

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ НИЗЬКИХ ТЕМПЕРАТУР
ім. Б.І. Веркіна

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ НИЗЬКИХ ТЕМПЕРАТУР
ім. Б. І. Веркіна

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Карпов Денис Сергійович

УДК 538.945, 537.9

ДИСЕРТАЦІЯ

ОСОБЛИВОСТІ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ МЕЗОСКОПІЧНОЇ СИСТЕМИ
НАДПРОВІДНИХ КВАНТОВИХ БІТІВ, ЩО ВЗАЄМОДІЮТЬ З
РЕЗОНАТОРОМ

01.04.02 теоретична фізика

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело _____ Д.С. Карпов
(підпис здобувача)

Науковий керівник: Шевченко Сергій Миколайович,
доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник

Всі примірники дисертації ідентичні за змістом.

Учений секретар спеціалізованої вченої ради Д64.175.02 _____ Богдан М.М.

Харків 2018

АНОТАЦІЯ

Карпов Д.С. Особливості електродинаміки мезоскопічної системи надпровідних квантових бітів, що взаємодіють з резонатором. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 – теоретична фізика. – Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Веркіна НАН України, Харків, 2018.

Дисертація присвячена теоретичному вивченню особливостей взаємодії штучних дворівневих систем – квантових бітів – з електромагнітним полем резонатора у випадках класичного та квантового сигналів. Знайдено явний вираз коефіцієнта проходження електромагнітного сигналу крізь резонатор, який зв'язується з кубітом. Кубіт взаємодіє з двома сигналами – з високоамплітудним та слабоамплітудним. Така взаємодія лежить в основі, так названої, двосигнальної спектроскопії або пробної спектроскопії кубіта. Високоамплітудний сигнал впливає на енергетичні рівні системи таким чином, що вони перенормовуються. В результаті ми отримуємо ефективну дворівневу систему – одягнений кубіт. Одягнений кубіт взаємодіє з другим слабоамплітудним сигналом. Слабкий сигнал дозволяє реконструювати одягнені стани кубіта. У роботі показано як у випадку взаємодії із двома сигналами, опис одягненої системи кубіта-резонатора можна розширити до, так званих, двічі одягнених станів.

Встановлено, що кубіт виступає в якості квантового нелінійного об'єкту і можливе посилення або послаблення вихідного сигналу. У роботі детально вивчено ефект збільшення або зменшення амплітуди вихідного сигналу. Із цією метою був розроблений теоретичний формалізм для опису проходження сигналу через систему кубіта-резонатора. Було розглянуто, як посилення й загасання вхідного сигналу залежать від параметрів системи. У дисертації систематично вивчається вплив таких параметрів як час когерентності, втрати резонатора, зв'язок і інших. Показано, що у системі кубіта-резонатора можливо створити інверсію заселеності енергетичних рівнів, що призводить до суттєвого посилення вихідного сигналу.

Показано, що відмінна від абсолютного нуля температура системи призводить до зменшення абсолютного значення коефіцієнту проходження.

Розглядається наближення для рівнянь Максвелла-Блоха (напівквантове і квазікласичне) для опису взаємодії кубіта з резонатором та транспортних властивостей такої системи. Були отримані спрощені аналітичні формули для коефіцієнтів проходження у квазікласичному наближенні, що опускає корелятори виду $\langle AB \rangle$, де A, B атомні або фотонні оператори. Квазікласичне наближення дозволяє описувати більшість квантово-механічних ефектів, пов'язаних з проходженням сигналів через одягнений кубіт. Проте цього наближення може бути недостатньо. Із цієї причини були поліпшені обчислення й ураховані наступні корелятори для опису кубіт-резонаторних систем.

У напівквантовому наближенні врахування кореляторів виду $\langle AB \rangle$ призводить до збільшення системи рівнянь Максвелл-Блоха. Така система є більш повною та дозволяє описувати експериментальні вимірювання також кількісно. Знайдено внесок двокореляторної поправки в рівняннях Максвелла-Блоха для опису еволюції взаємодії двомодового резонатора та кубіту. Показано, що врахування в рівняннях Максвелла-Блоха кореляторів взаємодії квантових полів кубіта та резонатора суттєво збільшує точність теоретичного опису реальної системи. Важливо відзначити, що температура кубіта входить у вирази для частотного здвигу резонансу в системі. Через переплетення кореляторів кубіта-резонатора, коефіцієнт проходження сигналу резонатора несе інформацію про температуру кубіта. Встановлено, що температуру кубіта можливо визначити завдяки вимірам коефіцієнта проходження сигналу через резонатор.

У дисертації розглянуто систему кубіт-резонатор, з акцентуванням уваги на найбільш вдалу, з погляду практичного застосування, систему кубіта - трансмон. Отримані результати демонструють, що найбільш простий підхід - квазікласична теорія, коли допускається, що всі корелятори факторизуються - має перевагу у вигляді одержання прозорих аналітичних рівнянь і формул.

Вирішено задачу проходження однофотонних сигналів через систему хвилевід-кубіт-резонатор. У роботі представлена техніка теоретичного опису взаємодії кубітів з фотонним сигналом в одномірному хвилеводі. Важливою перевагою методу є те, що в загальному виді даний підхід дозволяє враховувати неідентичність кубітів і їхнє довільне розташування у хвилеводі. Схожа ідея була запропонована для опису розповсюдження фотонів у зв'язаному оптичному резонаторі. Запропонований підхід заснований на рішенні завдання розсіювання й знаходженні коефіцієнтів поширення фотонів через хвилевід з кубітами. Вирази для коефіцієнтів проходження й відбиття знаходять за допомогою побудови матриці розсіювання, ґрунтуючись на проєкційному формалізмі й методі неермітового гамільтоніана. В роботі розглянуто систему, у якій кожний кубіт поміщений у фотонний резонатор. Це фізично обмежує число мод, з якими він може взаємодіяти й, тим самим, підвищує час життя кубіта. При цьому самі резонатори обмінюються фотоном безпосередньо із хвилеводом, здійснюючи, тим самим, непрямий зв'язок кубіта із хвилеводом. Розглядається проходження одиночного фотона. Це дозволяє стверджувати, що спостережувані ефекти мають чисто квантомеханічну природу. У випадку одномірного хвилеводу більшу роль грають відстані між об'єктами, що вимагає звернути увагу на особливості впливу цієї відстані на процеси розсіювання одиночного фотона. Встановлено вплив кубіта на коефіцієнта проходження фотону через хвилевід, пов'язаний з системою кубіт-резонатор. Були отримані вирази для коефіцієнтів проходження, які відображають залежність амплітудно-частотної характеристики системи від відстані між кубіт-резонаторними підсистемами для двокубітної системи. Показано, що швидкість фотонного випромінювання залежить від взаємного розміщення систем кубітів-резонаторів. У системі конкурують два хвильових процеси. Відбувається інтерференція хвильових функцій, пов'язаних з кожною парою кубіт-резонатор і ми спостерігаємо резонанс Фано. Було показано, що внутрішні резонанси системи залежать не тільки від її конфігурації, але й від частоти фотона, що налітає.

Для рішення поставлених у дисертації завдань використовуються як аналітичні, так і чисельні методи теоретичної фізики конденсованого стану. При описі властивостей об'єктів використовується модифіковане рівняння Ліувілля – фон Неймана з урахуванням впливу дисипативного оточення – рівняння Ліндблада. Для опису стаціонарного стану системи і еволюції її параметрів у часі використовується ланцюг рівнянь Максвелла-Блоха у квазікласичному і напівквантовому наближеннях. Крім того, у дисертаційній роботі був застосований оригінальний аналітичний метод опису проходження однофотонного сигналу через хвилевід з кубітами. Знайдені у дисертації залежності коефіцієнта проходження сигналу через систему від типових параметрів кубіта та резонатора можуть бути використані для створення посилювача або атенюатора на основі такої системи. Розрахунки впливу температури кубіту та резонатора на коефіцієнт проходження, приведені у дисертації, можуть бути корисними для встановлення реальної температури під час експериментів. Показано, що врахування двокорреляторної поправки в рівняннях Максвелла-Блоха для опису еволюції системи кубіта-резонатора суттєвим чином деталізує характеристики фізичних процесів у системі, що дає змогу пояснити дані низки експериментальних досліджень.

Ключові слова: кубіт; квантова інтерферометрія; напівквантове наближення; квазікласичне наближення; рівняння Ліндблада; рівняння Максвелла-Блоха; система кубіт-резонатор.

ABSTRACT

Karpov D.S. Features of the electrodynamics of the mesoscopic system of superconducting quantum bits, which interacts with the resonator. – Manuscript.

Thesis for a candidate's degree in physics and mathematics in speciality 01.04.02 – theoretical physics. – B.I. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering, NAS of Ukraine, Kharkov, 2018.

The thesis is devoted to theoretical study the properties of the interaction of artificial two-level systems - quantum bits - with the electromagnetic field of the resonator in cases of classical and quantum signals. An explicit expression of the transmission coefficient of an electromagnetic signal through a resonator that coupling to a qubit was found. The qubit interacts with two signals - high-amplitude and low-amplitude. Such interaction is a basis of so-called two-signal spectroscopy or qubit test spectroscopy. The high-amplitude signal affects on the energy levels of the system in such a way that they are modified. As a result, we obtain an effective two-level system - a dressed qubit. The dressed qubit interacts with the second weak amplitude signal. The weak signal allows reconstructing the energy spectrum of the dressed qubit. It is important to notice that in the case of interaction with two signals, the description of the qubit-resonator can be extended to so-called, double-dressed states.

It established that the qubit acts as a quantum nonlinear object and may amplify or weaken the output signal. The effect of increasing or decreasing the amplitude of the output signal is studied in detail. The theoretical formalism was proposed for describing the transmission of a signal through a qubit-resonator system. It was considered how the amplification and attenuation of the input signal depend on the system parameters. In the dissertation, the influence of such parameters as coherence time, loss of resonator, connection, etc. is systematically studied. It is shown that in the qubit-resonator system it is possible to create an inversion of population of energy levels, which leads to a significant amplification of the output signal. It is shown that it is different from absolute

zero the temperature of the system leads to a decrease in the absolute value of the passing factor.

Approximation for Maxwell-Bloch equations (semi-quantum and quasiclassical) is used for describing the interaction of a qubit with a resonator and transport properties of such a system. Simplified analytical formulas were obtained for the transmission coefficients in the quasiclassical approximation, omitting $\langle AB \rangle$ correlators, where A , B are atomic or photon operators. The quasiclassical approximation allows us to describe most of the quantum-mechanical effects in the qubit-resonator system. However, this approximation may not be sufficient. For this reason, the description of the qubit-resonator systems have been improved.

The takes into account in the semi-quantum approximation. It increased the Maxwell-Bloch equations system. Such system is more complete and allows to describe the experimental measurements also quantitatively. The accounting of $\langle AB \rangle$ correlators in the Maxwell-Bloch equations allows to describe the evolution of qubit-resonator system with new details. It is important to note that the temperature of the qubit is included in the expressions for frequency resonance shifts in the system. The transmission coefficient of the signal carries information about the temperature of the qubit. It is established that the temperature of a qubit can be determined by measurements of the coefficient of passage of the signal through the resonator.

Even though presented considerations are quite general and can be applied to other types of qubit-resonator systems, including semiconductor qubits, for concreteness we concentrate on a transmon-type qubit in a cavity. The obtained results show that the simplest approach is the quasiclassical theory, when all correlators are factored out, has the advantage of obtaining transparent analytical equations and formulas.

The problem of single-photon signals dispersion in the waveguide-qubit-resonator system is solved. The paper presents the theoretical description of the interaction of qubits with a photon signal in a one-dimensional waveguide. An important advantage of the method is that in the general form this approach allows one to take into account the non-

identity of qubits and their arbitrary arrangement in the waveguide. A similar idea was proposed to describe the propagation of photons in an associated optical resonator, and the proposed approach is based on solving the problem of scattering and finding the coefficients of propagation of photons through a waveguide with qubits. The expressions for the coefficients of passage and reflection are found by constructing a scattering matrix based on projective formalism and the method of non-hermitian Hamiltonian. The paper presented the study of the system in which each qubit is placed in a photonic resonator. It physically limits the number of modes with which it can interact and thus increases the lifetime of the qubit. Moreover, these resonators are exchanged photon directly from the waveguide. The transmission of a single photon is considered. This suggests that the observed effects have a purely quantum-mechanical nature. In the case of a one-dimensional waveguide, a greater role is played by the distance between the objects, which requires attention to the particulars

Keywords: qubit; quantum interferometry; semi-quantum approximation; semiclassical approximation; Lindblad equation; planar waveguide; Maxwell-Bloch equation; qubit-resonator system; photon.

Список публікацій здобувача

Результати дисертації представлені в 15 наукових працях: 5 статей в провідних фахових іноземних і вітчизняних наукових журналах та 1 стаття в працях міжнародної конференції [1-6], і 9 тез статей в працях міжнародних конференцій [7-15]:

1. Amplification and attenuation of the transmitted signal by doubly-dressed states / S.N. Shevchenko, G. Oelsner, Ya. S. Greenberg, P. Macha, **D. S. Karpov**, M. Grajcar, U. Hubner, A. N. Omelyanchouk, E. Il'ichev // *Phys. Rev. B.* – 2014. – V. 89, No.18. – P. 184504-1–184504-10.

2. Signal amplification in a qubit-resonator system / **D. S. Karpov**, G. Oelsner, S.N. Shevchenko, Ya.S. Greenberg, E. Ilichev // *Low Temp. Phys.* – 2016. – Т. 42, № 3. – P. 189–195.

3. Landau-Zener-Stuckelberg-Majorana lasing in circuit QED / P. Neillinger, S. N. Shevchenko, J. Bogár, M. Reháč, G. Oelsner, **D. S. Karpov**, U. Hübner, O. Astafiev, M. Grajcar, E. Il'ichev // *Phys. Rev. B.* – 2016. – V. 94, No. 9 – P. 094519-1–094519-10.

4. Scattering of a single photon on a two-qubit structure with resonators / A. N. Sultanov, **D. S. Karpov**, Ya. S. Greenberg, S.N. Shevchenko, A. A. Shtygashev // *ФНТ.* – 2017. – Т. 43, № 7. – P. 1003–1010.

5. Shevchenko S. N. Thermometry and memcapacitance with qubit-resonator system / **D. S. Karpov**, S. N. Shevchenko // Thermometry and memcapacitance with qubit-resonator system // *Phys. Rev. Applied.* – V. 10, No. 1.- P. 014013-1–014013-11.

6. Transport properties of a microwave photon in a system with two artificial atoms / A. N. Sultanov, **D.S. Karpov**, Ya. S. Greenberg, B. I. Ivanov, S. N. Shevchenko // 13th International Scientific-Technical Conference on Actual Problems of Electronic Instrument Engineering “APEIE-2016”, October 3–6, 2016: book of abstr. – Russia, Novosibirsk, 2016. – P. 118–121.

7. Photon transport in qubit-resonator structures / A. Sultanov, **D. S. Karpov**, Ya. S. Greenberg, S.N. Shevchenko // VII International Conference for Young Scientists

“Low Temperature Physics”, June 6–10, 2016: book of abstr. – Ukraine, Kharkiv, 2016. – P. 46.

8. Study of microwave transport in solid-state hybrid qubit-resonator structure / A. Sultanov, **D.S. Karpov**, Ya. S. Greenberg, S.N. Shevchenko // XIV All-Russian School-Seminar on Physics of Condensed Matter, November 12–19, 2015: book of abstr. – Russia, Voroneg, 2015. – P. 35.

9. Amplification in the doubly-dressed system / **D. S. Karpov**, S. N. Shevchenko, G. Oelsner, Ya. S. Greenberg, P. Macha, M. Grajcar, A. N. Omelyanchouk, E. Il'ichev // 3rd International Conference on Nanophysics and Nanoelectronics ”Mesoscopic Structures: Fundamentals and Applications”. – June 22–27, 2015: book of abstr. – Russia, Novosibirsk, 2015. – P. 14.

10. **Karpov D. S.** Strong driving regime of the qubit-resonator system / **D. S. Karpov**, S. N. Shevchenko, A. N. Omelyanchouk, E. Il'ichev // VI International Conference for Young Scientists “Low Temperature Physics”, June 1–5, 2015 : book of abstr. – Ukraine, Kharkiv, 2015. – P. 39.

11. **Karpov D. S.** Theoretical study of the signal amplification in the qubit-resonator system / **D. S. Karpov**, S. N. Shevchenko // V International Conference for Young Scientists “Low Temperature Physics”, June 2–5, 2014: book of abstr. – Ukraine, Kharkiv, 2014. – P. 45.

12. **Karpov D. S.** Amplification and attenuation of the transmitted signal by qubit's dressed states / **D. S. Karpov**, S. N. Shevchenko // IV International Conference for Young Scientists “Low Temperature Physics”, June 3–7, 2013: book of abstr. – Ukraine, Kharkiv, 2013. – P. 31.

13. **Karpov D. S.** Qubit's dressed states in resonator / **D. S. Karpov**, S. N. Shevchenko // III International Conference for Young Scientists “Low Temperature Physics”, May 14–18, 2012: book of abstr. – Ukraine, Kharkiv, 2012. – P. 67.

14. **Карпов Д. С.** Исследование микроволнового транспорта в твердотельной гибридной структуре кубит-резонатор / Я. С. Гринберг, А. Н. Султанов, **Д. С. Карпов** // 16 Всероссийская школа-семинар по проблемам

физики конденсированного состояния вещества “СПФКС–16”, 12–19 Ноября, 2015: тезисы. – Россия, Екатеринбург, 2015. – С. 217.

15. **Karpov D. S.** Quantum memcapacitance with transmon-resonator system / **D. S. Karpov**, S. N. Shevchenko, A. Fedorov // 3th biennial European Conference on Applied Superconductivity “EUCAS 2017”, September 17–21, 2017. – Switzerland, Geneva, 2017. Access mode: <https://www.symporg-registrations.com/symporg/frontend/reg/absViewDocumentFE.csp?popup=1&documentID=7356&eventID=112>

ЗМІСТ

ВСТУП.....	14
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ КВАНТОВИХ	
МЕЗОСКОПІЧНИХ СТРУКТУР (ОГЛЯД).....	
1.1. Лінія передач. Режим стоячих хвиль.....	20
1.2. Квантування резонатора	28
1.3. Надпровідні кубіти.....	32
1.4. Рівняння Ліндблада	45
РОЗДІЛ 2. СИСТЕМА КУБІТ-РЕЗОНАТОР. ДВІЧІ ОДЯГНЕНІ СТАНИ.....	52
2.1. Одягнені стани.....	53
2.2. Двічі «одягнені» стани.....	55
2.3. Опис еволюції кубіт-резонатора.....	62
Висновки	72
РОЗДІЛ 3. НАПІВКВАНТОВЕ НАБЛИЖЕННЯ. ПОРІВНЯННЯ	
КВАЗІКЛАСИЧНОГО І НАПІВКВАНТОВОГО НАБЛИЖЕНЬ.....	
3.1. Квазікласичне й напівквантове наближення	75
3.2. Еволюція квадратур у часі.....	80
3.3. Вплив температури. Термометрія.....	86
3.4. Порівняння напівквантового й квазікласичного наближень для системи кубіт-резанотор	90
Висновки	92
РОЗДІЛ 4. ВЗАЄМОДІЯ КУБІТА	
З ОДИНОЧНИМИ ФОТОНАМИ	
	93

	13
4.1. Ефективний гамільтоніан	94
4.2. Кубіт у хвилеводі.....	97
4.3. Два кубіта у хвилеводі	105
4.4. Заплутування в системі з 2 резонаторами і кубітами, пов'язаними із хвилеводом	116
Висновки	123
ВИСНОВКИ.....	125
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	127
ДОДАТОК А. Список публікацій здобувача за темою дисертації	144
ДОДАТОК Б. Відомості про апробацію результатів дисертації	146

ВСТУП

Актуальність теми. Дослідження квантово-механічних властивостей мезоскопічних систем на основі надпровідних кубітів перспективно з точок зору як фундаментальної, так і прикладної науки. Такі системи являють собою структури на основі надпровідних плівок Al, Nb або Nb, у яких присутні вставки з діелектрика, наномістки (ширина набагато менше довжини) [1,2,3,4]. Комбінація надпровідник-діелектрик-надпровідник називається контактом Джозефсона [1], що вносить нелінійні ефекти в систему. Наявність наномістків призводить до виникнення ефекту прослизання фази [5,6,7,8].

Інтерес фундаментальної науки до таким мезоскопічних структур пов'язаний з можливістю створювати при їхній допомозі штучні атоми, так звані кубіти. Поведінка кубітів описується за допомогою рівнянь квантової оптики і, у порівнянні з суто квантооптичними системами, кубіти мають ряд істотних переваг. Основною особливістю надпровідних кубітів є відносно проста масштабованість структур і керованість параметрами систем, можливість вивчати систему у режимі сильного зв'язку [9,10,11,12,13,14,15]. Для створення таких структур використовуються відпрацьовані методи електронної літографії. Керування й детектування відбувається за допомогою планарних або об'ємних електромагнітних резонаторів [16,17,18,19]. Квантова поведінка кубітів дозволяє моделювати й вивчати різні аспекти квантової теорії інформації й квантової інженерії [17,20,21,22]. Одними з перспективних напрямків досліджень мезоскопічних систем є вивчення різних аспектів маніпулювання й зчитування станів кубітів, також підготовка фундаменту для створення квантового комп'ютера [23,24,25,26,27].

Квантово-механічні ефекти в мезоскопічних системах на основі надпровідних кубітів активно вивчаються останні кілька десятиліть як теоретично, так і експериментально (дивися огляди [1,28] і посилання в них). Такі системи цікаві як штучні дворівневі атоми (кубіти). Квантові рівні енергії й квантова когерентність властиві їм, що дозволяє використати їх як базис для вивчення фундаментальних

квантових явищ. Експериментальний прогрес, що був досягнутий останнім часом, дозволяє контролювати кубіти в широкому діапазоні параметрів і вивчати ряд квантово-оптичних ефектів в одномірних твердотільних квантових структурах: надвипромінювання [29,30,31,32], перенос станів від одного кубіта до іншого за допомогою фотона [33,34,35,36,37], магнітно-індуктоване проходження одиночного фотона [38,39] та інше.

Одним з перспективних напрямків у цій області залишається вивчення взаємодії многомодового резонатора й кубіта, відкритого хвилеводу й кубіта [20,40,41,42]. Більшість робіт, на сьогодні, зосереджені на системах, у яких вивчають один кубіт або взаємодія кубіта з однією модою резонатора, наступним же кроком у розвитку є вивчення двох і більше кубітних систем, які взаємодіють із декількома модами резонатора.

Саме це коло нових важливих наукових завдань, які мають фундаментальне й прикладне значення, вирішується в даній дисертаційній роботі, що робить її тему, безсумнівно, актуальною.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана у відділі надпровідних і мезоскопічних структур Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Веркіна Національної академії наук України і є складовою частиною наступних проектів:

- «Експериментальні та теоретичні дослідження квантових когерентних явищ в нових типах надпровідників та надпровідних структур» (номер державної реєстрації 0112U002640, термін виконання 2012 – 2016 рр.);
- «Квантові ефекти в системах з кубітами на основі однозонних та багатозонних надпровідників» (номер державної реєстрації 0114U005155, виконання 2013-2014 рр.);
- «Надпровідні і мезоскопічні мікроструктури та прилади сучасної квантової електроніки на їх основі» (номер державної реєстрації 0117U002291, термін виконання 2017-2021 р.);

Мета й завдання дослідження. Мета дисертаційної роботи полягає у виявленні особливостей взаємодії штучних дворівневих систем на базі надпровідних

квантових бітів з електромагнітним полем резонатора у випадках класичного та квантового сигналу. Для досягнення поставленої мети були сформульовані наступні завдання:

- аналітичні вирази для квантових рівнів енергії кубіта, який розміщений у резонаторі, при його взаємодії з декількома модами резонатора з різною амплітудою сигналів;
- описати фізичні процеси у гібридній системі, яка складається з резонатору та кубіту, при проходженні слабого електромагнітного сигналу;
- дослідити вплив різних параметрів мезоскопічної системи кубіта-резонатора на коефіцієнт проходження електромагнітної хвилі;
- виявити величину внеску у розв'язок рівнянь Максвелла-Блоха атомно-фотонних кореляторів наступного наближення, так званого напівквантового наближення;
- з'ясувати залежність коефіцієнта проходження електромагнітного сигналу і особливості динамічної поведінки системи кубіту-резонатора від шумової температури;
- розробити метод для знаходження коефіцієнтів відбиття і проходження фотона через хвилевід, що пов'язаний із двома системами кубітами-резонаторами;

Об'єктом дослідження є процеси відбиття та проходження класичних електромагнітних і однофотонних сигналів через систему, яка складається із хвилеводу, резонатора і кубіта.

Предметом дослідження є залежності коефіцієнтів відбиття та проходження електромагнітних і однофотонних сигналів від температури, параметрів кубіта і резонатора, у тому числі і релаксаційних коефіцієнтів.

Методи дослідження. Для рішення поставлених у дисертації завдань використовуються як аналітичні, так і чисельні методи теоретичної фізики конденсованого стану. При описі властивостей об'єктів використовується модифіковане рівняння Ліувілля – фон Неймана з урахуванням впливу дисипативного оточення – рівняння Ліндблада. Для опису стаціонарного стану системи і еволюції її параметрів у часі використовується ланцюг рівнянь Максвелла-Блоха у квазікласичному і напівквантовому наближеннях. Крім того, у

дисертаційній роботі автором був застосований оригінальний аналітичний метод опису проходження однофотонного сигналу через хвилевід з кубітами.

Наукова новизна отриманих результатів.

1. Вперше знайдено явний вираз для коефіцієнта проходження електромагнітного сигналу крізь систему кубіт-резонатор у випадку двомодового резонатору. Показано, що у випадку взаємодії кубіта з високоамплітудним і слабоамплітудним сигналами можливе посилення або ослаблення вихідного сигналу. Встановлено, що кубіт виступає в якості квантового нелінійного об'єкту.

2. Вперше встановлено вплив параметрів релаксації кубіта та резонатора на коефіцієнт проходження електромагнітного сигналу через систему кубіт-резонатор. Показано, що у системі кубіт-резонатор можливе суттєве посилення вихідного сигналу завдяки створенню інверсної заселеності енергетичних рівнів. Показано, що відмінна від абсолютного нуля температура системи призводить до зменшення абсолютного значення коефіцієнту проходження.

3. Вперше знайдено внесок двокореляторної поправки в рівняннях Максвелла-Блоха для опису еволюції системи кубіта-резонатора. Показано, що врахування в рівняннях Максвелла-Блоха кореляторів взаємодії квантових полів кубіта та резонатора суттєво збільшує точність теоретичного опису реальної системи. Встановлено, що коефіцієнт проходження сигналу через резонатор несе в собі інформацію щодо температурного стану кубіта.

4. Вперше вирішено задачу проходження однофотонних сигналів через хвилевід, неермітового гамільтоніана і матриці розсіювання. Показано, що швидкість фотонного випромінювання залежить від взаємного розміщення систем кубітів-резонаторів. Встановлено, що в системі можливі резонанси з асиметричним профілем, які залежать від частоти вхідного фотону.

Практичне значення отриманих результатів. Знайдені у дисертації залежності коефіцієнта проходження сигналу через систему від типових параметрів кубіта та резонатора можуть бути використані для створення посилювача або атенюатора на основі такої системи. Розрахунки впливу температури кубіту та резонатора на коефіцієнт проходження, приведені у дисертації, можуть бути

корисними для встановлення реальної температури під час експериментів. Показано, що врахування двокорреляторної поправки в рівняннях Максвелла-Блоха для опису еволюції системи кубіта-резонатора суттєвим чином деталізує характеристики фізичних процесів у системі, що дає змогу пояснити дані низки експериментальних досліджень.

Особистий внесок здобувача. У всіх роботах, що були виконані у співавторстві і увійшли до дисертації, автор брав активну участь на всіх етапах наукових досліджень, а саме: у постановці завдань, у виконанні розрахунків, у трактуванні і обговоренні отриманих результатів, формулюванні висновків і написанні статей, та оприлюдненні їх на конференціях і семінарах. Дисертантом особисто показано, що коефіцієнт проходження сигналу через резонатор із кубітом є функцією величини зв'язку та релаксаційних параметрів системи. Здобувач самостійно встановив області параметрів максимального посилення сигналу у відповідній системі, розрахована та проаналізована температурна залежність коефіцієнта проходження сигналу. Автором самостійно виконано аналітичні розрахунки внеску атомно-фотонних кореляторів другого порядку у рівняння Максвелла-Блоха та виявлено допустимі межі використання квазікласичного та напівквантового наближення. Таким чином, особистий внесок здобувача є визначальним.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися особисто дисертантом на таких вітчизняні й міжнародних наукових конференціях і школах:

- 3rd International Conference for Young Scientists «Low temperature physics» (ICYS-LTP-2012, Kharkiv, Ukraine, May 14–18, 2012);

- 4th International Conference for Young Scientists «Low temperature physics» (ICYS-LTP-2013, Kharkiv, Ukraine, June 3–7, 2013);

- Introduction to Quantum System and Device 2013 (IQSD-2013, Espoo, Finland, June 11–14, 2013);

- 5th International Conference for Young Scientists «Low temperature physics» (Kharkiv, Ukraine, June 2–6, 2014);

- 6th International Conference for Young Scientists «Low temperature physics» (ICYS-LTP-2015, Kharkiv, Ukraine, June 2–6, 2015);
- 3rd International Conference on Nanophysics and Nanoelectronics, ” Mesoscopic Structures: Fundamentals and Applications” (Novosibirsk, Russia, June 22–27, 2015);
- 7th International Conference for Young Scientists «Low temperature physics» (ICYS-LTP-2016, Kharkiv, Ukraine, June 6 – 10, 2016);
- 13th biennial European Conference on Applied Superconductivity, (EUCAS 2017, Geneva, Switzerland, September 20–24, 2017).

Публікації. Результати дисертації представлені в 15 наукових працях: 5 статей в провідних фахових іноземних і вітчизняних наукових журналах та 1 стаття в працях міжнародної конференції [37,43,44,45,46], і 9 тез статей в працях міжнародних конференцій [47,48,49,50,51,52,53,54,55,56].

РОЗДІЛ 1

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ КВАНТОВИХ МЕЗОСКОПІЧНИХ СТРУКТУР (ОГЛЯД)

1.1 Лінія передач. Режим стоячих хвиль. Equation Chapter 1 Section 1

Спектроскопією й спектрографією називають виміри інтенсивності випромінювання залежно від довжини хвилі. Такі види вимірів часто використовуються як експериментальні методи характеристики об'єктів, зокрема атомного й молекулярного розміру. Відповідні вимірювальні прилади називаються спектрометрами, спектрофотометрами, спектрографами або спектральними аналізаторами [57].

Спектроскопія активно використовується в навколишнім нас приладах. Неонове висвітлення є прямим застосуванням атомної спектроскопії. Неон і інші інертні гази мають характерні частоти випромінювання (кольори). У неонових лампах електрони зіштовхуються з газом, а молекули газу надають світло, поглинаючи й випромінюючи енергію зіткнення. Чорнило, барвники й фарби вибираються по їхніх спектральних характеристиках для одержання певних кольорів і відтінків. Як приклад, газоподібний діоксид азоту має характерну червону абсорбційну особливість, і це офарблює повітря, забруднене двоокисом азоту, у червонясто-коричневий відтінок. Релеєвське розсіювання, що відповідальне за кольори нашого неба, являє собою спектроскопічний феномен.

Спектроскопічні дослідження лежать в основі розвитку квантової механіки. На їхній основі Макс Планк вивчав випромінювання чорного тіла, Альберт Ейнштейн пояснив фотоелектричний ефект, а Нільс Бор побудував структуру атомів і їхніх спектрів. Спектроскопія використовується у фізико-аналітичній хімії, оскільки атоми й молекули мають унікальні спектри. У результаті ці спектри можуть бути використані для виявлення, ідентифікації й кількісної оцінки інформації про атоми й молекули. Спектроскопія також використовується в астрономії й дистанційному зондуванні на Землі. Більшість дослідницьких телескопів мають

спектрографи [58]. Обмірювані спектри використовуються для визначення хімічного складу й фізичних властивостей астрономічних об'єктів (наприклад, температури і їхньої швидкості руху).

Одним із центральних понять у спектроскопії є резонанс і відповідна йому резонансна частота. Резонанси спочатку характеризувалися механічними системами, такими як маятники. Механічні системи, які вібрують або коливаються, будуть видавати більш амплітудні коливання, коли коливання приводяться на їхній резонансній частоті. Графік амплітуди й частоти коливання буде мати пік, центрований на резонансній частоті [59]. Цей графік є одним з видів спектрів; пік, часто називають спектральною лінією, і більшість спектральних ліній мають аналогічний вигляд.

У квантово-механічних системах аналогічний резонанс являє собою зв'язок двох квантових станів однієї системи, таких як атом, через джерело енергії, такий як фотон. Сполучення двох станів найбільш сильне, коли енергія джерела відповідає різниці енергій між двома станами атома [60,61]. Енергія фотона пов'язана з його частотою, і енергетичний спектр системи буде мати пік на резонансній частоті відповідної різниці енергій між двома станами цього ж атома. Частки, наприклад, електрони й нейтрони, мають відповідність, формула де Бройля, між їхньою енергією і довжиною хвилі частинки, отже, можуть також збуджувати резонансні взаємодії.

Спектри кубітів вивчають, наприклад, за допомогою взаємодії з резонатором на основі лінії передач. Як резонатори в експерименті використовуються планарні лінії передач. Такий резонатор можна розглядати в рамках формалізму розподілених параметрів і рівнянь довгої лінії. Довжина електромагнітних хвиль для такого резонатора порівнянна з довжиною резонатора (наприклад, у роботах [2,4,17,22,30,37,62] працюють з сигналами ГГц частот, довжинами хвиль приблизно $\lambda \sim 10$ см й резонатор довжиною 2.5-5 см).

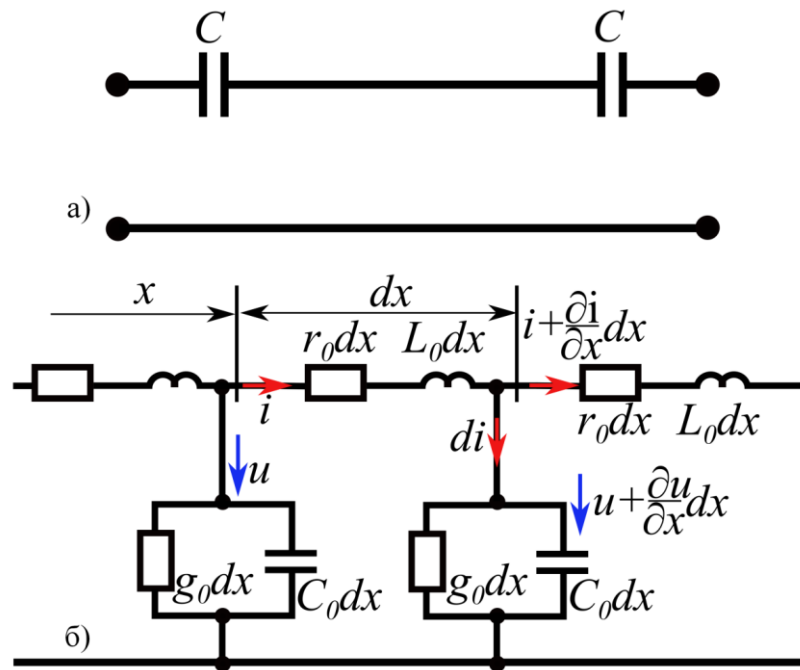


Рис. 1 Схематичне зображення лінії передач і її моделювання за допомогою елементарних електричних контурів. На верхньому малюнку зображено два провідники: перший переривається ємностями C , другий – суцільний. Розглядається частина лінії передач, що лежить між двома ємностями C . На нижньому малюнку представлений набір елементарних електричних контурів, що дозволяють описати довгу лінію (довжина електромагнітних хвиль для такого резонатора порівнянна з довжиною резонатора). Червоними стрілками задано поширення струму в ланцюгу, сині стрілки задають напрямок обходу контуру для законів Кірхгофа. Початком лінії вважаємо положення правої обкладки лівого конденсатора на верхньому малюнку.

На Рис. 1 представлено наступні елементи:

- r_0 - опір дротів на одиницю довжини (Ом/м);
- L_0 - індуктивність петлі утвореної проводами на одиницю довжини (Г/м);
- g_0 - шунтувальна провідність на одиницю довжини (З/м);
- C_0 - шунтувальна ємність на одиницю довжини (Ф/м);

Оскільки електромагнітні коливання в лінії поширюються з кінцевою швидкістю, то миттєві значення напруги u і струму i у будь-якій точці лінії передач

є функціями часу t і відстані від початку лінії x : $u(x,t)$; $i(x,t)$. Розіб'ємо лінію на ділянки довжиною dx (Рис. 1), де відстань x відраховуємо від початку лінії (на Рис. 1 початком лінії вважаємо положення правої обкладки лівого конденсатора на верхньому малюнку). Тоді на ділянці dx активний опір дорівнює $r_0 dx$, індуктивність - $L_0 dx$, провідність - $g_0 dx$, ємність - $C_0 dx$, $u(x,t)$ і $i(x,t)$ - струм і напруга на початку обраного шматочка лінії передачі.

Якщо в момент часу $t = t_1$ струм на початку ділянки дорівнює $i(x, t_1)$, то, в результаті втрат через поперечний елемент, струм наприкінці ділянки для $t = t_1$

дорівнює $i(x, t_1) + \frac{\partial i(x, t_1)}{\partial x} dx$, де $\partial i / \partial x$ - швидкість зміни струму в напрямку x , а

$\frac{\partial i}{\partial x} dx$ - збільшення струму на відстані dx . Аналогічно можна записати й для

напруги: на початку ділянки - $u(x, t_1)$, і наприкінці - $u + \frac{\partial u(x, t_1)}{\partial x} dx$.

