Національна академія наук України
Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Вєркіна

ХІЛЬКОВА ЛАРИСА ОЛЕКСАНДРІВНА

УДК 517.9

УСЕРЕДНЕНІ МОДЕЛІ ДИФУЗІЇ В ПОРИСТОМУ СЕРЕДОВИЩІ З НЕЛІНІЙНОЮ АДСОРБЦІЄЮ НА МЕЖІ

01.01.03 – математична фізика

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Харків – 2018

Дисертацією є рукопис.
Робота виконана у Фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України.

Науковий керівник:	доктор фізико-математичних наук, професор, академік НАН України **Хруслов Євген Якович,** Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України, завідувач відділу диференціальних рівнянь і геометрії
Офіційні опоненти:	доктор фізико-математичних наук, професор **Мельник Тарас Анатолійович,** Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, професор кафедри математичної фізики;
	доктор фізико-математичних наук, член-кореспондент НАН України **Скрипнік Ігор Ігорович,** Інститут прикладної математики і механіки НАН України, директор

Захист відбудеться «_18_» _квітня_ 2018 р. о «_14-00_» годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.175.01 у Фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України за адресою: пр. Науки, 47, м. Харків, 61103.

З дисертацією можна ознайомитися у науковій бібліотеці Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України за адресою: пр. Науки, 47, м. Харків, 61103.

Автореферат розіслано «_14_» _березня_ 2018 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради — В. О. Горькавий

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дисертація присвячена питанням усереднення крайової та початково-крайової задач для рівнянь стаціонарної й нестаціонарної дифузії в сильно перфорованих областях з нелінійною крайовою умовою типу Робена.

Теорія усереднення – це напрямок у теорії рівнянь із частинними похідними, який інтенсивно розвивається та знаходить широке застосування у фізиці, хімії та інших областях природознавства. Цей напрямок пов'язаний із вивченням процесів у сильно неоднорідних середовищах, типовими прикладами яких є композитні матеріали й пористі середовища. Такі процеси описуються диференціальними рівняннями зі швидко осцилюючими по просторовим змінним коефіцієнтами або розглянутими в сильно перфорованих областях з відповідними крайовими умовами. Безпосереднє розв'язання цих крайових або початково-крайових задач практично неможливо ні аналітичними, ні чисельними методами. Проте часто такі середовища мають стійкі макроскопічні характеристики: провідність, поглинання, діелектричну проникність та інші. Природний підхід у цій ситуації полягає в переході до макроскопічних моделей процесів, тобто побудові усереднених рівнянь, коефіцієнти яких є ефективними характеристиками середовища.

У 1964 р. вийшла перша робота В. О. Марченка, Є. Я. Хруслова з теорії усереднення, яка стала початком інтенсивного розвитку цього напрямку теорії диференціальних рівнянь із частинними похідними. Це було викликано не тільки численними застосуваннями, у першу чергу у зв'язку зі створенням композитних матеріалів, але й появою нових глибоких ідей, методів і понять, важливих для математики.

Для побудови усереднених рівнянь були розроблені різні методи. М. С. Бахвалов запропонував метод двомасштабних розвинень для рівнянь з частинними похідними із сильно осцилюючими періодичними коефіцієнтами. У цьому методі істотно використовується поняття "компенсована компактність", уведене та детально розглянуте у працях F. Murat і L. Tartar. Для аналізу збіжності розв'язків початкової й усередненої задач у працях E. De Giorgi, S. Spagnolo було введене та досліджене поняття G-збіжності операторів. У зв'язку з вивченням задач варіаційного обчислення E. De Giorgi, T. Franzoni було введене поняття Γ-збіжності, що успішно застосовувалося до усереднення варіаційних функціоналів. Для усереднення задач із неперіодичною мікроструктурою Є. Я. Хруслов розробив метод "мезоскопічних" характеристик, заснований на побудові нижньої та верхньої оцінок для розв'язків варіаційних задач і близький до методу Γ-збіжності. У 1989 р. G. Nguetseng запровадив новий для функціонального аналізу тип збіжності – двомасштабну збіжність і запропонував метод усереднення періодичних задач, заснований на цьому понятті. Однією з останніх розробок для усереднення періодичних мікроструктур є Periodic Unfolding метод, запропонований D. Cioranescu, A. Damlamian, G. Griso.

