr}K\} + \frac{z}{N^2}\mathbb{E}\{\mathrm{Tr}(KG)\}.$$

Таким чином, ми отримали, що для будь-якої обмеженої матриці K, справедливо

$$\frac{1}{N^2}\mathbb{E}\{\mathrm{Tr}K\} = \frac{1}{N^2}\mathbb{E}\{\mathrm{Tr}(KG(c_N b_N^{-1}BJB - z))\} + o(1), \tag{4.21}$$

де

$$b_N = 1 + N^{-2}\mathbb{E}\{\mathrm{Tr}(GBJB)\}. \tag{4.22}$$

Покладемо у цьому рівнянні $K = (c_N b_N^{-1}BJB - z)^{-1}$, тоді маємо

$$\frac{1}{N^2}\mathbb{E}\{\mathrm{Tr}(c_N b_N^{-1}BJB - z)^{-1}\} = f_N(z) + o(1), \tag{4.23}$$

де

$$g_N(z) = \frac{1}{N^2}\mathrm{Tr}(G(z)), \quad f_N(z) = \mathbb{E}\{g_N(z)\}.$$

З іншої сторони, якщо ми покладемо $K = I$ у (4.21), маємо

$$\frac{1}{N^2}\mathbb{E}\{\mathrm{Tr}(I + zG)\} = \frac{c_N}{b_N}(b_N - 1) + o(1).$$

З чого випливає рівність

$$1 + zf_N(z) = c_N(1 - \frac{1}{b_N}) + o(1),$$

яка дозволяє нам знайти b_N:

$$b_N = \frac{c_N}{c_N - zf_N(z) - 1 + o(1)}. \tag{4.24}$$

Підставляючи останній вираз у (4.23), ми негайно отримуємо

$$f_N(z) = f_N^{(0)}\left(\frac{z}{c_N - zf_N(z) - 1}\right)(c_N - zf_N(z) - 1)^{-1} + o(1), \tag{4.25}$$

де, нагадаємо,

$$f_N^{(0)}(z) = \frac{1}{N^2}\mathbb{E}\{\mathrm{Tr}(BJB - z)^{-1}\}.$$

Елементами послідовності $\{f_N\}$ є аналітичні, рівномірно обмежені по N та z функції. Тому, існує аналітична на $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ функція f і підпослідовність $\{f_{N_j}\}$, яка збігається до f рівномірно на будь-якій компактній підмножині з $\mathbb{C}-\mathbb{R}$. Крім цього,

$$\mathrm{Im} f_N(z)\mathrm{Im} z > 0,\ \mathrm{Im} z \neq 0$$

таким чином, $\mathrm{Im} f(z)\mathrm{Im} z \geq 0,\ \mathrm{Im} z \neq 0$. Згідно з Пропозицією 1.1(2) та припущенням, що послідовність мір σ_N збігається до σ, їх перетворення Стілтьєса, $f_N^{(0)}$, є аналітичними на $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ функціями, що також рівномірно збігаються на будь-якій компактній підмножині з $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ до перетворення Стілтьєса $f^{(0)}$ граничної міри σ. Це дозволяє нам перейти до границі при $N\to+\infty$ у рівнянні (4.25) і отримати, що границя f будь-якої підпослідовності послідовності f_N задовольняє функціональному рівнянню:

$$f(z) = f^{(0)}\left(\frac{z}{c - zf(z) - 1}\right)\left(c - zf(z) - 1\right)^{-1} \tag{4.26}$$

та $\mathrm{Im} f(z)\mathrm{Im} z \geq 0,\ \mathrm{Im} z \neq 0$. Доведення єдиності розв'язку у класі аналітичних функцій при $\mathrm{Im} z \neq 0$ та для яких $\mathrm{Im} f(z)\mathrm{Im} z \geq 0,\ \mathrm{Im} z \neq 0$ є стандартним та аналогічно з [[54], Section 2.2]. Таким чином, уся послідовність f_N рівномірно збігається на компактній підмножині з $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ до єдиного розв'язку f наведеного рівняння. Покажемо, що даний розв'язок задовольняє наступним властивостям: $\mathrm{Im} f(z)\mathrm{Im} z \geq 0,\ \mathrm{Im} z \neq 0$ і $-\lim\limits_{\eta\to+\infty} i\eta f(i\eta) = 1$. Припустимо, що $\mathrm{Im}(f(z_0)) = 0,\ \mathrm{Im} z_0 \neq 0$. Тоді з (4.26) випливає

$$\mathrm{Im}\int \frac{d\sigma(\lambda)}{(c-1)\lambda - z_0(f(z_0) - 1)} = C\mathrm{Im}(f^{(0)}(\tilde{z})) = 0,$$

де C є деякою дійсною константою і $\mathrm{Im}\tilde{z} \neq 0$. Але це неможливо, оскільки згідно з Пропозицією 1.1(1), $\mathrm{Im}(f^{(0)}(z))$ є строго додатним для усіх z з ненульовою уявною частиною. Нарешті, оскільки f є границею послідовності перетворень Стілсьєса, ми можемо вважати, що $|f(i\eta)| \leq \eta^{-1}$ таким чином, маємо негайно

$$-\lim_{\eta\to+\infty} \eta f(i\eta) = \lim_{\eta\to+\infty}\int \frac{-i\eta d\sigma(\lambda)}{(c-1)\lambda - i\eta - i\eta\lambda f(i\eta)} = 1.$$

З цього та Пропозиції 1.1(1) випливає, що f є перетворенням Стілтьєса ймовірнісної міри. ■

4.2 Доведення Леми 4.2

У цьому підрозділі ми доведемо технічні оцінкі, що використовувалися при доведенні основної теореми. Почнемо з першого пункту.