Відповідно до другого закону Кірхгофа на ділянці ланцюга dx при обході ланцюга по годинниковій стрілці маємо наступне рівняння для напруги

$$-u + ir_0 dx + L_0 dx \frac{\partial i}{\partial t} + u + dx \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (1.1)$$

Відповідно до першого закону Кірхгофа сума струмів на ділянці ланцюга dx

$$i = di + i + \frac{\partial i}{\partial x} dx, \quad (1.2)$$

де струм di , згідно до Рис. 1, дорівнює сумі струмів минаючих через провідність $g_0 dx$ і ємність $C_0 dx$

$$i = ug_0 dx + C_0 dx \frac{\partial u}{\partial t} + i + \frac{\partial i}{\partial x} dx. \quad (1.3)$$

Рівняння (1.1) й (1.3) спростимо й поділимо на dx та одержуємо наступні рівняння для струму й напруги:

$$-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = ir_0 + L_0 \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}, \quad (1.4)$$

$$-\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = g_0 u(x,t) + C_0 \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}. \quad (1.5)$$

Нехай напруга й струм у лінії змінюються за гармонійним законом у часі:

$$\begin{aligned} i(x,t) &= \tilde{I}(x)e^{i\omega t}, \\ u(x,t) &= \tilde{U}(x)e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

де \tilde{I} й \tilde{U} комплексні амплітуди.

Перепишемо рівняння (1.4) й (1.5) у наступному вигляді

$$(1.7)$$

$$\begin{aligned} Z_0 &= r_0 + i\omega L_0, \\ Y_0 &= g_0 + i\omega C_0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

де Z_0 - комплексний опір, а Y_0 - комплексна індукція; $i^2 = -1$; ω - частота струму й напруги. Тоді система (1.7) приймає вид хвильових рівнянь

$$\begin{cases} \frac{d^2 \tilde{U}}{dx^2} - \gamma^2 \tilde{U} = 0 \\ \frac{d^2 \tilde{I}}{dx^2} - \gamma^2 \tilde{I} = 0 \end{cases}, \quad (1.9)$$

де $\gamma = \sqrt{Z_0 Y_0} = \alpha + i\beta$; γ - коефіцієнт поширення хвилі; α - коефіцієнт загасання; β - фазовий коефіцієнт. Для лінії без втрат ($R_0 = G_0 = 0$) коефіцієнт поширення хвилі γ буде дорівнює

$$\gamma = i\omega\sqrt{L_0 C_0} \quad (1.10)$$

Використовуючи стандартний анзац для диференціальних рівняння такого виду, рішенням рівнянь (1.9) буде

$$\begin{aligned} \tilde{U}(x) &= V_0^+ e^{-\gamma x} + V_0^- e^{\gamma x}, \\ \tilde{I}(x) &= I_0^+ e^{-\gamma x} + I_0^- e^{\gamma x}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Константи V_0^+ , I_0^+ й V_0^- , I_0^- - амплітуди падаючих і відбитих хвиль. З рівняння (1.7), рішення для струму приймає вид

$$\tilde{I}(x) = \frac{1}{W} (V_0^- e^{\gamma x} - V_0^+ e^{-\gamma x}), \quad (1.12)$$

де $W = \frac{Z_0}{\gamma} = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}}$ - хвильовий опір. Для лінії без втрат ($R_0 = G_0 = 0$) хвильовий опір

W

$$W = \sqrt{L_0 / C_0} \quad (1.13)$$

Значення струму й напруги задаються генератором, якщо його помістити у точку $x = 0$, тоді отримуємо наступне значення констант V_0^\pm

$$\begin{cases} V_{ген} = V_0^+ + V_0^- \\ I_{ген} = \frac{V_0^- - V_0^+}{W} \end{cases} \quad (1.14)$$

$$\begin{cases} V_0^- = \frac{1}{2}(V_{ген} + WI_{ген}) \\ V_0^+ = \frac{1}{2}(V_{ген} - WI_{ген}) \end{cases} \quad (1.15)$$

Підставимо отримані рішення в рівняння (1.11) й після зведення подібних струм і напруга в лінії будуть виражається в такий спосіб [63,64,65]

$$\begin{cases} U(x) = V_{ген} \operatorname{ch}(\gamma x) + \frac{I_{ген}}{W} \operatorname{sh}(\gamma x) \\ I(x) = I_{ген} \operatorname{ch}(\gamma x) + \frac{V_{ген}}{W} \operatorname{sh}(\gamma x) \end{cases} \quad (1.16)$$

З огляду на вираз (1.10) коефіцієнта поширення хвилі γ для лінії без втрат і зв'язок гіперболічних функцій із тригонометричними, система рівнянь (1.16) спрощується до виду

$$\begin{cases} U(x) = V_{ген} \cos(\beta x) + iI_{ген} W \sin(\beta x) \\ I(x) = I_{ген} \cos(\beta x) + i\frac{V_{ген}}{W} \sin(\beta x) \end{cases} \quad (1.17)$$

Введемо коефіцієнт відбиття напруги. Коефіцієнт відбиття напруги являє собою комплексну величину. Це відношення амплітуд відбитої хвилі до падаючої:

$$\Gamma = \frac{V_0^-}{V_0^+} = |\Gamma| e^{i\phi}, \quad (1.18)$$

де $|\Gamma|$ - модуль коефіцієнта відбиття; ϕ - фаза визначальне зрушення відбитої хвилі щодо падаючої. Коефіцієнт відбиття приймає значення $0 \leq |\Gamma| \leq 1$. При рівності амплітуд $|V_0^-| = |V_0^+|$, у лінії передач устанавлюються стоячі хвилі. Цей режим відповідає повному відбиттю в системі $|\Gamma| = 1$.

Розглянемо ситуацію, коли лінія на кінцях розімкнута, $I_{ген} = 0$ і опір навантаження $Z_n = \infty$. Цей режим називається режимом стоячих хвиль. Рівняння (1.17) приймають вид

$$\begin{cases} \tilde{U}(x) = V_0 \cos(\beta x) \\ \tilde{I}(x) = i \frac{V_0}{W} \sin(\beta x) \end{cases}, \quad (1.19)$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Миттєві значення напруги й струму в довільній площині довгої лінії задовольняють співвідношенням

$$\begin{aligned} V(x, t) &= U_{ген} \cos \beta x \cos \omega t, \\ I(x, t) &= -\frac{U_{ген}}{R_0} \sin \beta x \sin \omega t. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Рис. 2 схематично демонструє розподіл рівнянь (1.20) у просторі лінії передач.

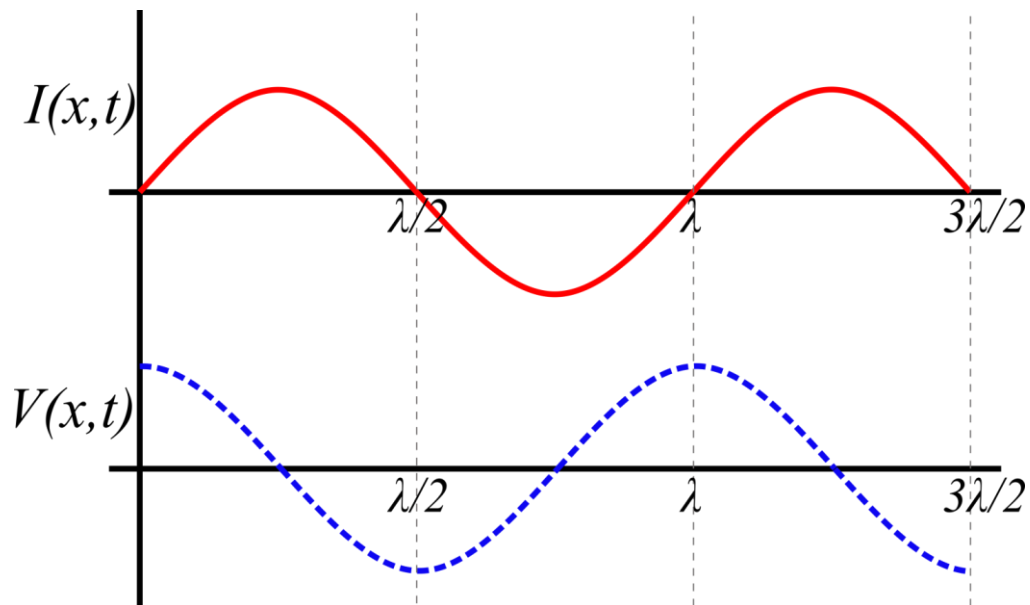


Рис. 2 Розподіл миттєвих значень струму й напруги в розімкнутій або навантаженій на конденсатор лінії передач (тобто граничні умови $I=0$, $V=U_{ген}$). Струм і напруга зміщені один відносно одного по фазі. Пучності для функції струму $I(x,t)$ відповідають довжинам хвилі $\frac{\lambda}{2}$, λ , $\frac{3\lambda}{2}$ й так далі. Пучності для функції напруги $V(x,t)$ відповідають довжинам хвилі $\frac{\lambda}{4}$, $\frac{3\lambda}{4}$, $\frac{5\lambda}{4}$ й так далі.

Довга лінія с довжиною l кратна цілому числу напівхвиль $l = n\lambda / 2 = n\pi v_{\phi} / \omega_{0n}$, $n=1,2,\dots$. Таким чином, відрізок довгої лінії, що має таку довжину, має нескінченне число власних хвиль, що відповідають різним значенням n [66,67] з наступним значенням частоту

$$\omega_n = \frac{n\pi v_{\phi}}{l}. \quad (1.21)$$

1.2 Квантування резонатора.

Лінія передач із розподіленими параметрами в режимі стоячих хвиль дуже добре описується нескінченним набором LC резонаторів. На таке наближення

накладається наступна умова: фізичний розмір LC резонатора значно менше довжини хвилі на резонансній частоті $\lambda = 2\pi c / \omega_r$.

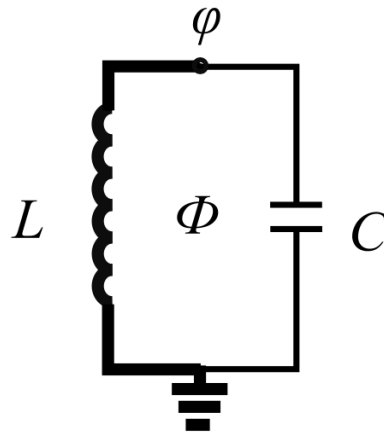


Рис. 3 Схема LC осцилятора. Жирною лінією виділений напрямок рух струму від точки з потоком ϕ до заземлення. До резонатора, що складає з індуктивності L і ємності C , прикладений зовнішній магнітний потік. Така схема тотожна до резонатора, в якому розглядається рух заряду.

Проквантуємо LC осцилятор. Виберемо рух струму проти руху годинникової стрілки (Рис. 3). Нехай до осцилятора прикладений постійний магнітний потік $\tilde{\Phi}$. Тоді лагранжіан осцилятора буде мати вигляд [66,67,68]

$$L(\phi, \dot{\phi}) = \frac{C\dot{\phi}^2}{2} - \frac{\phi^2}{2L} \quad (1.22)$$

Перейдемо до гамільтонового формалізму, враховуваючи перетворення для координат $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = q$ і гамільтоніану $H = p\dot{\phi} - L$:

$$H = \frac{q^2}{2C} + \frac{\phi^2}{2L}, \quad (1.23)$$

який після квантування прийме вид

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right), \quad (1.24)$$

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad (1.25)$$

де застосовані наступні позначення

$$\begin{aligned} \phi &= \sqrt{\frac{\hbar L}{2C}} (a + a^\dagger), \\ q &= -i \sqrt{\frac{\hbar C}{2L}} (a - a^\dagger), \\ \omega &= \sqrt{1/LC}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Рівняння (1.26) повністю збігається з гамільтоніаном осцилятора у квантовій механіці [106].

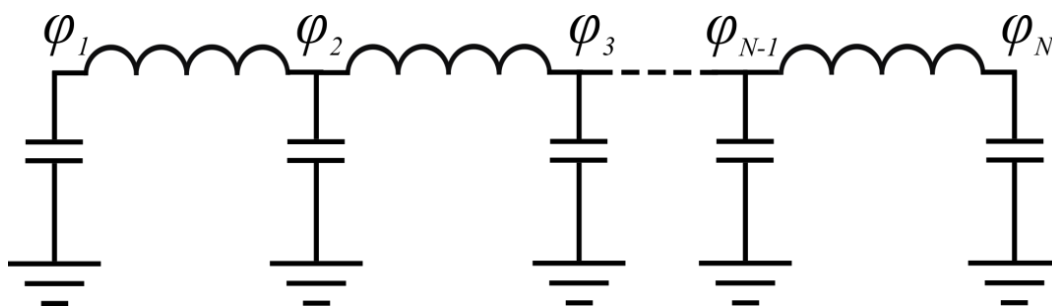


Рис. 4 Лінія передач, представлена як нескінченний набір LC резонаторів.

Тепер розглянемо лінію передач із довжиною d , що являє собою набір LC резонаторів нескінченно малого розміру (див. рис. 4). Вважаємо, що резонаторів у нас N штук, тоді лагранжіан приймає вид [69,70]

$$L(\phi_1, \dot{\phi}_1, \dots, \phi_N, \dot{\phi}_N) = \sum_{i=1}^N \frac{\Delta C \dot{\phi}_i^2}{2} - \sum_{i=1}^N \frac{(\phi_{i+1} - \phi_i)^2}{2\Delta L}, \quad (1.27)$$

де $\Delta C = cd / N$, $\Delta L = ld / N$. При границі $N \rightarrow \infty$ формула (1.27) приймає вид інтегралу

$$L(\phi(x,t), \dot{\phi}(x,t)) = \int_0^d dx \left(\frac{c\dot{\phi}(x,t)^2}{2} - \frac{1}{2l} \left(\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right). \quad (1.28)$$

Вираз для магнітного потоку $\phi(x,t)$ знайдемо з рівняння Ейлера-Лагранжа

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0, \quad (1.29)$$

де $v = 1 / \sqrt{lc}$ є фазовою швидкістю. Рішенням рівняння (1.29) буде наступний анзац

$$\phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(k_n x + \alpha_n) \cos(k_n vt + \beta_n), \quad (1.30)$$

де k_n , α_n визначаються із граничних умов

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=d} = 0. \quad (1.31)$$

Умови (1.31) дають наступні значення констант $\alpha_n = 0$, $k_n = n\pi / d$. Значення A_n , β_n визначаються з початкових умов. З огляду на вираз (1.30), лагранжіан (1.28) приймає вид

$$L(\Phi_1, \dot{\Phi}_1, \dots, \Phi_n, \dot{\Phi}_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n \dot{\Phi}_n}{2} - \frac{\Phi_n^2}{2L_n}, \quad (1.32)$$

де магнітний потік має такий вигляд $\Phi_n(x, t) = A_n \cos(k_n vt + \beta_n)$. Вираження (1.32) – це узагальнений ефективний лагранжіан для ланцюга не зв'язаних осциляторів з ефективною ємністю $C_n = cd/2$, індуктивністю $L_n = 2dl/n^2\pi^2$ й резонансною частотою $\omega_n = nv\pi/d$. Використовуючи вираження для узагальненого імпульсу $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}}$, гамільтоніан буде мати вигляд

$$H = \hbar \sum_n \omega_n \left(a_n^\dagger a_n + \frac{1}{2} \right), \quad (1.33)$$

або для обраної моди одержуємо наступний гамільтоніан для лінії передач як квантового резонатора [71,72,73]:

$$H = \hbar \omega_r \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right). \quad (1.34)$$

Отриманий гамільтоніан співпадає з гамільтоніаном квантового осцилятора, який описує резонатор на основі лінії передач в термінах операторів вторинного квантування фотонів.

1.3 Надпровідні кубіти

Розглянемо деякі ланцюги з джозефсоновськими контактами [1,28,74,75,76]. Автономний джозефсоновський контакт. Найпростішою системою є джозефсоновський контакт, підключений до джерела харчування. Еквівалентна схема такого контуру представлена на Рис. 5. Даний ланцюг характеризується ємністю джозефсоновського контакту C , його критичним струмом I_c і нормальним

опором R . Можна записати повний струм системи, що складається з нормального струму, струму Джозефсона й нормального струму I_N . Користуючись співвідношеннями Джозефсона повний струм буде мати вигляд [77,78]

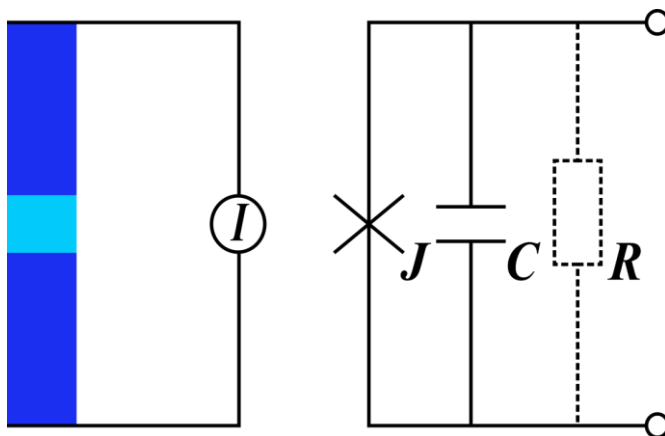


Рис. 5 Автономний джозефсоновський контакт. На лівому малюнку синіми прямокутниками зображені надпровідні контакти, блакитним прямокутником – напівпровідник. На правому малюнку зображена модель контакту Джозефсона за допомогою елементарних електричних елементів, які приєднані паралельно: J – джозефсоновський елемент, що пов'язаний з величиною тунелювання куперівських пара через контакт, C – ємність контакту, R – опір контакту, який відмінний від нормального опору контакту й сильно залежить від температури й прикладеної напруги.

$$I_s + I_N + C \frac{\partial V}{\partial t} = I, \quad (1.35)$$

$$\begin{cases} V = \frac{\hbar}{2e} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \\ I_s = I_c \sin \varphi \\ I_N = \frac{V}{R} \end{cases}, \quad (1.36)$$

$$\frac{\hbar}{2e} C \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\hbar}{2eR} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + I_c \sin \varphi = I. \quad (1.37)$$

Динамічної змінної є різниця фаз на контакті [1,28,66,67,69,105]. Використав формули, які наведені вище, можна записати рівняння у вигляді [1,28,66,67,69,105]

$$M \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{dU}{dt} + r \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (1.38)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M = \frac{\hbar^2}{(2e)^2} C = \frac{\hbar^2}{2E_c} \\ U(\varphi) = E_J \left[(1 - \cos \varphi) - \frac{I}{I_c} \varphi \right] \\ r = \frac{\hbar^2}{(2e)^2 R} \end{array} \right. \quad (1.39)$$

Надпровідне кільце із джозефсоновським контактом (вч-СКВІД на рис. 6).

Однієї з важливих надпровідних ланцюгів є надпровідні кільце, що містить один або більше джозефсоновських контактів. Така система є основною частиною надчутливих датчиків магнітного поля - надпровідних квантових інтерферометрів.

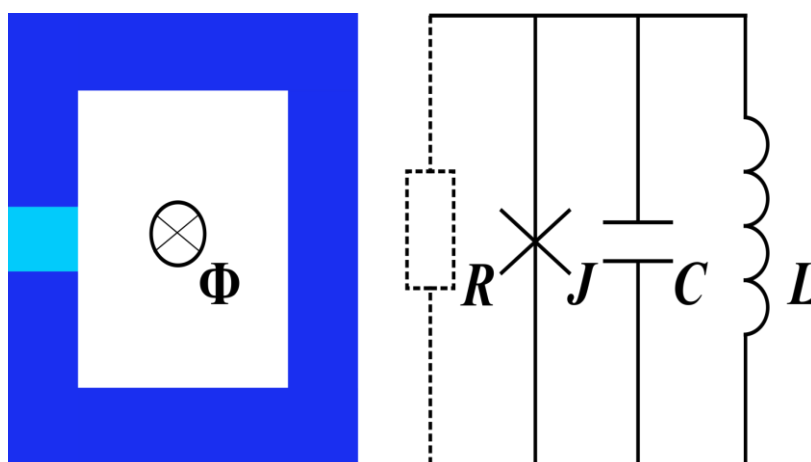


Рис. 6 На лівому малюнку надпровідний квантовий інтерферометр (СКВІД) складається з надпровідної петлі (темно-синя лінія) і напівпровідникової вставки (блакитний прямокутник). Магнітний потік Φ пронизує петлю. На правому малюнку еквівалентна схема: L – індуктивність кільця, J – Джозефсоновський

елемент, що пов'язаний з величиною тунелювання куперівських пара через контакт, C – ємність контакту, R – опір контакту, що відмінно від нормального опору контакту сильно залежить від температури й прикладеної напруги.

З фундаментальної точки зору, це система із заданим магнітним потоком. Зовнішнє магнітне поле H_e задає в кільці магнітний потік Φ_e . Потік індукується у кільці циркулюючий струм I . Повний магнітний потік у кільці з урахуванням індуктивності L буде

$$\Phi = \Phi_e - LI. \quad (1.40)$$

Повний потік буде визначати різниця фаз φ на контактах. Для масивного кільця із джозефсоновским контактом можна записати умову $\varphi = \frac{2e}{\hbar}\Phi$. Тоді з огляду на (2.1) і (2.2), одержуємо рівняння для різниці фаз

$$\frac{\hbar}{2e}C \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\hbar}{2eR} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + I_c \sin \varphi + \frac{\hbar}{2eL}(\varphi - \varphi_e) = 0 \quad (1.41)$$

Або

$$M \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{dU}{dt} + r \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (1.42)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M = \frac{\hbar^2}{(2e)^2} C = \frac{\hbar^2}{2E_c} \\ U(\varphi) = E_J(1 - \cos \varphi) + E_L \frac{(\varphi - \varphi_e)^2}{2} \\ E_L = \frac{\Phi_0^2}{4\pi^2 L}, \varphi_e = \frac{2e}{\hbar} \Phi_e, \Phi_0 = \frac{2\pi \hbar c}{2e} \end{array} \right. \quad (1.43)$$

Розглянемо більш детально рівняння (1.42) й (1.38). Член $r \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ відповідає за дисипацію енергії. Експериментально було показано, що дисипація мала, що дозволяє знехтувати цим членом. У такому випадку одержуємо рівняння схоже з точністю до позначень із другим законом Ньютона

$$M \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{dU}{dt} = 0, \quad (1.44)$$

Також запишемо рівняння Лагранжа й сам лагранжян системи. З теоретичної механіки відомо, що

$$L(q, \dot{q}) = K - U, \quad (1.45)$$

де q й \dot{q} - узагальнені координата й швидкість, а K й U - кінетична й потенційна енергії. З (1.44) q відповідає φ , а \dot{q} - $\dot{\varphi}$. Тоді

$$L(q, \dot{q}) = \frac{M \dot{\varphi}^2}{2} - U. \quad (1.46)$$

Скориставшись (1.43), $L(q, \dot{q})$ приймає вид

$$L(q, \dot{q}) = \frac{\hbar^2 \dot{\varphi}^2}{4E_c} - E_j (1 - \cos \varphi) - E_L \frac{(\varphi - \varphi_e)^2}{2}. \quad (1.47)$$

Двоконтактний СКВІД. Розглянемо надпровідне кільце із двома джозефсоновськими контактами, що включили в ланцюг із джерелом живлення (рис. 7). Ця система має властивості автономного контакту й кільця в магнітному полі. Дуже важливо, що вона поводить як ефективний джозефсоновський контакт

у ланцюзі, критичний струм якого можна міняти за допомогою прикладеного магнітного поля.

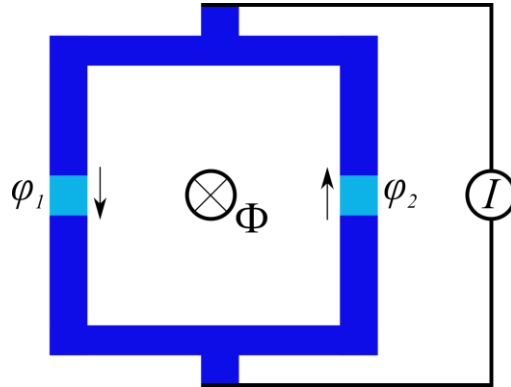


Рис. 7 Двоконтактний СКВІД складається з надпровідного кільця із двома контактами Джозефсона. Контакти Джозефсона приєднані паралельно до джерела струму. Стрілки вказують на напрямки протікання позитивного Джозефсоновського струму. Важливою особливістю двоконтактного СКВІДа є можливість керувати чутливістю системи прикладеним магнітним потоком. Магнітний потік Φ пронизує петлю.

Для простоти будемо вважати, що наш СКВІД симетричний. Рівняння для його опису одержуємо аналогічним способом як і для вище розглянутих систем. Вони мають вигляд:

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}, \quad \Phi = \Phi_e - L_1 I_1 + L_2 I_2, \quad (1.48)$$

$$I = I_1 + I_2 = I_{c1} \sin \varphi_1 + I_{c2} \sin \varphi_2, \quad (1.49)$$

$$I_{c1} = I_{c2} = I_c, \quad L_1 = L_2 = L/2. \quad (1.50)$$

Розглянемо випадок малої індуктивності $LI_c \ll \Phi_0$. Тоді можна вважати, що потік у кільці збігається із прикладеним потоком $\Phi \sim \Phi_e$.

Увівши змінні

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \quad \theta = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \quad (1.51)$$

і, зробивши перетворення, одержуємо

$$I(\varphi) = I_c \sin \varphi, \quad (1.52)$$

$$\tilde{I}_c = \left| 2I_c \cos\left(2\pi \frac{\Phi_e}{\Phi_0}\right) \right| \quad (1.53)$$

де Φ_e є магнітний потік, керуючий критичним струмом для СКВІДа. Отже СКВІД

керована система з енергією джозефсоновського зв'язку $\tilde{E}_j = \hbar \frac{\tilde{I}_c}{2e}$.

Фізичний опис джозефсоновського кубіта. На прикладі СКВІД і симетричного двоконтактного СКВІДа одержимо гамільтоніан у найпростішій формі.

$$H = p\dot{\varphi} - L, \quad (1.54)$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}, \quad (1.55)$$

Одержимо

$$p = \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 C\dot{\varphi}. \quad (1.56)$$

Цю формулу імпульсу легко інтерпретувати: він пропорційний заряду $q = CU$, що отримує ємність контакту, $p = \left(\frac{\hbar}{2e}\right)q$. Або ж імпульс пропорційний кількості куперівських пара минаючих через контакт

$$p = \hbar n \quad (1.57)$$

Користуючись співвідношенням (1.54) і (1.57), запишемо гамільтоніан системи

$$H(n, \varphi) = E_c n^2 - E_j \cos \varphi + E_L \frac{(\varphi - \varphi_e)^2}{2}. \quad (1.58)$$

Для симетричного СКВІДа гамільтоніан буде мати вигляд

$$H(n, \varphi) = E_c (n_+^2 + n_-^2) - 2E_j \cos \varphi_+ \cos \varphi_- + E_L \frac{(2\varphi_+ - \varphi_e)^2}{2} + \frac{\hbar}{2e} I_e \varphi_-. \quad (1.59)$$

Класичному імпульсу можна зіставити оператор у такому виді

$$p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (1.60)$$

Також можна записати оператор заряду куперівських пар

$$q = -i2e \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (1.61)$$

і оператор кількості пара

$$n = -i \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (1.62)$$

Комутативне співвідношення схоже з комутатором координати й імпульсу

$$[\varphi, n] = i \quad (1.63)$$

Тоді гамільтоніан проквантованої системи має вигляд:

- для СКВІДа:

$$H = E_c n^2 - E_j \cos \varphi + E_L \frac{(\varphi - \varphi_e)^2}{2} \quad (1.64)$$

- для двоконтактного СКВІДа: -

$$H = E_c (n_+^2 + n_-^2) - 2E_j \cos \varphi_+ \cos \varphi_- + E_L \frac{(2\varphi_+ - \varphi_e)^2}{2} + \frac{\hbar}{2e} I_e \varphi_- \quad (1.65)$$

Найпростіший потоковий кубіт можна побудувати на основі двоконтактного СКВІДа, що буде працювати у фазовому режимі, $E_j \gg E_c$. Будемо розглядати гамільтоніан (1.64) при $\varphi_e = \pi$, тобто при напівцілому магнітному потоці. Потенціал, у якому перебуває наша система, є двоямний потенціал (Рис. 8) з двома однаковими ямами з еквівалентними енергетичними рівнями, де тунелювання між ямами можна зневажити ($\omega_j \gg E_j$).

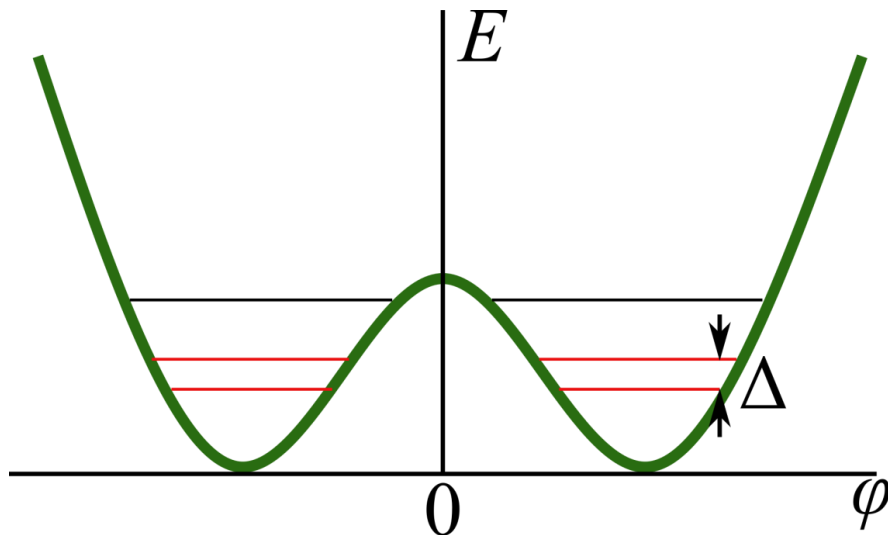


Рис. 8 Двоямний потенціал СКВІДа з виродженими квантовими рівнями в ямах (чорні лінії). Макроскопічне квантове тунелювання через потенційний бар'єр відзначено величиною Δ , відстанню між рівнями. Нижня пара рівнів (червоні лінії) формує кубіт. Ці рівні з'єднані завдяки флуктуаціям струму. Середнє значення флуктуації струму дає нам два виділені напрямки циркуляції в петлі: по годинній стрілці й проти годинникової стрілки (потоківі стани).

Енергетичні рівні відповідають напрямку руху постійного струму, по годинній або проти годинної стрілки, що циркулює в надпровідному кільці. Розглянемо найнижчі рівні, дворазово виродженні, енергетичні рівні. У випадку, коли тунелювання присутнє, рівні стають розрізненими й утворюється дворівнева система, у якій відстань між рівнями визначається швидкістю тунелювання. Відстань між рівнями дворівневої системи набагато менше відстані між енергетичними рівнями ями [1, 28,74,75]. У випадку, якщо потенційна енергія тунельного бар'єру набагато менше, ніж енергія Джозефсона, можна спростити вираження для потенціалу (1.43)

$$U(\varphi) = E_L \left(-\varepsilon \frac{\varphi^2}{2} - f \varphi + \frac{1 + \varepsilon}{24} \varphi^4 \right), \quad (1.66)$$

де $\varphi = \varphi - \pi$, $f = \varphi_e - \pi$, й

$$\varepsilon = \frac{E_j}{E_L} - 1 \ll 1 \quad (1.67)$$

визначає висоту бар'єра.

Кубіт можна розглядати як дворівневу систему. Гамільтоніан такої системи має вигляд [79,80,81]

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}(\Delta\hat{\sigma}_x + \varepsilon\hat{\sigma}_z). \quad (1.68)$$

Приведемо гамільтоніан кубіта до такого виду.

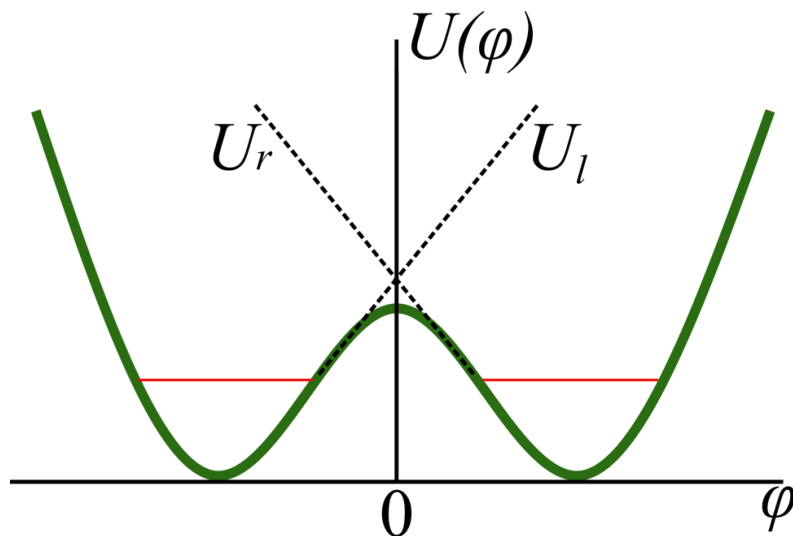


Рис. 9 Двоямний потенціал потокового кубіта, що сформований гамільтоніаном контакту. Пунктирні лінії вказують на розташування правої й лівої ями з основним рівнем енергії $|r\rangle$ й $|l\rangle$ відповідно. Частина тунелює з лівої ями в праву й назад. Хвильові функції задовольняють рівнянням Шредінгера $H_l|l\rangle = E_l|l\rangle$, $H_r|r\rangle = E_r|r\rangle$.

Гамільтоніан системи можна розглядати як суму двох гамільтоніанів H_r і H_l , які відповідають системам з потенціалами U_r й U_l (рис. 9), [1,28,66,67,69,105] частка перебуває або праворуч, або ліворуч. Користуючись формалізмом Паулі запишемо рівняння енергетичних рівнів

$$\hat{H}_l |l\rangle = E_l |l\rangle, \hat{H}_r |r\rangle = E_r |r\rangle. \quad (1.69)$$

Усереднений потік для станів, φ_l і φ_r мають різні знаки, що відповідає напрямку циркуляції струму. Значення потоку не відрізняється від напівцілого значення, $\varphi_e = f + \pi$, але значення енергії не рівні, але близькі, $E_l \approx E_r$. Тунелювання схрещує рівні, і можливо знайти власні вектора з певною точністю, $|E\rangle$,

$$\hat{H} |E\rangle = E |E\rangle, \quad (1.70)$$

вони є суперпозиціями станів в обох ямах,

$$|E\rangle = a |l\rangle + b |r\rangle. \quad (1.71)$$

Гамільтоніан кубіта є матричні елементи повного гамільтоніана з урахуванням станів $|l\rangle$ і $|r\rangle$

$$H_{ll} = E_l + \langle l | U - U_l | l \rangle, \quad (1.72)$$

$$H_{rr} = E_r + \langle r | U - U_l | r \rangle, \quad (1.73)$$

$$H_{rl} = E_l \langle r | l \rangle + \langle r | U - U_l | l \rangle. \quad (1.74)$$

Інші матричні елементи малі й ними можна знехтувати. Гамільтоніан симетричний:

$H_{rl} = H_{lr}$. Введучи позначення $\varepsilon = E_r - E_l, \Delta = \frac{H_{rl}}{2}$, гамільтоніан дворівневої

системи для кубіта приймає вигляд

$$\hat{H}_{qb} = -\frac{1}{2}(\Delta \hat{\sigma}_x + \varepsilon \hat{\sigma}_z). \quad (1.75)$$

Що б надалі було простіше працювати з гамільтоніаном, знайдемо його власні значення й функції. Вираз (1.75) дає нам матрицю Гамільтоніана для кубіта

$$\hat{H}_{qb} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\varepsilon & -\Delta \\ -\Delta & \varepsilon \end{pmatrix}. \quad (1.76)$$

$$\hat{S} = \exp(i\hat{\sigma}_y), \hat{S} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\xi}{2} & \sin \frac{\xi}{2} \\ -\sin \frac{\xi}{2} & \cos \frac{\xi}{2} \end{pmatrix} \quad (1.77)$$

$$\hat{H}_d = S^{-1} \hat{H}_{qb} S = \frac{E}{2} \hat{\sigma}_z, \quad (1.78)$$

де \hat{H}_d матриця діагонолізованого гамільтоніана, а S^{-1} - зворотня матриця до матриці повороту.

Знайшовши добутки матриць, одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \varepsilon \sin \xi = \Delta \cos \xi \\ \Delta \sin \xi = E \end{cases}. \quad (1.79)$$

Її рішення дають нам значення кута й значення енергії обраних рівнів

$$\begin{cases} E_{l/r} = \pm\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2} \\ \xi = \arctg\left(\frac{\Delta}{\varepsilon}\right) \end{cases} . \quad (1.80)$$

Діагонолізована матриця гамільтоніана кубіта має вигляд

$$\hat{H}_d = \begin{pmatrix} -\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2} \end{pmatrix}, \quad (1.81)$$

власні вектора мають вигляд

$$\begin{aligned} |g\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ |l\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.82)$$

Отже, надпровідне кільце з Джозефсоновським контактом можна розглядати як дворівневу систему и описувати спіновим гамільтоніаном.

1.4. Рівняння Ліндблада.

Рівняння Ліндблада - це узагальнена форма Марковського рівняння, що дозволяє врахувати дисипацію й декогеренцію в необоротних процесах для квантових вимірів. У главі розглянуте одержання цього рівняння для дворівневої системи в рамках моделі Джеймса-Каммінгса [81].