На сьогодні існує низка монографій і статей, присвячених теорії усереднення й пов'язаним з нею питанням асимптотичного аналізу, G-збіжності та Γ-збіжності. Найбільш вагомий внесок в теорію усереднення був зроблений В. О. Марченком, Є. Я. Хрусловим, М. С. Бахваловим, Г. П. Панасенком, В. В. Жиковим, С. М. Козловим, О. А. Олійник, О. С. Шамаєвим, І. В. Скрипніком, А. Л. П'ятницьким, Г. О. Чечкіним, Т. А. Мельником, J. Lions, G. Papanicolaou, E. Sanchez-Palencia, G. Allaire, E. De Giorgi, G. Dal Maso, U. Hornung, W. Jager, D. Cioranescu, P. Donato, L. Tartar.

З кінця минулого століття особливу увагу фізиків і математиків привернено до розгляду дифузійних процесів у мікронеоднорідних середовищах з реакцією, або адсорбцією, на межі мікроскопічних часток або порожнин. Щільність дифундуючої речовини для таких процесів описується третьою крайовою задачею з крайовою умовою типу Робена.

Перші результати з усереднення третьої крайової задачі були отримані в 90 х роках і представлені у працях О. А. Олійник, Т. А. Шапошникової, W. Jager, О. С. Шамаєва, D. Cioranescu, P. Donato, в яких досліджувалися рівняння стаціонарної дифузії в періодично перфорованих областях з лінійною адсорбцією, а також у роботі Л. В. Берлянда, М. В. Гончаренко, де вивчалася нестаціонарна дифузія в неперіодичних сильно зв'язних областях з лінійною адсорбцією на межі перфоруючої множини.

У працях U. Hornung, W. Jager на прикладі лінійної моделі була запропонована стратегія усереднення для деяких хімічних процесів, пов'язаних з дифузією, адсорбцією й хімічними реакціями, що виникають у пористих середовищах. Нелінійні моделі хімічних реакційних потоків за участю дифузії, адсорбції й хімічних реакцій, що відбуваються на межі або всередині періодичної перфорації, розглянуті в роботах J. Diaz, C. Conca, A. Linan, C. Timofte, D. Cioranescu, P. Donato, G. Allaire.

Варто підкреслити, що практично в усіх роботах по усередненню задачі Робена розглядалися перфоровані області $\Omega^{\varepsilon} = \Omega \setminus \bigcup F_i^{\varepsilon}$, де F_i^{ε} – дрібні непересічні тіла періодично розподілені в Ω, які мають діаметр $d^{\varepsilon} = O(\varepsilon)$. Така структура області дифузії є модельною, вона вловлює основні характерні риси процесу дифузії в пористому середовищі з поглинанням на межі й часто природно обґрунтована. Проте реальні пористі середовища можуть мати зовсім іншу структуру: тверда поглинаюча фракція може бути зв'язною та її розподіл в області Ω може бути довільним. Для таких структур теорія усереднення нелінійної задачі Робена не була побудована. Розв'язанню цієї проблеми присвячена перша частина дисертації (розділи 2-4). Розглядається поглинаюча множина F^{ε} довільного виду, але така, щоб область дифузії Ω^{ε} задовольняла умову сильної зв'язності. Основний результат полягає в визначені виду усередненої задачі та одержанні умов збіжності розв'язку $u^{\varepsilon}(x)$ початкової задачі до розв'язку $u(x)$ усередненої.