(i) З (4.4) випливає, що

$$\mathbb{E}_\mu\{(FG^\mu X^\mu, X^\mu)\} = \mathrm{Tr}(FG^\mu BJB).$$

Покладемо

$$r_n^\mu = (FG^\mu X^\mu, X^\mu) - \mathrm{Tr}(FG^\mu BJB).$$

Нам необхідно показати, що $\mathbb{E}_\mu\{(N^{-2}r^\mu)^2\} = o(1)$, $N \to +\infty$. Розпишемо r^μ згідно з визначеннями

$$\begin{aligned}
r_n^\mu &= \sum_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{p},\mathbf{q}} (FG^\mu)_{\mathbf{i},\mathbf{j}} B_{\mathbf{j},\mathbf{p}} B_{\mathbf{q},\mathbf{i}} (Y_{p_1}^\mu Y_{p_2}^\mu \bar{Y}_{q_1}^\mu \bar{Y}_{q_2}^\mu - J_{\mathbf{p},\mathbf{q}}) \\
&= \sum_{\mathbf{i},\mathbf{j}} (FG^\mu)_{\mathbf{i},\mathbf{j}} \Big(\sum_{\mathbf{p}} B_{\mathbf{j},\mathbf{p}} B_{\mathbf{p},\mathbf{i}} \Big(|Y_{p_1}^\mu|^2 |Y_{p_2}^\mu|^2 - 1 \Big) \\
&\qquad + \sum_{\mathbf{p}} B_{\mathbf{j},\mathbf{p}} B_{\bar{\mathbf{p}},\mathbf{i}} \Big(|Y_{p_1}^\mu|^2 |Y_{p_2}^\mu|^2 - 1 \Big) + \sum_{\substack{\mathbf{p}\neq\mathbf{q} \\ \bar{\mathbf{p}}\neq\mathbf{q}}} B_{\mathbf{j},\mathbf{p}} Y_{p_1}^\mu Y_{p_2}^\mu B_{\mathbf{q},\mathbf{i}} \bar{Y}_{q_1}^\mu \bar{Y}_{q_2}^\mu \Big) \\
&= \sum_{\mathbf{i},\mathbf{j}} (FG^\mu)_{\mathbf{i},\mathbf{j}} \Big(\sum_{\mathbf{p}} B_{\mathbf{j},\mathbf{p}} (JB)_{\mathbf{p},\mathbf{i}} \Big(|Y_{p_1}^\mu|^2 |Y_{p_2}^\mu|^2 - 1 \Big) \\
&\qquad + \sum_{\substack{\mathbf{p}\neq\mathbf{q} \\ \bar{\mathbf{p}}\neq\mathbf{q}}} B_{\mathbf{j},\mathbf{p}} Y_{p_1}^\mu Y_{p_2}^\mu B_{\mathbf{q},\mathbf{i}} \bar{Y}_{q_1}^\mu \bar{Y}_{q_2}^\mu \Big).
\end{aligned}$$

Оскільки G^μ не залежить від Y^μ, ми маємо

$$\mathbb{E}_\mu\{(N^{-2}r^\mu)^2\} = \frac{1}{N^4}\mathbb{E}_\mu\Big\{\Big(\sum_{\mathbf{i},\mathbf{j}}(FG^\mu)_{\mathbf{i},\mathbf{j}}\Big)^2\Big(\sum_{\mathbf{p}} B_{\mathbf{j},\mathbf{p}}(JB)_{\mathbf{p},\mathbf{i}}\Big(|Y^\mu_{p_1}|^2|Y^\mu_{p_2}|^2-1\Big)$$
$$+\sum_{\substack{\mathbf{p}\neq\mathbf{q}\\ \bar{\mathbf{p}}\neq\mathbf{q}}} B_{\mathbf{j},\mathbf{p}}Y^\mu_{p_1}Y^\mu_{p_2}B_{\mathbf{q},\mathbf{i}}\bar{Y}^\mu_{q_1}\bar{Y}^\mu_{q_2}\Big)^2\Big\} = \frac{1}{N^4}\mathbb{E}_\mu\Big\{\sum_{\mathbf{i},\mathbf{j}}\sum_{\mathbf{i}',\mathbf{j}'}(FG^\mu)_{\mathbf{i},\mathbf{j}}(\bar{F}\bar{G}^\mu)_{\mathbf{i}',\mathbf{j}'}$$
$$\times\Big(\sum_{\substack{\mathbf{p}\neq\mathbf{q}\\ \bar{\mathbf{p}}\neq\mathbf{q}}}\sum_{\substack{\mathbf{p}'\neq\mathbf{q}'\\ \bar{\mathbf{p}}'\neq\mathbf{q}'}} B_{\mathbf{j},\mathbf{p}}Y^\mu_{p_1}Y^\mu_{p_2}B_{\mathbf{q},\mathbf{i}}\bar{Y}^\mu_{q_1}\bar{Y}^\mu_{q_2}\bar{B}_{\mathbf{j}',\mathbf{p}'}\bar{Y}^\mu_{p'_1}\bar{Y}^\mu_{p'_2}\bar{B}_{\mathbf{q}',\mathbf{i}'}Y^\mu_{q'_1}Y^\mu_{q'_2}\Big)\Big\}$$
$$+\frac{1}{N^4}\mathbb{E}_\mu\Big\{\sum_{\mathbf{i},\mathbf{j}}\sum_{\mathbf{i}',\mathbf{j}'}(FG^\mu)_{\mathbf{i},\mathbf{j}}(\bar{F}\bar{G}^\mu)_{\mathbf{i}',\mathbf{j}'}\sum_{\mathbf{p}}\sum_{\mathbf{p}'} B_{\mathbf{j},\mathbf{p}}(JB)_{\mathbf{p},\mathbf{i}}\bar{B}_{\mathbf{j}',\mathbf{p}'}(J\bar{B})_{\mathbf{p}',\mathbf{i}'}$$
$$\times\Big(|Y^\mu_{p_1}|^2|Y^\mu_{p_2}|^2-1\Big)\Big(|Y^\mu_{p'_1}|^2|Y^\mu_{p'_2}|^2-1\Big)\Big\} + \frac{2}{N^4}\mathbb{E}_\mu\Big\{\sum_{\mathbf{i},\mathbf{j}}\sum_{\mathbf{i}',\mathbf{j}'}(FG^\mu)_{\mathbf{i},\mathbf{j}}(\bar{F}\bar{G}^\mu)_{\mathbf{i}',\mathbf{j}'}$$
$$\times\sum_{\mathbf{p}}\sum_{\substack{\mathbf{p}'\neq\mathbf{q}'\\ \bar{\mathbf{p}}'\neq\mathbf{q}'}} B_{\mathbf{j},\mathbf{p}}(JB)_{\mathbf{p},\mathbf{i}}\Big(|Y^\mu_{p_1}|^2|Y^\mu_{p_2}|^2-1\Big)\bar{B}_{\mathbf{j}',\mathbf{p}'}\bar{Y}^\mu_{p'_1}\bar{Y}^\mu_{p'_2}\bar{B}_{\mathbf{q}',\mathbf{i}'}Y^\mu_{q'_1}Y^\mu_{q'_2}\Big\}.$$