Розглянемо взаємодію двох фізичних систем - основної S і B , названої резервуаром. Гамільтоніан системи має вигляд:

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_S + \hat{H}_B + \alpha\hat{H}_{SB}, \quad (1.83)$$

\hat{H}_S - описує систему S , \hat{H}_B - описує резервуар B , $\alpha\hat{H}_{SB}$ - описує взаємодію, α - константа, що характеризує величину взаємодії система-резервуар. Запишемо рівняння Ліувілля-фон-Неймана для динаміки матриці щільності нашої системи $\hat{\rho}_{SB}$ в поданні взаємодії $\hat{H}_S + \hat{H}_B$:

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_{SB} = -\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}(t), \hat{\rho}_{SB}\right]. \quad (1.84)$$

Еволюція оператора щільності $\hat{\rho}_S$ системи S є

$$\hat{\rho}_S = Tr_B(\hat{\rho}_{SB}). \quad (1.85)$$

Інтегруємо рівняння (1.84)

$$\hat{\rho}_{SB}(t) = \hat{\rho}_{SB}(0) - \alpha \frac{i}{\hbar} \int_0^t \left[\hat{H}(t'), \hat{\rho}_{SB}(t')\right] dt', \quad (1.86)$$

і отримане рішення підставимо в (1.84). У першому наближенні нам досить

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_{SB} = -\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}(t), \hat{\rho}_{SB}(0)\right] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t \left[\hat{H}(t), \left[\hat{H}(t'), \hat{\rho}_{SB}(t')\right]\right] dt'. \quad (1.87)$$

Рівняння динаміки для матриці щільності системи S має вигляд згідно (1.85)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\rho}_S = & -\frac{i}{\hbar} \alpha \text{tr}_B \left\{ \left[\hat{H}(t), \hat{\rho}_{SB}(0) \right] \right\} - \\ & -\frac{1}{\hbar^2} \alpha^2 \text{tr}_B \left\{ \int_0^t \left[\hat{H}(t), \left[\hat{H}(t'), \hat{\rho}_{SB}(t') \right] \right] dt' \right\}. \end{aligned} \quad (1.88)$$

У повний гамільтоніан $\hat{H}(t)$ входить \hat{H}_{SB} , \hat{H}_{SB} комутує з $\hat{\rho}_{SB}(0)$, що дозволяє нам перетворити рівняння (1.88)

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_S = -\frac{1}{\hbar^2} \alpha^2 \text{tr}_B \left\{ \left[\hat{H}(t), \int_0^t \left[\hat{H}(t'), \hat{\rho}_{SB}(t') \right] dt' \right] \right\}. \quad (1.89)$$

Розглянемо випадок, коли $\alpha = 1$, тобто нехай відбувається повна взаємодія резервуар-система. Результат виразу не зміниться, якщо спочатку взяти шпур, а потім інтеграл. Розглянемо перше наближення по теорії збурювання, що дозволяє нам вважати $\hat{\rho}_{SB}(t) = \hat{\rho}_S(t) \otimes \hat{\rho}_B$. Після цих допущень можемо перетворити рівняння (1.89) до виду

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_S = -\frac{1}{\hbar^2} \alpha^2 \int_0^t dt' \text{tr}_B \left\{ \left[\hat{H}(t), \left[\hat{H}(t'), \hat{\rho}_S(t') \hat{\rho}_B \right] \right] \right\}. \quad (1.90)$$

Розглянемо гамільтоніан взаємодії у вигляді

$$\hat{H}_{SB} = \hbar(\hat{S}\hat{B}^+ + \hat{S}^+\hat{B}), \quad (1.91)$$

де оператор \hat{S} і \hat{B} діють тільки відповідно на систему S й резервуар B . вважаємо, що оператор \hat{S} і гамільтоніан \hat{H}_S комутують

$$\left[\hat{S}, \hat{H}_S \right] = 0. \quad (1.92)$$

Тоді в поданні взаємодії

$$\hat{S}(t) = \hat{S}. \quad (1.93)$$

Будемо розглядати гамільтоніан резервуара, як гамільтоніан бозонів, а, отже, оператор \hat{B} у поданні взаємодії має вигляд

$$\hat{B}(t) = \sum_k g_k^* \hat{a}_k e^{-i\omega_k t}, \quad (1.94)$$

де g_k^* , ω_k , \hat{a}_k - амплітуда, характерна частота й оператор знищення k -тої моди.

Спростимо вираз $tr_B \left\{ \left[\hat{H}(t), \left[\hat{H}(t'), \hat{\rho}_S(t') \hat{\rho}_B \right] \right] \right\}$ з рівняння (1.90), підставивши явний вид операторів і гамільтоніана. Врахуємо властивості сліду

$$tr_B \left\{ \hat{B}(t) \hat{B}(t') \rho_B \right\} = tr_B \left\{ \hat{B}^+(t) \hat{B}^+(t') \rho_B \right\} = 0, \forall t, t'. \quad (1.95)$$

Одержимо вираження виду

$$\begin{aligned} & tr_B \left\{ \left[\hat{H}(t), \left[\hat{H}(t), \hat{\rho}_B \hat{\rho}_S(t) \right] \right] \right\} = \\ & \hbar^2 \left[\hat{S} \hat{S}^+ \hat{\rho}_S(t) - \hat{S}^+ \hat{\rho}_S(t) \hat{S} \right] tr_B \left\{ \hat{B}^+(t) \hat{B}(t') \hat{\rho}_B \right\} \\ & + \hbar^2 \left[\hat{\rho}_S(t) \hat{S}^+ \hat{S} - \hat{S} \hat{\rho}_S(t) \hat{S}^+ \right] tr_B \left\{ \hat{B}^+(t) \hat{B}(t') \hat{\rho}_B \right\} \\ & + \hbar^2 \left[\hat{S}^+ \hat{S} \hat{\rho}_S(t) - \hat{S} \hat{\rho}_S(t) \hat{S}^+ \right] tr_B \left\{ \hat{B}^+(t) \hat{B}(t') \hat{\rho}_B \right\} \\ & + \hbar^2 \left[\hat{\rho}_S(t) \hat{S} \hat{S}^+ - \hat{S}^+ \hat{\rho}_S(t) \hat{S} \right] tr_B \left\{ \hat{B}^+(t) \hat{B}(t') \hat{\rho}_B \right\}. \end{aligned} \quad (1.96)$$

Введемо функції

$$\begin{aligned}
F(t) &= \int_0^t dt' \text{tr}_B \left\{ \hat{B}(t) \hat{B}^+(t') \hat{\rho}_B \right\} \\
G(t) &= \int_0^t dt' \text{tr}_B \left\{ \hat{B}^+(t') \hat{B}(t) \hat{\rho}_B \right\} \\
F^*(t) &= \int_0^t dt' \text{tr}_B \left\{ \hat{B}(t') \hat{B}^+(t) \hat{\rho}_B \right\} \\
G^*(t) &= \int_0^t dt' \text{tr}_B \left\{ \hat{B}^+(t) \hat{B}(t') \hat{\rho}_B \right\}.
\end{aligned} \tag{1.97}$$

Тоді рівняння динаміки матриці щільності (1.90) з врахуванням (1.97) і (1.96) приймає вид

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \hat{\rho}_S(t) &= -\hbar^2 \left[\hat{S} \hat{S}^+ \hat{\rho}_S(t) - \hat{S}^+ \hat{\rho}_S(t) \hat{S} \right] G^*(t) - \\
&\quad -\hbar^2 \left[\hat{\rho}_S(t) \hat{S}^+ \hat{S} - \hat{S} \hat{\rho}_S(t) \hat{S}^+ \right] F^*(t) - \\
&\quad -\hbar^2 \left[\hat{S}^+ \hat{S} \hat{\rho}_S(t) - \hat{S} \hat{\rho}_S(t) \hat{S}^+ \right] F(t) - \\
&\quad -\hbar^2 \left[\hat{\rho}_S(t) \hat{S} \hat{S}^+ - \hat{S}^+ \hat{\rho}_S(t) \hat{S} \right] G(t).
\end{aligned} \tag{1.98}$$

В основному стані оператор щільності резервуара можна задатися в такому виді $\hat{\rho}_B = (|0\rangle\langle 0| \dots) \otimes (\langle 0| \langle 0| \dots)$. Тоді можна спростити рівняння для $F(t), F^*(t), G(t), G^*(t)$, розглянувши їх у певному базисі резервуара ($|b\rangle$)

$$\begin{aligned}
F(t) = F^*(t) &= \sum_k |g_k|^2 \int_0^t dt' e^{-i\omega_k(t-t')}, \\
G(t) = G^*(t) &= 0.
\end{aligned} \tag{1.99}$$

Введемо щільність стану

$$J(\omega) = \sum_l |g_l|^2 \delta(\omega - \omega_l), \quad (1.100)$$

що дозволяє переписати $F(t)$ через інтеграл по суцільному спектру для випромінювання

$$F(t) = \int_0^\infty d\omega J(\omega) \int_0^t d\tau e^{-i\omega\tau}, \quad (1.101)$$

де $\tau = t - t'$.

У марковському наближенні час $t \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\tau e^{-i\omega\tau} &= \lim_{\eta \rightarrow +0} \int_0^\infty d\tau e^{-i\omega\tau - \eta\tau} = \lim_{\eta \rightarrow +0} \frac{\eta}{\eta^2 + \omega^2} - \lim_{\eta \rightarrow +0} \frac{i\omega}{\eta^2 + \omega^2} = \\ &= \pi\delta(\omega) - iP \frac{1}{\omega}, \end{aligned} \quad (1.102)$$

де P інтеграл у змісті головного значення.

$$F = \pi \int_0^\infty d\omega J(\omega) \delta(\omega) - iP \int_0^\infty d\omega \frac{J(\omega)}{\omega} \quad (1.103)$$

Введемо позначення

$$F = \frac{\gamma + i\varepsilon}{2}, \quad (1.104)$$

де

$$\gamma \equiv 2\pi \int_0^{\infty} d\omega J(\omega) \delta(\omega), \quad (1.105)$$

$$\varepsilon \equiv -2P \int_0^{\infty} d\omega \frac{J(\omega)}{\omega}. \quad (1.106)$$

Виберемо щільність станів так, що б $\varepsilon=0$. Тоді на основі всіх перетворень((1.99) ,(1.104)) рівняння прийме вид (1.98)

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_s(t) = \gamma \left[\hat{S} \hat{\rho}_s(t) \hat{S}^+ - \frac{1}{2} \{ \hat{S}^+ \hat{S}, \hat{\rho}_s(t) \} \right]. \quad (1.107)$$

Повернемося до первісних позначень

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_s(t) = -\frac{i}{\hbar} [H_s, \hat{\rho}_s] + \gamma \left[\hat{S} \hat{\rho}_s \hat{S}^+ - \frac{1}{2} \{ \hat{S}^+ \hat{S}, \hat{\rho}_s \} \right]. \quad (1.108)$$

У результаті всіх перетворень був отриманий загальний вид рівняння Ліндблада. Вираження має загальний вигляд. Для застосування даного формалізм до конкретної системи досить ввести для цієї цілі розглядаємий вид системи й резервуару. І тоді можна одержати дисипативні члени для кожного конкретного випадку взаємодії [81,82,83,84].

РОЗДІЛ 2

СИСТЕМА КУБІТ-РЕЗОНАТОР. ДВІЧІ ОДЯГНЕНІ СТАНИ

Equation Chapter 2 Section 2

Квантові оптичні ефекти із контурами на основі джозефсоновських переходів інтенсивно вивчалися протягом останнього десятиліття. Зокрема, такі системи цікаві як дворівневі штучні атоми (кубіти) [1,85,155]. Квантові рівні енергії й квантова когерентність властиві кубітам і є основою для вивчення фундаментальних квантових явищ. Важливо відзначити, що кубіти можна контролювати у широкому діапазоні параметрів [2,16,62,155], і вони неминуче пов'язані з дисипативним оточенням.

У цьому розділі приводяться рівняння із квантової оптики, які допомагають описати взаємодію кубіта з резонатором. Взаємодію між кубітом і резонатором можливо описати як взаємодія атома й квантового поля. У даному випадку кубіт розглядаємо як дворівневу систему. У квантовій оптиці такі системи описуються у рамках одягнених станів.

Даний розділ присвячений опису кубіта, що взаємодіє із двома електромагнітними сигналами. Така взаємодія лежить в основі, так званої, двосигнальної спектроскопії [4] або пробної спектроскопії кубіта [86,87]. Тобто, кубіт взаємодіє із сигналом великої амплітуди, в порівнянні із втратами резонатора, й другим, пробним, слабким сигналом, відповідний по амплітуді до втрат. Пробний сигнал дозволяє реконструювати одягнені стани кубіта. Експериментально такі системи реалізується завдяки взаємодії з декількома резонаторами [88,89] або гармоніками того самого резонатора [90,91,92,134]. У розділі показано як у випадку взаємодії із двома сигналами, опис одягненої системи [93,94,95,96] кубіт-резонатор можна розширити до, так званих, двічі одягнених станів [97,98,99].

Важливо відзначити, що в одягненій системі енергія й інформація про стани переміщується між підсистемами, амплітуда пробного сигналу може збільшуватися або послаблятися [17,20,20,93]. У розділі детально вивчено цей ефект і продемонстроване можливе застосування даного ефекту в реалістичній системі. Із цією метою був розроблений теоретичний формалізм для опису проходження

сигналу через систему кубіт-резонатор. Було розглянуто, як посилення й загасання вхідного сигналу залежать від параметрів системи (добротність резонатора, амплітуда сильного сигналу, час релаксації та інше). Загальна ідея полягає в тому, щоб знайти значення й співвідношення для параметрів системи та отримати максимальне посилення. У розділі систематично вивчається вплив таких параметрів як час когерентності, втрати резонатора, зв'язок і інших.

2.1. Одягнені стани.

Кубіт можна розглядати як ефективну дворівневу систему (наприклад, див. [1,19,43,79,80,106,108]) при обраних параметрах.

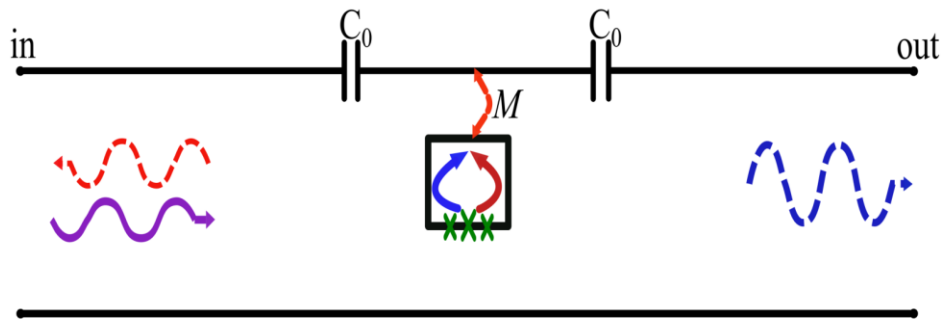


Рис. 10 Схематичне зображення кубіта в резонаторі. Кубіт розташований на ділянці лінії передач між двох конденсаторів C_0 . Константа M визначає величину індуктивного зв'язку кубіта з резонатором на основі лінії передач. Прямокутник із зеленими хрестиками зображує кубіт із трьома контактами Джозефсона. Синя й червона стрілки усередині цього прямокутника символізують напрямок руху струму в кубіті: по годинниковій стрілці й проти її руху. З ліво на право подається сигнал (суцільна фіолетова хвиляста лінія). Амплітуда вихідного сигналу відрізняється від амплітуди вхідного (синя пунктирна хвиляста лінія), також сигнал може відбиватися (червона пунктирна хвиляста лінія на лівій частині малюнка)

Повний гамільтоніан системи (Рис. 10) складається з наступних частин

$$H = H_{qb} + H_r + H_{int}, \quad (2.1)$$

$$H = -\frac{1}{2}(\varepsilon\sigma_z + \Delta\sigma_x) + \hbar\omega_r\left(\frac{1}{2} + aa^\dagger\right) - \hbar g(a + a^\dagger), \quad (2.2)$$

де g - зв'язок між резонатором і кубітом; a / a^\dagger - оператор знищення й народження; ε - магнітний потік, прикладений до кубіту, в енергетичних одиницях; Δ - енергетична щілина між рівнями кубіта; $\sigma_{x,y,z}$ - оператори Паулі. Проведемо діагоналізацію гамільтоніана (2.1), використовуючи позначення $\hbar\omega_{qb} = \sqrt{\Delta^2 + \varepsilon^2}$:

$$\begin{cases} \hat{H}'_{qb} + \hat{H}'_r = \frac{\hbar\omega_{qb}}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar\omega_r\left(n + \frac{1}{2}\right)\hat{e}, \\ \hat{H}'_{\text{int}} = \hbar g(a + a^\dagger)\left(\frac{\varepsilon}{\hbar\omega_{qb}}\hat{\sigma}_z - \frac{\Delta}{\hbar\omega_{qb}}\hat{\sigma}_x\right) \end{cases} \quad (2.3)$$

Матриці Паулі $\sigma_{x,z}$ записані для базису $\{|e\rangle, |g\rangle\}$, у якому дійсно наступне співвідношення $\sigma_z|g\rangle = -|g\rangle$. Власні вектора гамільтоніана $\hat{H}'_0 = \hat{H}'_{qb} + \hat{H}'_r$ є добутком базисних векторів гамільтоніана кубіта й гамільтоніана резонатора $|e/g, n\rangle = |e/g\rangle \otimes |n\rangle$. Взаємодія між кубітом і резонатором можна розглядати як «одягнений» стан кубіта [37,81,90,100,101]. Рівні енергії кубіта в рамках «одягнених» станів описуються наступними виразами

$$\begin{cases} E_{-,n} = \hbar\omega_r(n+1) - \frac{\Omega}{2} \\ E_{+,n} = \hbar\omega_r(n+1) + \frac{\Omega}{2} \end{cases}, \quad (2.4)$$

де $\Omega = \sqrt{\delta^2 + 4g^2_E(n+1)}$, $\delta = \Delta E - \hbar\omega_r$, $g_E = g \frac{\Delta}{\hbar\omega_{qb}}$. Базис «одягнених» станів має

такий вигляд

$$\begin{cases} |-,n\rangle \\ |+,n\rangle \end{cases} = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |g,n\rangle \\ |l,n\rangle \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

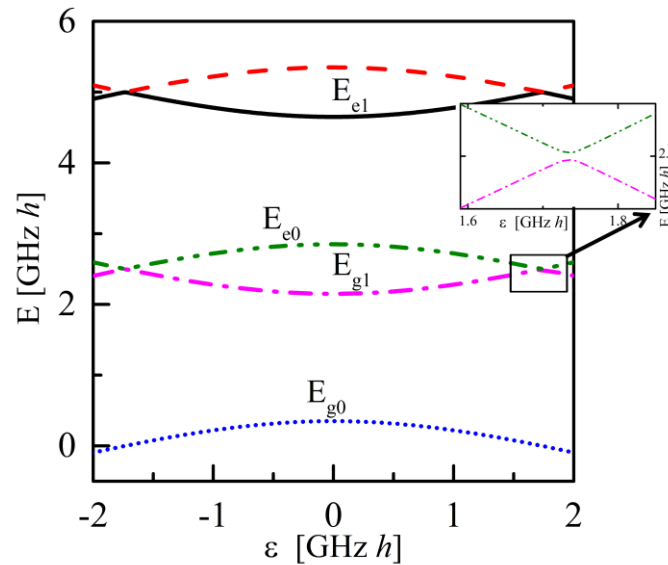


Рис. 11 Рівні «одягненого» кубіта як функція прикладеного магнітного потоку. Рівні системи утворюються з рівнів кубіта ($|e\rangle, |g\rangle$) і рівнів резонатора ($|0\rangle \dots |N\rangle$), $E_{g0} = |g\rangle \otimes |0\rangle$, за допомогою операції тензорного множення. Зміна прикладеного магнітного потоку дозволяє змінювати відстань між рівнями (зсув по осі абсцис уліво або вправо). Графік на вставці демонструє, що рівні зближуються, але не перетинаються.

«Одягнений» кубіт - ефективна система. За рахунок зміни магнітного потоку можливо впливати на рівні енергії кубіта (змінюємо ефективну відстань між квантовими рівнями системи, тобто можливо підстроювання кубіта) й працювати в різних положеннях енергетичної кривої (Рис. 11), система є гнучкою.

2.2. Двічі «одягнені» стани

У цьому параграфі я розглядаю опис взаємодії між кубітом і двомодовим резонатором. Резонатор генерує сигнали на першій (основній) гармоніці й на третій гармоніці. Ідейно двічі «одягнені» стани отримуються як і «одягнені» стани, але в

даному випадку всі перетворення робляться з переформованим спектром системи. Гамільтоніан двомодового резонатора дорівнює

$$H_r = \hbar\omega_r aa^\dagger + 3\hbar\omega_r dd^\dagger, \quad (2.6)$$

де d / d^\dagger - оператори народження й знищення третьої гармоніки. Відповідно гамільтоніан взаємодії з кубітом

$$H_{\text{int}} = [\hbar g_1 (a + a^\dagger) + \hbar g_3 (d + d^\dagger)] \sigma_z, \quad (2.7)$$

де $g_{1,3}$ - коефіцієнти зв'язку кубіта з першою й трьою гармоніками. Накачування системи описується як [100]

$$H_{\mu\nu} = \xi_p (ae^{i\omega_p t} + a^\dagger e^{-i\omega_p t}) + \xi_d (de^{i\omega_d t} + d^\dagger e^{-i\omega_d t}), \quad (2.8)$$

де $\xi_{p,d}$ - амплітуди основної і додаткової гармонік. На далі будемо використовувати наступні назви для сигналів: основну гармоніку названо пробною, а додаткову - сигналом накачування. Гамільтоніан системи має такий вигляд

$$H_{\text{tot}} = H_{qb} + H_r + H_{\text{int}} + H_{\mu\nu}, \quad (2.9)$$

$$H_{qb} = -\frac{1}{2}(\varepsilon\tau_z + \Delta\tau_x), \quad (2.10)$$

$$H_{\text{int}} = [\hbar g_1 (a + a^\dagger) + \hbar g_3 (d + d^\dagger)] \tau_z, \quad (2.11)$$

$$H_{\mu\nu} = \xi_p (ae^{i\omega_p t} + a^\dagger e^{-i\omega_p t}) + \xi_d (de^{i\omega_d t} + d^\dagger e^{-i\omega_d t}), \quad (2.12)$$

Розглянемо окремо сигнал накачування й гамільтоніан кубіта. Всі перетворення для кожного із сигналів можна розглядати незалежно. Проведемо унітарне перетворення наступного гамільтоніана

$$H_{qb+d} = -\frac{1}{2}(\varepsilon\sigma_z + \Delta\sigma_x) + \hbar g_3 (d + d^\dagger)\tau_z + \xi_d (de^{i\omega_d t} + d^\dagger e^{-i\omega_d t}). \quad (2.13)$$

Вираз (2.13) залежить від часу, це ускладнює розрахунок. Для цього перейдемо до опису в рамках картини взаємодії. Множення на унітарний оператор $U_1 = e^{i\omega_d t d^\dagger d}$ дозволить виключити залежність від часу

$$H'_{qb+d} = U_1 H_{qb+d} U_1^\dagger = -\frac{\Delta}{2}\tau_x - \frac{\varepsilon_0}{2}\tau_z + \hbar(3\omega_r - \omega_d)d^\dagger d + \hbar g_3 (de^{-i\omega_d t} + d^\dagger e^{i\omega_d t})\tau_z + \xi_d (d + d^\dagger). \quad (2.14)$$

Обмежимося наближенням $\langle dd^\dagger \rangle \gg 1$, що дозволяє описувати поле накачування когерентними станами $d|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ [73,101,102]

$$H''_{qb+d} = \langle \alpha | H'_{qb+d} | \alpha \rangle = -\frac{\Delta}{2}\tau_x - \frac{\varepsilon_0 + A_d \cos \omega_d t}{2}\tau_z, \quad (2.15)$$

де $A_d = 4\alpha\hbar g_3$, $\alpha = \sqrt{\langle N \rangle}$ й константи були опущені. Наступне перетворення, це переписати гамільтоніан у базисі, що відповідає незалежному від часу базису гамільтоніану системи без врахування взаємодії ($H_0 = -\frac{\Delta}{2}\tau_x - \frac{\varepsilon_0}{2}\tau_z$). Для цього скористаємося матрицею повороту $U = e^{-i\zeta\tau_y/2}$ з $\text{tg}\zeta = -\frac{\Delta}{\varepsilon_0}$

$$H_{qb}' = -\frac{\Delta E}{2} \sigma_z - \frac{A_d \cos \omega_d t}{2} \left(\frac{\varepsilon_0}{\Delta E} \sigma_z - \frac{\Delta}{\Delta E} \sigma_x \right), \quad (2.16)$$

де матриці Паулі в новому базисі записані як

$$\tau_z = \frac{\varepsilon_0}{\Delta E} \sigma_z - \frac{\Delta}{\Delta E} \sigma_x, \quad (2.17)$$

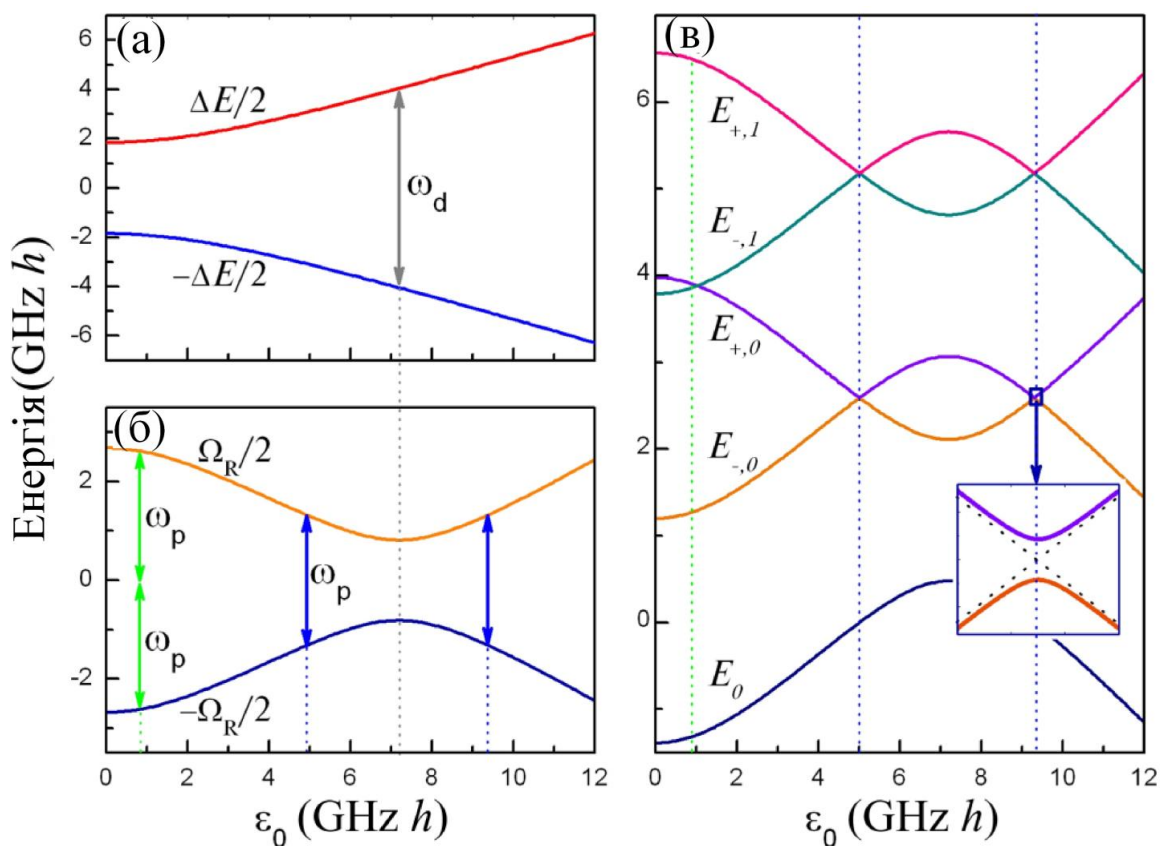


Рис. 12 Рівні енергії (а) кубіта, (б) «одягненого» кубіта, (с) двічі «одягненого» кубіта. Рівні кубіта $\pm\Delta E/2$, побудовані на малюнку (а), при досягненні різниці рівнів порядку частоти накачування ω_d , кубіт резонансно збуджується. Положення резонансу, $\hbar\omega_d = \Delta E$, відповідає зближенню «одягнених» рівнів системи. «Одягнені» рівні кубіта, $\pm\Delta\tilde{E}/2 = \pm\hbar\Omega_R/2$, входячи у резонанс із другим (пробним) сигналом, $\hbar\omega_p = \Delta\tilde{E}$. Це й многофотонне збудження продемонстроване пунктирними лініями на малюнках (б) і (с).

На рис. 12 передені в єдиному масштабі величин енергетичні рівні кубіта, «одягнутого» кубіта, двічі «одягнутого» кубіта. Точки максимального зближення рівнів «одягнутого» кубіта та двічі «одягнутого» кубіта лежать в точці резонансу кубіта та резонатора. На рис. 13 переведена блок схема для пояснення фізичних процесів, які відбуваються при взаємодії гармонік резонатора з кубітом.

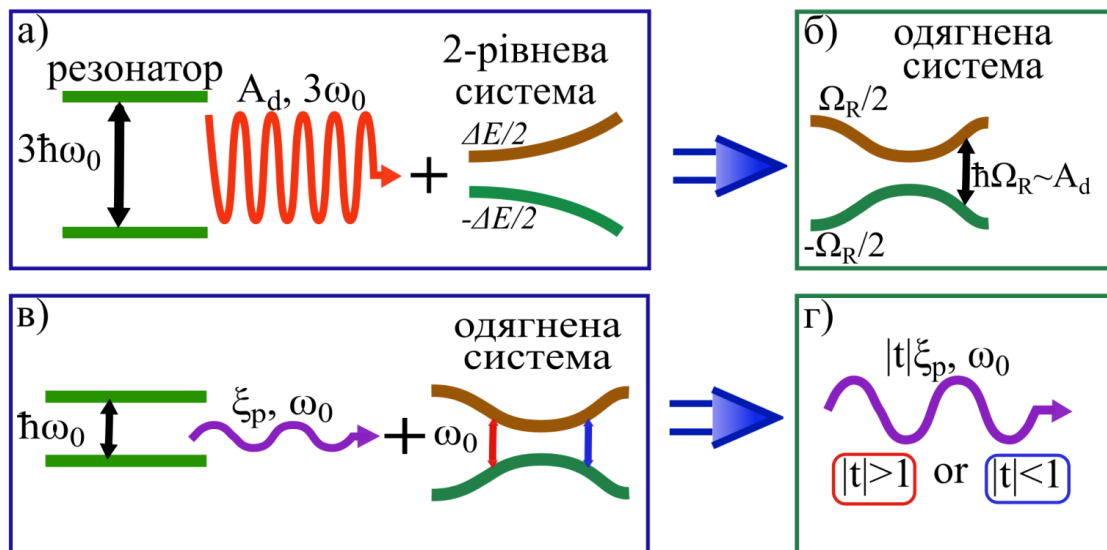


Рис. 13 Взаємодія між кубітом і резонатором можна описати в рамках одягнених станів. (а) Сигнал з великою амплітудою A_d взаємодіє із дворівневою системою (кубіт). (б) Рівні енергії змінюються. Кубіт можна описати в термінах одягнених станів, інакше кажучи, отримана одягнена дворівнева система з енергетичною відстанню, пропорційною амплітуді A_d додаткової гармоніки. (с) Одягнений кубіт взаємодіє із пробним сигналом. (д) Коли відстань між рівнями збігається із частотою пробного сигналу, амплітуда вихідного сигналу збільшується або послабляється.

Зробимо ще одне спрощення. Перепишемо гамільтоніан (2.16) у наближенні обертаючоїся хвилі (rotating wave approximation) [81]

$$\tilde{H}_{qb} = UH'_{qb}U^\dagger + i\hbar\dot{U}U^\dagger \approx -\frac{\tilde{\Delta}}{2}\sigma_x + \frac{\tilde{\varepsilon}_0}{2}\sigma_z, \quad (2.18)$$

де $\tilde{\varepsilon} = \Delta E - \hbar\omega_d$, $\tilde{\Delta} = \Delta A_d / 2\Delta E$. Власні стани гамільтоніана (2.18) описуються виразами

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{\pm} &= \pm \Delta \tilde{E} / 2, \\ \Delta \tilde{E} &= \sqrt{\tilde{\Delta}^2 + \tilde{\varepsilon}^2}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

і зображені на Рис. 12. Гамільтоніан взаємодії в новому базисі приймає вид

$$\tilde{H}_{\text{int}} = -\hbar g_{\varepsilon} (a + a^{\dagger}) \sigma_z. \quad (2.20)$$

Тоді повний гамільтоніан приймає вид

$$\tilde{H} = -\frac{\tilde{\Delta}}{2} \sigma_x + \frac{\tilde{\varepsilon}_0}{2} \sigma_z + \hbar\omega_r a^{\dagger} a - \hbar g_{\varepsilon} (a + a^{\dagger}) \sigma_z + \xi_p (a e^{i\omega_p t} + a^{\dagger} e^{-i\omega_p t}), \quad (2.21)$$

де $g_{\varepsilon} = g_1 \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\Delta^2 + \varepsilon_0^2}}$ - перенормований зв'язок резонатора й кубіта.

Наступне перетворення відповідає переходу до одягненого базису.

Скористаємося оператором повороту $\tilde{S} = e^{i\chi\sigma_y/2}$, $\text{tg}\chi = \frac{\tilde{\Delta}}{\tilde{\varepsilon}}$

$$\begin{aligned} \tilde{H}' &= \frac{\Delta \tilde{E}}{2} \tilde{\sigma}_z + \hbar\omega_r a^{\dagger} a + \hbar g_{\varepsilon} (a + a^{\dagger}) \left(\frac{\tilde{\varepsilon}}{\Delta \tilde{E}} \tilde{\sigma}_z + \frac{\tilde{\Delta}}{\Delta \tilde{E}} \tilde{\sigma}_x \right) + \\ &+ \xi_p (a e^{i\omega_p t} + a^{\dagger} e^{-i\omega_p t}). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Тепер також скористаємося наближенням обертаючої хвилі з унітарним оператором $U_p = e^{i\omega_p t(a^\dagger a + \tilde{\sigma}_z/2)}$

$$H_{full} = \hbar \frac{\delta\tilde{\omega}_{qb}}{2} \tilde{\sigma}_z + \hbar \delta\omega_r a^\dagger a + \hbar \tilde{g} (a \tilde{\sigma}^\dagger + a^\dagger \tilde{\sigma}) + \xi_p (a + a^\dagger), \quad (2.23)$$

$$\delta\tilde{\omega}_{qb} = \Delta\tilde{E} / \hbar - \omega_p, \quad \delta\omega_r = \omega_r - \omega_p, \quad \tilde{g} = g_1 \frac{\varepsilon_0}{\Delta E} \frac{\tilde{\Delta}}{\Delta\tilde{E}}, \quad (2.24)$$

де $\tilde{\sigma} = \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}_x - i\tilde{\sigma}_y)$. Рівні енергії даного гамільтоніана описуються наступним виразами

$$E_{\pm,n} = \hbar\omega_r (n+1) \pm \frac{\hbar\Omega_n}{2}, \quad E_o = -\frac{\hbar\delta\tilde{\omega}_{qb}}{2}, \quad (2.25)$$

$$\Omega_n = \sqrt{4\tilde{g}^2 (n+1) + \delta\tilde{\omega}_{qb}^2}. \quad (2.26)$$

Умови обміну енергією фотонним полем і полем «одягненого» кубіта мають такий вигляд

$$\hbar\omega_p = E_{\pm,n} - E_o, \quad (2.27)$$

$$\omega_r n \pm \sqrt{\tilde{g}^2 (n+1) + \left(\frac{\delta\tilde{\omega}_{qb}}{2}\right)^2} + \frac{\delta\tilde{\omega}_{qb}}{2} = \omega_p - \omega_r. \quad (2.28)$$

При слабкому пробному сигналі й слабкому зв'язку кубіта з резонатором є два типи резонансних умов:

- $n = 0, \delta\tilde{\omega}_{qb} = 0$ - частоти пробного сигналу й

$$\text{Рабі частота кубіта рівні } \omega_p = \Omega_R = \frac{\Delta\tilde{E}}{\hbar};$$

- $n = 1, \delta\tilde{\omega}_{qb} = \omega_p$ - двофотонні процеси при подвоєній частоті пробного сигналу рівної Рабі частоті $2\omega_p = \frac{\Delta\tilde{E}}{\hbar}$

2.3. Опис еволюції кубіт-резонатора.

Еволюцію таких квантових систем описують за допомогою рівняння Ліндблада [103,104].

Система без дисипації. Рішення рівняння Ліндблада по теорії збурювання.

Спочатку розглянемо випадок, коли в системі відсутня дисипація. Тобто $L[\rho]$ дорівнює нулю. Тоді потрібно вирішувати рівняння виду

$$\frac{d}{dt}\rho = \frac{1}{i\hbar}[H\rho]. \quad (2.29)$$

Розглянемо динаміку системи кубіт-резонатор, користуючись теорією збурювання.

У наближенні обертової хвилі гамільтоніан має вигляд:

$$H = H_0 + H' \quad (2.30)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 = \frac{\hbar\delta\omega_q}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar\delta\omega_0(a^+a + \frac{1}{2}) + \frac{\hbar\xi}{2}(a^+\hat{\sigma}_- + a\hat{\sigma}_+) \\ H' = \frac{\hbar\Omega_p}{2}(a^+ + a) \end{array} \right. \quad (2.31)$$

де H_0 - незбуджений гамільтоніан системи, а H' - наше збурення.

Відповідно до теорії збурювання відповідно хвильова функція теж повинна розглядатися у вигляді:

$$\psi = \psi_0 + \psi' \quad (2.32)$$

Теорія збурювання дає можливість досить просто знайти додатки першого порядку, які пов'язані із збурюванням для хвильової функції [105,106,107,108]:

$$\psi^{(1)}_n = \sum \frac{V_{mn}}{E_n^0 - E_m^0} \psi^{(0)}_m, \quad (2.33)$$

$$V_{mn} = \int dq \psi^{(0)*}_n \hat{V} \psi^{(0)}_m. \quad (2.34)$$

Розписавши суму з формул (2.32) і (2.34), маємо хвильову функцію у вигляді:

$$|\psi\rangle = A|g0\rangle + \frac{V_{01}}{E_0^0 - E_1^0} |21\rangle + \frac{V_{02}}{E_0^0 - E_2^0} |11\rangle \quad (2.35)$$

$$E_0 = -\frac{\hbar\delta}{2}$$

$$E_1 = \hbar\delta\omega_0 - \frac{\hbar\Omega_r}{2}$$

$$E_2 = \hbar\delta\omega_0 + \frac{\hbar\Omega_r}{2} \quad (2.36)$$

$$V_{01} = \frac{\hbar\Omega_p}{2} (-\cos\theta)$$

$$V_{02} = \frac{\hbar\Omega_p}{2} (\sin\theta),$$

де $|g0\rangle$, $|21\rangle$, $|11\rangle$ вектори станів в обраному базисі.

Тепер знайдемо середнє значення оператора народження

$$\langle a \rangle = \langle \psi | \hat{a} | \psi \rangle$$

$$\langle a \rangle = \Omega_p \frac{\delta\omega_q}{\frac{\Omega_d^2}{2} - \delta\omega_q \delta\omega_0}. \quad (2.37)$$

Знайдені додатки до хвильової функції дозволяють знайти в деякому наближенні потрібні нам фізичні величини для опису системи. Надалі буде порівняно знайдені рішення з точним аналітичним рішенням.

Рішення рівняння Ліндблада при слабкому збудженні. Підставивши наш гамільтоніан (2.31) у рівняння (2.29), можна знайти елементи матриці щільності. Розпишемо й одержимо рівняння для кожного елемента матриці щільності. Нас цікавить середнє значення оператора народження. Для слабого збудження $\langle a \rangle$ виражається через $\rho_{g0,e1}$ елемент матриці щільності.

$$\langle \hat{a} \rangle = \sum_{i,j=1}^4 \hat{a}_{ij} \hat{\rho}_{ji} \approx \hat{\rho}_{g0,e1}. \quad (2.38)$$

Рішення шукається в першому наближенні по збурюванню, що дозволяє нам врахувати

$$\begin{cases} \langle g0 | \rho | g0 \rangle = 1 \\ \langle 11 | \rho | 11 \rangle = 0 \\ \langle 21 | \rho | 21 \rangle = 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

Елементи $\langle g0 | \rho | 21 \rangle$ й $\langle g0 | \rho | 11 \rangle$ дійсні. Систему рівнянь для елементів матриці щільності можна спростити й звести до системи з трьох рівнянь.

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{1}{i\hbar} \left\{ (E_0 - E_1) \langle g0 | \rho | 21 \rangle + \frac{\Omega_p}{2} \hbar (\sin \theta \langle 11 | \rho | 21 \rangle + \cos \theta) \right\} \\ 0 = \frac{1}{i\hbar} \left\{ (E_0 - E_2) \langle g0 | \rho | 11 \rangle + \frac{\Omega_p}{2} \hbar (-\sin \theta \langle 11 | \rho | 21 \rangle - \cos \theta \langle 11 | \rho | 21 \rangle) \right\} \\ \langle 11 | \rho | 21 \rangle = \frac{\hbar \Omega_p}{2(E_1 - E_2)} (\cos \theta \langle 11 | \rho | g0 \rangle + \sin \theta \langle g0 | \rho | 21 \rangle) \end{array} \right. \quad (2.40)$$

І нарешті, маємо рішення для елементів матриці щільності $\langle g0 | \rho | 11 \rangle$ й $\langle g0 | \rho | 21 \rangle$

$$\langle g0 | \rho | 21 \rangle = -\frac{\Omega_p}{2} \hbar \frac{\cos \theta}{E_0 - E_1}, \quad (2.41)$$

$$\langle g0 | \rho | 11 \rangle = \frac{\Omega_p}{2} \hbar \frac{\sin \theta}{E_0 - E_2}. \quad (2.42)$$

Якщо перейти в базис рішень у вигляді

$$|-, n\rangle = \sin \theta |g1\rangle + \cos \theta |e0\rangle, \quad (2.43)$$

$$|+, n\rangle = -\cos \theta |g1\rangle + \sin \theta |e0\rangle, \quad (2.44)$$

то наше рішення буде мати вигляд

$$\rho_{g1, g0} = \Omega_p \frac{\delta \omega_q}{\frac{\Omega_d^2}{2} - \delta \omega_q \delta \omega_0}, \quad (2.45)$$

$$\rho_{e0, g0} = \Omega_p \frac{\Omega_d}{\frac{\Omega_d^2}{2} - \delta \omega_q \delta \omega_0}. \quad (2.46)$$

Рішення рівняння Ліндблада з урахуванням релаксації. Також було розглянуто аналітичне рішення рівняння Ліндблада з релаксаційними членами

$$\frac{d}{dt}\rho = \frac{1}{i\hbar}[H\rho] + \sum L_{\alpha}[\rho], \quad (2.47)$$

де

$$\sum_{\alpha} L_{\alpha} = L_k + L_{\downarrow} + L_{\uparrow} + L_{\phi}. \quad (2.48)$$

L_k - релаксація резонатора, L_{\downarrow} - релаксація з верхнього рівня на нижній, L_{\uparrow} - релаксація з нижнього рівня на верхній, L_{ϕ} - релаксація фази. Кожний з дисипативних членів має своє вираження (тут і далі все описується у формалізмі одягнених станів)

$$\begin{aligned} L_k &= k(a\rho a^+ - \frac{1}{2}\{a^+ a, \rho\}), \\ L_{\downarrow} &= \Gamma_{\downarrow}(\sigma\rho\sigma^+ - \frac{1}{2}\{\sigma^+ \sigma, \rho\}), \\ L_{\uparrow} &= \Gamma_{\uparrow}(\sigma\rho\sigma^+ - \frac{1}{2}\{\sigma\sigma^+, \rho\}), \\ L_{\phi} &= \Gamma_{\phi}(\sigma\rho\sigma^+ - \rho). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Були знайдені аналітичні вирази для матричного рівняння (2.47) й знайдені рішення з урахуванням кожного члена по черзі. Отримані вирази були розкладені з урахуванням слабкого збудження. Як було вище приведене (2.38), у випадках слабкого збудження нас цікавлять елементи матриці щільності $\rho_{g0,g0}, \rho_{g1,g0}, \rho_{e1,g0}$.

При врахуванні дисипативних членів L_{\downarrow} , L_{\uparrow} , L_{ϕ} , які описують втрати енергії пов'язані з кубітом, вирази для елементів $\rho_{g0,g0}$, $\rho_{g1,g0}$, $\rho_{e1,g0}$ матриці щільності з точністю до другого члена розкладу :

$$\begin{aligned}\rho_{g0,g0} &= 1 - \frac{(-\Gamma_{\downarrow}(\Gamma_{\uparrow} + 2\Gamma_{\phi})^2 + 4(g_e^2(\Gamma_{\uparrow} + 4\Gamma_{\phi}) + 2\Gamma_{\downarrow}\delta\omega_{qb}^2))\varepsilon^2}{\Gamma_{\downarrow}(\Gamma_{\uparrow} + 2\Gamma_{\phi})^2\delta\omega_r^2 + 2\Gamma_{\downarrow}(g^2 - 2\delta\omega_{qb}\delta\omega_r)^2}; \\ \rho_{g1,g0} &= \frac{g_e\varepsilon}{-(g_e^2 - (\delta\omega_{qb} - i(\frac{\Gamma_{\downarrow} + \Gamma_{\uparrow}}{2} + \Gamma_{\phi}))\delta\omega_r)}; \\ \rho_{e1,g0} &= \frac{(\delta\omega_{qb} - i(\frac{\Gamma_{\downarrow} + \Gamma_{\uparrow}}{2} + \Gamma_{\phi}))\varepsilon}{g_e^2 - (\delta\omega_{qb} - i(\frac{\Gamma_{\downarrow} + \Gamma_{\uparrow}}{2} + \Gamma_{\phi}))\delta\omega_r}.\end{aligned}\tag{2.50}$$

При врахуванні дисипативного члена L_k , що описує втрати пов'язані з резонатором, вирази для елементів $\rho_{g0,g0}$, $\rho_{g1,g0}$, $\rho_{e1,g0}$ матриці щільності з точністю до другого члена розкладання :

$$\begin{aligned}\rho_{g0,g0} &= 1 - \frac{(g_e^2 + 2\omega_{qb}^2)\varepsilon^2}{\Gamma_k^2\omega_{qb}^2 + (g_e^2 - \omega_{qb}\omega_r)^2}; \\ \rho_{g1,g0} &= \frac{g_e\varepsilon}{-(g_e^2 - (\delta\omega_r - i\Gamma_k)\delta\omega_{qb})}; \\ \rho_{e1,g0} &= \frac{\delta\omega_{qb}\varepsilon}{g_e^2 - (\delta\omega_r - i\Gamma_k)\delta\omega_{qb}}\end{aligned}\tag{2.51}$$

Порівнюючи формули (2.50) й (2.51) з рішеннями без релаксації (2.46), можна прийти до висновку, що рішення відрізняються лише на комплексну добавку, пов'язану з релаксацією, при частотах кубіта й резонатора. Отримане повне аналітичне рішення в межі малого збудження збіглося з рішенням без релаксації, що

говорить про його правильність. Знаючи повне рішення можна одержати картину того, що відбувається в системі.

Система рівнянь Максвелла-Блоха. У двічі «одягнутому» базисі рівняння (2.49) мають такий вигляд

$$\tilde{\Lambda}_{\downarrow} = \tilde{\Gamma}_{\downarrow} \left(\tilde{\sigma} \tilde{\rho} \tilde{\sigma}^{\dagger} - \frac{1}{2} \{ \tilde{\sigma}^{\dagger} \tilde{\sigma}, \tilde{\rho} \} \right), \quad (2.52)$$

$$\tilde{\Lambda}_{\uparrow} = \tilde{\Gamma}_{\uparrow} \left(\tilde{\sigma}^{\dagger} \tilde{\rho} \tilde{\sigma} - \frac{1}{2} \{ \tilde{\sigma} \tilde{\sigma}^{\dagger}, \tilde{\rho} \} \right), \quad (2.53)$$

$$\tilde{\Lambda}_{\phi} = \frac{\tilde{\Gamma}_{\phi}}{2} (\tilde{\sigma}_z \tilde{\rho} \tilde{\sigma}_z - \tilde{\rho}), \quad (2.54)$$

$$L_k = k(a \rho a^{\dagger} - \frac{1}{2} \{ a^{\dagger} a, \rho \}), \quad (2.55)$$

де $\tilde{\sigma} = \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}_x - i\tilde{\sigma}_y)$ й $\tilde{\sigma}_{x,y,z}$ оператори Паулі у двічі одягнутому базисі, $\tilde{\rho}$ - матриця щільності станів системи, $\tilde{\Gamma}_{\phi,\uparrow,\downarrow}$ - перенормовані фенологічні коефіцієнти [37,81]. Оператор Ліндблада для резонатору залишається не змінним. Щоб перейти до опису середніх значень операторів фотонного й кубітного полів, скористаємося рівнянням

$$\frac{d\langle A \rangle}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \langle [A, H_{RWA}] \rangle + Tr(A\tilde{L}), \quad (2.56)$$

де $\langle A \rangle = Tr\langle A\rho \rangle$, $\langle [A, H] \rangle = Tr([A, H]\rho)$, й слід береться по всіх власних станах системи, H_{RWA} - гамільтоніан, записаний у рівнянні (2.23). Грунтуючись на виразі (2.56) запишемо систему рівнянь для наступних операторів $a, a^{\dagger}, n = a^{\dagger}a, \tilde{\sigma}^{\dagger}, \tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}_z$:

$$\frac{d\langle a \rangle}{dt} = -i\delta\omega'_r \langle a \rangle - i\tilde{g} \langle \tilde{\sigma} \rangle - i\frac{\xi_p}{\hbar}, \quad (2.57)$$

$$\frac{d\langle \tilde{\sigma} \rangle}{dt} = -i\delta\omega'_{qb} \langle \tilde{\sigma} \rangle + i\tilde{g} \langle a\tilde{\sigma}_z \rangle, \quad (2.58)$$

$$\frac{d\langle \tilde{\sigma}_z \rangle}{dt} = -i2\tilde{g} (\langle a\tilde{\sigma}^\dagger \rangle - \langle a^\dagger \tilde{\sigma} \rangle) - \tilde{\Gamma}_+ \langle \tilde{\sigma}_z \rangle - \tilde{\Gamma}_-, \quad (2.59)$$

де $\delta\omega'_r = \delta\omega_r - ik/2$, $\delta\omega'_{qb} = \delta\omega_{qb} - i\tilde{\Gamma}_2$. У так названому квазікласичному наближенню, члени рівнянь факторизуються $\langle aa^\dagger \rangle = \langle a \rangle \langle a^\dagger \rangle$. На практиці це наближення відповідає сильному накачуванню системи, що еквівалентно величезній кількості фотонів у системі $\langle n \rangle \gg 1$.

Проаналізуємо рівняння (2.57)-(2.59) у рамках стаціонарних рішень. При зв'язку кубіта й резонатора спрямованого до нуля $g = 0$, система спрощується до наступних виразів

$$\langle a \rangle_0 = -\frac{\xi_p}{\hbar\delta\omega'_r}, \quad (2.60)$$

$$\langle \tilde{\sigma}_z \rangle_0 = -\frac{\tilde{\Gamma}_-}{\tilde{\Gamma}_+}, \quad (2.61)$$

$$\langle n \rangle_0 = -\frac{\xi_p}{\hbar k} 2\text{Im}\langle a \rangle_0 = \frac{4\xi_p^2}{\hbar^2(4\delta\omega_r^2 + k^2)}. \quad (2.62)$$

Стан кубіта визначається співвідношеннями між релаксаційними коефіцієнтами, а кількість фотонів у системі – параметрами вхідного сигналу й резонатора. З рівняння (2.62) маємо умову квазікласичного наближення - $(\xi_p^2 / \hbar^2 k^2) \ll 1$.

На практиці амплітуда пробного сигналу ξ_p на кілька порядків менше значень частот $\omega_{r,q}$ і відстані між рівнів системи $\Delta\tilde{E}$. У цьому наближенні система рівнянь приймає наступний вид

$$\langle a \rangle = -\frac{\xi_p}{\hbar} \frac{\delta\tilde{\omega}_{qb}'}{g^2 + \delta\tilde{\omega}_{qb}'\delta\tilde{\omega}_r'}, \quad (2.63)$$

$$\Gamma_+ \langle \sigma_z \rangle + \Gamma_- = 2i \frac{\xi_p}{\hbar} (\langle a \rangle - \langle a^\dagger \rangle) + 2\kappa \langle a \rangle \langle a^\dagger \rangle. \quad (2.64)$$

$$\langle a^\dagger \rangle = -\frac{\xi_p}{\hbar} \frac{\delta\tilde{\omega}_{qb}^{\dagger'}}{g^2 + \delta\tilde{\omega}_{qb}^{\dagger'}\delta\tilde{\omega}_r^{\dagger'}}, \quad (2.65)$$

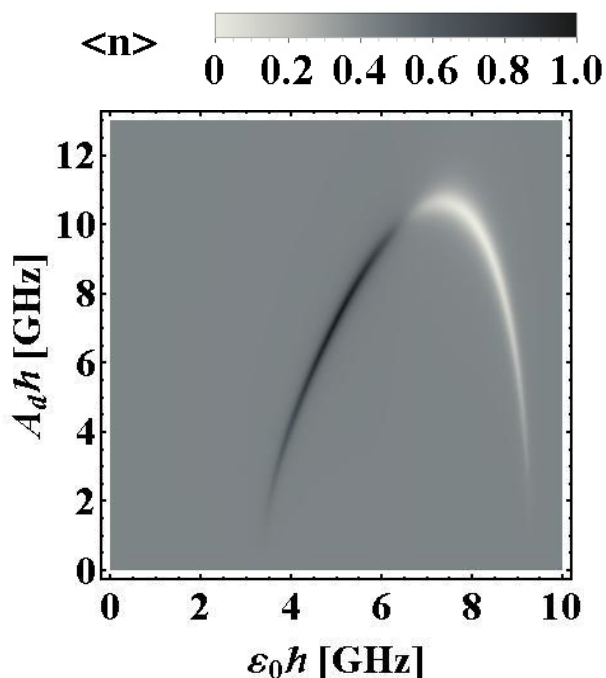


Рис. 14 Нормована кількість фотонів у системі кубіт-резонатор як функція прикладеного магнітного потоку й амплітуди сигналу накачування. Зображена залежність є відображенням рішення системи рівнянь (2.63)-(2.65). Присутні дві області: темну, котра відповідає зростанню кількості фотонів у системі, і світлу, котра відповідає зниженню кількості фотонів

Рішення системи рівнянь (2.63)-(2.65) зображено на Рис. 14. Графік побудований для наступних параметрів системи: $\Delta/h = 3.7$ GHz, $g_\varepsilon/2\pi = 0.8$ MHz, $\omega_r/2\pi = 2.5$ GHz, $k/2\pi = 30$ kHz, $\Gamma_1/2\pi = 80$ MHz, $\Gamma_\varphi/2\pi = 10$ MHz, $\varepsilon_p = k$, $\omega_d = 3\omega_r$, $\omega_p = \omega_r$. Можливо підібрати амплітуду сигналу накачування й значення магнітного потоку, таким чином, що система буде працювати як підсилювач (див. Рис. 14). У системі виникає інверсна заселеність двічі «одягнених» рівнів кубіт-резонатора (див.

Рис. 15(б)) і при відповідності Рабі частоти із частотою сигналу відбувається перекачування енергії з фотонного поля в кубітне (див. лівий пік

Рис. 15(в)). Також відбуваються й протилежний процес (див. правий пік рис. 15(в)).

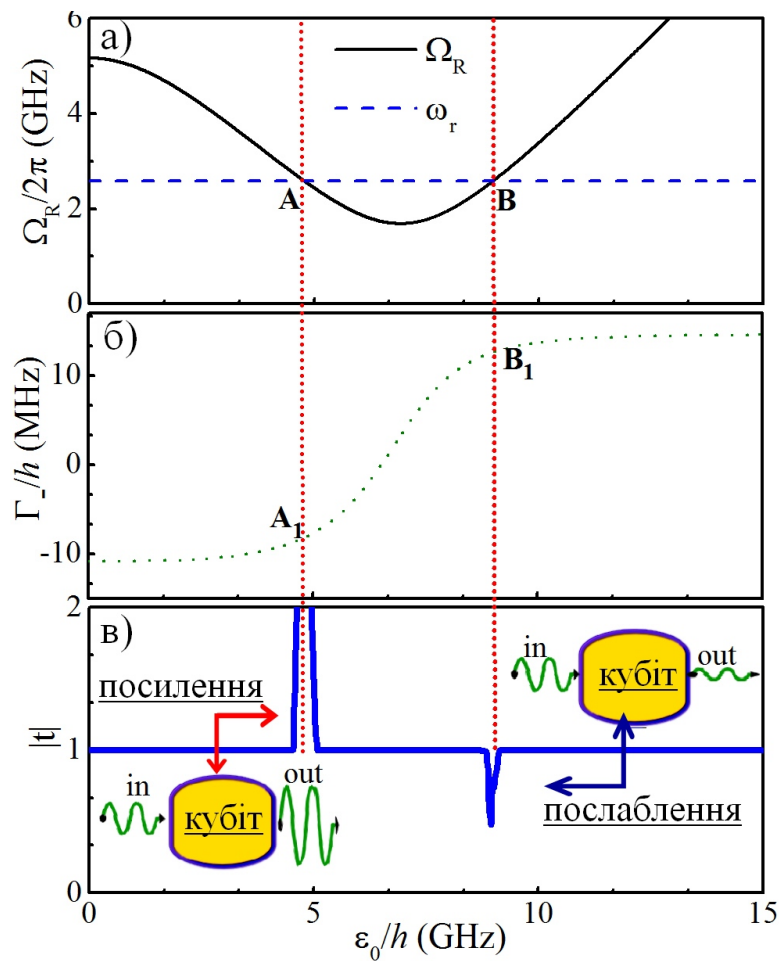


Рис. 15 Схематичне зображення фізичних процесів у дворівневій системі. (а) Чорна суцільна лінія відповідає частоті Рабі, $\Omega_R = \Delta E / \hbar$, коливань заселеності рівнів одягненого кубіта. Синя штрихова лінія відображає величину частоти резонатора ω_r . У точка перетину, які позначених А і В, одягнені система й резонатор обмінюють енергією. Взаємодія другого сигналу з одягнена системою кубіта впливає на пройдений сигнал. Коефіцієнт проходження сигналу збільшує або зменшує його амплітуду. Це залежить від заселеності рівнів одягненого кубіта в обраній робочій точці (див. (b) і (c)). Заселеність рівнів одягненої системи описується ефективними релаксаційними параметрами $\tilde{\Gamma}_\downarrow$ й $\tilde{\Gamma}_\uparrow$, які були названі як релаксація вниз і збудження. Якщо релаксація вниз $\tilde{\Gamma}_\downarrow$ менше ніж збудження $\tilde{\Gamma}_\uparrow$, в обраній робочій точці, то результатом цього буде збільшення амплітуди сигналу після проходження через систему ($\tilde{\Gamma}_- < 0$ точка А). При зворотньому співвідношенні релаксаційних параметрів ($\tilde{\Gamma}_- > 0$), спостерігається зменшення амплітуди вихідного сигналу. (b) Зелена пунктирна лінія відображає різницю між ефективними релаксаційними параметрами релаксації вниз $\tilde{\Gamma}_\downarrow$ (перехід з рівня $|1\rangle$ на рівень $|0\rangle$) і збудження (перехід з рівня $|0\rangle$ на рівень $|1\rangle$) $\tilde{\Gamma}_\uparrow$, $\tilde{\Gamma}_- = \tilde{\Gamma}_\downarrow - \tilde{\Gamma}_\uparrow$. На графіку видно (ділянка коли різниця між переходами в системі менше нуля $\tilde{\Gamma}_- < 0$), що в одягненій системі присутня явище інверсної заселеності збудженого рівня одягненого кубіта. (c) Амплітуда вихідного сигналу як функція магнітний потоку ϵ_0 . Така залежність дозволяє вибрати робочу точку з максимальним посиленням або ослабленням вихідного сигналу.

Висновки

Запропонований теоретичний опис має загальний характер і не залежить від конкретної реалізації кубіта або резонатора на практиці. Зокрема, розглянуті граничні випадки: режим слабого сигналу, що застосовується для зондування енергетичних рівнів системи кубіта-резонатора, досліджується граничний випадок,

коли частота зондування близька до частоти Рабі й робиться розрахунок при резонансному збудженні системи як для сильної амплітуди сигналу збудження, так і для великої амплітуди пробного сигналу. Це дозволяє одержати аналітичні результати для кубіта, «одягненого», по-перше, полем збудження й, по-друге, що зондуєчим полем. Важливо відзначити, що формалізм якісно й кількісно пояснює експериментальні результати [16,17,18,50].

Ключовим значенням квантової системи резонатора в експерименті є коефіцієнт проходження сигналу через резонатор. Цей коефіцієнт передачі залежить від різних параметрів. Швидкість і напрямок обміну енергією в системі визначаються функціями релаксації станів кубіта-резонатора. Зміна величини зв'язку дозволяє змінити ширину резонансу. Зміна амплітуди збудження й магнітного поля дозволяє знайти прийнятну точку відстані між рівнями для одержання ефекту посилення й впливу на систему.

РОЗДІЛ 3
НАПІВКВАНТОВЕ НАБЛИЖЕННЯ.
ПОРІВНЯННЯ КВАЗІКЛАСИЧНОГО І НАПІВКВАНТОВОГО
НАБЛИЖЕНЬ

Equation Chapter 3 Section 1

У дійсному розділі, опираючись на результати робіт [37,38,42,43,44], обговорено опис системи кубіт-резонатор у дисперсному та резонансному режимах [109,110,111,112,113] при різних наближеннях. Розглядається наближення для рівнянь Максвелл-Блоха (напівквантове і квазікласичне) і їхній вплив на опис системи. На початку були отримані спрощені аналітичні формули для коефіцієнтів проходження у квазікласичному наближенні, що опускає корелятори виду $\langle AB \rangle$, де A, B атомні або фотонні оператори. Квазікласичне наближення дозволяє описувати більшість квантово-механічних ефектів, проте, цього наближення може бути недостатньо (наприклад, [114,115,116]). Із цієї причини обчислення були покращені: були врахуванні наступні корелятори для опису кубіт-резонаторних систем. У багатьох випадках вплив температури можна теж не враховувати, але існує ряд ситуацій, коли це важливо, облік і відстеження ефективної температури системи [117,118]. Одна з таких причин зміна параметрів системи кубіт-резонатор, які приводять до росту ефективної температури. Наприклад, таким параметром є потужність керуючих сигналів. При її підвищенні температура зростає [119,120,121]. Важливість термометрії для кубітних систем було продемонстровано, наприклад, в [122,123,124,125,126].

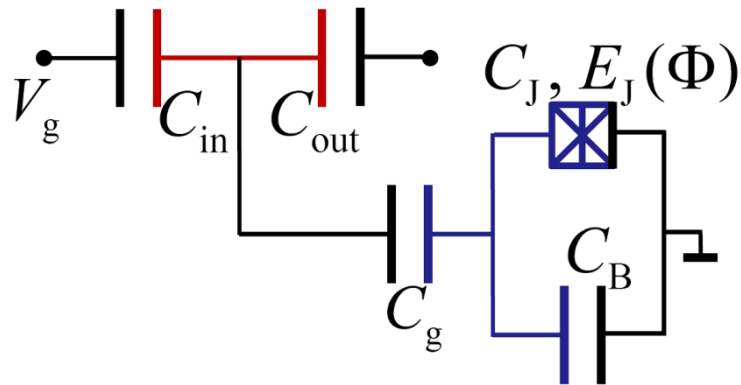


Рис. 16 Схематичне зображення кубіта типу трансмон пов'язаного з резонатором. Кубіт складається з ефективного контакту Джозефсона, з ємністю C_J і енергією E_J , що залежить від прикладеного магнітного потоку Φ , і шунтується ємністю C_B , що збільшує ефективну кінетичну енергію кубіта й дозволяє придушити зарядовий шум від контакту Джозефсона. Ефективний контакт Джозефсона утворений кільцем з надпровідного матеріалу із двома контактами. Між ємностями C_{in} і C_{out} у лінії передач установлюється резонансний режим стоячих хвиль. Охолодження всієї системи до температури $k_B T \ll \hbar \omega_q$ дозволяє розглядати систему у квантовому режимі.

3.1. Квазікласичне й напівквантове наближення.

Розглянемо дворівневу систему, що в експерименті моделюється кубітом типу трансмон. Одна з варіацій кубіта типу трансмон представлена на Рис. 16. Гамільтоніан такої системи в дисперсному наближенні [109,110,111,127,128] моделі Джейнса-Каммінгса має такий вигляд

$$\frac{H_{disp}}{\hbar} = (\omega_r + \chi \sigma_z) a^\dagger a + \frac{1}{2} (\omega_q + \chi) \sigma_z, \quad (3.1)$$

де $\omega_{r,q}$ - частота резонатора й кубіта; $\chi \approx -\frac{g^2 E_c}{\Delta_{qr}(\Delta_{qr} - E_c)}$ - величина зв'язку кубіта з резонатором у дворівневому наближенні; $\Delta = \omega_q - \omega_r$; E_c - зарядова енергія кубіта; σ_z - атомний оператор Паулі; $a^\dagger a$ - добуток фотонних операторів народження й знищення. В експерименті, стан кубіта контролюються когерентним мікрохвильовим полем: із частотою ω_d й амплітудою $\Omega(t)$ прикладене до кубіту – сигнал накачування - й вимірюваним (пробним) сигналом із частотою ω_p й амплітудою $\xi(t)$. Таке поле описано наступним Гамільтоніаном

$$\frac{H_{field}}{\hbar} = \xi(t)a^\dagger e^{-i\omega_m t} + \Omega(t)\sigma_+ e^{-i\omega_s t} + \text{H.c.} \quad (3.2)$$

де $\sigma_+ = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y)$.

Еволюцію системи будемо описувати за допомогою рівняння Ліндблада, записаного для матриці щільності

$$\frac{d}{dt}\rho = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \kappa D[a]\rho + \Gamma_1 D[\sigma_-]\rho + \frac{\Gamma_\phi}{2} D[\sigma_z]\rho, \quad (3.3)$$

де $H = H_{disp} + H_{field}$; $D[A] = A\rho A^\dagger - \frac{1}{2}\{A^\dagger A, \rho\}$; $\sigma_- = \sigma_x - i\sigma_y$; $\Gamma_{1,\phi}$ - зворотний час енергетичної релаксації й фазіровки кубіта; κ - втрати в резонаторі. Гамільтоніан H містить коливні доданки. Перепишемо його за допомогою унітарного перетворення

$$\begin{aligned} H_{rf} &= U H U^\dagger + i\hbar \dot{U} U^\dagger, \\ U &= e^{i(\omega_p a^\dagger a + \omega_d \sigma_x / 2)t} \end{aligned} \quad (3.4)$$

у наступному вигляді

$$\frac{H_{rf}}{\hbar} = (\delta\omega_r + \chi\sigma_z)a^\dagger a + \frac{\delta\omega_q + \chi}{2}\sigma_z + \xi(a^\dagger + a) + \frac{\Omega}{2}(\sigma + \sigma^\dagger). \quad (3.5)$$

У рівнянні (3.5) застосовані наступні позначення: $\delta\omega_r = \omega_r - \omega_d$, $\delta\omega_q = \omega_q - \omega_p$.

Для вивчення динаміки зв'язаної системи кубіт-резонатор, перейдемо до рівнянь Максвелл-Блоха середніх значень наступних операторів: атомних $\langle\sigma_i\rangle$ ($i = x, y, z$) й польових $\langle a \rangle$, $\langle a^\dagger a \rangle$. Однак це дає нескінченний ланцюжок рівнянь, який розглянуто в декількох наближеннях. Розглянемо отриману систему рівнянь у квазікласичному наближенні - $\langle AB \rangle = \langle A \rangle \langle B \rangle$. Квазікласичне наближення справедливо, наприклад, при великій кількості фотонів у резонаторі $\langle n \rangle = \langle a^\dagger a \rangle \gg 1$. При температурі відмінної від нуля оператори Ліндблада приймають наступний вигляд

$$\begin{aligned} D[a]\rho &= (N_{th} + 1) \left(a\rho a^\dagger - \frac{1}{2} \{a^\dagger a, \rho\} \right) + N_{th} \left(a^\dagger \rho a - \frac{1}{2} \{aa^\dagger, \rho\} \right), \\ D[\sigma]\rho &= (n_{th} + 1) \left(\sigma\rho\sigma^\dagger - \frac{1}{2} \{\sigma^\dagger\sigma, \rho\} \right) + n_{th} \left(\sigma^\dagger\rho\sigma - \frac{1}{2} \{\sigma\sigma^\dagger, \rho\} \right), \\ D[\sigma_z]\rho &= (n_{th} + 1) (\sigma_z\rho\sigma_z - \rho), \\ N_{th} &= \left(e^{\frac{\hbar\omega_r}{kT}} - 1 \right)^{-1}, \quad n_{th} = \left(e^{\frac{\hbar\omega_q}{kT}} - 1 \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Відповідно при $T = 0$: $N_{th} = n_{th} = 0$. Тоді шукана система рівнянь для опису еволюції кубіт-резонатора в квазікласичному наближенні приймає вид

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle a \rangle &= -i\delta\omega'_r \langle a \rangle - ig \langle \sigma \rangle - i\xi, \\
\frac{d}{dt}\langle \sigma \rangle &= -i\delta\omega'_q \langle \sigma \rangle + ig \langle a \rangle \langle \sigma_z \rangle, \\
\frac{d}{dt}\langle \sigma_z \rangle &= -2g \left(\langle a \rangle \langle \sigma^\dagger \rangle - \langle a^\dagger \rangle \langle \sigma \rangle \right) - \Gamma_1 \left(1 + \frac{\langle \sigma_z \rangle}{z_0} \right).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Тут були застосовані наступні позначення:

$$\begin{aligned}
\delta\omega'_r &= \delta\omega_r - i\frac{\kappa}{2}, \quad \delta\omega'_q = \delta\omega_q - i\frac{\Gamma_2}{z_0}, \\
z_0 &= \tanh\left(\frac{\hbar\omega_q}{2kT}\right), \quad \Gamma_2 = \Gamma_\phi = \frac{\Gamma_1}{2}.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Змінна z_0 описує температурну залежність кубітного простору. Це видно з рівняння (3.8) при допущенні, що зв'язок кубіта й резонатора дорівнює нулю $g = 0$. Аналітично система (3.7) вирішується для опису стаціонарного випадку, коли система кубіт-резонатор перейшла в стан стаціонарних процесів. Тоді маємо наступні вирази для величин $\langle a \rangle$, $\langle \sigma_z \rangle$

$$\langle a \rangle = -\xi \frac{\delta\omega'_q}{\langle \sigma_z \rangle g^2 + \delta\omega'_r \delta\omega'_q}, \tag{3.9}$$

$$\langle \sigma_z \rangle = -z_0 + \frac{2z_0}{\Gamma_1} \left(\kappa |a|^2 + 2\xi \text{Im}[a] \right). \tag{3.10}$$

Амплітуда ξ мала по величині. З формули (3.9) можна припустити, що середнє значення оператор народження $\langle a \rangle$ порівнянний з амплітудою ξ . Зневажаючи малими другого порядку, рівняння (3.9) й (3.10) спрощуються до наступного вигляду

$$\langle \sigma_z \rangle = -z_0, \quad (3.11)$$

$$\langle a \rangle = \xi \frac{\delta \omega'_q}{\langle \sigma_z \rangle g^2 - \delta \omega'_r \delta \omega'_q}, \quad (3.12)$$

Досить велика безліч квантово-оптичних явищ можуть бути описані в рамках квазікласичного наближення, допускаючи факторизацію кореляторів у рівняннях [22,129,130,131,¹³²]. У цьому випадку динаміка системи описується тільки трьома диференціальними рівняннями.

Тепер розглянемо опис системи кубіт-резонатор у напівквантовому наближенні. Тобто система рівнянь обмежена наступними членами $\langle ABC \rangle = \langle AB \rangle \langle C \rangle$ й т.д. Тоді система рівнянь Максвелл-Блоха з атомно-фононними кореляторами приймає вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle a \rangle &= - \left(i \delta \omega_r + \frac{\kappa}{2} \right) \langle a \rangle - i \chi \langle a \sigma_z \rangle - i \xi, \\ \frac{d}{dt} \langle \sigma_z \rangle &= 2 \Omega \langle \sigma_y \rangle - \Gamma_1 (1 + \langle \sigma_z \rangle / z_0), \\ \frac{d}{dt} \langle \sigma_x \rangle &= - \left[\Delta + \delta \omega_r + 2 \chi \left(\langle a^\dagger a \rangle + \frac{1}{2} \right) \right] \langle \sigma_y \rangle - \Gamma_2 \langle \sigma_x \rangle / z_0, \\ \frac{d}{dt} \langle \sigma_y \rangle &= \left[\Delta + \delta \omega_r + 2 \chi \left(\langle a^\dagger a \rangle + \frac{1}{2} \right) \right] \langle \sigma_x \rangle - \Gamma_2 \langle \sigma_y \rangle / z_0 - 2 \Omega \langle \sigma_z \rangle, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle a\sigma_z \rangle &= -(i\delta\omega_r + \Gamma_1 / z_0 + \kappa / 2)\langle a\sigma_z \rangle - i\chi\langle a \rangle + 2\Omega\langle a\sigma_y \rangle - i\xi\langle \sigma_z \rangle - \Gamma_1\langle a \rangle, \\
\frac{d}{dt}\langle a\sigma_x \rangle &= -(i\delta\omega_r + \Gamma_2 / z_0 + \kappa / 2)\langle a\sigma_x \rangle - \\
&\quad - \left[\Delta + \delta\omega_r + 2\chi(\langle a^\dagger a \rangle + 1) \right] \langle a\sigma_y \rangle - i\xi\langle \sigma_x \rangle, \\
\frac{d}{dt}\langle a\sigma_y \rangle &= -(i\delta\omega_r + \Gamma_2 / z_0 + \kappa / 2)\langle a\sigma_y \rangle + \\
&\quad + \left[\Delta + \delta\omega_r + 2\chi(\langle a^\dagger a \rangle + 1) \right] \langle a\sigma_x \rangle - i\xi\langle \sigma_y \rangle - \Omega\langle a\sigma_z \rangle, \\
\frac{d}{dt}\langle a^\dagger a \rangle &= -2\xi \operatorname{Im}\langle a \rangle + \kappa(N_{th} - \langle a^\dagger a \rangle).
\end{aligned} \tag{3.14}$$

У напівквантовому наближенні врахування кореляторів виду $\langle AB \rangle$ привів до збільшення системи Максвелл-Блоха із трьох, у випадки квазікласичного наближення, до восьми диференціальних рівнянь. Отримані рівняння для квазікласичного й напівквантового наближень будуть проаналізовані в наступних підрозділах.

3.2. Еволюція квадратур у часі

Вимірювані величини в експерименті є квадратури коефіцієнта вихідного сигналу й саме значення коефіцієнта вихідного сигналу [22,72,128,133,134]. Амплітуду вихідного сигналу і його квадратури можна відстежити за середнім значенням оператора знищення фотонів електромагнітного поля в кубіт-резонаторі за наступних формулами:

$$I = 2V_0 \operatorname{Re}\langle a \rangle, \tag{3.15}$$

$$Q = 2V_0 \operatorname{Im}\langle a \rangle. \tag{3.16}$$

У формулах (3.15), (3.16) V_0 є напруга в ланцюзі підсилювача [134]. Вона визначається в такий спосіб [72]: $V_0 = Z\hbar\omega_r\kappa/4$, де Z імпеданс резонатора. Амплітуда проходження зв'язана із середнім значенням оператора знищення фотонів як

$$A = \sqrt{I^2 + Q^2} = 2V_0 |\langle a \rangle|. \quad (3.17)$$

Система рівнянь (3.7), приведена в першому параграфі даного розділу, дозволяє описувати кубіт-резонатор у квазікласичному наближенні. Для одержання картини еволюції квадратур (3.15), (3.16), і, відповідно, амплітуди проходження (3.17) у часі система рівнянь (3.7) розв'язувалась чисельними методами. Для цього систему рівнянь розділили на системи для уявних й дійсних частин змінних, що дало нам наступні вирази

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} a_1 &= \delta\omega_r a_2 - \frac{\kappa}{2} a_1 + g\sigma_2, \\ \frac{d}{dt} a_2 &= -\delta\omega_r a_1 - \frac{\kappa}{2} a_2 - g\sigma_1 - \xi, \\ \frac{d}{dt} \sigma_1 &= (\Delta + \delta\omega_r)\sigma_2 - \frac{\Gamma_2}{z_0} \sigma_1 - ga_2\sigma_z, \\ \frac{d}{dt} \sigma_2 &= -(\Delta + \delta\omega_r)\sigma_1 - \frac{\Gamma_2}{z_0} \sigma_2 - ga_1\sigma_z, \\ \frac{d}{dt} \sigma_z &= 4g(a_2\sigma_1 - a_1\sigma_2) - \Gamma_1 \left(1 + \frac{\sigma_z}{z_0} \right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

У рівняннях (3.18) використані наступні позначення: $\Delta = \omega_r - \omega_q$, $a_1 = \text{Re}[\langle a \rangle]$, $a_2 = \text{Im}[\langle a \rangle]$, $\sigma_1 = \text{Re}[\langle \sigma \rangle]$, $\sigma_2 = \text{Im}[\langle \sigma \rangle]$.

Також чисельно вирішувалася система рівнянь (3.13), що отримана в рамках напівквантового наближення. В обох підходах урахувалися втрати резонатора κ й коефіцієнти дефазіровки Γ_ϕ й релаксації Γ_1 кубіта.