Позначимо відповідно через $N^{-4}R_1$, $N^{-4}R_2$ і $N^{-4}R_3$ три отриманих доданка у правій частині останнього рівняння. Далі ми послідовно оцінимо кожен з них. Для цього покладемо

$$H = BFG^\mu B,$$

та матрицю Δ розмірності $N^2\times N^2$:

$$\Delta_{\mathbf{i},\mathbf{j}} = \delta_{i_1j_2}\delta_{i_2j_1}.$$

Легко перевірити, що для будь-якої $N^2\times N^2$ матриці A справедливо

$$\begin{aligned} A_{i_2i_1,j_1j_2} &= (\Delta A)_{\mathbf{i},\mathbf{j}},\\ A_{i_1i_2,j_2j_1} &= (A\Delta)_{\mathbf{i},\mathbf{j}}. \end{aligned}\tag{4.27}$$

Визначимо множину $E=\{p_1,p_2,q_1,q_2,p'_1,p'_2,q'_1,q'_2\}$ та зауважимо, що якщо E містить більш, ніж 4 різних чисел, тоді

$$\mathbb{E}_\mu\{Y^\mu_{p_1}Y^\mu_{p_2}\bar{Y}^\mu_{q_1}\bar{Y}^\mu_{q_2}\bar{Y}^\mu_{p'_1}\bar{Y}^\mu_{p'_2}Y^\mu_{q'_1}Y^\mu_{q'_2}\} = 0.$$

Таким чином, необхідно розглянути підмножини I_1, I_2, I_3 та I_4 усіх мульти-індексів $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{p}', \mathbf{q}'\}$ наступного вигляду

$$I_1 = \Big\{\{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{p}', \mathbf{q}'\} = \{(a,b),(a,c),(d,b),(d,c)\}\Big\},$$
$$I_2 = \Big\{\{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{p}', \mathbf{q}'\} = \{(a,b),(c,d),(a,b),(c,d)\}\Big\},$$

де числа a, b, c та d попарно різні,

$$I_3 = \Big\{\{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{p}', \mathbf{q}'\} : \text{з рівно 3 різними числами (i, j, k) у множині } E\Big\},$$
$$I_4 = \Big\{\{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{p}', \mathbf{q}'\} : \text{з рівно 2 різними числами (i, j) у множині } E\Big\}$$

або будь-яка інверсія мульти-індексів подібних форм. Оскільки матриці B, F, Δ та G^μ (згідно з (1.4)) обмежені, існує константа κ така, що $|H| < \kappa$. Таким чином, згідно з (4.27) та (4.8) маємо

$$\begin{aligned} R_1 \le \mathbb{E}_\mu\Big\{ &\sum_{I_1} H_{\mathbf{p},\mathbf{q}} \bar{H}_{\mathbf{p}',\mathbf{q}'} |Y_a^\mu|^2 |Y_b^\mu|^2 |Y_c^\mu|^2 |Y_d^\mu|^2 + \sum_{I_2} H_{\mathbf{p},\mathbf{q}} \bar{H}_{\mathbf{p}',\mathbf{q}'} |Y_a^\mu|^2 |Y_b^\mu|^2 |Y_c^\mu|^2 |Y_d^\mu|^2 \\ &+ \sum_{I_3} H_{\mathbf{p},\mathbf{q}} \bar{H}_{\mathbf{p}',\mathbf{q}'} (|Y_i^\mu|^4 |Y_j^\mu|^2 |Y_k^\mu|^2 + Y_i^\mu|^3 |Y_j^\mu|^3 |Y_k^\mu|^2) \\ &+ \sum_{I_4} H_{\mathbf{p},\mathbf{q}} \bar{H}_{\mathbf{p}',\mathbf{q}'} (|Y_i^\mu|^4 |Y_j^\mu|^4 + |Y_i^\mu|^6 |Y_j^\mu|^2 + |Y_i^\mu|^5 |Y_j^\mu|^3)\Big\} \\ \le \tilde{c}\Big(&\sum_{p_1, p_1', p_2, q_2} (H + \Delta H + H\Delta + \Delta H \Delta)_{p_1 p_2, q_1 q_2} (\bar{H} + \Delta \bar{H} + \bar{H}\Delta + \Delta \bar{H} \Delta)_{p_1' p_2, p_1' q_2} \\ &+ \mathrm{Tr}(H + \Delta H + H\Delta + \Delta H \Delta)(H + \Delta H + H\Delta + \Delta H \Delta)^* \\ &+ |I_3| \kappa^2 N \tau^2 + |I_4| \kappa^2 N^2 \tau^4\Big). \end{aligned}$$