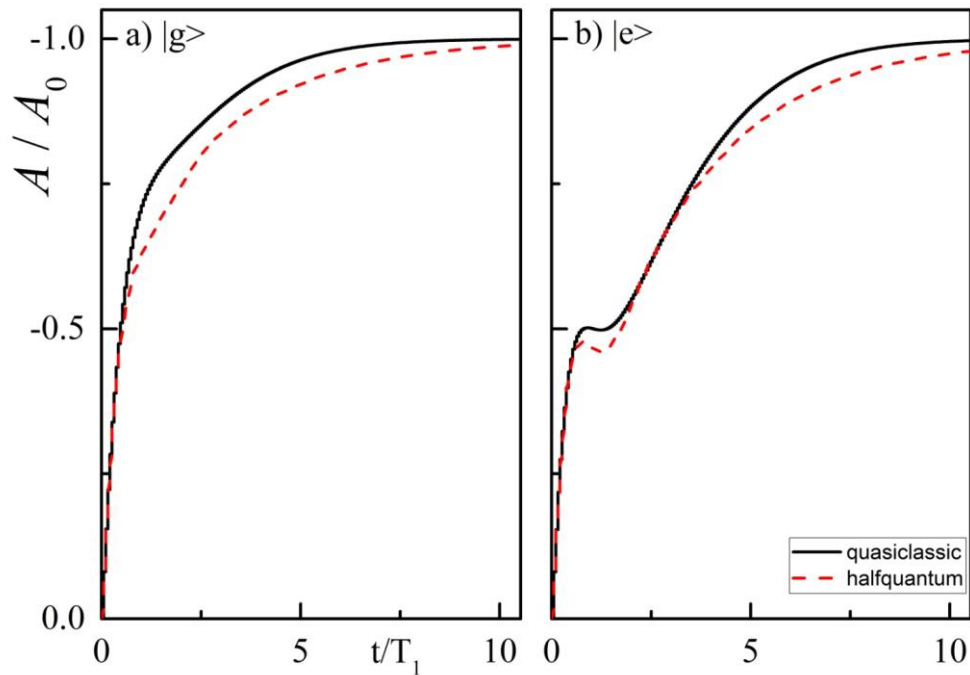


Рис. 17 Еволюція I квадратури амплітуди вихідного сигналу в часі. Величина відстроювання від частоти резонатора обрана рівна $\delta\omega_r = g^2 / \Delta$. Суцільна чорна крива відповідає квазікласичному наближенню. Пунктирна червона крива відповідає напівквантовому наближенню. Значення I квадратури амплітуди вихідного сигналу нормовано на максимальне значення в обраних параметрах. По осі абсцис відкладений час із моменту початку вимірів квадратури, який нормований на час релаксації T_1 . Правий малюнок, а), відображає еволюцію в часі квадратури I , коли кубіт був приготовлений в основному $|g\rangle$ стані. Лівий графік, б), демонструє залежність квадратури I , коли кубіт приготовлений у збудженому $|e\rangle$ стані. Значення квадратури I має більше значення амплітуди при розгляді рівнянь Максвелл-Блоха у квазікласичному наближенні.

Відповідно були побудовані графіки (Рис. 17, Рис. 18, Рис. 19, Рис. 20) для виразів (3.15) і (3.17) з наступними параметрами системи: $\frac{\omega_r}{2\pi} = 6.4425 \text{ GHz}$,

$$\frac{\omega_q}{2\pi} = 4.01 \text{ GHz}, \quad E_c = 223 \text{ MHz}, \quad \frac{g}{2\pi} = 134 \sqrt{\frac{E_c}{-\Delta}} \text{ MHz}, \quad \frac{\kappa}{2\pi} = 1.7 \text{ MHz}, \quad \frac{\Gamma_1}{2\pi} = 0.2 \text{ MHz}$$

, $\xi = \kappa/2$, $\Omega = 0$, $\omega_d = \omega_p$ і низької температури ($k_B T \ll \hbar \omega_q$). Тут розглядається рішення для ситуації, коли кубіт підготовлений в основному або в збудженому стані. Кожна з початкових умов дає різну еволюцію системи з моменту часу $t=0$.

На графіках Рис. 17, Рис. 18, Рис. 20 продемонстровано криві для різних наближень. Чорна суцільна лінія відповідає рішенню, отриманому в рамках квазікласичній апроксимації, червона пунктирна лінія відповідає напівквантовому підходу.

Як видно із графіків, квазікласичне й напівквантове наближення схожі характером еволюції квадратур: для початкової умови, коли кубіт приготовлений в основному стані, релаксація квадратур визначається часом релаксації резонатора κ ; для початкової умови, коли кубіт приготовлений у збудженому стані, вона визначається комбінацією часів релаксації кубіт-резонаторної системи. Наприклад,

Рис. 17(б), Рис. 20(б), де спостерігаються дві ділянки $T_1 = \frac{2\pi}{\kappa} \approx 0.6 \mu s$ й

$$T_1 = \frac{2\pi}{\Gamma_1} \gg T_\kappa.$$

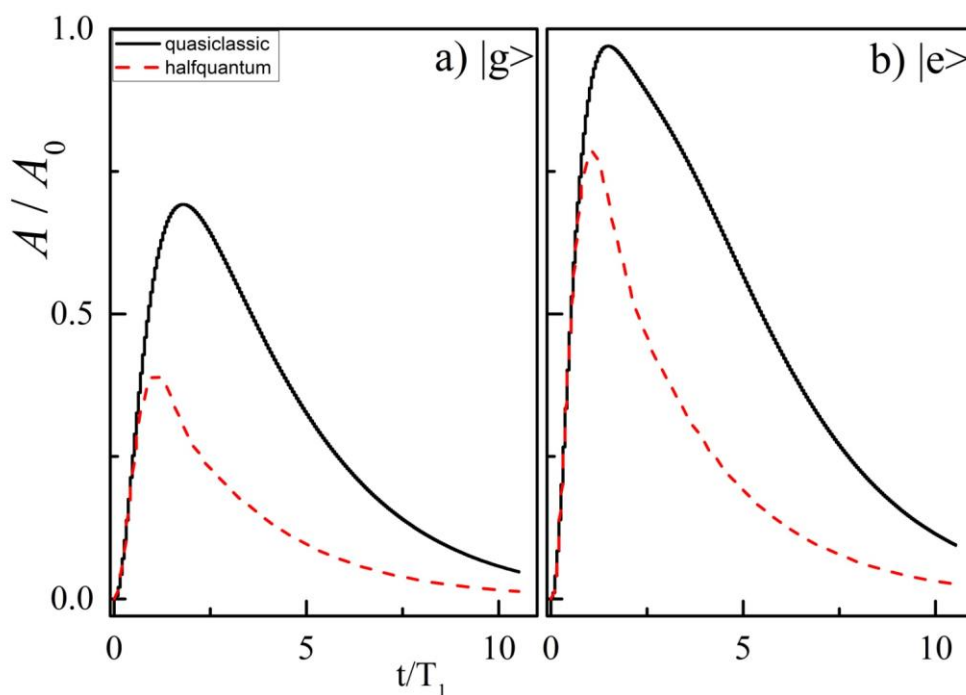


Рис. 18 Еволюція Q квадратури амплітуди вихідного сигналу в часі. Величина відстрою від частоти резонатора обрана рівна $\delta\omega_r = g^2 / \Delta$. Суцільна чорна крива

відповідає квазікласичному наближенню. Пунктирна червона крива відповідає напівквантовому наближенню. Значення Q квадратури амплітуди вихідного сигналу нормовано на максимальне значення в обраних параметрах. По осі абсцис відкладений час із моменту початку вимірів квадратури, який нормовано на час релаксації T_1 . Правий малюнок, а), відображає зміну в часі квадратури Q , коли кубіт був приготовлений в основному $|g\rangle$ стані. Лівий графік, б), демонструє залежність квадратури Q , коли кубіт приготовлений у збудженому $|e\rangle$ стані. Значення квадратури Q має більше значення при розгляді рівнянь Максвелл-Блоха у квазікласичному наближенні.

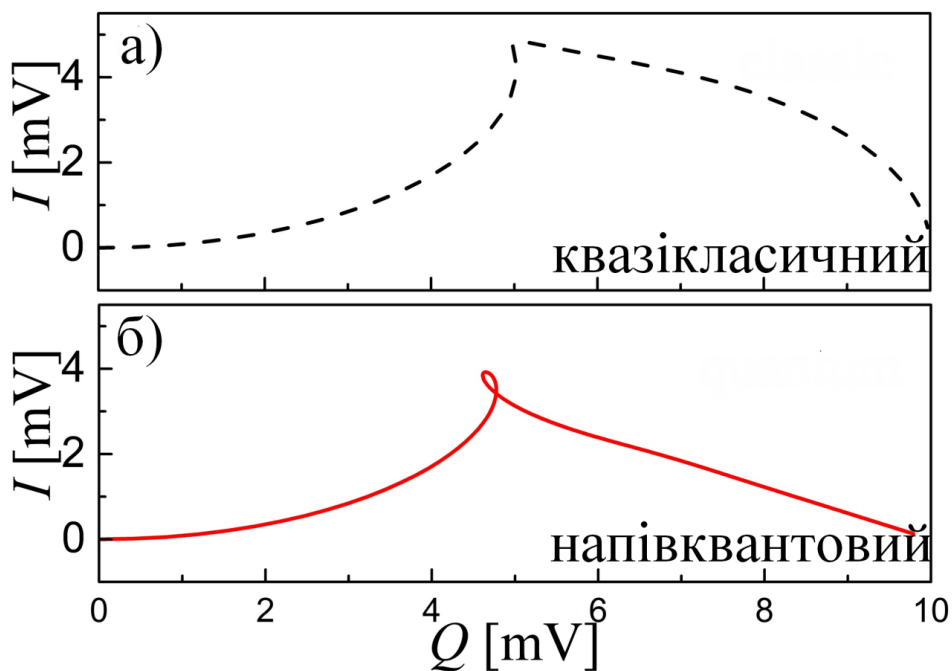


Рис. 19 Динаміка квадратур, виражена через площину IQ , де малюнок а) відображає квазікласичне наближення, а малюнок б) відбиває напівквантову апроксимацію.

Для кращого розуміння відмінностей квазікласичного й напівквантового наближення зручно побудувати графіки Рис. 17, Рис. 18 у площині IQ . У той час як обидва підходи дають схожу динаміку для квадратур, квазікласичний підхід не має самоперетинань у площині IQ . Квазікласичне наближення відмінно підходить для

аналізу графіків і залежностей обраних функцій, одержання аналітичних виразів, які описують динаміку системи кубіта-резонатора, але для опису особливостей динамічного поведіння експериментальної системи, варто вдатися до напівквантового підходу.

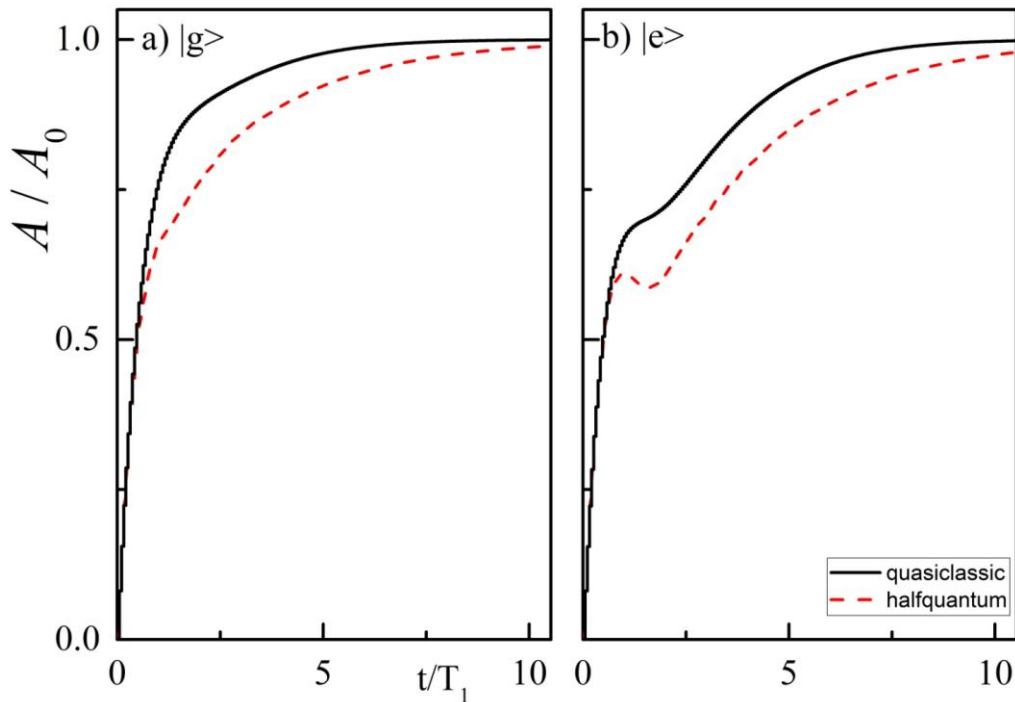


Рис. 20 Еволюція амплітуди вихідного сигналу A в часі. Величина відбудування від частоти резонатора обрана рівна $\delta\omega_r = g^2 / \Delta$. Суцільна чорна крива відповідає квазікласичному наближенню. Пунктирна червона крива відповідає напівквантовому наближенню. Значення амплітуди вихідного сигналу A нормовано на максимальне значення в обраних параметрах. По осі абсцис відкладений час із моменту початку вимірів квадратури, який нормовано на час релаксації T_1 . Правий малюнок, а), відображає зміну в часі амплітуди A , коли кубіт був приготовлений в основному $|g\rangle$ стані. Лівий графік, б), демонструє залежність амплітуди A , коли кубіт приготовлений у збудженому $|e\rangle$ стані. Значення амплітуди A має більше значення при розгляді рівнянь Максвелл-Блоха у квазікласичному наближенні.

3.3. Вплив температури. Термометрія.

У попередньому параграфі були проілюстроване поведження квадратур системи кубіт-резонатор при низьких температурах. У реальних експериментах температура вимірюваної системи не завжди відповідає температурі термостату [122,123,124,126]. Наявність паразитних сигналів, опорів, присутність керуючої електроніки й підсилювачів сигналів, поглинання й перевипромінювання фотонів самим кубітом призводять до підвищення ефективної температури зразка. У цьому розділі приводяться залежності квадратур електромагнітного поля від наявності теплових флуктуацій у системі. Були розглянуті динамічні й стаціонарні рішення. Вплив теплових флуктуацій на систему описується за допомогою включення в рівняння Ліндблада розподілу теплових фотонів N_{th} і n_{th} для резонатора й кубіта відповідно. Вирази (3.6) демонструють вид операторів Ліндблада з урахуванням теплових флуктуацій.

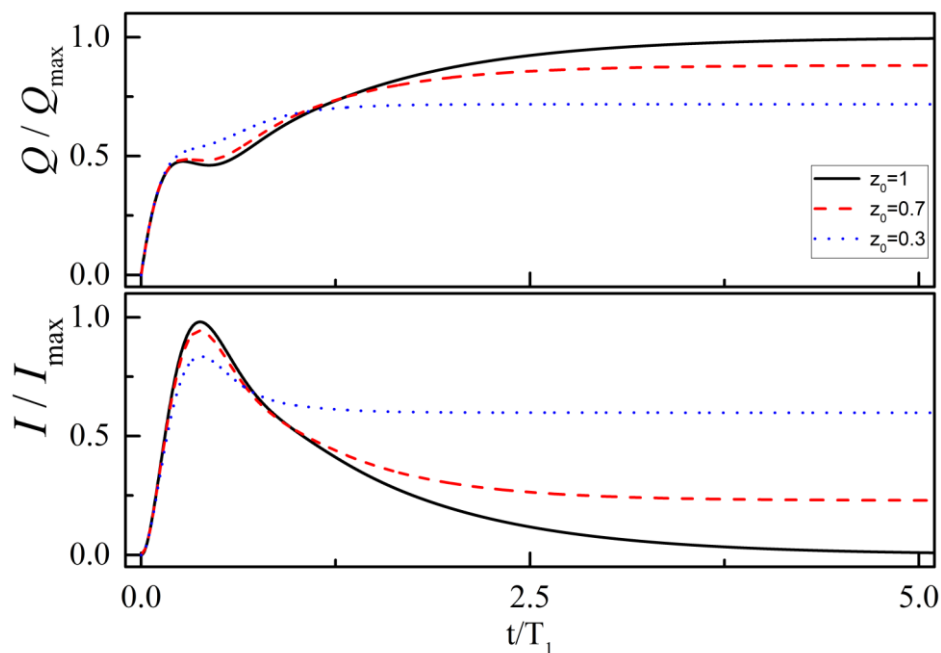


Рис. 21 Еволюція I й Q квадратур амплітуди вихідного сигналу для різних значень параметра z_0 для напівквантового підходу. По осі ординат відкладено нормована на максимальне значення величина квадратури. По осі абцис відкладений час вимірів співвіднесений із часом декогеренції кубіта T_1 . Суцільна чорна крива відповідає значенню $z_0=1$ й $T=0$, тобто вважається, що в системі немає

теплових флуктуацій. Переривчаста червона крива відповідає значенню $z_0 = 0.7$ й

$$\frac{k_B T}{\hbar \omega_q} \approx 1.2, \text{ а пунктирна синя крива відповідає значенню } z_0 = 0.3 \text{ й } \frac{k_B T}{\hbar \omega_q} \approx 3.3.$$

Величина відбудування від частоти резонатора обрана рівна значенню зв'язку кубіта і резонатора $\delta\omega_r = -\chi$, інші параметри системи кубіт-резонатор збігаюся з раніше використаними.

На Рис. 21 побудовано графіки еволюції квадратур у часі, з огляду на вплив температури кубіта й початкових умов, коли кубіт приготовлений у збудженому стані $|e\rangle$. Параметри системи були використані, як і для графіків у пункті 3.1. Рис. 21 демонструє, що як еволюція у часі, так і стаціонарний стан кубіта (для більших часів вимірів, коли початкові умови не впливають) сильно залежать від температури.

Розглянемо стаціонарне рішення рівнянь (3.7) для вивчення температурної залежності. У рівновазі спостережувані величини описуються стаціонарним рішеннями для $\langle a \rangle$, $\langle \sigma \rangle$, $\langle \sigma_z \rangle$. Для малих амплітуд у квазікласичному наближенні рішенням рівнянь (3.7) є рівняння (3.9). Для рівноважного стану системи заселеність рівнів кубіта визначається температурою T : $\langle \sigma_z \rangle = -z_0$ [135,136]. Важливо відзначити, що температура кубіта входить у формулу (3.9) й через вирази (3.17) впливає на спостережувані величини.

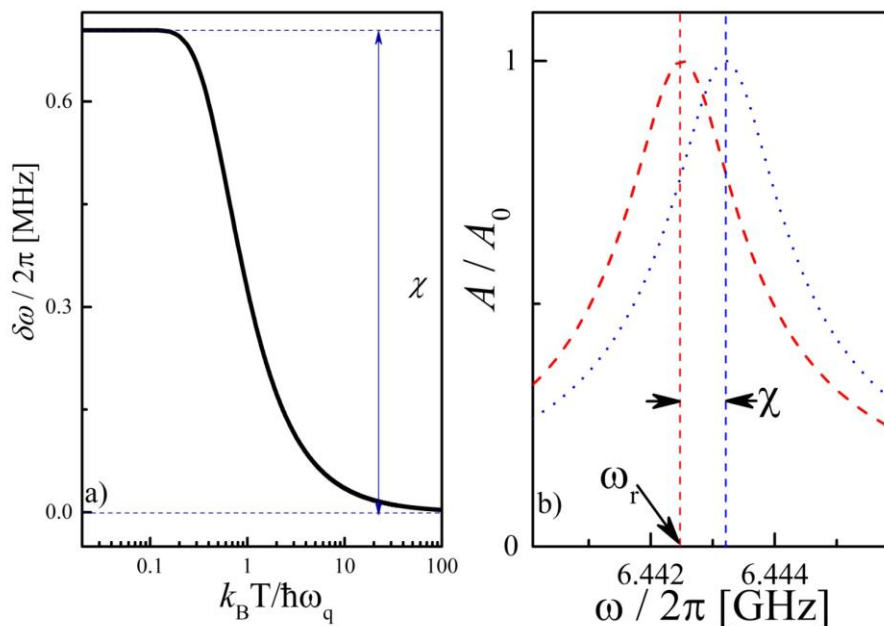


Рис. 22 На даному малюнку а) зрушення частоти й б) амплітуда вихідного сигналу у квазікласичному наближенні наведені. Графік а) демонструє зміщення частоти $\delta\omega_r = \omega_r - \omega$, що відповідає частоті ω , на якій трансмісія максимальна. Зміщення частоти побудоване як функція температури кубіта T . На малюнку б) червона переривчаста лінія відповідає кубіту в збудженому стані $|e\rangle$, а синя пунктирна лінія – кубіту в основному стані $|g\rangle$. Амплітуда проходження сигналу нормована на її максимальне значення A_0 .

Якщо обмежитися тільки резонатором (для ситуації $g = 0$), вирази (3.9) можна переписати в наступному виді

$$|\langle a \rangle|^2 = \xi^2 \frac{1}{\delta\omega_r^2 + \kappa^2/4}, \quad (3.19)$$

який визначає ширину резонансу. У дисперсному режимі, коли $\Delta/\hbar \equiv \omega_q(\Phi) - \omega_r \gg g/\hbar$, вирази (3.9) приймають вид

$$|\langle a \rangle|^2 \approx \xi^2 \frac{\Delta^2}{(\langle \sigma_z \rangle g^2 + \Delta \delta \omega_r)^2 + \Delta^2 \kappa^2 / 4}. \quad (3.20)$$

З формули (3.20) одержуємо наступну умову максимального переходу

$$\delta \omega_r = -\langle \sigma_z \rangle \frac{g^2}{\Delta} \equiv -\langle \sigma_z \rangle \chi. \quad (3.21)$$

Тоді для основного\збудженого станів з $\langle \sigma_z \rangle = \mp 1$, маємо два дисперсних зміщення для максимальної передачі в системі

$$\delta \omega_r = \pm \chi = \frac{\pm g_0^2 E_c}{\Delta(\Delta - E_c)}. \quad (3.22)$$

В умовах теплової рівноваги вираз (3.21) приймає вид

$$\langle \sigma_z \rangle = \frac{g^2}{\Delta} \tanh\left(\frac{\hbar \omega_q}{2k_B T}\right). \quad (3.23)$$

На Рис. 22 зображено вирази (3.17) й (3.20) при тепловій рівновазі в системі $\langle \sigma_z \rangle = -z_0$. Були використані параметри системи з попереднього пункту. На Рис. 22(в) побудовано дві криві: синя переривчаста лінія відповідає низькотемпературній межі ($z_0 = 1$), коли система в основному стані; червона пунктирна лінія відповідає наявності високотемпературних флуктуацій у системі ($z_0 = 0$), коли система в суперпозиції станів. Важливо відзначити, що низькотемпературна межа (синя штрихова лінія) співвідноситься з $\langle \sigma_z \rangle = -1$ і основним станом кубіта. У той же час, високотемпературна межа (червона пунктирна лінія), для $\langle \sigma_z \rangle = 0$, еквівалентна

відсутності кубіта, при $g = 0$. Максимальне частотне зміщення на графіку Рис. 22(в) визначається величиною зв'язку кубіта з резонатором χ .

На Рис. 22(а) приведена залежність частотного зміщення при різних значеннях температури для параметрів з попереднього пункту. Температурна залежність на Рис. 22 стає істотною при $T \geq T^*$, де $T^* = 0.1\hbar\omega_q / k_B$ є характеристичною температурою. Для частоти резонатора близько $\omega_q = 4$ GHz вона дорівнює $T^* = 20$ mK й це достатньо низьку температуру (у роботах [2,17,22] виміри кубітів робились на рефрижераторі з мінімально температурою 20 mK). Подібні виміри дозволяють реалізувати кубітну термометрію для $T \geq T^*$.

З рівнянь (3.7)-(3.14) видно, що наявність теплових флуктуацій впливає на заселеність рівнів (середнє значення $\langle \sigma_z \rangle$) і величину релаксаційних коефіцієнтів системи (величини Γ_1 , Γ_ϕ , κ).

3.4. Порівняння напівквантового й квазікласичного наближення для системи кубіт-резанотор

Цей пункт присвячений режиму сильного збудження системи кубіт-резанотор [137]. Частотне зміщення сигналу, що пройшов через систему був детально вивчений у роботах [115,116]. Там автори вивчали такий режим кубіт-резанаторної системи як експериментально, так і теоретично. Важливо відзначити, що вони зрівняли кілька чисельних підходів з наближенням обертової хвилі й без оноого, з урахуванням як двох нижніх квантових рівні трансмона, так і більшої кількості рівні. Наведені розрахунки в рамках квазікласичного й напівквантового підходів у розділі досить аналітичні та, у порівнянні їх з даними з робіт [115,116], демонструють як їхню застосовність, так і обмеження обраних наближень.

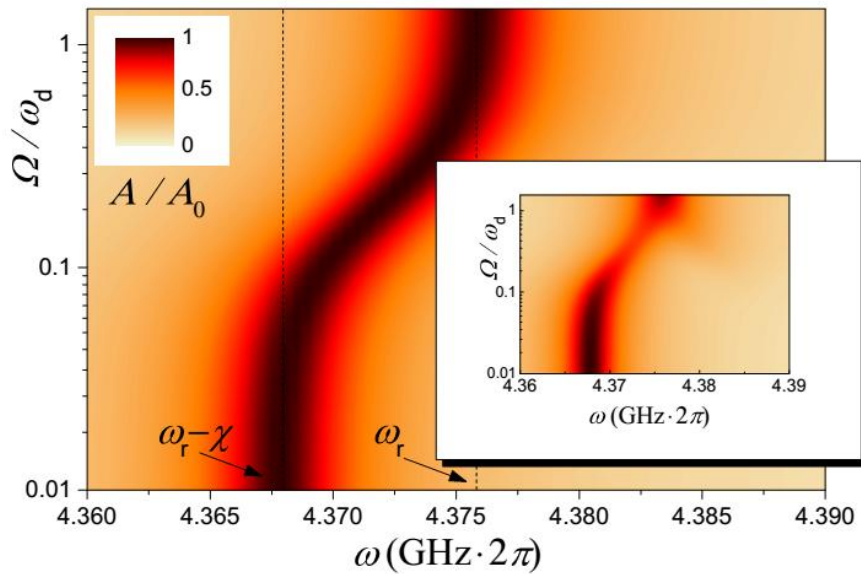


Рис. 23 Зсув резонансної частоти для кубіт-резонаторної системи при високоамплітудному накачуванні. Амплітуда вихідного сигналу A побудована як функція пробної частоти ω і амплітуди Ω для випадку, коли частота кубіта не збігається із частотою накачування ($\omega_q \neq \omega_d$). Амплітуда вихідного сигналу нормована на максимальне значення A_0 для обраних параметрів системи (параметри представлені нижче в основному тексті). На вставці представлений графік у рамках напівквантового наближення, основний графік відповідає квазікласичному наближенню.

На Рис. 23 наведений графік для амплітуди вихідного сигналу A як функції пробної частоти ω і амплітуди Ω . Амплітуда вихідного сигналу нормована на максимальне значення A_0 для використаних параметрів з роботи [115]:

$$\frac{\omega_r}{2\pi} = 4.376 \text{ GHz}, \frac{\omega_r}{2\pi} = 5.16 \text{ GHz}, \frac{g}{2\pi} = 80 \text{ MHz}, \frac{\chi}{2\pi} = 8.2 \text{ MHz}, \frac{\kappa}{2\pi} = 4 \text{ MHz},$$

$$\frac{\Gamma_1}{2\pi} = 2 \text{ MHz}, \Gamma_1 = \Gamma_2, \frac{\omega_d}{2\pi} = 4.35 \text{ GHz}. \text{ Він побудований як аналітичне й чисельне}$$

рішення системи рівнянь (3.13)-(3.14) для напівквантового наближення й системи рівнянь (3.18) для квазікласичного наближення. Обое наближень демонструють гарний якісний опис, що дозволяє зрозуміти фізичні процеси, що відбуваються в

системі. Напівквантове наближення ж має також гарну кількісну згоду з експериментами, представленими в роботі [115].

Висновки

У розділі розглянуто систему кубіт-резонатор, з акцентуванням уваги на найбільш вдалу, з погляду практичного застосування, типу кубіта - трансмон. Отримані результати доводять, що найбільш простий підхід - квазікласична теорія, коли допускається, що всі корелятори факторизуються - має перевагу у вигляді одержання прозорих аналітичних рівнянь і формул. Також ефективність квазікласичного підходу доводиться описом відповідних експериментів (наприклад, [17,18,37,128]). З іншого боку, справедливості квазікласичної теорії вимагає перевірки й уточнення. Особливо вимагає уточнення квазікласичне наближення, коли важлива еволюція системи у часі. Як показано в розділі, тут досить напівквантового підходу, що враховує двооператорні кубіт-фотонні корелятори. Крім того, при важливості впливу температури на систему, напівквантове наближення описує вплив температури на виміри квадратури переданого поля з більшою точністю в порівнянні із квазікласичним наближенням. Через переплетення кореляторів кубіта-резонатора, коефіцієнт проходження сигналу резонатора несе інформацію про температуру кубіта.

РОЗДІЛ 4

ВЗАЄМОДІЯ КУБІТА З ОДИНОЧНИМИ ФОТОНАМИ

Експериментальний прогрес, що був досягнутий останнім часом, дозволяє вивчати ряд квантово-оптичних ефектів в одновимірних твердотільних квантових структурах: надвипромінювання [29,30,31,32], перенос станів від одного кубіта до іншого за допомогою фотона [33,34,35,36,37], магнітно-індуцйоване пропущення одиночного фотона [38,39] і т. д. Одним з перспективних напрямків у цій області залишається вивчення взаємодії відкритого хвилеводу й кубіта [35,40,41,42]. Більшість робіт, на сьогодні, присвячені однокубітним системам, а наступним кроком у розвитку є вивчення двох і більше кубітних систем.

У даному розділі представлена техніка теоретичного опису взаємодії кубітів з фотонним сигналом в одновимірному хвилеводі. Важливо відзначити, що в загальному виді даний підхід дозволяє враховувати неідентичність кубітів і будь-яке їхнє розташування у хвилеводі. Схожа ідея була запропонована для опису розповсюдження фотонів у зв'язаному оптичному резонаторі [138]. Запропонований підхід заснований на рішенні завдання розсіювання й знаходженні коефіцієнтів поширення фотонів через хвилевід з кубітами. Вирази для коефіцієнтів проходження й відбиття знайдені за допомогою побудови матриці розсіювання, ґрунтуючись на проекційному формалізмі й методі неермітового гамільтоніана.

Метод неермітового гамільтоніана дуже зручний для рішення квантово-механічних завдань у теорії розсіювання. Цей формалізм був представлений для опису ядерних реакцій [139,140], а пізніше був адаптований і дороблений для застосування в інших областях фізики (наприклад, опис загальних флуктуацій провідників у мезоскопічних системах [141], транспорт електронів крізь твердотільні наноструктури [142,143], квантовий хаос у відкритих системах [144,145], флуктуації Еріксона в Рідберговських атомах [146,147](більш детально у огляді [148] і посилання в ньому). Його застосування для розрахунку транспорту одиночного фотона докладно описано в роботі [149].

Розглянуто фотонну взаємодію двокубітної системи у відкритому хвилеводі. У дійсній розділі розглядається проходження одиночного фотона. Це дозволяє стверджувати, що спостережувані ефекти мають чисто квантомеханічну природу. У випадку одномірного хвилеводу більшу роль грають відстані між об'єктами, що вимагає звернути увагу на особливості впливу цієї відстані на процеси розсіювання одиночного фотона.

Є безліч теоретичних [47,149,150,151] і експериментальних [152,153,154] робіт з дослідженням розсіювання як одного, так і більше фотонів на структурах представлених як відкритий одномірний волновід, у деяких точках якого розташовані штучні дворівневі системи. У розділі розглянуто випадок системи, у якій кожний кубіт поміщений у фотонний резонатор. Це фізично обмежує число мод, з якими він може взаємодіяти й, тим самим, підвищує час життя кубіта [155]. При цьому самі резонатори обмінюються фотоном безпосередньо із хвилеводом, здійснюючи, тим самим, непрямий зв'язок кубіта із хвилеводом [156]. Були отриманні ефекти, що спостерігалися раніше [149,150,151], але у системі зі свідомо більшим часом життя й з урахуванням ефекту запізнювання [157], що є найважливішим параметром з погляду реалізації квантових твердотільних схем.

4.1. Ефективний гамільтоніан

Уведемо розподіл Гільбертового простору на дві частини за допомогою проекційних операторів P і Q з наступними вимогами: **Equation Chapter 4 Section 4**

$$\begin{aligned} P + Q &= 1, \\ PQ = QP &= 0, \\ PP &= P, \\ QQ &= Q. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Відповідно хвильова функція буде мати вигляд

$$|\Psi\rangle = P|\Psi\rangle + Q|\Psi\rangle = |\Psi_P\rangle + |\Psi_Q\rangle. \tag{4.2}$$

Стационарне рівняння Шредингера, ґрунтуючись на умові (4.2), приймає наступний вигляд:

$$H|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle, \quad (4.3)$$

$$(P+Q)H(P+Q)(|\Psi_P\rangle + |\Psi_Q\rangle) = E(|\Psi_P\rangle + |\Psi_Q\rangle). \quad (4.4)$$

Уведемо перепозначення й урахуємо, що $PQ = QP = 0$:

$$(H_{PP} + H_{QP})\Psi_P + (H_{QQ} + H_{PQ})\Psi_Q = E(\Psi_P + \Psi_Q), \quad (4.5)$$

де

$$H_{QQ} = QHQ, H_{PP} = PHP, H_{QP} = QHP, H_{PQ} = PHQ \quad (4.6)$$

Помножимо ліворуч рівняння (4.5) на оператори P й Q , одержимо два зв'язаних рівняння для хвильової функцій $|\Psi_P\rangle$ і $|\Psi_Q\rangle$:

$$\begin{aligned} (H_{PP} - E)\Psi_P &= -H_{PQ}\Psi_Q, \\ (H_{QQ} - E)\Psi_Q &= -H_{QP}\Psi_P. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Виключимо P -підпростір й запишемо вирази для хвильової функції в Q -підпросторі:

$$H_{eff}(E)\Psi_Q = E\Psi_Q, \quad (4.8)$$

$$H_{eff}(E) = H_{QQ} + H_{QP} \frac{1}{E - H_{PP}} H_{PQ}, \quad (4.9)$$

де $H_{eff}(E)$ спроектований енергозалежний гамільтоніан на Q -підпростір. Рівняння (4.8) не відповідає рівнянню (4.3): ефективний гамільтоніан (4.9) енергозалежний, а власні значення E цього рівняння можуть бути також комплексними й хвильова функцією будується як лінійна комбінація базисних векторів Q -підпростору.

Допустимо, що гамільтоніан H_{PP} має діагональний вигляд у P - підпросторі. Для виключення особливої точки для випадку дійсних власних значень гамільтоніана H_{PP} , введемо перепозначення в рівняння (4.9) в такий спосіб

$$H_{eff}(E) = H_{QQ} + H_{QP} \frac{1}{E - H_{PP} + i\varepsilon} H_{PQ}, \quad (4.10)$$

що приводить до неермітовості ефективного гамільтоніану.

У рамках проєкційного формалізму хвильова функція системи виражається з рівнянь (4.7) як рішення рівняння Шредингера (4.8) в термінах операторів, які діють на вихідний стан $|in\rangle$. Вихідний стан $|in\rangle$ задовольняє рівнянню $H_{PP}|in\rangle = E|in\rangle$, для енергій E рівняння Шредингера (4.3). Тоді хвильова функція приймає наступний вигляд

$$|\Psi\rangle = |in\rangle + |\Psi_{qubit}\rangle + |\Psi_{photon}\rangle, \\ |\Psi\rangle = |in\rangle + \frac{1}{E - H_{eff}} H_{QP} |in\rangle + \frac{1}{E - H_{PP} + i\varepsilon} H_{PQ} \frac{1}{E - H_{eff}} H_{QP} |in\rangle. \quad (4.11)$$

У наступних параграфах буде застосований даний підхід для конкретних систем.

4.2. Кубіт у хвилеводі

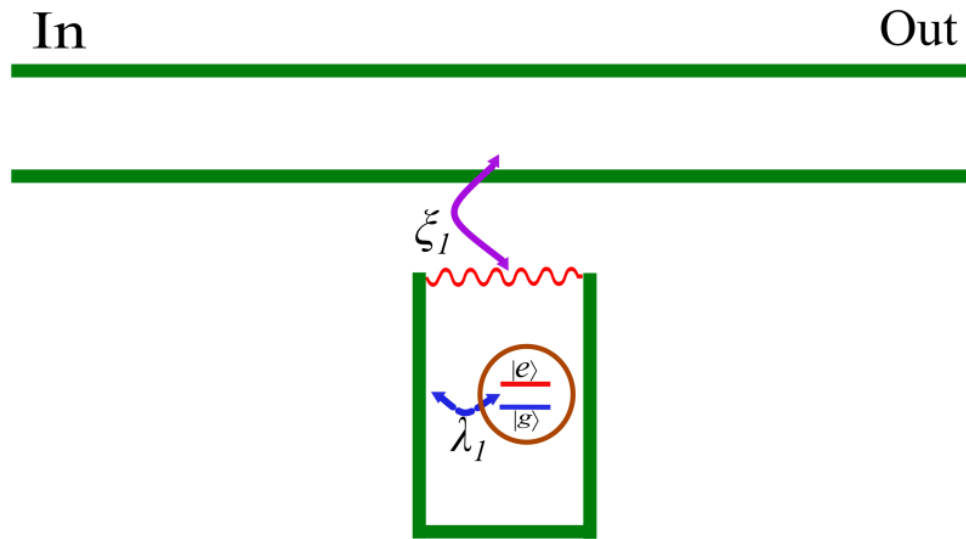


Рис. 24 Схематичне зображення кубіта-резонатора, з'єднаного з відкритим хвилеводом. Синя пунктирна стрілка відображає зв'язок резонатора й дворівневої системи. Фіолетова суцільна стрілка зображує зв'язок резонатора із хвилеводом. Дворівнева система пов'язана із хвилеводом через резонатор. Фотон рухається у хвилеводі з ліво на право.