Оскільки $\Delta^2 = I$ та $|I_3| = \kappa_1 N^3$, $|I_2| = \kappa_2 N^2$ останню нерівність можна записати як

$$R_1 \le \tilde{c}\Big(\sum_{p_1, p_1', p_2, q_2} C_{p_1 p_2, q_1 q_2} C^*_{p_1' p_2, p_1' q_2} + \mathrm{Tr} H H^* + \mathrm{Tr} \Delta H H^* + \kappa N^4 \tau \Big),$$

де

$$C = H + \Delta H + H\Delta + \Delta H \Delta.$$

Позначимо через $\tilde{C}$ матрицю розмірністю $N \times N$ елементи якої визначаються як

$$\tilde{C}_{p_2 q_2} = \sum_{p_1=1}^{N} C_{p_1 p_2, p_1 q_2}.$$

Тоді

$$R_1 \leq \kappa\Big(\mathrm{Tr}\tilde{C}\tilde{C}^* + \mathrm{Tr}HH^* + \mathrm{Tr}\Delta HH^* + \kappa N^4\tau\Big).$$

Нескладно побачити, що $|\tilde{C}| < N|H| < \kappa N$, отже

$$R_1 \leq \kappa(N^3 + N^2 + N^4\tau).$$

Для того, щоб оцінити другий доданок, R_2, ми розіб'ємо множину $\{(\mathbf{p}, \mathbf{p}')\}$ усіх можливих індексів на чотири підмножини $\{I_i\}_{i=1}^4$, такі, що $(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \in I_i$ якщо (p_1, p_2, p_1', p_2') містить рівно i різних чисел. Матриці H та J обмежені, тому згідно з (4.7) та (4.8) маємо

$$R_2 \leq \kappa\mathbb{E}\Big\{\sum_{I_1}|Y_1^\mu|^8 + \sum_{I_2}(|Y_1^\mu|^4|Y_2^\mu|^4 + |Y_1^\mu|^6|Y_2^\mu|^2) + \sum_{I_3}|Y_1^\mu|^4|Y_2^\mu|^2|Y_3^\mu|^2$$
$$+ \sum_{I_4}(|Y_1^\mu|^2|Y_2^\mu|^2 - 1)(|Y_3^\mu|^2|Y_4^\mu|^2 - 1)\Big\} = c(|I_1|n^3\tau^6 + |I_2|n^2\tau^4 + |I_3|n\tau^2 + |I_4|o(1))$$
$$= \kappa N^4(\tau + o(1)).$$

Для останнього доданку, R_3, зауважимо, що якщо множина $\{p_1, p_2, p_1', p_2', q_1', q_2'\}$ містить більш ніж 3, або менш, ніж 2 різних елемента, тоді

$$\mathbb{E}\Big\{\Big(|Y_{p_1}^\mu|^2|Y_{p_2}^\mu|^2 - 1\Big)\bar{Y}_{p_1'}^\mu\bar{Y}_{p_2'}^\mu Y_{q_1'}^\mu Y_{q_2'}^\mu\Big\} = 0.$$

Решту випадків для індексів ми знову поділимо на дві множини, I_1 (3 різних елемента) та I_2 (2 різних елемента). Аналогічно з попереднім випадком, маємо

$$R_3 \leq \kappa\Big(\sum_{I_1}N\tau^2 + \sum_{I_2}N^2\tau^4\Big) = \kappa N^4\tau.$$

Нарешті, комбінуючи вище доведене, ми маємо кінцеву оцінку:

$$\mathbb{E}_\mu\{(N^{-2}r^\mu)^2\} \leq o(1) + \kappa\tau.$$

Оскільки ця нерівність виконується для усіх τ, справедливо, що

$$\mathbb{E}_\mu\{(N^{-2}r^\mu)^2\} = o(1).$$

(ii) Для доведення цього пункту, запишемо згідно з (1.6)

$$(F(G - G^\mu))_{\mathbf{i},\mathbf{j}} = -\frac{N^{-2}(FG^\mu X^\mu)_{\mathbf{i}}\overline{(G^\mu X^\mu)_{\mathbf{j}}}}{1 + N^{-2}(G^\mu X^\mu, X^\mu)}.$$

З чого очевидно маємо

$$|\mathrm{Tr}(F(G-G^\mu))| = \left|\frac{N^{-2}(FG^\mu X^\mu, G^\mu X^\mu)}{1+N^{-2}(G^\mu X^\mu, X^\mu)}\right| \le \frac{|F|\,|((G^\mu)^* G^\mu X^\mu, X^\mu)|}{|\mathrm{Im}(G^\mu X^\mu, X^\mu)|}.$$

З іншого боку, спектральна теорема дає

$$(G^\mu X^\mu, X^\mu) = \sum_{k=1}^{M-1} \frac{(v^k, X^\mu)^2}{\lambda_k - z},$$

де $\{\lambda_k\}$ – власні значення матриці G^μ та $\{v^k\}$ – її відповідні власні вектори G^μ. Тоді для уявної частини виконується

$$|\mathrm{Im}(G^\mu X^\mu, X^\mu)| = |\mathrm{Im} z| \sum_{k=1}^{M-1} \frac{|(v^k, X^\mu)|^2}{(\lambda_k - z)(\lambda_k^* - z)}.$$

Крім того,

$$((G^\mu)^* G^\mu X^\mu, X^\mu) = \sum_{k=1}^{M-1} \frac{|(v^k, X^\mu)|^2}{(\lambda_k - z)(\lambda_k^* - z)}.$$

Останні дві рівності негайно дають нам

$$\frac{1}{N^2}\mathrm{Tr} F(G-G^\mu) \le \frac{|F|}{N|\mathrm{Im} z|} = O(N^2).$$

(iii) Для того, щоб отримати останню частину Леми, нам знадобиться наступне твердження для мартингальної оцінки (див. наприклад [30] для більше результатів та посилань):

Лема 4.3. *Нехай $\{Y^\mu\}_{\mu=1}^m$– послідовність незалежних, однаково розподілених векторів з $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$. Припустимо, що функція $\phi : \mathbb{R}^{nm}(\mathbb{C}^{nm}) \to \mathbb{C}$ обмежена борелівська функція, для якої*

$$\sup_{X^1,\ldots,X^\mu \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)} |\phi - \phi^\mu| \le c,$$

де $\phi^\mu = \phi\,|_{X^\mu=0}$. Тоді

$$\mathbf{Var}\{\phi(Y^1,\ldots,Y^\mu)\} \le 4c^2 m.$$

Розглянемо функцію $\phi = \mathrm{Tr}(FG)$, та покажемо, що вона задовольняє умовам Леми 4.3. Дійсно, згідно з представленням (1.6), маємо

$$|\phi - \phi^\mu| = |\mathrm{Tr}G - \mathrm{Tr}G^\mu| = \left| \frac{N^{-2}(G^\mu F G^\mu X^\mu, X^\mu)}{1 + N^{-2}(G^\mu X^\mu, X^\mu)} \right|.$$

Аналогічно доведенню попередньої частини, ми можемо отримати оцінку

$$\left| \frac{N^{-2}(G^\mu F G^\mu X^\mu, X^\mu)}{1 + N^{-2}(G^\mu X^\mu, X^\mu)} \right| \leq \kappa |\mathrm{Im} z|^{-1}.$$

Таким чином,

$$|\phi - \phi^\mu| \leq \kappa |\mathrm{Im} z|^{-1}.$$

З чого випливає, що ми можемо застосувати Лему 4.3 та миттєво отримати, що

$$\mathbf{Var}\{g_N\} \leq 4\kappa^2 c_N / N^2.$$

Це завершує доведення Леми 4.2. ■

4.3 Висновки до Розділу 4

У Розділі 4 досліджується нормована рахуюча міра емпіричних матриць коваріацій $\mathcal{M}_N = N^{-2} \sum_{\mu=1}^{M} B_N (Y^\mu \otimes Y^\mu)(Y^\mu \otimes Y^\mu)^* B_N^*$, компоненти яких є тензорними добутками випадкових векторів з незалежними однаково розподіленими елементами. На відміну від класичного ансамблю емпіричних матриць коваріацій, у розглянутому випадку елементи матриць мають біквадратну залежність від випадкових величин, що суттєво ускладнює існуючи методи.

Оскільки ми допускаємо, що вектори Y^μ не є обов'язково гауссівськими, а лише з кінцевим другим моментом, ми не можемо використовувати техніки, що були наведені у двох попередніх розділах, тому ми застосували інший відомий метод теорії випадкових матриць, а саме метод кінцевого збурення.

Отже, у цьому розділі доведено, що при умові існування другого моменту елементів векторів Y^μ та існування границі розподілу власних значень деякої матриці, що залежить лише від B_N, нормована рахуюча міра власних значень матриць $\mathcal{M}_N$ визначеного ансамблю слабко збігається з ймовірністю 1 до деякої невипадкової міри ν. Також було наведено функціональне рівняння, якому задовольняє перетворення Стілтьєса граничної міри ν.

Основним результатом цього розділу є Теорема 4.1, в якій наведено рівняння для перетворення Стілтьєса граничної міри.

Результати досліджень даного розділу наведено у публікації автора [71].

Висновки

Дана дисертаційна робота присвячена вивченню поведінки сингулярних значень емпіричних матриць автоковаріацій та власних значень емпіричних матриць коваріацій, компоненти яких є тензорними добутками.

Ми дослідили асимптотичну поведінку нормованої рахуючої міри власних значень $\hat{\nu}_N$ відповідної матриці Грама $\hat{R}^L_{f|p}\hat{R}^{L*}_{f|p}$ емпіричної матриці автоковаріацій $\hat{R}^L_{f|p}$, а саме, знайшли невипадкову міру ν_N, що є її асимптотичною еквівалентою, тобто $\hat{\nu}_N - \nu_N \to 0$, $N \to +\infty$ слабко майже напевно. Крім того, ми описали поведінку біля осі дійсних чисел перетворення Стілтьєса міри ν_N та детально охарактеризували носій $\mathcal{S}_N$ міри ν_N. Усе це дозволило нам довести, що з ймовірністю один усі власні значення матриці $\hat{R}^L_{f|p}\hat{R}^{L*}_{f|p}$ знаходяться в околі носія $\mathcal{S}_N$ асимптотичної еквіваленти ν_N.

Нарешті, для ансамблю матриць коваріацій, компоненти яких є тензорними добутками, ми довели, що при умові існування другого моменту елементів векторів, нормована рахуюча міра власних значень визначеного ансамблю слабко збігається з ймовірністю 1 до деякої невипадкової міри. Крім того, було наведено рівняння, якому задовольняє перетворення Стілтьєса граничної міри.