Розглянуто розсіювання фотона у відкритому хвилеводі. Хвилевід безпосередньо пов'язаний з резонатором. У ньому перебуває дворівнева система. Повний гамільтоніан, що описує систему, включає фотонний резонатор з фундаментальною частотою ω_c , розташований у хвилеводі, по якому можуть поширюватися фотони з довільною частотою ω_k , а також кубіт із власною частотою Ω . Параметр взаємодії резонатора із хвилеводом позначений як ξ_1 , відповідно, і резонатора з кубітом як λ_1 . Кубіт описується в рамках спінової моделі, а фотон у хвилеводі розглядаємо у фоковському поданні [158] (Рис. 24). Гамільтоніан системи має такий вигляд:

$$\begin{aligned}
H = & \frac{1}{2} \hbar \Omega \sigma_z + \hbar \omega_c a^\dagger a + \sum_k \hbar \omega_k c_k^\dagger c_k + \\
& + \sum_k \hbar \xi_1 (c_k^\dagger a + c_k a^\dagger) + \hbar \lambda_1 (a^\dagger + a) \sigma_x,
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Резонатор накачується N фотонами. Фотон або поглинається кубітом, або переходить у хвилевід. Система була обмежена наступними станами:

- N фотонів у резонаторі, кубіт в основному стані $|g\rangle$, нуль фотонів у хвилеводі $|0_w\rangle \Rightarrow |1\rangle = |0_w\rangle \otimes |g, N\rangle$;
- $N-1$ фотонів у резонаторі, кубіт у збудженому стані $|e\rangle$, нуль фотонів у хвилеводі $|0_w\rangle \Rightarrow |2\rangle = |0_w\rangle \otimes |e, N-1\rangle$;
- $N-1$ фотонів у резонаторі, кубіт в основному стані $|g\rangle$, фотон у хвилеводі $|1_w\rangle \Rightarrow |K_1\rangle = |0_w\rangle \otimes |g, N-1\rangle$;
- $N-2$ фотонів у резонаторі, кубіт у збудженому стані $|e\rangle$, фотон у хвилеводі $|1_w\rangle \Rightarrow |K_2\rangle = |1_w\rangle \otimes |e, N-2\rangle$;

Для Q і P підпросторів маємо наступні стани відповідно: $|1\rangle, |2\rangle$ и $|K_1\rangle, |K_2\rangle$.

Умова ортогональності для P підпростору має вигляд

$$\langle k | k' \rangle = \frac{2\pi}{L} \delta(k - k'), \tag{4.13}$$

де L довжина резонатора. Проекційні оператори приймають вигляд:

$$Q = \sum_{n=1}^n |n\rangle \langle n| = Q_1 + Q_2, \tag{4.14}$$

$$P = \sum_k \sum_{n=1}^n |k_n\rangle \langle k_n| = \frac{L}{2\pi} \int dk \left(\sum_{n=1}^n |k_n\rangle \langle k_n| \right) = P_1 + P_2, \tag{4.15}$$

Користуючись виразами (4.10), (4.12), (4.14), (4.15), запишемо ефективний гамільтоніан

$$H_{QQ}/\hbar = \frac{1}{2}\Omega|2\rangle\langle 2| + \omega_c(N-1)|2\rangle\langle 2| + \lambda\sqrt{N}|1\rangle\langle 2| + \lambda\sqrt{N}|2\rangle\langle 1| - \frac{1}{2}\Omega|1\rangle\langle 1| + \omega_c N|1\rangle\langle 1|, \quad (4.16)$$

$$H_{PP}/\hbar = \sum_k \left(-\frac{1}{2}\Omega|k_1\rangle + \lambda\sqrt{N-1}|k_1\rangle + \omega_k|k_1\rangle + \omega_c(N-2)|k_2\rangle \right) \quad (4.17)$$

$$H_{PQ}/\hbar = \sum_k \xi \left(\sqrt{N-1}|2\rangle\langle k_2| + \sqrt{N}|1\rangle\langle k_1| \right), \quad (4.18)$$

$$H_{QP}/\hbar = \sum_k \xi \left(\sqrt{N-1}|k_2\rangle\langle 2| + \sqrt{N}|k_1\rangle\langle 1| \right). \quad (4.19)$$

Вирази (4.18) й (4.19) описують переходи фотонів із хвилеводу в резонатор і назад. Тобто обмін фотоном між Q і P просторами. Повний вираз ефективного гамільтоніана для обраної системи буде наступним

$$H_{eff} = H_{QQ} + H_{QP}P_1 \frac{1}{E - H_{PP} + i\varepsilon} P_1 H_{PQ} + H_{QP}P_1 \frac{1}{E - H_{PP} + i\varepsilon} P_2 H_{PQ} + H_{QP}P_2 \frac{1}{E - H_{PP} + i\varepsilon} P_1 H_{PQ} + H_{QP}P_2 \frac{1}{E - H_{PP} + i\varepsilon} P_2 H_{PQ}. \quad (4.20)$$

Спроекований гамільтоніан (4.20) на підпростір Q має наступний вираз

$$\begin{aligned} \langle 1|H_{eff}|2\rangle &= \hbar \left(-\frac{\Omega}{2} + \omega_c N \right) + (\hbar\xi)^2 NJ(k_1), \\ \langle 2|H_{eff}|2\rangle &= \hbar \left(\frac{\Omega}{2} + \omega_c(N-1) \right) + (\hbar\xi)^2 (N-1)J(k_1), \\ \langle 1|H_{eff}|2\rangle &= \langle 2|H_{eff}|1\rangle = \hbar\lambda\sqrt{N}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Фотон, що налітає, може бути в одному із двох можливих станів. Повна хвильова функція, відповідно до виразу (4.11), має вигляд

$$|\Psi_1\rangle = |k_1\rangle + |1\rangle R_{11} \hbar \xi \sqrt{N} + |2\rangle R_{21} \hbar \xi \sqrt{N-1} + \sum_k \left(\frac{|k_1\rangle \hbar^2 \xi^2 N}{E - E_{k_1} + i\varepsilon} R_{11} + \frac{|k_2\rangle \hbar^2 \xi^2 \sqrt{N(N-1)}}{E - E_{k_1} + i\varepsilon} R_{21} \right), \quad (4.22)$$

$$|\Psi_2\rangle = |k_2\rangle + |1\rangle R_{12} \hbar \xi \sqrt{N-1} + |2\rangle R_{22} \hbar \xi \sqrt{N-1} + \sum_k \left(\frac{|k_1\rangle \hbar^2 \xi^2 N}{E - E_{k_2} + i\varepsilon} R_{12} + \frac{|k_2\rangle \hbar^2 \xi^2 (N-1)}{E - E_{k_1} + i\varepsilon} R_{22} \right), \quad (4.23)$$

де ω - частота фотона, що налітає

$$E_{k_1} = \hbar \left(\omega - \frac{\Omega}{2} + \omega_c (N-1) \right), \quad E_{k_2} = \hbar \left(\omega - \frac{\Omega}{2} + \omega_c (N-2) \right). \quad \text{Хвильова функція в}$$

конфігураційному просторі має такий вигляд

$$\langle x_1 | \Psi_1 \rangle = e^{ik_1 x} - i\hbar \Gamma N R_{11} e^{ik_1 |x|}, \quad (4.24)$$

$$\langle x_2 | \Psi_1 \rangle = -i\hbar \Gamma \sqrt{N(N-1)} R_{21} e^{ik'_1 |x|}, \quad (4.25)$$

$$k'_1 = \frac{\omega + \Omega - \omega_c}{v_g},$$

$$\langle x_1 | \Psi_2 \rangle = -i\hbar \Gamma \sqrt{N(N-1)} R_{12} e^{ik'_2 |x|}, \quad (4.26)$$

$$k'_1 = \frac{\omega - \Omega + \omega_c}{v_g},$$

$$\langle x_2 | \Psi_2 \rangle = e^{ik_2 x} - i\hbar \Gamma (N-1) R_{22} e^{ik_2 |x|}. \quad (4.27)$$

Тут і вище прийнято, що фотон рухається з ліва на право. Кубіт розташований у центрі хвилеводу ($x=0$). Тоді хвильову функцію фотона можна переписати як комбінацію плоских хвиль [149]

$$\Psi_n(x) = \begin{cases} t_n e^{ik_n x} & (x > 0) \\ e^{ik_n x} + r_n e^{ik_n x} & (x < 0) \end{cases}, \quad (4.28)$$

де відповідно до виразів (4.24)-(4.27) коефіцієнти проходження та відбиття мають вигляд

$$\begin{aligned} t_{11} &= 1 - i\hbar\Gamma NR_{11}, & r_{11} &= -i\hbar\Gamma NR_{11} \\ t_{21} &= -i\hbar\Gamma\sqrt{N(N-1)}R_{21}, & r_{21} &= -i\hbar\Gamma\sqrt{N(N-1)}R_{21}, \\ t_{12} &= -i\hbar\Gamma\sqrt{N(N-1)}R_{12}, & r_{12} &= -i\hbar\Gamma\sqrt{N(N-1)}R_{12}, \\ t_{22} &= 1 - i\hbar\Gamma(N-1)R_{22}, & r_{22} &= 1 - i\hbar\Gamma(N-1)R_{22}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Зворотна матриця $R_{nm} = \langle n | \frac{1}{E - H_{eff}} | m \rangle$ для гамільтоніана (4.12) спрощується до

виразів

$$R_{11} = \left(E(k) + i\hbar\Gamma(N-1) - \frac{\hbar\Omega}{2} - (N-1)\hbar\omega_c \right) \frac{1}{\det(E(k) - H_{eff})}, \quad (4.30)$$

$$R_{12} = R_{21} = \frac{\hbar\lambda\sqrt{N}}{\det(E(k) - H_{eff})}, \quad (4.31)$$

$$R_{22} = \left(E(k) + i\hbar\Gamma N + \frac{\hbar\Omega}{2} - N\hbar\omega_c \right) \frac{1}{\det(E(k) - H_{eff})}, \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \det(E(k) - H_{eff}) &= E^2(k) + iE(k)(2N-1)(\Gamma + i\hbar\omega_c) - \\ &- \lambda^2 N - \hbar^2\Gamma^2(N-1)N - \frac{1}{4}(\Omega + 2(N-1)\omega_c)(\Omega - 2N\omega_c) - \\ &- i\Gamma \left(\frac{\Omega}{2} + 2(N-1)N\omega_c \right). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Кожному стану $|k_1\rangle, |k_2\rangle$ відповідає своя енергія фотона

$$E_{k_1} = \hbar \left(\omega - \frac{\Omega}{2} + \omega_c (N - 1) \right), E_{k_2} = \hbar \left(\omega - \frac{\Omega}{2} + \omega_c (N - 2) \right)$$

й, відповідно, своє значення коефіцієнти відбиття й проходження.

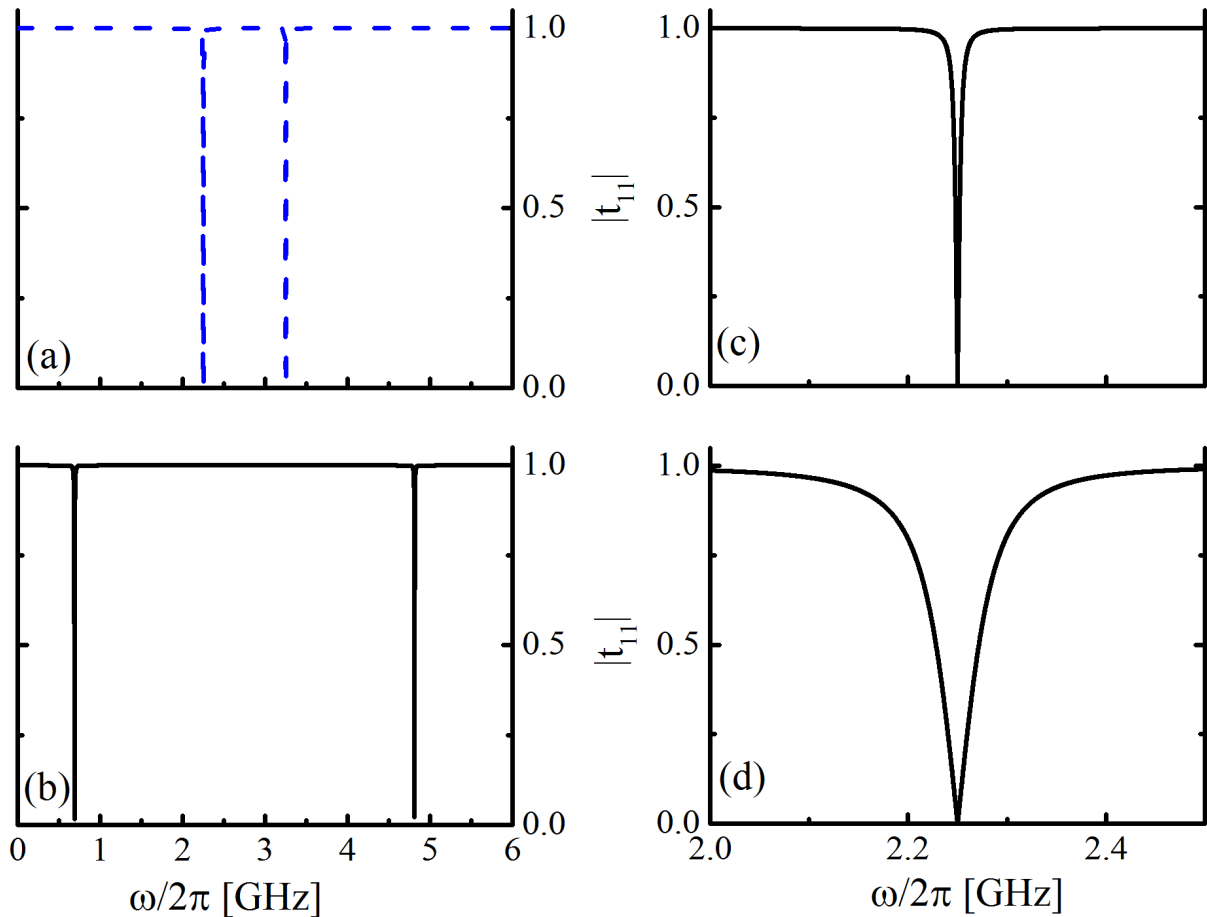


Рис. 25 Коефіцієнт проходження t_{11} як функція частоти фотона, що налітає.

Коефіцієнт побудований для випадку, коли в резонаторі є один фотон ($N = 1$), що може поглинутися кубітом або перейти у хвилевід. Графіки (а), (б), (в) побудовані для зв'язку кубіта з резонатором $\lambda = 1$ MHz. Це значення відповідає експериментальним системам кубіт-резонатор, наприклад, представленим в роботах [2,17,37]. Графік (б) побудований для значення зв'язку кубіта з резонатором $\lambda = 1$ GHz і відображає вплив величини зв'язку кубіта й резонатора на положення мінімумів коефіцієнта проходження t_{11} . При збільшенні λ відстань між мінімумами збільшується, а при зменшенні – мінімуми зближуються. Графіки (а),

(б), (в) побудовані для величини напівширини спонтанного випромінювання $\Gamma = 5$ MHz. Графіки (г) побудовані для величини напівширини спонтанного випромінювання $\Gamma = 50$ MHz. Величина Γ визначає ширину мінімумів коефіцієнт проходження t_{11} . Збільшення напівширини спонтанного випромінювання Γ , тобто збільшення величини зв'язку резонатора із хвилеводом ξ , приводить до збільшення ширини мінімумів.

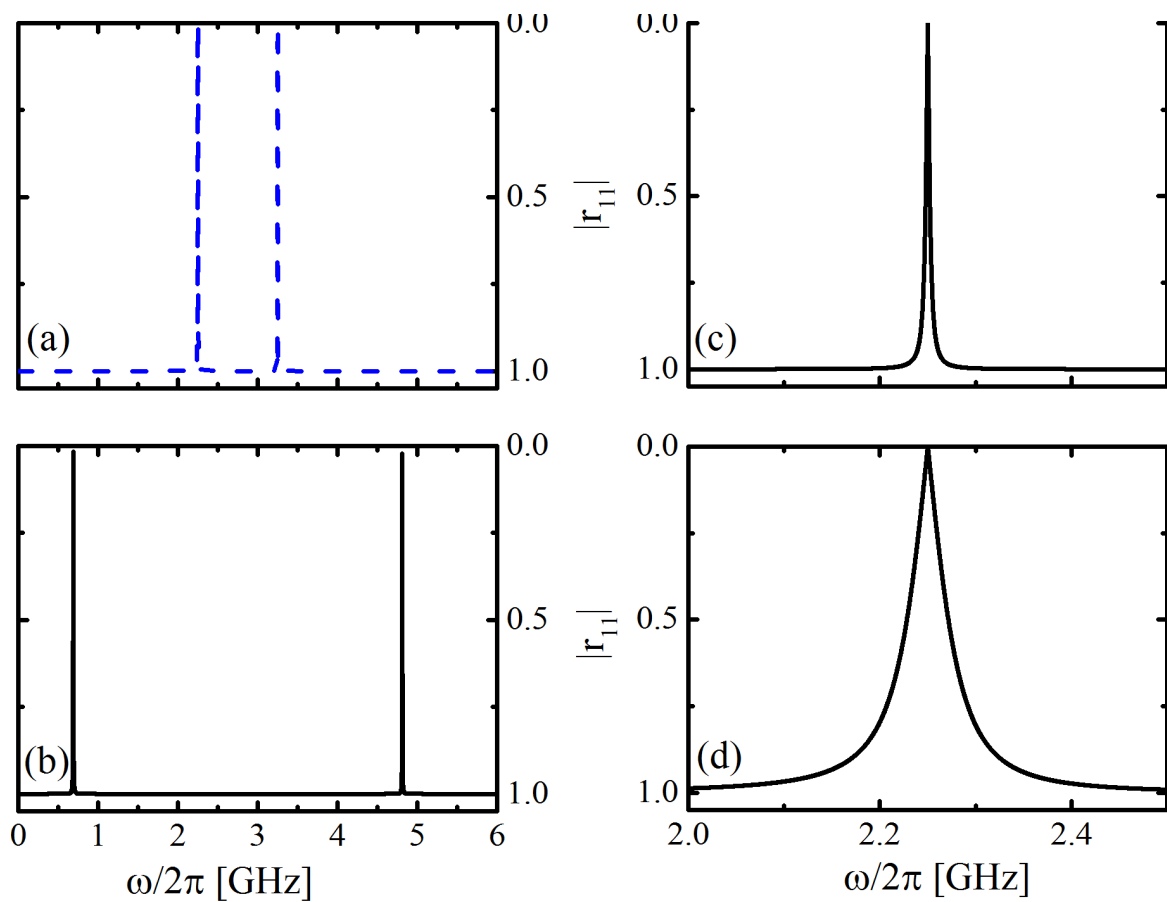


Рис. 26 Коефіцієнт відбиття r_{11} як функція частоти фотона, що налітає. Коефіцієнт побудований для випадку, коли в резонаторі є один фотон ($N = 1$), що може поглинутися кубітом або перейти у хвилевід. Графіки (а), (б), (в) побудовані для зв'язку кубіта з резонатором $\lambda = 1$ MHz. Це значення відповідає експериментальним системам кубіт-резонатор, наприклад, представленим в роботах [2,17,37]. Графік (б) побудований для значення зв'язку кубіта з резонатором $\lambda = 1$ GHz і відображає вплив величини зв'язку кубіта й резонатора на положення максимумів коефіцієнта відбиття r_{11} . При збільшенні λ відстань між

максимумами збільшується, а при зменшенні – максимуми зближаються (графік (а)). Графіки (а), (б), (в) побудовані для величини напівширини спонтанного випромінювання $\Gamma = 5$ МГц. Графіки (г) побудовані для величини напівширини спонтанного випромінювання $\Gamma = 50$ МГц. Величина Γ визначає ширину максимумів коефіцієнт відбиття r_{11} . Збільшення напівширини спонтанного випромінювання Γ , тобто збільшення величини зв'язку резонатора із хвилеводом ξ , приводить до збільшення ширини максимумів.

Коли $N = 1$ вирази для проєкційних операторів (4.14) і (4.15) спрощуються до вигляду

$$Q = |0_{wg}, g, 1\rangle\langle 0_{wg}, g, 1| + |0_{wg}, e, 1\rangle\langle 0_{wg}, e, 1|, \quad (4.34)$$

$$P = \sum_k |1_k, g, 0\rangle\langle 1_k, g, 0| = \frac{L}{2\pi} \int dk |1_k, g, 0\rangle\langle 1_k, g, 0|, \quad (4.35)$$

Тоді коефіцієнти проходження й відбиття приймаю наступний вигляд

$$R_{11} = \frac{\omega - \Omega}{(\omega - \Omega)(\omega - \omega_c) - \lambda^2}, \quad (4.36)$$

$$t_{11} = \frac{(\omega - \Omega_{1+})(\omega - \Omega_{1-})}{(\omega - \Omega_{1+})(\omega - \Omega_{1-}) - i\Gamma(\omega - \Omega)}, \quad (4.37)$$

$$\Omega_{1\pm} = \frac{\Omega + \omega_c}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{4\lambda^2 + (\Omega - \omega_c)^2}, \quad (4.38)$$

$$r_{11} = \frac{i\Gamma(\omega - \Omega)}{(\omega - \Omega_{1+})(\omega - \Omega_{1-}) - i\Gamma(\omega - \Omega)}, \quad (4.39)$$

Коефіцієнти проходження й відбиття (4.29) представлені на Рис. 25, Рис. 26 для $N = 1$ фотонів у резонаторі. Були обрані значення параметрів системи, які відповідають сучасним експериментальним діапазнам: $\Omega/2\pi = 3$ ГГц, $\omega_{cl}/2\pi = 2.5$ ГГц. Коефіцієнт проходження t_{11} (формула (4.37)) прямує до нуля при збігу частоти

фотона, що ω налітає, зі Ω_{\pm} співвідношенням (формула (4.38)) , що відповідає мінімумам Рис. 25(а) й Рис. 25(б). З формули (4.38) видно, що при збігу частоти фотона, що ω налітає, із частотою Ω кубіта , нулі коефіцієнта t_{11} проходження будуть відповідати $\Omega_{null} = \Omega \pm \lambda$ частоті . Тобто відстань між мінімумами визначається величиною зв'язку кубіта з резонатором λ , що також відображено на графіках Рис. 25(а) й Рис. 25(б). При збільшенні зв'язку резонатора із хвилеводом ξ , що прямо визначає величину Γ , внесок уявної частини коефіцієнт проходження збільшується (дійсна частина пропорційна $((\omega - \Omega_{1+})(\omega - \Omega_{1-}))^2$, а уявна - $\Gamma(\omega - \Omega)(\omega - \Omega_{1+})(\omega - \Omega_{1-})$) і ширина мінімуму також збільшується (графіки Рис. 25(в) і Рис. 25(г)).

Коефіцієнт відбиття (формула (4.39)) обертається в нуль при збігу частоти фотона, що ω налітає, із частотою Ω кубіта . Коефіцієнт проходження t_{11} залишається чисто дійсним при збігу частоти фотона, що ω налітає, із частотою Ω кубіта .

4.3. Два кубіта у хвилеводі

Тепер хвилевід безпосередньо пов'язаний із двома резонаторами (рис. 27). У кожному з них перебуває по одній дворівневій системі. Вирази для коефіцієнтів проходження й відбиття були знайдені також за допомогою побудови матриці розсіювання, ґрунтуючись на методі неермітового гамільтоніана.

Повний гамільтоніан, що описує систему, включає фотонні резонатори з фундаментальними частотами ω_{c1} і ω_{c2} , розташовані на відстані d у хвилеводі, по якому можуть поширюватися фотони з довільною частотою ω_k , а також два кубіта із власними частотами Ω_1 і Ω_2 , по одному в кожному резонаторі. Параметри взаємодії резонаторів із хвилеводом позначені як ξ_1 і ξ_2 , відповідно, і резонаторів з кубітом як λ_1 і λ_2 . Тоді повний гамільтоніан системи приймає вигляд:

$$\begin{aligned}
H = & \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2} \hbar \Omega_j \sigma_{zj} + \sum_{j=1}^2 \hbar \omega_{cj} a_j^\dagger a_j + \sum_k \hbar \omega_k c_k^\dagger c_k + \\
& + \sum_{j=1}^2 \sum_k \hbar \xi_j (c_k^\dagger a_j e^{-ikx_j} + c_k a_j^\dagger e^{ikx_j}) + \sum_{j=1}^2 \hbar \lambda_j (a_j^\dagger + a_j) \sigma_{xj},
\end{aligned} \tag{4.40}$$

де перші три члени описують поведінку всіх перерахованих вище елементів (кубіти, резонатори, хвилевід), а останні два описують взаємодія між ними. $\sigma_{zi} = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$ - спіновий оператор i -го кубіта; a_i^\dagger (c_k^\dagger) і a_i (c_k) - бозонні оператори народження й знищення фотонів у резонаторі (хвилеводі); тут x_i - координата i -го резонатора в одномірному хвилеводі уздовж осі x , при цьому $|x_{1-2}| = d$.

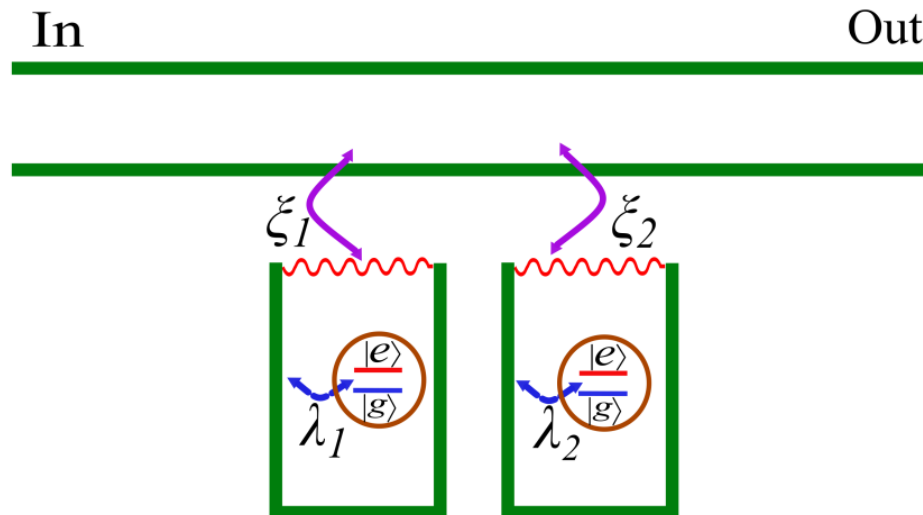


Рис. 27. Схематичне зображення системи хвилевід-кубіт-резонатор. Сині пунктирні стрілки відображають зв'язок резонатора й дворівневої системи. Фіолетові суцільні стрілки зображують зв'язок резонатора із хвилеводом. Дворівнева система пов'язана із хвилеводом через резонатор. Фотон рухається у хвилеводі ліворуч праворуч.

Будемо вважати, що в систему потрапляє один фотон і резонатор із хвилеводом можуть обмінюватися лише одним фотоном, тоді можна обмежити Гільбертовий простір станів системи наступним набором векторів:

$$\begin{aligned}
|K\rangle &= |1_w\rangle \otimes |g_1, g_2, 0_{c1}, 0_{c2}\rangle, \\
|1\rangle &= |0_w\rangle \otimes |g_1, g_2, 1_{c1}, 0_{c2}\rangle, \\
|2\rangle &= |0_w\rangle \otimes |g_1, g_2, 0_{c1}, 1_{c2}\rangle, \\
|3\rangle &= |0_w\rangle \otimes |e_1, g_2, 0_{c1}, 0_{c2}\rangle, \\
|4\rangle &= |0_w\rangle \otimes |g_1, e_2, 0_{c1}, 0_{c2}\rangle,
\end{aligned} \tag{4.41}$$

де $g(e)$ основний (збуджений) стан кубітів; $1_w(0_w)$ наявність (відсутність) фотона у хвилеводі з довільним хвильовим вектором k ; $1_{ci}(0_{ci})$ наявність або відсутність фотона в резонаторі. Постійний обмін фотоном між кубітами і своїм резонатором приводить до розщеплення рівнів [19,149,155,156,159]

$$\Omega_{Rj} = \sqrt{(\Omega_j + i\Gamma_j - \omega_{cj})^2 + 4\lambda_j^2}, \tag{4.42}$$

де Γ_j – швидкості розпаду фотона у хвилевід з j -го резонатора, формально рівні напівширині Лоренціана, що відповідає амплітудно-частотній характеристиці резонатора. Для станів (4.41) проекційні оператори приймають наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
Q &= \sum_{n=1}^4 |n\rangle \langle n|, \\
P &= \sum_{k_w} |K\rangle \langle K|.
\end{aligned} \tag{4.43}$$

В обраному базисі станів ефективний гамільтоніан являє собою матрицю чотири на чотири з компонентами:

$$\begin{aligned}
\langle 1|H_{eff}|1\rangle &= -\frac{1}{2}\hbar\Omega_1 - \frac{1}{2}\hbar\Omega_2 + \hbar\omega_{c1} - i\hbar\Gamma_1, \\
\langle 2|H_{eff}|2\rangle &= -\frac{1}{2}\hbar\Omega_1 - \frac{1}{2}\hbar\Omega_2 + \hbar\omega_{c2} - i\hbar\Gamma_2, \\
\langle 3|H_{eff}|3\rangle &= \frac{1}{2}\hbar\Omega_1 - \frac{1}{2}\hbar\Omega_2, \\
\langle 4|H_{eff}|4\rangle &= -\frac{1}{2}\hbar\Omega_1 + \frac{1}{2}\hbar\Omega_2, \\
\langle 1|H_{eff}|2\rangle &= \langle 2|H_{eff}|1\rangle = \hbar^2\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}e^{ikd}, \\
\langle 1|H_{eff}|3\rangle &= \langle 3|H_{eff}|1\rangle = \hbar\lambda_1, \\
\langle 1|H_{eff}|4\rangle &= \langle 4|H_{eff}|1\rangle = 0, \\
\langle 2|H_{eff}|3\rangle &= \langle 3|H_{eff}|2\rangle = 0, \\
\langle 2|H_{eff}|4\rangle &= \langle 4|H_{eff}|2\rangle = \hbar\lambda_2, \\
\langle 3|H_{eff}|4\rangle &= \langle 4|H_{eff}|3\rangle = 0.
\end{aligned} \tag{4.44}$$

У даному виразі елементи $\langle 1|H_{eff}|2\rangle$ й $\langle 2|H_{eff}|1\rangle$ містять залежність від імпульсу фотона. При цьому структура хвильової функції така, що цей імпульс дорівнює імпульсу фотона у вихідному стані системи.

З погляду розсіювання нас цікавить імовірність виявити фотон у хвилеводі після взаємодії із системою, і дану ймовірність можна визначити, перейшовши до координатного подання хвильової функції (4.11) $\langle x|\Psi\rangle = \Psi_x$, де $|x\rangle = |1_w\rangle \otimes |g_1, g_2, 0_{c1}, 0_{c2}\rangle$. При цьому хвильова функція в координатному поданні запишеться як:

$$\begin{aligned}
\Psi_x &= e^{ikx} - i\hbar\Gamma_1 e^{ik|x-x_1|} e^{ikx_1} R_{11} - i\hbar\Gamma_2 e^{ik|x-x_2|} e^{ikx_2} R_{22} \\
&\quad - i\hbar\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2} \left(e^{ik|x-x_1|} e^{ikx_2} R_{12} - e^{ik|x-x_2|} e^{ikx_1} R_{21} \right),
\end{aligned} \tag{4.45}$$

де $R_{i,j} = \left(\frac{1}{E - H_{eff}} \right)_{i,j}$. Приведемо вирази лише тих елементів матриці $R_{i,j}$, які

необхідні для обчислення (4.45). Врахуємо, що енергія стану $|K\rangle$ дорівнює

$$E = \hbar \left(\omega - \frac{1}{2} \Omega_1 - \frac{1}{2} \Omega_2 \right):$$

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{(\omega - \Omega_1)(\omega - \tilde{\omega}_2^-)(\omega - \tilde{\omega}_2^+)}{D(\omega)}, \\ R_{22} &= \frac{(\omega - \Omega_2)(\omega - \tilde{\omega}_1^-)(\omega - \tilde{\omega}_1^+)}{D(\omega)}, \\ R_{12} = R_{21} &= \frac{-i\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}e^{ikd}(\omega - \Omega_1)(\omega - \Omega_2)}{D(\omega)}, \\ \tilde{\omega}_j^\pm &= \frac{\Omega_j + \omega_{cj} - i\Gamma_j \pm \Omega_{Rj}}{2}, \end{aligned} \tag{4.46}$$

де знаменник матриці R може бути в загальному виді представлений як:

$$D(\omega) = (\omega - \omega_{1+})(\omega - \omega_{1-})(\omega - \omega_{2+})(\omega - \omega_{2-}). \tag{4.47}$$

Вирази $D(\omega) = 0$ являє собою трансцендентне рівняння четвертого ступеня.

Його аналітичне рішення для ідентичних пар кубіт-резонаторів ($\Omega_1 = \Omega_2, \omega_{c1} = \omega_{c2}$) має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \omega_{1\pm} &= \frac{1}{2} \left(\Omega + \omega_c - i\Gamma + i\Gamma e^{\frac{i\omega}{\omega_c} k_{c1}d} \right) \pm \frac{1}{2} \left[\left(\Omega - \omega_c + i\Gamma - i\Gamma e^{\frac{i\omega}{\omega_c} k_{c1}d} \right)^2 + 4\lambda^2 \right]^{1/2}, \\ \omega_{2\pm} &= \frac{1}{2} \left(\Omega + \omega_c - i\Gamma - i\Gamma e^{\frac{i\omega}{\omega_c} k_{c1}d} \right) \pm \frac{1}{2} \left[\left(\Omega - \omega_c + i\Gamma + i\Gamma e^{\frac{i\omega}{\omega_c} k_{c1}d} \right)^2 + 4\lambda^2 \right]^{1/2}. \end{aligned} \tag{4.48}$$

У виразах (4.48) була введена наступна заміна $kd = \frac{\omega}{v_g} d = \frac{\omega}{v_g} \frac{\omega_{c1}}{\omega_{c1}} d = \frac{\omega}{\omega_c} k_{c1} d$ k_{c1} -хвильовий вектор фотона в першому резонаторі (можна нормувати на хвильовий вектор фотонів з будь-якого резонатора). З виразів (4.48) видно, що і енергія резонансу, і його ширина залежать від частоти фотона, що налітає. Цей факт є проявом ефекту запізнювання: фотон у хвилеводі поширюється з кінцевою швидкістю, йому потрібний певний час для досягнення другої кубітно-резонаторної системи [151]. При відстанях багато менших довжини хвилі, енергія резонансу не залежить від частоти вхідного фотона, він «миттєво» впливає на обидві пари кубіт-резонатор. Саме завдяки ефекту запізнювання, що формально властиво як віртуальним фотонам, так і реальним, виникає інтерференція. Вирази (4.48) дозволяють знайти залежності реальних резонансів системи і їх ширин від параметрів системи. Ці залежності від відстані між кубітами представлені на рис. 28 і рис. 29. Графіки побудовані для однакових кубітів і резонаторів. Були обрані наступні параметри $\Omega_1/2\pi = \omega_{c1}/2\pi = 3$ ГГц і при частоті фотона, що налітає, рівній $\omega = \omega_{c1}$.

З Рис. 28 і Рис. 29 видно, що у випадку слабкого зв'язку $\lambda \ll \Gamma$ можна спостерігати ефекти збільшення швидкості випускнення фотона з резонатора у хвилевід і її зменшення. Даний ефект пов'язаний з тим, що розташовуючи пари кубіт-резонатор на різних відстанях кратних довжині хвилі на фундаментальній частоті резонатора в системі відбувається конструктивні або деструктивні процеси інтерференції хвильових функцій кожної пари [106,107,149].

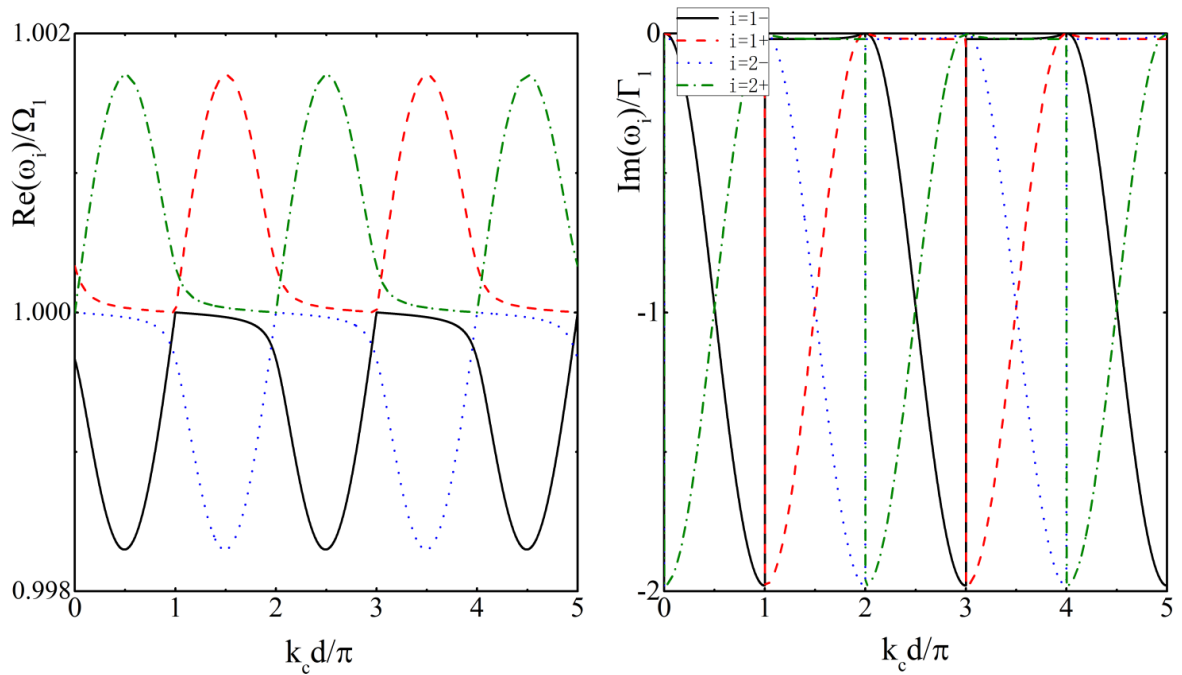


Рис. 28. Залежність енергії резонансу (а) і його ширини (б) від відстані між резонаторами з кубітами в слабкому дисперсійному режимі ($\lambda/2\pi=1\text{МГц}$, $\Gamma/2\pi=5\text{МГц}$). Чорна безперервна лінія відповідає кореню ω_{1-} , червона пунктирна відповідає кореню ω_{1+} , зелена пунктирна відповідає кореню ω_{2-} , синя штрихпунктирна відповідає кореню ω_{2+} .

Причому в слабкому дисперсійному режимі, внесок у ці ефекти при різних відстанях дають різні коріння знаменника. У сильному резонансному режимі спостерігається сильне розщеплення резонансних енергій. У цьому випадку внесок Рабі розщепленням кубіт-резонатора виявляється більшим. При відстанях між кубіт-резонаторами кратних $\pi/2$ проявляється ефект зменшення швидкості випромінювання. У сильному резонансному режимі даний ефект буде сильніше (див. Рис. 28 і Рис. 29). Дане явище можна пояснити в такий спосіб: після того як фотон буде випущений першим резонатором, то він може повторно відіб'ється від другого резонатора й знову поглинутися першим. Змінюючи відстань між резонаторами, змінюється ймовірність таких повторних поглинань і випусчень. Також передбачається, що відбувається повторне збудження кубітів. Це призведе, як і у випадку без резонаторів [149], до збільшення часу життя першого кубіта.