У дисертації отримані таки нові результати:

- з використанням методів гауссівського обчислення встановлено асимптотичну поведінку резольвенти матриці $\hat{R}^L_{f|p}\hat{R}^{L*}_{f|p}$;

- з використанням методів вільної ймовірності встановлено, що з додатковим припущенням існує границя нормованої рахуючої міри матриці автоковаріацій;

- досліджено поведінку перетворення Стілтьєса асимптотичної еквіваленти міри $\hat{\nu}_N$ біля осі дійсних чисел та доведені властивості для відповідних границь;

- встановлено асимптотичну поведінку щільності міри, що є асимптотичною еквівалентою міри $\hat{\nu}_N$;

- доведено, що майже напевно для достатньо великих N, усі власні значення матриці $\hat{R}^L_{f|p}\hat{R}^{L*}_{f|p}$ знаходяться в околі носія асимптотичної еквіваленти міри $\hat{\nu}_N$;

- доведено, що при умові існування другого моменту елементів векторів, нормована рахуюча міра власних значень визначеного ансамблю матриць коваріацій, компоненти яких є тензорними добутками, слабко збігається з ймовірністю 1 до деякої невипадкової міри. Також було наведено рівняння, якому задовольняє перетворення Стілтьєса граничної міри.

Всі основні результати дисертації наведено з повними і строгими доведеннями. Отримані результати мають теоретичний характер, але у майбутньому можуть використовуватися для покращення деяких методів теорії телекомунікацій.

Список використаних джерел

[1] Aceituno, P.V., Rogers, T., Schomerus, H.: Universal hypotrochoidic law for random matrices with cyclic correlations. Physical Review E. 100 (1), (2019)

[2] Akhiezer, N. I., Glazman, I. M.: Theory of Linear Operators in Hilbert Space. Dover, New York (1993)

[3] Akemann, G., Baik, J., Di Francesco, P.: The Oxford handbook of random matrix theory. Oxford Univ. Press, Oxford (2011)

[4] Ambainis, A., Harrow, A. W.: Random tensor theory: extending random matrix theory to mixtures of random product states. Commun. Math. Phys. 310(1), 25–74 (2012)

[5] Bai, Z.D., Circular law. Annals of Probability. 25 (1): 494–529, (1997)

[6] Bai, Z. D., Silverstein, J. W.: CLT for linear spectral statistics of large-dimensional sample covariance matrices. Ann.Probab. Vol. 32, 553–605 (2004)

[7] Bai, Z. D., Silverstein, J. W.: Spectral analysis of large dimensional random matrices. Springer, New York (2010)

[8] Baik, J., Ben Arous, G.,Peche, S.: Phase transition of the largest eigenvalue for non-null complex sample covariance matrices. Ann.Probab. Vol. 33, 1643–1697 (2005)

[9] Bhattachargee, M., Bose, A.: Large sample behaviour of high-dimensional autocovariance matrices. Ann. Statist. 44(2), 598–628 (2016)

[10] Bose, A., Bhattachargee, M.: Large Covariance and Autocovariance Matrices. Monographs on Statistics and Applied Probability 162, CRC Press (2019)

[11] Benaych-Georges, F., Nadakuditi, R.R.: The eigenvalues and eigenvectors of finite, low rank perturbations of large random matrices. Adv. in Math. 227(1), 494–521 (2011)

[12] Benaych-Georges F., Nadakuditi R.R.: The singular values and vectors of low rank perturbations of large rectangular random matrices, J. Multivariate Anal. 111, 120–135 (2012)

[13] Belinschi, S., Capitaine, M.: Spectral properties of polynomials in independent Wigner and deterministic matrices. Journal of Functional Analysis. 273(12), 3901–3963 (2017)

[14] Bouchaud, J. P., Potters M.: Theory of financial risk and derivative pricing: from statistical physics to risk management. Cambridge university press (2003)

[15] Capitaine, M., Donati-Martin, C.: Strong asymptotic freeness of Wigner and Wishart matrices. Indiana Univ. Math. Journal. 56, 295–309 (2007)

[16] Capitaine, M., Donati-Martin, C., Féral, D.: The largest eigenvalue of finite rank deformation of large Wigner matrices: convergence and non-universality of the fluctuations. Annals of Probability. 37(1), 1–47 (2009)

[17] Cartan, H.: Theorie elementaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes. Hermann, (1978)

[18] Chapon, F., Couillet, R., Hachem, W., Mestre, X.,: The outliers among the singular values of large rectangular random matrices with additive fixed rank deformation. Markov Processes and Related Fields 20, 183–228 (2014)

[19] Chen, L. H. Y.: An inequality involving normal distribution. J. Multivariate Anal. 50, 213–223, 585–604 (1982)

[20] Ciuso, A., Picci, G.: Asymptotic variance of subspace estimates. J. of Econometrics. 118(1–2), 257–291 (2004)

[21] Collins, B., Nechita, I.: Random matrix techniques in quantum information theory. Journal of Mathematical Physics, 57(1), (2016)

[22] Couillet, R.: Robust spiked random matrices and a robust G-MUSIC estimator. Elsevier Journal of Multivariate Analysis. 140, 139–161 (2015)

[23] Dozier, B., Silverstein, J.: On the Empirical Distribution of Eigenvalues of Large Dimensional Information-Plus-Noise Type Matrices. Journal of Multivariate Analysis. 98(4), 678–694 (2007)

[24] Evans, J., Tse, D. N. C.: Large System Performance of Linear Multiuser Receivers in Multipath Fading Channels. IEEE Transactions on Information Theory. 46(6) (2000)

[25] Forrester, P. J.: Log-gases and random matrices. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ (2010)

[26] Geronimo, J. S., Hill, T. P.: Necessary and suffcient condition that the limit of Stieltjes transforms is the Stieltjes transform. J. Approx. Theory (2003)

[27] Gesztesy, F., Tsekanovskii, E.: On matrix-valued Herglotz functions. Math. Nach. 218, 61–138 (2000)

[28] Ginibre, J.: Statistical ensembles of complex, quaternion, and real matrices: J. Math. Phys. 6, 440–449 (1965)

[29] Girko, V.L.: The circular law. Теория вероятностей и её применения. 29(4), 669–679 (1984)

[30] Girko, V. L.: Theory of Stochastic Canonical Equations. vols.I, II Kluwer, Dordrecht (2001)

[31] Haagerup, U., Thorbjornsen, S.: A new application of random matrices: $Ext(C^*_{red}(F2))$ is not a group. Annals of Mathematics. 162(2), 711–775 (2005)

[32] Hachem, W., Loubaton, P., Najim, J.: Deterministic equivalents for certain functionals of large random matrices. Annals of Applied Probability. 17(3), 875–930 (2007)

[33] Hachem, W., Loubaton, P., Najim, J., Mestre, X., Vallet, P.: A subspace estimator for fixed rank perturbations of large random matrices. Journal of Multivariate Analysis. 114, 427–447(2013)

[34] Hansen, F.,. Pedersen, G.K: Jensen's operator inequality. Bull. London Math. Soc. 35, 553–564 (2003)

[35] Harer, J., Zagier, D.: The euler characteristic of the moduli space of curves. Inventiones mathematicae, 85(3), 457–485, (1986)

[36] Hiai, F., Petz, D.: Asymptotic freeness almost everywhere for random matrices. Acta Sci. Math. (Szeged), 66/3–4, 809–834 (2000)

[37] Horn, R.A., Johnson, C.R.: Matrix Analysis. Cambridge University Press (1985)

[38] Houdré, C., Pérez-Abrou, V., Sourgailis, D.: Interpolation, correlation identities and inequalities for infinitely divisible variables. J. Fourier Anal. and Appl. 4, 651–668 (1998)

[39] Jin, B., Wang, C., Bai, Z.D., Nair, K.K., Harding, M.: Limited spectral distribution of a symmetrised auto-cross covariance matrices. Ann. of Proba. 24(3), 1199–1225 (2014)

[40] Kato, T.: Perturbation Theory for Linear Operators. Springer-Verlag, Berlin (1976)

[41] Katz, N. M., Sarnak, P.: Random matrices, Frobenius eigenvalues, and monodromy. American Mathematical Soc. Volume 45 (1999)

[42] Kontsevich, M.: Homological algebra of mirror symmetry. Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Birkhauser, Basel, Switzerland (1995)

[43] Kuijlaars, A. B. J., McLaughlin, K. T.-R., Walter Van Assche, Vanlessen, M.: The Riemann–Hilbert approach to strong asymptotics for orthogonal polynomials on [- 1, 1]. Advances in mathematics. 188(2), 337–398 (2004)

[44] Ledoux, M.: Concentration of Measure Phenomenon, AMS, Providence, RI (2001)

[45] Li, Z., Pan, G., Yao, J.: On singular value distribution of large-dimensional autocovariance matrices. J. Multivariate Analysis. 137, 119–140 (2015)

[46] Li, Z., Wang, Q., Yao, J.: Identifying the number of factors from singular values of a large sample auto-covariance matrix. Annals of Statistics. 45(1), 257–288 (2017)

[47] Lindquist, A., Picci, G.: Linear Stochastic Systems. Series in Contemporary Mathematics. Springer (2015)

[48] Liu, H., Aue, A., Paul, D.: On the Marcenko-Pastur law for linear time series. Ann. of Stat. 43(2), 675–712 (2015)

[49] Loubaton, P.: On the almost sure location of the singular values of certain Gaussian block-Hankel large random matrices. Journal of theoretical probability. 29, 1339–1443 (2016)

[50] Loubaton, P., Tieplova, D.: On the Behaviour of Large Empirical Autocovariance Matrices Between the Past and the Future. Random Matrices: Theory and Applications, doi: 10.1142/S2010326321500210

[51] Lytova, A., Pastur, L.: Central limit theorem for linear eigenvalue statistics of random matrices with independent entries. Annals of Probability. 37(5), 1778–1840 (2009)

[52] Lytova A.: Central limit theorem for linear eigenvalue statistics for a tensor product version of sample covariance matrices. J. Theor. Probab. 31, 1024–1057 (2017)

[53] Male, C.: The norm of polynomials in large random and deterministic matrices. Probability Theory and Related Fields. 154, 477–532 (2012)

[54] Marchenko, V., Pastur, L.: The eigenvalue of distribution in some ensembles of random matrices. Math. USSR Sbornik. 1 (1967)

[55] Mehta, M. L.: Random matrices. Academic press. Vol. 142 (2004)

[56] Mestre, X., Lagunas, M.A.: Modified subspace algorithms for DoA estimation with large arrays. IEEE Transactions on Signal Processing. 56(2), 598–614 (2008)

[57] Mingo, J., Speicher, R.: Free Probability and Random Matrices. Fields Institute Monographs, Springer (2017)

[58] Nadakuditi, R.R., Edelman, A.: Sample eigenvalue based detection of high-dimensional signals in white noise using relatively few samples. IEEE Trans. Signal Processing. 56(7), 2625–2637 (2008)

[59] Nadakuditi, R.R., Silverstein, J.W.: Fundamental limit of sample generalized eigenvalue based detection of signals in noise using relatively few signal-bearing and noise-only samples. IEEE J. Sel. Topics Signal Processing. 4(3), 468 -480 (2010)

[60] Nagao, T., Wadati, M.: Correlation functions of random matrix ensembles related toclassical orthogonal polynomials. J.Phys.Soc.Japan. 60, 3298–3322 (1991)

[61] Okounkov, A.: Random surfaces enumerating algebraic curves. notes from the lecture at 4ECM, Stockholm, arXiv preprint math-ph/0412008 (2004)

[62] Pan, G. Zhou, W.: Circular law, extreme singular values and potential theory. J. Multivariate Anal. 101 (3), 645–656 (2010)