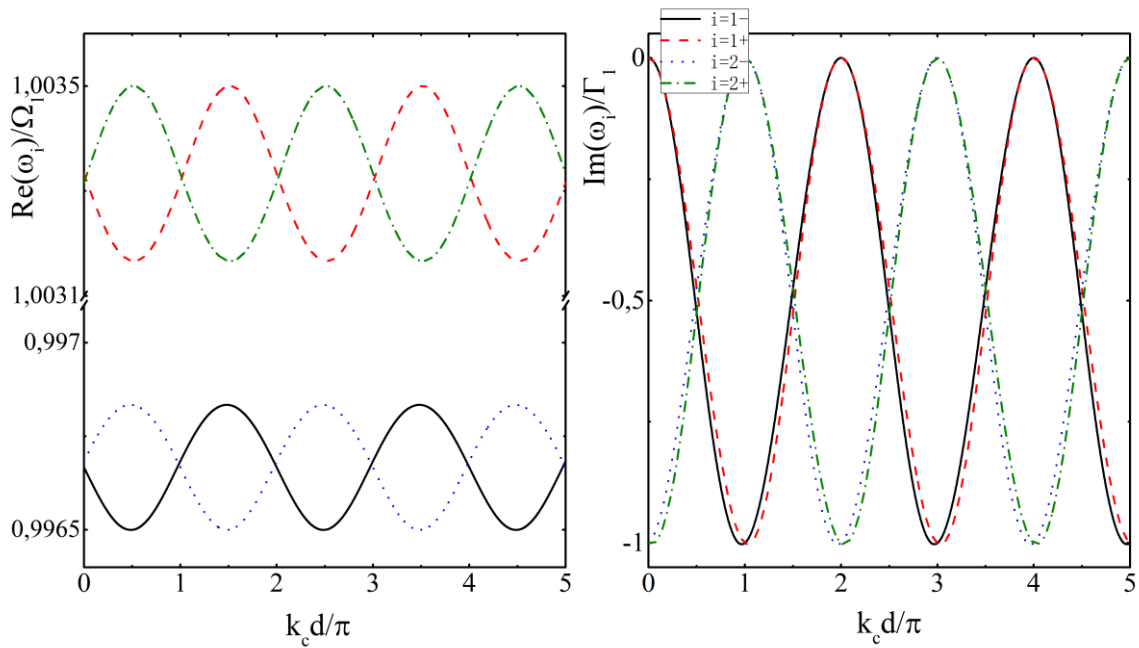


Рис. 29. Залежність енергії резонансу (а) і його ширини (б) від відстані між резонаторами з кубітами в сильному резонансному режимі ($\lambda = 10 \text{ МГц}$, $\Gamma = 1 \text{ МГц}$). Чорна безперервна лінія відповідає кореню ω_1 , червона пунктирна відповідає кореню ω_{1+} , зелена пунктирна відповідає кореню ω_2 , синя штрихпунктирна відповідає кореню ω_{2+} .

Іншими словами з ростом відстані буде зменшуватися взаємний внесок в інтерференцію від обох пар, тому що будуть зменшуватися амплітуди хвильових функцій.

У нашому завданні не було враховане загасання у хвилеводі; але при його врахуванні, це приведе до зменшення амплітуди вихідного сигналу, а також до ослаблення ефекту зміни швидкості випускнення фотона у хвилевід зі збільшенням відстаням між парами кубіті-резонаторі, оскільки останній пов'язаний з інтерференцією хвильових функцій. Іншими словами з ростом відстані буде зменшуватися взаємний внесок в інтерференцію від обох пар, тому що будуть зменшуватися амплітуди хвильових функцій.

Нехай фотон рухається з боку першого резонатора з координатою x_1 . На Рис. 30 і Рис. 31 представлені амплітудно-частотні характеристики для повністю

однакових пар кубіті-резонаторі для сильного резонансного (Рис. 30) і слабкий дисперсного (Рис. 31) режимів, розглянутих раніше. З виразу (4.45) одержимо коефіцієнти проходження ($x > x_2$) і відбиття ($x < x_1$), припускаючи, що у хвилеводі поширюються плоскі хвилі [149]:

$$T = 1 - i\hbar\Gamma_1 R_{11} - i\hbar\Gamma_2 R_{22} - i\hbar\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2} (e^{ikd} R_{12} + e^{-ikd} R_{21}), \quad (4.49)$$

$$R = -i\hbar\Gamma_1 R_{11} e^{-ikd} - i\hbar\Gamma_2 R_{22} e^{ikd} - i\hbar\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2} (R_{12} + R_{21}). \quad (4.50)$$

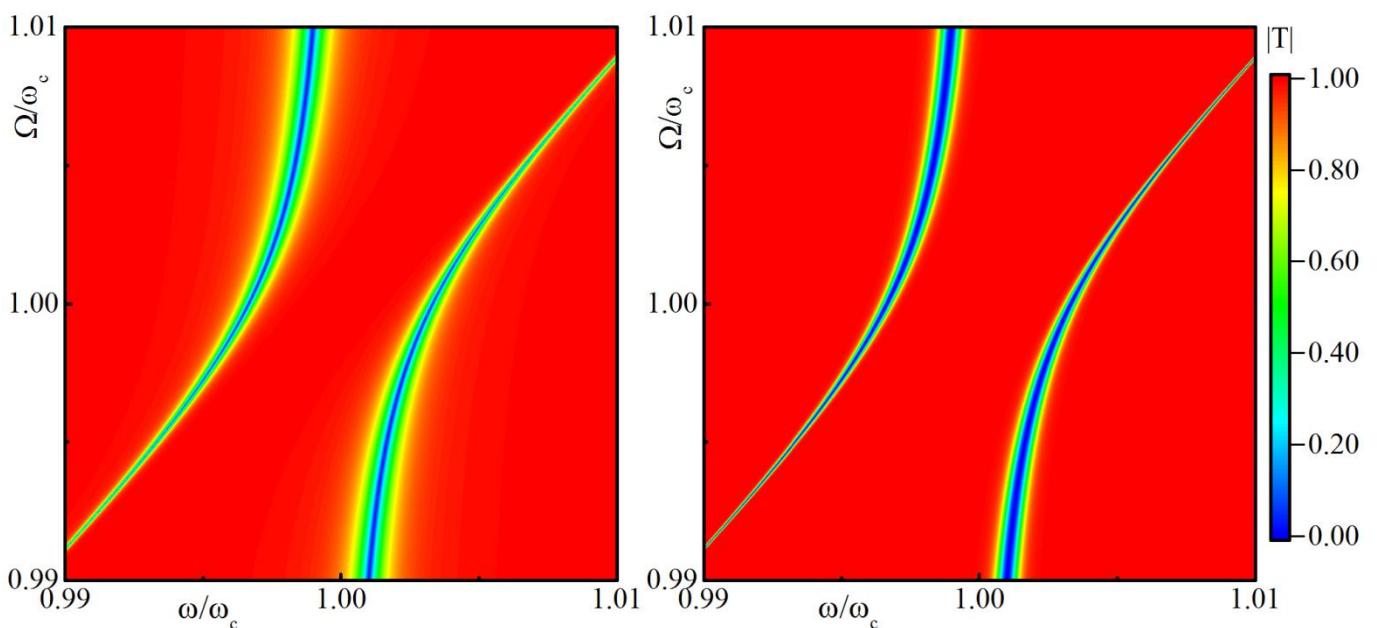


Рис. 30. Залежність амплітуди коефіцієнта проходження T від частоти фотона, що налітає, і відстані між рівнями кубіта при (а) $k_c d < 1$ малих і (б) більших ($k_c d = \pi/2$) відстанях між резонаторами в сильному резонансному режимі ($\lambda \gg \Gamma$, $\Gamma = 1$ MHz, $\lambda = 10$ MHz).

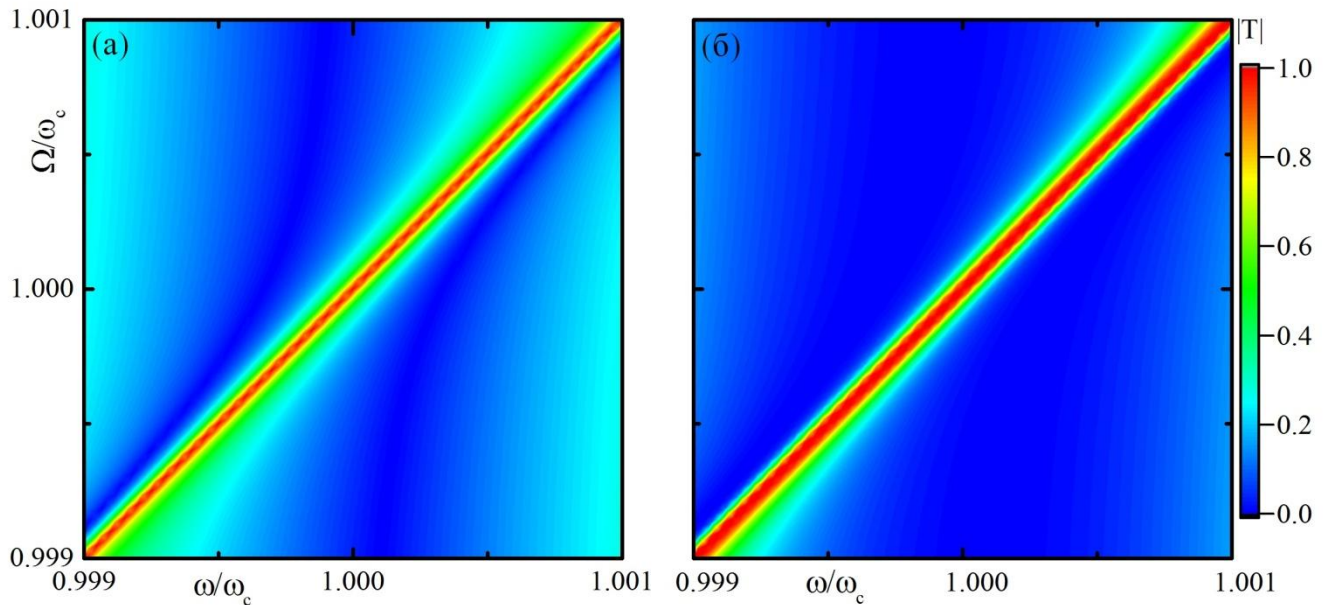


Рис. 31. Залежність амплітуди коефіцієнта проходження T від частоти фотона, що налітає, і відстані між рівнями кубіта при (а) $k_c d < \pi/2$ малих і (б) більших ($k_c d = \pi/2$) відстанях між резонаторами в слабкому дисперсійному режимі ($\Gamma = 5$ MHz, $\lambda = 1$ MHz).

У випадку слабого зв'язку отримано чіткий прояв інтерференційних ефектів на лініях відповідних антикросингу. Іншими словами, пов'язаних з нерезонансною взаємодією моди резонатора з кубітом, при цьому на відстанях кратних π спостерігаються картини ідентичні Рис. 30(а), а при кратних $\pi/2$ Рис. 30(б), які відрізняються ширинами резонансів. Важливо відзначити, що максимальний коефіцієнт проходження, відповідає ситуації, коли енергія зовнішнього фотона буде збігатися з енергією кубіта й резонатора (розглянута смуга частот входить у смугу резонатора). Більше того, при збільшенні відстані зростає смуга частот прозорості системи у випадку, коли кубіт і резонатор відбудовані друг від друга. Зрізи поверхонь на рис. 31 при збігу частоти кубіта й резонатора представлені на рис. 32.

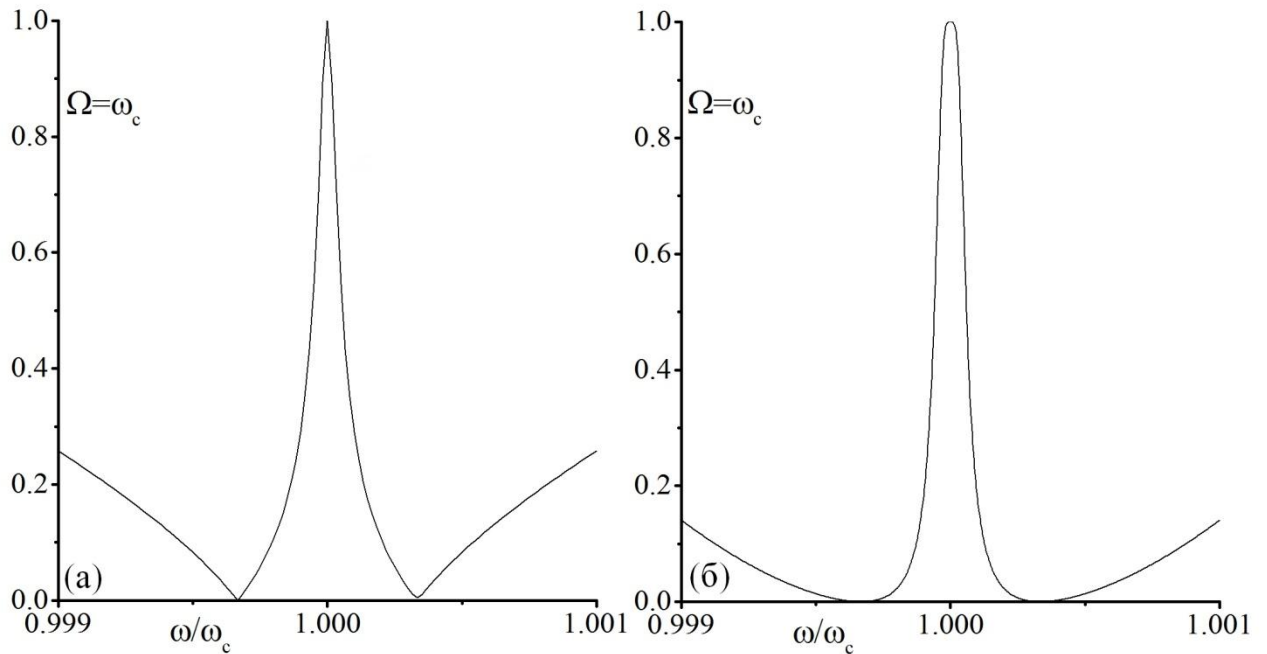


Рис. 32. Амплітудно-частотні характеристики в слабкому дисперсійному режимі при малих (а) і великих (б) ($k_c d = \pi/2$) відстанях між резонаторами. Частота кубітів відповідає частоті резонаторів $\Omega = \omega_c$

При відстанях менш $\pi/2$ і порівнянних з довжиною хвилі фундаментальних мод резонатора виникає резонанс із асиметричним профілем (Рис. 32). У системі конкурують два хвильових процеси. Відбувається інтерференція хвильових функцій, пов'язаних з кожною парою кубіт-резонатор, і спостерігається резонанс Фано [160] (Рис. 33).

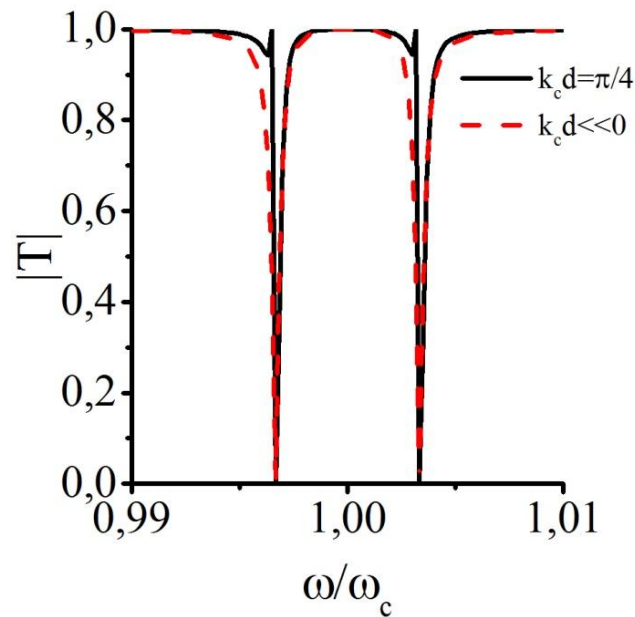


Рис. 33. Амплітудно-частотна характеристика у випадку резонансу $\Omega_1 = \omega_{c1}$ у сильному резонансному режимі.

4.4. Заплутування в системі з 2 резонаторами і кубітами, пов'язаними із хвилеводом

Одним з найбільш яскравих особливостей квантової механіки є поняття заплутаності. Стан системи називається заплутаним, якщо вона не може бути записана у вигляді прямого добутку станів підсистем у Гільбертовому просторі.

$$\Psi_{Full} \neq \Psi_1 \otimes \dots \otimes \Psi_{N-1} \otimes \Psi_N. \quad (4.51)$$

Ці заплутані стани можуть мати властивості, які перебувають поза межами досяжності класичної фізики, і тому часто буває важко зрозуміти інтуїтивно. Однієї з найвідоміших дискусій на цю тему була почата Ейнштейном, що була виражена у вигляді статті Ейнштейна, Подільського й Розена [161]. Неможливість розгляду хвильової функції складеної системи як суми функцій її частин, спочатку розглядалася як неповнота квантовомеханічного опису. Однак після відкриття й експериментальної перевірки, так званих нерівностей Белла [162,163,164,165], стало зрозуміло, що заплутування не є артефактом квантової теорії, а скоріше

експериментальний факт. Тобто повнота опису навколишнього світу вимагає перегляд й відмову від принципу локальності фізичних законів.

Для подальшої роботи розберемося з деякими термінами. Квантовий стан - будь-який можливий стан, у якому може перебувати квантова система. Стан, що з гарним ступенем точності може бути описано вектором Гільбертового простору, називається чистим станом. У протилежному випадку стан називається змішаним. Для опису змішаних станів використовується апарат матриці щільності.

Система може перебувати в чистому або змішаному стані. Чистим квантовим станом називають

Матриця щільності. Як було сказано вище, опис складеної взаємодіючої квантової системи за допомогою тільки векторів стану викликає складності. Для більшості випадків, зокрема опису заплутаності, зручно користуватися матрицею щільності. Матриця щільності для чистого стану будується як проектор

$$|\Psi\rangle\langle\Psi|, \quad (4.52)$$

де $|\Psi\rangle$ - хвильова функція системи. Змішаний стан відразу задається матрицею щільності.

Підхід матриці щільності більше загальний, він дозволяє описувати як чисті, так і змішані стани, як замкнуті системи, так і системи, взаємодіючі зі своїм оточенням. Матриця щільності задає щільність розподілу ймовірності різних станів розглянутої системи. При цьому передбачається, що конкретний стан невідомо, а відома лише ймовірність того, що система перебуває в тім або іншому стані з деякої безлічі припустимих. Якщо провести аналогію зі статичною фізикою, то ймовірність стану еквівалентна класичному стану, заданому точкою у фазовому просторі. Тобто система подібна рідині у фазовому просторі. У цьому випадку її маса в довільному об'ємі фазового простору вважається рівної повної ймовірності того, що система перебуває в якому-небудь зі станів, що відповідають точкам даного об'єму. Потім уводиться щільність цієї рідини в даній точці, рівна ймовірності (на одиниці об'єму

фазового простору) того, що система буде близька до даного стану. Відповідно із цих значень набирається матриця ймовірностей станів.

Властивості матриці щільності наступні:

1. Сума діагональних елементів, тобто слід матриці щільності дорівнює одиниці - $Sp[\rho] = 1$. Повна ймовірність повинна рівняється одиниці.

2. Она ермітова - $\rho = \rho^\dagger$. Ця властивість відбивається як симетричність матриці в речовинному випадку, її недиагональні елементи розташовані парами симетрично щодо головної діагоналі. Або ж у комплексному випадку ці пари будуть комплексно сполученими — це і є ермітова матриця. Така структура матриці щільності треба з того, що системи впливають один на одного. Якщо є вплив системи A на систему B , відповідно, є вплив системи B на систему A — це те саме взаємодія (як третій закон Ньютона). У випадки матриці щільності ведуть мову про набір різних основних станів системи (діагональні елементи) і про кореляції між ними (недиагональні елементи). По діагоналі матриці щільності знаходяться ймовірності станів системи. Наприклад, у кубіта два локальних стани 0 і 1, їхньої ймовірності — це $|a|^2$ і $|b|^2$. А недиагональні елементи характеризують взаємодія між даними основними станами, у випадку кубіта — це ab^* і ba^* , зірочка тут — знак комплексного сполучення. Простір станів для матриці щільності — не тільки набір всіх дискретних (базисних) станів, це й всі можливі взаємодії між ними. Повний набір можливих станів — лише діагональні елементи матриці щільності. Через те, що враховуються всі можливі зв'язки між станами, число елементів у матриці щільності збільшується експоненційно із числом кубітів N і дорівнює $2^N \times 2^N$.

3. Матриця щільності позитивно визначена - $\rho_n \geq 0$. Всі власні значення матриці щільності дійсні (немає комплексних чисел) і ненегативні (більше нуля або рівні йому). Для матриці щільності завжди існує унітарне перетворення, що приводить її до діагональної форми, і по діагоналі будуть стояти ненегативні речовинні числа. У випадку чистих станів ситуація ще простіше - матриця щільності такого стану має тільки одне ненульове власне значення (рівне одиниці), а всі інші дорівнюють нулю.

Останнім часом зріс інтерес до практичного застосування заплутаності. Прикладами є квантова криптографія [166,167] і телепортація [168], де нелокальність проявляється безпосередньо, а також у квантових обчисленнях [169], у яких додаткові ступені волі, пов'язані з нелокальністю використовуються для прискорення обчислень. Через важливість заплутаності, уведення узагальненого опису було б досить зручно.

На сьогодні існує ряд способів оцінювання заплутаності складених квантово-механічних систем. При описі їхніх властивостей за допомогою матриці щільності ρ , гарні міри заплутаності повинні задовольняти ряду умов [170,171]

1. Міра заплутаності $E(\rho)$ може приймати значення рівне або більше одиниці $0 \leq E(\rho) \leq 1$. Обертається в нуль, якщо система не заплутана й дорівнює одиниці, якщо система в одному з Белловських станів [1].

2. Для будь-якого стану ρ й будь-якого локального унітарного перетворення $(U_A \otimes U_B)$ заплутаність залишається незмінною.

3. Будь-які локальні операції й класичні взаємодії не можуть збільшити очікуване значення заплутаності.

4. Розглянемо кілька самих розповсюджених методів для визначення ступеня заплутаності для системи, стан якої задається хвильовою функцією.

Ентропія заплутування (фон Неймана). Першою була уведена міра квантової заплутаності для випадку двочастинної системи в чистому стані. Тобто для двох систем A і B , які утворюють замкнуту (чисту) систему. Ентропія заплутування уведена як ентропія (невизначеність стану) міри квантових кореляцій у складній системі за аналогією з ентропією Шенона у квантовій інформації. Ентропія підсистеми є мірою відсутньої інформації при переході від цілого, тобто чистого стану складеної системи, до частин [172,173]. Вона споконвічно вводилася для чистих станів, але також була розширена й для оцінки заплутаності змішаних станів. Ентропія фон Неймана визначається як

$$E_F(\Psi) = S(\rho_A) = -\text{Tr}[\rho_A \log_2 \rho_A], \quad (4.53)$$

де ρ_A — часткова (скорочена) матриця щільності підсистеми A . Виходить вона узяттям часткового сліду по B . З фізичної точки зору, узяття часткового сліду й одержання скороченої матриці щільності - це усереднення по всіх зовнішніх ступенях волі виділеної підсистеми (по її зовнішньому оточенню). У результаті цієї операції простір припустимих станів підсистеми зменшується, часткова матриця щільності має меншу розмірність, чим вихідна система. Для систем системи із чистими заплутаними станами ентропія фон Неймана буде однакою.

Погодженість (concurrence). Визначається вона як

$$C(\psi) = \left| \sum_i \alpha_i^2 \right|, \quad (4.54)$$

де α_i - коефіцієнти розкладання хвильової функції в базисі Белла [1], максимально заплутаних станів. Погодженість характеризує наскільки близько вектор стану системи апроксимується сумішшю максимально заплутаних станів.

У роботі [173] Вуттерс запропонував аналітичний метод для обчислення погодженості. Засновано він на застосуванні так названого “spin-flip” перетворення, або матриці “перевернених спінів”, яка визначається в такий спосіб

$$\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^* (\sigma_y \otimes \sigma_y), \quad (4.55)$$

де σ_y матриця Паулі, ρ^* матриця, комплексно-комплексно-сполучена вихідній матриці щільності. Після того, як знайдена матриця $\tilde{\rho}$, необхідно знайти добуток матриць $\rho \tilde{\rho}$. Отримана в підсумку матриця є неермітовою, але має речовинні й ненегативні власні значення [174]. Тоді погодженість $C(\psi)$ може бути знайдена з виразу

$$C(\psi) = \max \{ \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}, 0 \}, \quad (4.56)$$

де λ_i власні значення добуток матриць $\rho\tilde{\rho}$. Для чистих станів вирази для погодженості $C(\psi)$ спрощується [175]

$$C(\psi) = \left| \langle \psi | \sigma_y \otimes \sigma_y | \psi^* \rangle \right|. \quad (4.57)$$

На прикладі хвильової функції системи двох спінів знайдемо погодженість і ентропію фон Неймана. Хвильова функція має вигляд

$$|\psi\rangle = a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle, \quad (4.58)$$

де a, b, c, d — у загальному випадку комплексні числа (амплітуди) і виконується умова норміровки $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 1$. Матриця щільності тоді має такий вигляд

$$\rho_{AB} = \begin{pmatrix} |a|^2 & ac^* & ab^* & ad^* \\ ca^* & |c|^2 & cb^* & cd^* \\ ba^* & bc^* & |b|^2 & bd^* \\ da^* & db^* & dc^* & |d|^2 \end{pmatrix}. \quad (4.59)$$

Погодженість $C(\psi)$ (4.57) має вигляд

$$C(\psi) = 2|bc - ad|. \quad (4.60)$$

Для знаходження ентропії, приведемо матрицю щільності (4.59) до діагонального виду

$$\rho_{AB}^{dig} = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.61)$$

Матрицю щільності (4.59) має одне власне значення рівне 1. Тоді ентропія чистого стану дорівнює

$$E_F(\Psi) = -Tr[\rho_A \log_2 \rho_A] = 0. \quad (4.62)$$

Оскільки даний стан ніхто не вимірює, він замкнутий, повністю ізольований від зовнішнього середовища. У нього немає зовнішнього спостерігача, у якому б записувалася інформація про взаємодію, а, отже, і про характеристики системи. Якби такий спостерігач існував, стан перестало б бути чистим заплутаним станом. Знайдемо тепер ентропію часткових матриць щільності ρ_A й ρ_B кожної підсистеми.

$$\rho_A = \begin{pmatrix} |a|^2 & 0 \\ 0 & |d|^2 \end{pmatrix},$$

$$\rho_B = \begin{pmatrix} |a|^2 & 0 \\ 0 & |d|^2 \end{pmatrix}. \quad (4.63)$$

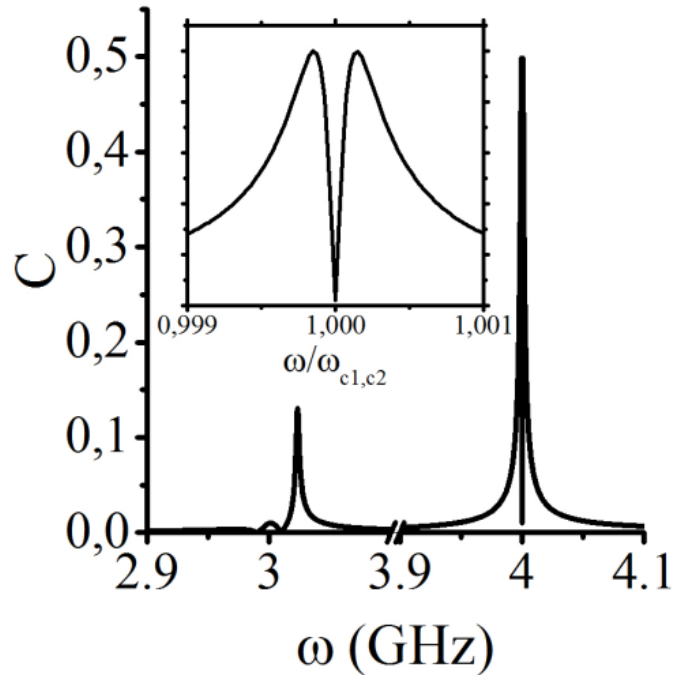


Рис. 34. *Погодженість системи як функція частоти вхідного фотона. Були використані наступні параметри:* $\Omega_1 / 2\pi = 3 \text{ GHz}$, $\omega_{c1} / 2\pi = 3 \text{ GHz}$, $d = \pi$, $\Omega_2 = 4 \text{ GHz}$, $\omega_{c2} = 4 \text{ GHz}$, $\Gamma_{1,2} \gg \lambda_{1,2}$. *При частоті фотона $\omega \pm \lambda_{1,2}$, погодженість у системі стає відмінна від нуля.*

Розглянута модель дозволяє оцінити також заплутаності кубітів у системі Рис. 27. Було полічено як погодженість (4.56) залежить від частоти вхідного фотона при слабкому дисперсійному режимі (див. Рис. 34). Максимум погодженості відповідає частоті фотона, що $\omega \pm \lambda_{1,2}$ налітає .

Висновки

Таким чином, модель неермітового гамільтаніану описує раніше відомі ефекти, такі, як залежність швидкості випускнення фотона в резонатор від відстані між кубітами [149], поява Фано-резонансів на частотах з урахуванням Рабі-розчеплення в чистому квантомеханічному випадку. Це відображає, що спостережувані ефекти мають місце навіть у випадку поширення одиночного фотона в системі. Також даний розрахунок урахує ефект не миттєвої взаємодії

фотона із двома резонаторами, що спричиняється появу інтерференції хвильових функцій віртуальних (недетектованих) фотонів. Було показано, що внутрішні резонанси системи залежать не тільки від її конфігурації, але й від частоти фотона, що налітає.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вирішене важливе завдання теоретичної фізики конденсованого стану, а саме: теоретично описано квантовомеханічні властивості мезоскопічних систем на основі надпровідних кубітів при їхній взаємодії з електромагнітними й однофотонними сигналами. Установлено вплив параметрів такої системи на коефіцієнти проходження й відбиття сигналів.

Основними оригінальними результатами дисертаційної роботи є:

1. Вперше знайдено явний вираз для коефіцієнта проходження електромагнітного сигналу крізь двомодовий резонатор, який пов'язаний з дворівневою системою кубітом. Показано, що у випадку взаємодії кубіта з високоамплітудною і слабоамплітудною модами резонатора одночасно можливе посилення або ослаблення вихідного сигналу. Встановлено, що кубіт виступає в якості квантового нелінійного об'єкту.

2. Вперше встановлено залежність коефіцієнт проходження електромагнітного сигналу через систему кубіт-резонатор від параметрів релаксації кубіта та резонатора. Показано, що у взаємодіючій системі кубіт-резонатор можливе створення інверсної заселеності енергетичних рівнів та суттєве посилення вихідного сигналу. Показано, що коефіцієнту проходження сигналу залежить від температури системи, яка призводить до зменшення абсолютного значення коефіцієнта проходження.

3. Вперше знайдено внесок двокореляторної поправки в рівняннях Максвелла-Блоха для опису еволюції системи кубіта-резонатора. Показано, що врахування кореляторів взаємодії квантових полів кубіта та резонатора суттєво збільшує точність опису системи при вирішанні рівнянь Максвелла-Блоха. Встановлено, що температурний стан кубіта можливо оцінити при вимірі коефіцієнта проходження сигналу через резонатор.

4. Вперше вирішено задачу проходження однофотонних сигналів через комплексну систему хвилевід- кубіт-резонатор. Запропоновано оригінальний підхід

до розв'язку задач проходження одиночного фотону через хвилевід, що базується на методі неермітового гамільтоніана і матриці розсіювання. Показано, що швидкість фотонного випромінювання є функцією взаємного розміщення систем кубітів-резонаторів. Встановлено, що в системі виникають резонанси з асиметричним профілем, які залежать від частоти вхідного фотону.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Wendin G. Quantum bits with Josephson junctions / G. Wendin, V. S. Shumeiko // *Low Temp. Phys.* – 2007. – V. 33, № 9. – P. 957 – 981.
2. Quantum behavior of a flux qubit coupled to a resonator / G. Oelsner, S. H. W. van der Ploeg, P. Macha [et al.] // *Phys. Rev. B.* – 2010. – № 81. – P. 172505-1 – 172505-8.
3. Dissipation in circuit quantum electrodynamics: lasing and cooling of a low-frequency oscillator / J. Hauss, A. Fedorov, S. André [et al.] // *New Journal of Physics.* – 2008. – № 10. – 095018-1 – 095018-7.
4. Sideband Transitions and Two-Tone Spectroscopy of a Superconducting Qubit Strongly Coupled to an On-Chip Cavity / A. Wallraff, D. I. Schuster, A. Blais [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* – 2007. – № 99. – P. 050501-1 – 050501-10.
5. Mooij J. E. Quantum phase slip phenomenon in ultra-narrow superconducting nanorings / J. E. Mooij, Yu. V. Nazarov // *Nature Phys.* – 2006. – № 2. – P. 169 – 173.
6. Mooij J. E. Phase-slip flux qubits / J. E. Mooij, P. M. Harmans // *New Journal of Physics.* – 2005. – № 7. – P. 1367-1 – 1367-8.
7. Quantum phase slip phenomenon in ultra-narrow superconducting nanorings / K. Yu. Arutyunov, T. T. Hongisto, J. S. Lehtinen [et al.] // *Scientific Reports.* – 2012. – V. 2, № 293. – P. 293-1 – 293-8.
8. Coherent quantum phase slip / O. Astafiev, L.B. Ioffe, S. Kafanov [et al.] // *Nature* . – 2012. – № 484. – P. 355 – 358.
9. Qubit architecture with high coherence and fast tunable coupling/ Yu Chen, C. Neill, P. Roushan [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* – 2014. – № 113. – P. 220502-1 – 220502-10.
10. Fast, high-fidelity readout of multiple qubits / N. T. Bronn, B. Abdo, K. Inoue [et al.] // *J. Phys.: Conf. Ser.* – 2017. – № 834. – P. 012003-1 – 012003-8.
11. High-Fidelity Readout in Circuit Quantum Electrodynamics Using the JaynesCummings Nonlinearity / M. D. Reed, L. DiCarlo, B. R. Johnson [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* – 2010. – V. 105, № 17. – P. 173601-1 – 173601-5.

12. Coherent dynamics of a flux qubit coupled to a harmonic oscillator / I. Chiorescu, P. Bertet¹, K. Semba [et al.] // *Nature* . – 2004. – № 431. – P. 159 – 163.

13. Multi-mode ultra-strong coupling in circuit quantum electrodynamics / S. J. Bosman, M. F. Gely, V. Singh [et al.] // *Quantum Information*. – 2017. – V. 3, № 46 . – P. 46 – 50.

14. Strong Coupling of a Quantum Oscillator to a Flux Qubit at its Symmetry Point / A. Fedorov, A. K. Feofanov, P. Macha [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* – 2010. – № 105 . – P. 060503-1 – 060503-8.

15. Ashhab S. Qubit-oscillator systems in the ultrastrong-coupling regime and their potential for preparing nonclassical states / S. Ashhab, F. Nori // *Phys. Rev. A*. – 2010. – V. 81, № 4. – P. 023030-1 – 023030-19.

16. Single-artificial-atom lasing using a voltage-biased superconducting charge qubit / S. Ashhab, J. R. Johansson, A. M. Zagoskin [et al.] // *New J. Phys.* – 2009. – № 11. – P. 042311-1 – 042311-19.

17. Dressed-state amplification by a single superconducting qubit / G. Oelsner, P. Macha, O. V. Astafiev [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* – 2013. – № 110. – P. 053602-1 – 053602-9.

18. Amplitude and phase effects in Josephson qubits driven by a biharmonic electromagnetic field / A. M. Satanin, M. V. Denisenko, A. I. Gelman [et al.] // *Phys. Rev. B*. – 2014. – № 90. – P. 104516-1 – 104516-7.

19. Greenberg Ya. S. Low-frequency Rabi spectroscopy of dissipative two-level systems: Dressed-state approach / Ya. S. Greenberg // *Phys. Rev. B*. – 2007. – № 76. – P. 104520-1 – 104520-8.

20. Ultimate On-Chip Quantum Amplifier / O. V. Astafiev, A. A. Abdumalikov, A. M. Zagoskin [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* – 2010. – № 104. – P. 183603-1 – 183603-5.

21. Observation of the Three-State Dressed States in Circuit Quantum Electrodynamics / K. Koshino, H. Terai, K. Inomata [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* – 2013. – № 110. – P. 263601-1 – 263601-7.

22. Implementation of a Quantum Metamaterial / P. Macha, G. Oelsner, J.-M. Reiner [et al.] // Nat. Commun. – 2014. – № 5. – P. 5146-1 – 5146-9.
23. Feynman R. P. Simulating Physics with Computers / R. P. Feynman// International Journal of Theoretical Physics. – 1982. – V. 21, №. 6.-P. 7-10.
24. Nielsen M. A. Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition / M. A. Nielsen, I. L. Chuang // Cambridge University Press. – 2011. – P. 17 – 28 .
25. Baker H. Wake up to Quantum Coffee / H. Baker // New Scientist. – 1997. – V. 153, № 2073. – P. 28 – 31.
26. Ekert A. Basic concepts in quantum computation / A. Ekert, P. Hayden, H. Inamori// American Institute of Physics. – 1993.
27. Brown J. A quantum revolution for computing / Julian Brown // New Scientist. – 1994.
28. Devoret M. H. Superconducting Qubits: A Short Review / M. H. Devoret, A. Wallraff, J. M. Martinis // Access mode: arXiv:cond-mat/0411174.
29. Rupasovand V.I. Rigorous theory of cooperative spontaneous emission of radiation from a lumped system of two-level atoms: Bethe ansatz method / V. I. Rupasovand, V. I. Yudson // Sov. Phys. JETP. – 1984. – V. 60. – P. 927 – 934.
30. Resonance fluorescence of a single artificial atom / O. Astafiev, A. M. Zagoskin, A. A. Abdumalikov Jr. [et al.] // Science. – 2010. – V. 327. – P. 840 – 848.
31. Demonstration of a Single-Photon Router in the Microwave Regime / Io-Chun Hoi, C. M. Wilson, G. Johansson [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2011. – V. 107. – P. 073601-1– 073601-9.
32. Li H.-C. Electromagnetically Induced Transparency Using a Artificial Molecule in Circuit Quantum Electrodynamics / H.-C. Li, G.-Q. Ge // Optics and Photonics Journal. – 2013. –V. 3, № 2B. – P. 29 – 36.

33. Shen J.-T. Coherent Single Photon Transport in an One-Dimensional Waveguide Coupled with Superconducting Quantum Bits / J.-T. Shen , S. Fan // Phys. Rev. Lett. – 2005. – V. 95, № 21. – P. 213001-1 – 213001-8.

34. A single-photon transistor using nanoscale surface plasmons / D. E. Chang, A. S. Sørensen, E. A. Demler [et al.] // Nature Phys 2007. – V. 94, № 3. – P. 807 – 812.

35. Longo P. Few-Photon Transport in Low-Dimensional Systems: Interaction-Induced Radiation Trapping / P. Longo, P. Schmitteckert, K. Busch // Phys Rev. Lett. – 2010. – V. 104, № 2. – P. 023602-1 – 023602-9.

36. Eichler C. Characterizing quantum microwave radiation and its entanglement with superconducting qubits using linear detectors / C. Eichler, D. Bozyigit, A. Wallraff // Phys. Rev. A. –2012. –V. 86, № 3. – P. 032106-1 – 032106-10.

37. Signal amplification in a qubit-resonator system / **D. S. Karpov**, G. Oelsner, S.N. Shevchenko, Ya.S. Greenberg, E. Ilichev // Low Temp. Phys. – 2016. – V. 42, № 3. – P. 189 – 198.

38. Controllable Scattering of a Single Photon inside a One-Dimensional Resonator Waveguide / L. Zhou, Z. R. Gong, Yu-xi Liu [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2008. – V. 101, № 10. –P. 100501-1 – 100501-9.

39. Single-photon transport in a transmission line resonator interacting with two capacitively coupled Cooper-pair boxes / Y.-L. Chen , Y.-F. Xiao, X. Zhou [et al.] // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. – 2008. –V.41, № 7. – P. 175503-1 – 175503-7.

40. Experimental State Tomography of Itinerant Single Microwave Photons / C. Eichler, D. Bozyigit, C. Lang [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2011. – V. 106, № 10. – P. 220503-1 – 220503-10.

41. Strong coupling of a single photon to a superconducting qubit using circuit quantum electrodynamics / A. Wallraff, D.I. Schuster, A. Blais [et al.] // Nature. – 2004. – V. 431, № 5. – P. 162 – 167.

42. Schoelkopf R. J. Wiring up quantum systems / R. J. Schoelkopf, S.M. Girvin // Nature. –2008. – V. 451, № 10. – P. 664 – 669.

43. Amplification and attenuation of the transmitted signal by doubly-dressed states / S. N. Shevchenko, G. Oelsner, Ya. S. Greenberg, P. Macha, **D. S. Karpov**, M. Grajcar, U. Hubner, A. N. Omelyanchouk, E. Il'ichev // *Phys. Rev. B.* – 2014. – V. 89, № 18. – P. 184504-1 – 184504-10.

44. Landau-Zener-Stuckelberg-Majorana lasing in circuit QED / P. Neilinger, S. N. Shevchenko, J. Bogár, M. Reháč, G. Oelsner, **D. S. Karpov**, U. Hübner, O. Astafiev, M. Grajcar, E. Il'ichev // *Phys. Rev. B.* – 2016. – V. 94, No. 9 – P. 094519-1–094519-10.

45. Scattering of a single photon on a two-qubit structure with resonators / A.N. Sultanov, **D. S. Karpov**, Ya. S. Greenberg, S. N. Shevchenko, A. A. Shtygashev // *Low Tem. Phys.* – 2017. – V. 43, № 7. – P.1003 – 1010.

46. Shevchenko S. N. Thermometry and memcapacitance with qubit-resonator system / **D. S. Karpov**, S. N. Shevchenko // *Phys. Rev. Applied.* – V. 10, №. 1. – P. 014013-1 – 014013-11.

47. Transport properties of a microwave photon in a system with two artificial atoms / A.N. Sultanov, **D.S. Karpov**, Ya. S. Greenberg, B. I. Ivanov, S.N. Shevchenko // 13th International Scientific-Technical Conference on Actual Problems of Electronic Instrument Engineering “APEIE-2016”, October 3–6, 2016 : book of abstr. – Russia, Novosibirsk, 2016. – P. 118 – 121.

48. Sultanov A. Photon transport in qubit-resonator structures / A. Sultanov, **D. S. Karpov**, Ya. S. Greenberg, S.N. Shevchenko // VII International Conference for Young Scientists “Low Temperature Physics”, June 6–10, 2016 : book of abstr. – Ukraine, Kharkiv, 2016. – P. 46.

49. Sultanov A. Study of microwave transport in solid-state hybrid qubit-resonator structure / A. Sultanov, **D.S. Karpov**, Ya. S. Greenberg, S.N. Shevchenko // XIV All-Russian School-Seminar on Physics of Condensed Matter, November 12–19, 2015 : book of abstr. – Russia, Voroneg, 2015. – P. 35.

50. Amplification in the doubly-dressed system / **D. S. Karpov**, S. N. Shevchenko, G. Oelsner, Ya. S. Greenberg, P. Macha, M. Grajcar, A. N. Omelyanchouk, E. Il'ichev //

3rd International Conference on Nanophysics and Nanoelectronics "Mesoscopic Structures: Fundamentals and Applications". – June 22–27, 2015 : book of abstr. – Russia, Novosibirsk, 2015. – P. 14.

51. Strong driving regime of the qubit-resonator system / **D. S. Karpov**, S. N. Shevchenko, A. N. Omelyanchouk, E. Il'ichev // VI International Conference for Young Scientists "Low Temperature Physics", June 1–5, 2015 : book of abstr. – Ukraine, Kharkiv, 2015. – P. 39.

52. Karpov D. S. Theoretical study of the signal amplification in the qubit-resonator system / **D. S. Karpov**, S. N. Shevchenko // V International Conference for Young Scientists "Low Temperature Physics", June 2–5, 2014 : book of abstr. – Ukraine, Kharkiv, 2014. – P. 45.

53. Karpov D. S. Amplification and attenuation of the transmitted signal by qubit's dressed states / **D. S. Karpov**, S. N. Shevchenko // IV International Conference for Young Scientists "Low Temperature Physics", June 3–7, 2013 : book of abstr. – Ukraine, Kharkiv, 2013. – P. 31.

54. Karpov D. S. Qubit's dressed states in resonator / **D. S. Karpov**, S.N. Shevchenko // III International Conference for Young Scientists "Low Temperature Physics", May 14–18, 2012 : book of abstr. – Ukraine, Kharkiv, 2012. – P. 67.

55. Гринберг Я. С. Исследование микроволнового транспорта в твердотельной гибридной структуре кубит-резонатор / Я. С. Гринберг, А. Н. Султанов, **Д. С. Карпов** // 16 Всероссийская школа-семинар по проблемам физики конденсированного состояния вещества "СПФКС–16", 12–19 Ноября, 2015 : тезисы. – Россия, Екатеринбург, 2015. – С. 217.

56. Karpov D. S. Quantum memcapacitance with transmon-resonator system / **D. S. Karpov**, S.N. Shevchenko, A. Fedorov // 3th biennial European Conference on Applied Superconductivity "EUCAS 2017", September 17–21, 2017. – Switzerland, Geneva, 2017. Access mode: <https://www.symporg-registrations.com/symporg/frontend/reg/absViewDocumentFE.csp?popup=1&documentID=7356&eventID=112>.

57. Edlén B. Encyclopedia of Physics / B. Edlén. – Berlin: Springer-Verlag, 1964. – V. 27. – 339 p.
58. Carroll B. W. An Introduction to Modern Astrophysics / B. W. Carroll. – USA: Pearson Education, 2007. – 256 p.
59. Condon E. U. The Theory of Atomic Spectra / E. U. Condon, G. H. Shortley. – Cambridge: Cambridge University Press, 1935. – 520 p.
60. Cowan R. D. The Theory of Atomic Structure and Spectra / R. D. Cowan. – Berkeley: University of California Press, 1981. – 460 p.
61. Bethe H. A. Quantum Mechanics of One- and Two-Electron Atoms / H. A. Bethe, E. E. Salpeter. – New York: Plenum, 1977. – 543 p.
62. Andersen C. K. Quantized resonator field coupled to a current-biased Josephson junction in circuit QED / C. K. Andersen, G. Oelsner, E. Il'ichev, K. Mølmer // Phys. Rev. A. – 2014. – V. 89, № 4. – P.033853-1 – P. 033853-10.
63. Григорьев Е. Д. Анализ цепей с распределёнными параметрами. Теоретические основы синтеза фильтров / Е. Д. Григорьев. – Москва: Методические указания, 2013. – 56 с.
64. Pozar D. M. Microwave Engineering / D. M. Pozar. – New York: Wiley, 1990. – 834 p.
65. Losses in coplanar waveguide resonators at millikelvin temperatures / P. Macha, S. H. W. van der Ploeg, G. Oelsner [et al.] // Appl. Phys. Lett. – 2010. – V. 96, № 9. – P. 062503-1 – 062503-9.
66. Bishop L. S. Circuit Quantum Electrodynamics: A Dissertation for the Degree of Doctor of Philosophy / Lev Samuel Bishop; Graduate School of Yale University, USA. – Yale, 2010. – 168 p.
67. Schuster D. I. Circuit Quantum Electrodynamics: A Dissertation for the Degree of Doctor of Philosophy / David Isaac Schuster; Graduate School of Yale University. – Yale, USA, 2007. – 255 p.
68. Ландау Л. Д. Механика / Ландау Л. Д., Е. М. Лифшиц. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 224 с.

69. Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits: An architecture for quantum computation. A. Blais, R.-S. Huang, A. Wallraff [et al.] // *Physical Review A*. – 2004. – V.69, № 6. –P. 062320-1 – 062320-12.

70. Hagelstein P. L. *Introductory Applied Quantum and Statistical Mechanics* / P. L. Hagelstein, S. D. Senturia, T. P. Orlando. – New York: John Wiley & Sons, 2004. – 785 p.

71. Andersen C. K. *Theory and design of quantum devices in circuit QED: A Dissertation for the Degree of Doctor of Philosophy* / Christian Kraglund Andersen; Department of Physics and Astronomy Aarhus University. – Aarhus C, Denmark, 2016. – 193 p.

72. Oelsner G. *Single-artificial-atom lasing of a dressed flux qubit: A Dissertation for the Degree of Doctor of Philosophy* / Gregor Oelsner; Grades vorgelegt dem Rat der Physikalisch-Astronomischen Fakultät der Friedrich-Schiller-Universität. – Jena, Germany, 2016. – 157 p.

73. Schleich W. P. *Quantum Optics in Phase Space* / W. P. Schleich. – Berlin: Wiley-VCH, 2001. – 716 p.

74. Malkoc O. *Quantum computation with superconducting qubits* / O. Malkoc // Quantum information lecture course at Lund University. Access mode: <http://www.matfys.lth.se/education/quantinfo/Malkocrep.pdf>

75. Geller M. R. *Quantum computing with superconductors I: Architectures* / M. R. Geller, E. J. Pritchett, A. T. Sornborger, F. K. Wilhelm // *Manipulating Quantum Coherence in Solid State Systems. NATO Science Series II: Mathematics, Physics and Chemistry*, Springer, Dordrecht. – V. 244. –130 p.

76. Wendin G. *Quantum information processing with superconducting circuits: A review* / G. Wendin // *Reports on Progress in Physics*. –2016. – V. 80, № 10. – P. 106001-1 – 106001-108.

77. Шмидт В.В. *Введение в физику сверхпроводников* / В.В. Шмидт. – Москва: МЦНМО, 2000. – 402 с.

78. M. Introduction to superconductivity / M. Tinkham. – New York: McGraw-Hill, 1996. – 480 p.
79. Josephson persistent-current qubit/ J. E. Mooij, T. P. Orlando, L. Levitov [et al.] // Science. –1999. – V. 285, № 5430. – P.1036 –1039.
80. Makhlin Y. Quantum-state engineering with josephson-junction devices / Y. Makhlin, G. Schön, A. Shnirman // Reviews of Modern Physics. –2001. –V. 73,№ 2. – P. 357–400.
81. Scully M. O. Quantum Optics / M. O. Scully, M. S. Zubair. – Cambridge: Cambridge University Press, 1997. – 630 p.
82. Brasil C. A. A simple derivation of the Lindblad equation / C. A. Brasil, F. F. Fanchini, R. de J. Napolitano // Revista Brasileira de Ensino de Fisica. –2013. –V. 35, № 32. – 1303-1 – 1303-15.
83. Breuer H.-P. The Theory of Open Quantum Systems / H.-P. Breuer, F. Petruccione. – Oxford: Oxford University Press, 2002. – 636 p.
84. Tarasov V.E. Quantum Mechanics of Non-Hamiltonian and Dissipative Systems/ V. E. Tarasov. – New York: Elsevier Science, 2008. –530 p.
85. Greenberg Ya. S. Quantum theory of the low-frequency linear susceptibility / Ya. S. Greenberg, E. Ilichev // Phys. Rev. B. – 2008. – V. 77, № 87. – 094513-1 –094513-9.
86. Papageorge A. Bichromatic driving of a solid-state cavity quantum electrodynamics system / A. Papageorge, A. Majumdar, E.D. Kim, J. Vůckovič // New J. Phys. – 2012. – V. 14, № 7. – 013028-1 – 013028-11.
87. M. Probe spectroscopy of quasienergy states / M. Silveri, J. Tuorila, M. Kemppainen, E. Thuneberg // Phys. Rev. B. –2014. –V. 87, № 8. – P. 134505-1 – 134505-12.
88. Two-resonator circuit QED: Dissipative Theory/ G. M. Reuther, D. Zueco, F. Deppe [et al.] // Phys. Rev. B. –2010. –V. 81, № 12. – P. 144510-1 – 144510-9.

89. Zhao J. Transmission Properties of a Qubit-Coupled-Two-Resonator System / J. Zhao, Y. Yu, B.-B. Jin // IEEE Trans. Appl. Supercond. – 2013. –V. 23, № 9. – 1701705-1 – 1701705-11.

90. Coherence times of dressed states of a superconducting qubit under extreme driving / C.M. Wilson, T. Duty, F. Persson [et al.] // Phys. Rev. Lett. –2007. –V. 98, № 21. – P. 257003-1 – 257003-13.

91. Thermal Excitation of Multi-Photon Dressed States in Circuit Quantum Electrodynamics / J. M. Fink, M. Baur, R. Bianchetti [et al.] // Phys. Scr. – 2009. – V. 137, № 15. – P. 014013-1 – 014013-11.

92. Electromechanically induced absorption in a circuit nano-electromechanical system / F. Hocke, X. Zhou, A. Schliesser [et al.] // New J. Phys. –2012. – V. 14, № 9. – P. 123037-1 – 123037-9.

93. Cohen-Tannoudji C. Atom-Photon Interactions. Basic Processes and Applications / C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Rock, G. Grynberg . – New York: John Wiley, 1998 P. 407 – 630 .

94. Nakamura Y. Rabi Oscillations in a Josephson-Junction Charge Two-Level System / Y. Nakamura, Yu. A. Pashkin, J. S. Tsai // Phys. Rev. Lett. – 2001. –V. 87, № 12. – P. 246601-1 – 246601-13.

95. Liu Y. X. Control of the quantum interference in a superconducting qubit system / Y. X. Liu, C. P. Sun, F. Nori // Phys. Rev. A. –2006. – V. 74, № 9. – P. 052321-1 – 052321-8.

96. Landau-Zener-Stückelberg interference of microwave-dressed states of a superconducting phase qubit / G. Sun, X. Wen, B. Mao [et al.]// Phys. Rev. B. – 2011. – V. 83, № 10. – P. 180507-1 – 180507-14.

97. Yan M. Observation of doubly dressed states in cold atoms / M. Yan, E. G. Rickey, Y. Zhu // Phys. Rev. A. – 2001. – V. 64, № 9. – P. 013412-1 – 013412-8.

98. C. L. Garrido Alzar Evaporative cooling in a radio-frequency trap / C. L. Garrido Alzar, H. Perrin, B. M. Garraway, V. Lorent // Phys. Rev. A. – 2006. – V. 74, № 11. – P. 053413-1 – 053413-10.

99. Saiko A. P. Multiplication of qubits in a doubly resonant bichromatic field / A. P. Saiko, R. Fedaruk // JETP Lett. –2010. –V. 91, № 14. – P. 681 – 690.
100. Quantum behaviour of a flux qubit coupled to a resonator / A. N. Omelyanchouk, S. N. Shevchenko, Ya. S. Greenberg [et al.] // Low Temp. Phys. – 2010. – V. 36, № 21. – P. 893 – 904.
101. Vogel W. Quantum Optics, 3rd ed / W. Vogel, D. G. Welsch. – Weinheim: Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2006. – P..
102. Vogel W. Nonlinear coherent states / R. L. de Matos Filho, W. Vogel // Phys. Rev. A. – 2010. – V. 54, № 5. – P. 4560-1 – 4560-8.
103. Mandel L. Optical Coherence and Quantum Optics / L. Mandel, E. Wolf. – Cambridge: Cambridge University Press, 1995. – P. 900 – 904.
104. Pearle P. Simple Derivation of the Lindblad Equation / P. Pearle // Europ. Journal of Phys. – 2012. – V. 33, № 4. – P. 4 – 13.
105. Карпов Д.С. Одетые состояния кубита в резонаторе: Бакалаврская дипломная работа / Денис Сергеевич Карпов; ХНУ им. Каразина. – Харьков, 2012. – 104 с.
106. Ландау Л. Д. Квантовая механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – Москва: Наука, 1989. – 768 с.
107. Р. Фейнман Фейнмановские лекции по физике. Пер. с англ. / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. –Том. 8. Том 9. – Москва: Наука, 1966-1967. – 530 с.
108. Коэн-Таннуджи К. Квантовая механика. Т.1 / К. Коэн-Таннуджи, Б. Диу, Ф. Лалоз. – Екатеринбург: Изд-во Уральского ун-та, 2000. — 944 с.
109. Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits: An architecture for quantum computation / A. Blais, R. S. Huang, A. Wallraff [et al.] // Phys. Rev. A. – 2004. – V. 69, № 12. – P. 062320-1 – 062320-10.
110. Charge insensitive qubit design derived from the Cooper pair box / J. Koch, T. M. Yu, J. Gambetta [et al.] // Phys. Rev. A. – 2007. – V. 76, № 9. – P. 042319-1 – 042319-9.

111. Circuit Quantum Electrodynamics: Coherent Coupling of a Single Photon to a Cooper Pair Box / A. Wallraff, D. I. Schuster, A. Blais [et al.] // *Nature*. – 2004. – V. 431, № 8. – P. 162 – 168.

112. Sillanpa M. A. Coherent quantum state storage and transfer between two phase qubits via a resonant cavity / M. A. Sillanpa, J. I. Park, R. W. Simmonds // *Nature*. – 2007. – V. 449. – P. 438 – 442.

113. Observation of time-domain Rabi oscillations in the Landau-Zener regime with a single electronic spin / J. Zhou, P. Huang P., Q. Zhang [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* – 2014. – V. 112, № 1. – P. 010503-1 – 010503-13.

114. Remizov S. V. Role of qubit-cavity entanglement for switching dynamics of quantum interfaces in superconductor metamaterials / S. V. Remizov, D. S. Shapiro, A. N. Rubtsov // *JETP Lett.* – 2017. – V. 105, № 3. – P. 130 – 139.

115. Observation of the Bloch-Siegert shift in a driven quantum-to-classical transition / I. Pietikäinen, S. Danilin, K. S. Kumar [et al.] // *Phys. Rev. B*. – 2017. – V. 96, № 8. – P. 020501-1 – 020501-11.

116. Multilevel effects in a driven generalized Rabi model / I. Pietikäinen, S. Danilin, K. Kumar [et al.] // *J. Low Temp Phys.* – 2018. – V. 32, № 9. – P. 185 – 190.

117. Opportunities for mesoscopics in thermometry and refrigeration: Physics and applications / F. Giazotto, T. T. Heikkilä, A. Luukanen [et al.] // *Rev. Mod. Phys.* – 2006. – V. 78, № 12. – P. 217-274.

118. Albash T. Temperature scaling law for quantum annealing optimizers / T. Albash, V. Martin-Mayor, I. Hen // *Phys. Rev. Lett.* – 2017. – V. 119, № 10. – P. 110502-1 – 110502-11.

119. Dressed relaxation and dephasing in a strongly driven two-level system / C. M. Wilson, G. Johansson, T. Duty [et al.] // *Phys. Rev. B*. – 2010. – V. 81, № 4. – P. 024520-1 – 024520-9.

120. Ultrastrong coupling of a single artificial atom to an electromagnetic continuum in the nonperturbative regime / P. Forn-Diaz, J. J. Garcia-Ripoll, B. Peropadre [et al.] // *Nat. Phys.* – 2017. – V. 13, № 9. – P. 39 – 46.

121. Double quantum dot Floquet gain medium / J. Stehlik, Y.-Y. Liu, C. Eichler [et al.] // Phys. Rev. X. –2016. – V. 6, № 9. – P. 041027-1 – 041027-7.

122. Quantum-to-classical transition in cavity quantum electrodynamics / J. M. Fink, L. Steen, P. Studer [et al.] // Phys. Rev. Lett. –2010. –V. 105, № 12. – P. 163601-1 – 163601-8.

123. Brunelli M. Qubit thermometry for micromechanical resonators / M. Brunelli, S. Olivares, M. G. A. Paris // Phys. Rev. A. – 2011. – V. 84, № 7. – P. 032105-1 – 032105-8.

124. Higgins K. D. B. Quantum thermometry using the ac Stark shift within the Rabi model / K. D. B. Higgins, B. W. Lovett, E. M. Gauger // Phys. Rev. B. – 2013. – V. 88, № 11. – P. 155409-1 – P. 155409-10.

125. Ashhab S. Landau-Zener transitions in a two-level system coupled to a finite-temperature harmonic oscillator / S. Ashhab // Phys. Rev. A. – 2014 . – V. 90, № 2. – P. 062120-1 – 062120-10.

126. Single-qubit thermometry / S. Jevtic, D. Newman, T. Rudolph [et al.] // Phys. Rev. A. – 2015. – V. 91, № 7. – P. 012331-1 – 012331-10.

127. Charge-insensitive qubit design derived from the Cooper pair box / J. Koch, T. M. Yu, J. Gambetta [et al.] // Phys. Rev. A. – 2007. – V. 76, № 4. – P. 042319-1 – 042319-13.

128. Dynamics of dispersive single-qubit readout in circuit quantum electrodynamics / R. Bianchetti, S. Filipp, M. Baur [et al.] // Phys. Rev. A. – 2009. –V. 80, № 4. – P. 043840-1 – 043840-11.

129. Mu Y. One-atom lasers / Y. Mu, C. M. Savage // Phys. Rev. A. – 1992. – V. 46, № 7. – P. 5944-5954.

130. Dissipation in circuit quantum electrodynamics: lasing and cooling of a low-frequency oscillator / J. Hauss, A. Fedorov, S. Andre [et al.] // New Journal Phys. – 2008. – V. 10, № 6. – P. 095018-1 – 095018-9.

131. Few-qubit lasing in circuit QED / S. Andrè, V. Brosco, M. Marthaler [et al.] // Physica Scripta T. – 2009. – V. 137, № 4. – P. 014016-1 – 014016-9.

132

133. Walls D. F. Quantum Optics / D. F. Walls, G. J. Milburn. – Berlin: Springer Verlag, 1994. –425 p.

134. Nonlinear response of the vacuum Rabi resonance / L. S. Bishop, J. M. Chow, J. Koch [et al.] // Nat. Phys. – 2009. –V. 5, № 3. –P. 105 – 115.

135. Thermal and residual excited-state population in a 3D transmon qubit / X. Y. Jin, A. Kamal, A. P. Sears [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2015. – V. 114, № 9. – P. 240501-1 – 240501-10.

136. Quantum simulation of general semiclassical Rabi model beyond strong driving regime / K. Dai, H. Wu, P. Zhao [et al.] // Appl. Phys. Lett. – 2017. – V. 111, № 24. – P. 242601-1 – 242601-5.

137. Jerger M. In situ characterization of qubit control lines: a qubit as a vector network analyzer / M. Jerger, Z. Vasseli, A. Fedorov // Access mode: arXiv:1706.05829.

138. Xu Y. Scattering theory analysis of waveguide-resonator coupling / Y. Xu, Y. Li, R. K. Lee, A. Yariv // Phys. Rev. E. – 2000. – V. 62, № 5. – P. 7389-1 – 7389-10.

139. Diaz-Camacho G. Photonmediated qubit interactions in 1D discrete and continuous models / G. Diaz-Camacho, D. Porrás, J. J. Garcia-Ripoll // Phys. Rev. A. – 2015. – V. 91, № 5. – P. 063828-1 – 063828-10.

140. Feshbach H. Unified Theory of Nuclear Reactions / H. Feshbach // Ann. Phys. – 1958. – V. 5, № 8. – P. 357 – 363.

141. Internal chaos in an open quantum system: From Ericson to conductance fluctuations / S. Sorathia, F.M. Izrailev, G.L. Celardo [et al.] // Eur. Phys. Lett. – 2009. – V. 88, № 9. – P. 27003-1 – 27003-10.

142. Transport through nanostructures with asymmetric coupling to the leads/ G. L. Celardo, A. M. Smith, S. Sorathia [et al.] // Phys. Rev. B. – 2010. – V. 82, № 11. – P. 165437-1 – 165437-11.

143. Quantum signal transmission through a single-qubit chain / Ya. S. Greenberg, N. Merrigan, A. Tayebi [et al.] // Eur. Phys. J. – 2013. – V. 86, № 11. – P. 368 – 379.

144. Distribution of Resonance Widths and Dynamics of Continuum Coupling / G. L. Celardo, N. Auerbach, F. M. Izrailev [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* – 2011. – V. 106, № 9. – P. 042501-1 – 042501-12.

145. Flambaum V. V. Statistical theory of finite Fermi systems based on the structure of chaotic eigenstates / V. V. Flambaum, F. M. Izrailev // *Phys. Rev. E.* – 1997. – V. 56, № 4. – P. 5144 – 5156.

146. Madroñero J. Ericson Fluctuations in an Open Deterministic Quantum System: Theory Meets Experiment / J. Madroñero , A. Buchleitner // *Phys. Rev. Lett.* – 2005. – V. 95, № 11. – P. 263601-1 – 263601-10.

147. Generalisation of the transfer matrix formulation of the theory of electron and photon conductance / L. C. Botten, A. A. Asatryan, N. A. Nicorovici [et al.] // *Physica B.* – 2007. – V. 394, № 9. – P. 320 – 335.

148. Auerbach N. Super-radiant dynamics, doorways, and resonances in nuclei and other open mesoscopic systems / N. Auerbach, V. Zelevinsky // *Rep. Progr. Phys.* – 2011. – V. 74, № 9. – P. 106301-1 – 106301-13.

149. Greenberg Ya. S. Non-Hermitian Hamiltonian approach to the microwave transmission through a one-dimensional qubit chain / Ya. S. Greenberg, A. A. Shtygashev // *Phys. Rev. A.* – 2015. – V. 92, № 9. – P. 063835-1 – 063835-12.

150. Long-Distance Spin-Spin Coupling via Floating Gates / L. Trifunovic, O. Dial, M. Trif [et al.] // *Phys. Rev. X.* – 2012. – V. 2, № 9. – P. 011006-1 – 011006-12.

151. Zheng H. Persistent Quantum Beats and Long-Distance Entanglement from Waveguide-Mediated Interactions / H. Zheng, H.U. Baranger // *Phys. Rev. Lett.* – 2013. – V. 110, № 11. – P. 113601-1 – 113601-13.

152. Photon-mediated interactions between distant artificial atoms / A. F. van Loo, A. Fedorov, K. Lalumière [et al.] // *Science.* – 2013. – V. 342, № 6165. – P. 1494 – 1496.

153. Coupling superconducting qubits via a cavity bus / J. Majer, J. M. Chow, J. M. Gambetta [et al.] // *Nature.* – 2007. – V. 449, № . – P. 443 – 446.

154. Fang Y.-L. L. One-dimensional waveguide coupled to multiple qubits: photon-photon correlations / Y.-L. L. Fang, H. Zheng, H. U. Baranger // EPJ Quantum Technology. – 2014. – V. 1, № . – P. 3 – 13.

155. Омелянчук А. Н. Квантовые явления в джозефсоновских кубитах / А. Н. Омелянчук, Е. В. Ильичев, С. Н. Шевченко. – Киев: Наукова думка, 2013. – 186 с.

156. Shevchenko S. N. Multiphoton transitions in Josephson-junction qubits / S. N. Shevchenko, A. N. Omelyanchouk, E. Il'ichev // Low Temp.Phys. – 2012. – V. 38, № 4. – P. 283 – 303.

157. Быков В.П. Лазерная электродинамика. Элементарные и когерентные процессы при взаимодействии лазерного излучения с веществом / В.П. Быков. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 119 с.

158. Mandel L. Optical Coherence and Quantum Optics / L. Mandel, E. Wolf. – Cambridge: Cambridge University Press, 1995. – 1166 p.

159. Resonance at the Rabi frequency in a superconducting flux qubit / Ya. S. Greenberg, E. Il'ichev, G. Oelsner [et al.] // AIP Conf. Proc. – 2015. – V. 1619, № 1. – P. 89 – 97.

160. Chen G.-Y. Scattering of microwave photons in superconducting transmission-line resonators coupled to charge qubits / G.-Y. Chen, M.-H. Liu, Y. N. Chen // Phys. Rev. A. – 2014. – V. 89, № 5. – P. 053802-1 – 053802-10.

161. Einstein A. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete / A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen // Phys. Rev. –1935. – V. 47, № 10. – P. 777 – 781.

162. Bell J. S. On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox / J. S. Bell // Physics. – 1964. – V. 1, № 3. – P. 195 – 200.

163. Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories / J. F. Clauser, M. Horne, A. Shimony [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 1969. – V. 23, № 15. – P. 880 – 891.

164. Clauser J. F. Bell's theorem. Experimental tests and implications / J. F. Clauser, A. Shimony // Rep. Prog. Phys. – 1978. – V. 41, № 12. – P. 1881 – 1928.

165. Home D. Bell's theorem and the EPR paradox / D. Home, F. Selleri // Riv. Nuovo Cimento. – 1991. – V. 14, № 8. – P. 1 – 13.

166. Ekert A. K. Quantum cryptography based on Bell's theorem / A. K. Ekert // Phys. Rev. Lett. – 1991. – V. 67, № 6. – P. 661 – 663.

167. Yang C. P. Possible realization of entanglement, logical gates, and quantum-information transfer with superconducting-quantum-interference-device qubits in cavity QED / C.P. Yang, S.I. Chu, S. Han // Phys. Rev. A. – 2003. – V. 67, № 13. – P. 042311-1 – 042311-13.

168. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels / C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 1993. – V. 70, № 13. – P. 1895 – 1899.

169. Childs A. M. Quantum algorithms for algebraic problems / A. M. Childs, W. van Dam // Reviews of Modern Physics. – 2010. – V.82, № 1. – P. 1-52.

170. Quantifying Entanglement / V. Vedral, M. B. Plenio, M. A. Rippin [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 1997. – V. 78, № 7. – P. 2275 – 2279.

171. Horodecki M. Limits for Entanglement Measures / M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki // Phys. Rev. Lett. – 2000. – V. 84, № 14. – P. 2014 – 2018.

172. Measures and dynamics of entangled states / F. Mintert, M. Carvalho, A. R. R. Kus [et al.] // Phys. Rep. – 2005. – V. 415, № 4. P. 207 – 219.

173. Wootters W. K. Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits / W. K. Wootters // Phys. Rev. Lett. – 1998. – V. 80, № 10. – P. 2245 – 2255.

174. Coffman V. Distributed entanglement / V. Coffman, J. Kundu, W. K. Wootters / Phys. Rev. A. – 2000. – V. 61, № 5. – P. 052306-1 – 052306-13.

175. Direct measurement of concurrence for atomic two-qubit pure states / G. Romero, C. E. López, F. Lastra [et al.] // Phys. Rev. A. – 2007. – V. 75, № 3. – P. 032303-1 – 032303-4.

ДОДАТОК А

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Amplification and attenuation of the transmitted signal by doubly-dressed states / S.N. Shevchenko, G. Oelsner, Ya. S. Greenberg, P. Macha, **D. S. Karpov**, M. Grajcar, U. Hubner, A. N. Omelyanchouk, E. Il'ichev // *Phys. Rev. B.* – 2014. – V. 89, No.18. – P. 184504-1–184504-10.
2. Signal amplification in a qubit-resonator system / **D. S. Karpov**, G. Oelsner, S.N. Shevchenko, Ya.S. Greenberg, E. Il'ichev // *Low Temp. Phys.* – 2016. – T. 42, № 3. – P. 189–195.
3. Landau-Zener-Stuckelberg-Majorana lasing in circuit QED / P. Neilinger, S. N. Shevchenko, J. Bogár, M. Reháč, G. Oelsner, **D. S. Karpov**, U. Hübner, O. Astafiev, M. Grajcar, E. Il'ichev // *Phys. Rev. B.* – 2016. – V. 94, No. 9 – P. 094519-1–094519-10.
4. Scattering of a single photon on a two-qubit structure with resonators / A. N. Sultanov, **D. S. Karpov**, Ya. S. Greenberg, S.N. Shevchenko, A. A. Shtygashev // *ФНТ.* – 2017. – Т. 43, № 7. – P. 1003–1010.
5. Shevchenko S. N. Thermometry and memcapacitance with qubit-resonator system / **D. S. Karpov**, S. N. Shevchenko // Thermometry and memcapacitance with qubit-resonator system // *Phys. Rev. Applied.* – V. 10, No. 1.- P. 014013-1–014013-11.
6. Transport properties of a microwave photon in a system with two artificial atoms / A. N. Sultanov, **D.S. Karpov**, Ya. S. Greenberg, B. I. Ivanov, S. N. Shevchenko // 13th International Scientific-Technical Conference on Actual Problems of Electronic Instrument Engineering “APEIE-2016”, October 3–6, 2016: book of abstr. – Russia, Novosibirsk, 2016. – P. 118–121.
7. Photon transport in qubit-resonator structures / A. Sultanov, **D. S. Karpov**, Ya. S. Greenberg, S.N. Shevchenko // VII International Conference for Young Scientists “Low Temperature Physics”, June 6–10, 2016: book of abstr. – Ukraine, Kharkiv, 2016. – P. 46.
8. Study of microwave transport in solid-state hybrid qubit-resonator structure / A. Sultanov, **D.S. Karpov**, Ya. S. Greenberg, S.N. Shevchenko // XIV All-Russian

School-Seminar on Physics of Condensed Matter, November 12–19, 2015: book of abstr. – Russia, Voroneg, 2015. – P. 35.

9. Amplification in the doubly-dressed system / **D. S. Karpov**, S. N. Shevchenko, G. Oelsner, Ya. S. Greenberg, P. Macha, M. Grajcar, A. N. Omelyanchouk, E. Il'ichev // 3rd International Conference on Nanophysics and Nanoelectronics "Mesoscopic Structures: Fundamentals and Applications". – June 22–27, 2015: book of abstr. – Russia, Novosibirsk, 2015. – P. 14.

10. **Karpov D. S.** Strong driving regime of the qubit-resonator system / **D. S. Karpov**, S. N. Shevchenko, A. N. Omelyanchouk, E. Il'ichev // VI International Conference for Young Scientists "Low Temperature Physics", June 1–5, 2015 : book of abstr. – Ukraine, Kharkiv, 2015. – P. 39.

11. **Karpov D. S.** Theoretical study of the signal amplification in the qubit-resonator system / **D. S. Karpov**, S. N. Shevchenko // V International Conference for Young Scientists "Low Temperature Physics", June 2–5, 2014: book of abstr. – Ukraine, Kharkiv, 2014. – P. 45.

12. **Karpov D. S.** Amplification and attenuation of the transmitted signal by qubit's dressed states / **D. S. Karpov**, S. N. Shevchenko // IV International Conference for Young Scientists "Low Temperature Physics", June 3–7, 2013: book of abstr. – Ukraine, Kharkiv, 2013. – P. 31.

13. **Karpov D. S.** Qubit's dressed states in resonator / **D. S. Karpov**, S. N. Shevchenko // III International Conference for Young Scientists "Low Temperature Physics", May 14–18, 2012: book of abstr. – Ukraine, Kharkiv, 2012. – P. 67.

14. **Карпов Д. С.** Исследование микроволнового транспорта в твердотельной гибридной структуре кубит-резонатор / Я. С. Гринберг, А. Н. Султанов, **Д. С. Карпов** // 16 Всероссийская школа-семинар по проблемам физики конденсированного состояния вещества "СПФКС–16", 12–19 Ноября, 2015: тезисы. – Россия, Екатеринбург, 2015. – С. 217.

15. **Karpov D. S.** Quantum memcapacitance with transmon-resonator system / **D. S. Karpov**, S. N. Shevchenko, A. Fedorov // 3th biennial European Conference on

Applied Superconductivity “EUCAS 2017”, September 17–21, 2017. – Switzerland, Geneva, 2017. Access mode: <https://www.symporg-registrations.com/symporg/frontend/reg/absViewDocumentFE.csp?popup=1&documentID=7356&eventID=112>

ДОДАТОК Б

ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

- 3rd International Conference for Young Scientists «Low temperature physics» (ICYS-LTP-2012, Kharkiv, Ukraine, May 14-18, 2012);
- 4th International Conference for Young Scientists «Low temperature physics» (ICYS-LTP-2013, Kharkiv, Ukraine, June 3-7, 2013);
- Introduction to Quantum System and Device 2013 (IQSD-2013, Espoo, Finland, June 11-14, 2013);
- 5th International Conference for Young Scientists «Low temperature physics» (Kharkiv, Ukraine, June 2-6, 2014);
- 6th International Conference for Young Scientists «Low temperature physics» (ICYS-LTP-2015, Kharkiv, Ukraine, June 2-6, 2015);
- 3rd International Conference on Nanophysics and Nanoelectronics, “Mesoscopic Structures: Fundamentals and Applications” (Novosibirsk, Russia, June 22-27, 2015);
- 7th International Conference for Young Scientists «Low temperature physics» (ICYS-LTP-2016, Kharkiv, Ukraine, June 6-10, 2016);
- 13th biennial European Conference on Applied Superconductivity, (EUCAS 2017, Geneva, Switzerland, September 20-24, 2017).