[63] Pastur, L.A., Shcherbina, M.: Eigenvalue Distribution of Large Random Matrices. Mathematical Surveys and Monographs, Providence: American Mathematical Society (2011)

[64] Paul, D.: Asymptotics of sample eigenstruture for a large dimensional spiked covariance model. Statistica Sinica. 17(4), 1617–1642 (2007)

[65] Shcherbina, M.: Central Limit Theorem for linear eigenvalue statistics of the Wigner and sample covariance random matrices. Журнал математичної фізики, аналізу, геометрії. 7(2), 176–192 (2011)

[66] Shcherbina, T.: On universality of bulk local regime of the hermitian sample covariance matrices. J. Math. Phys. 51, 1–27 (2010)

[67] Shi, X., Qiu, R., He, X., Chu, L., Ling, Z., Yang, H.: Anomaly detection and location in distribution networks: a data-driven approach. IET Generation, Transmission & Distribution. 14 (18), 3814 (2020)

[68] Silverstein, J. W., Choi, S. I.: Analysis of the limiting spectral distribution of large dimensional random matrices. J. Multivariate Anal. 54, 295–309 (1995)

[69] Tieplova, D.: Distribution of eigenvalues of some random matrices of large order. In: III International Conference "ANALYSIS AND MATHEMATICAL PHYSICS": Book of abstracts, p. 31. B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv (2015)

[70] Tieplova, D.: Distribution of eigenvalues of sample covariance matrices with tensor product samples. In: Abstracts of Lectures and Talks: Trilateral German-Russian-Ukrainian Summer School "Spectral Theory, Differential Equations and Probability", p. 22. Johannes Gutenberg University at Mainz, Mainz (2016)

[71] Tieplova, D.: Distribution of eigenvalues of sample covariance matrices with tensor product samples. Журнал математичної фізики, аналізу, геометрії. 13(1), 82–98 (2017)

[72] Tieplova, D., Loubaton, P., Pastur, L.: On the behaviour of the singular values of empirical autocovariance matrices in the high-dimensional case. In: International Conference "XXVII Colloque francophone de traitement du signal et des images", p.95. L'Universite de Lille, France, 26–29 august (2019)

[73] Tieplova, D., Loubaton, P., Pastur, L.: On the Limit Distribution of the Canonical Correlation Coefficients Between the Past and the Future of a High-Dimensional White Noise. In: International Conference "2020 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), pp. 8772–8776. Barcelona, Spain (2020)

[74] Tulino, A. M., Verdu. S.: Random matrix theory and wireless communications, volume 1. Now Publishers Inc (2004)

[75] Pham, G.T., Loubaton, P., Vallet, P.: Performance analysis of spatial smoothing schemes in the context of large arrays. IEEE Trans. on Signal Processing. 64(1), 160–172 (2016)

[76] Van Overschee, P., B. de Moor: Subspace Identification for Linear Systems: Theory, Implementation, Applications. Kluwer Academic Publishers (1996)

[77] Vinogradova, J., Couillet, R., Hachem, W.: Estimation of Toeplitz covariance matrices in large dimensional regime with application to source detection. IEEE Transactions on Signal Processing. 63(18), 4903–4913 (2015)

[78] Vinogradova, J., Couillet, R., Hachem, W.: Statistical Inference in Large Antenna Arrays under Unknown Noise Pattern. IEEE Transactions on Signal Processing. 61(22), 5633–5645 (2013)

[79] Voiculescu, D., Dykema, K. J., Nica, A.: Free Random Variables. Ser. CRM Monograph. Providence, RI: Amer. Math. Soc., Vol. 1 (1992)

[80] Voiculescu, D.: Lectures on Free Probability Theory. In unpublished Notes for a Course at the Saint-Flour Summer School on Probability (1998)

[81] Witten, E.: Physics and geometry. In Proc. Intl. Congress Math., Berkeley, USA, p. 267–303 (1986)

Додаток А

Список публікацій здобувача за темою дисертації

Публікації у фахових виданнях України і виданнях України, що входять до міжнародних наукометричних баз:

1. Tieplova, D.: Distribution of eigenvalues of sample covariance matrices with tensor product samples. Журнал математичної фізики, аналізу, геометрії. 13(1), 82–98 (2017)

   (Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Web of Science, MathSciNet, Google Scholar; Impact Factor: 0.424; квартиль Q3)

Публікації у зарубіжних виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз:

2. Loubaton, P., Tieplova, D.: On the Behaviour of Large Empirical Autocovariance Matrices Between the Past and the Future. Random Matrices: Theory and Applications, doi: 10.1142/S2010326321500210

   (Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Web of Science, MathSciNet, Google Scholar, zbMATH; Impact Factor: 1.02; квартиль Q2)

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

3. Tieplova, D.: Distribution of eigenvalues of some random matrices of large order. In: II International Conference “ANALYSIS AND MATHEMATICAL PHYSICS”: Book of abstracts, p. 31. B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv (2015)

4. Tieplova, D.: Distribution of eigenvalues of sample covariance matrices with tensor product samples. In: Abstracts of Lectures and Talks: Trilateral German-Russian-Ukrainian Summer School “Spectral Theory, Differential Equations and Probability”, p. 22. Johannes Gutenberg Universität Mainz, Mainz (2016)

5. Tieplova, D., Loubaton, P., Pastur, L.: On the behaviour of the singular values of empirical autocovariance matrices in the high-dimensional case. In: International Conference “XXVII Colloque francophone de traitement du signal et des images”, p. 95. L'Universite de Lille, France, 26–29 august (2019)

6. Tieplova, D., Loubaton, P., Pastur, L.: ”On the Limit Distribution of the Canonical Correlation Coefficients Between the Past and the Future of a High-Dimensional White Noise. In: International Conference “2020 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), pp. 8772–8776. Barcelona, Spain (2020)