Останнім часом, у зв'язку з розвитком нанотехнологій, особливо актуальними стали задачі усереднення рівняння дифузії в областях із дрібнозернистою межею, тобто областях $\Omega^{\varepsilon} = \Omega \setminus \bigcup F_i^{\varepsilon}$, де F_i^{ε} – розподілені в Ω частки з діаметром порядку $O(\varepsilon^{\alpha})$, де $\alpha > 1$, значно меншим відстаней між найближчими частками, що мають порядок $O(\varepsilon)$. Для того щоб гранична поглинаюча здатність такої системи часток не зникала при $\varepsilon \to 0$, вважають, що частки мають сильне поглинання. Характер поведінки глобального реакційного члена при зменшенні діаметра часток може істотно мінятися. Розмір перфорації, при якому відбувається якісна зміна поведінки, називається критичним. При розмірах поглинаючих часток менших за критичний, глобальний реакційний член стає нульовим при будь-якому значенні щільності поглинання на поверхні часток.

Перші результати дослідження третьої крайової задачі в періодичних областях із дрібнозернистою межею були отримані S. Kaizu (1989 р.) для напівлінійних крайових умов і М. В. Гончаренко (1997 р.) для нелінійних. В останні роки це питання досліджувалось багатьма авторами: A. Brillard, M. Lobo, E. Perez, J. Diaz, D. Gomez-Castro, C. Timofte, W. Jager, M. Neuss-Radu, М. Н. Зубовою, Т. А. Шапошниковою за різних технічних припущень.

Представляє інтерес дослідження таких задач і тоді, коли перфоруюча множина F^{ε} розподіляється в області Ω не періодично, а довільно, у тому числі випадково. Розгляду цього питання присвячена друга частина дисертації (розділ 5).

Зв'язок з науковими програмами, планами, темами. Дослідження, які склали зміст дисертаційної роботи, проведені у відповідності з тематичним планом Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України з відомчої тематики за темою "Дослідження багатофазних течій сумішей рідин і газів у пористих середовищах та вихрових структур у надплинних рідинах" (державний реєстраційний номер 0110U007897).

Мета й завдання дослідження. *Метою роботи* є побудова усереднених моделей процесів дифузії в пористих середовищах з поглинанням на межі. Для досягнення цієї мети розв'язується дві групи наступних завдань:

1. Дослідити асимптотичну поведінку розв'язків крайових задач для рівнянь дифузії з нелінійною крайовою умовою типу Робена у перфорованих сильно зв'язних областях.

2. Дослідити асимптотичну поведінку розв'язків крайової задачі для рівняння стаціонарної дифузії з нелінійною крайовою умовою типу Робена в перфорованих областях із дрібнозернистою межею при довільному та випадковому розподілі перфоруючої множини, що складається із часток-куль.

Об'єктом дослідження є еліптична та параболічна крайові задачі для оператора Лапласа в сильно перфорованих областях з нелінійною крайовою умовою типу Робена на межі перфоруючої множини.

Предметом дослідження є асимптотична поведінка розв'язків еліптичної та параболічної крайових задач для оператора Лапласа в неперіодичних сильно перфорованих областях з нелінійною крайовою умовою типу Робена на межі за прямування масштабу перфорації $\varepsilon \to 0$.

Методи дослідження. Для розв'язання поставлених задач використовуються методи теорії усереднення, асимптотичного й функціонального аналізу. При доведенні теорем збіжності застосовуються варіаційні методи: метод "мезоскопічних" характеристик і метод "квазірозв'язків", засновані на продовженні розв'язків і побудові нижньої та верхньої оцінок для варіаційних функціоналів.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну дисертації:

1. Досліджено асимптотичну поведінку розв'язків крайової задачі для оператора Лапласа в перфорованих сильно зв'язних областях довільного виду з нелінійною крайовою умовою типу Робена на межі перфоруючої множини. Встановлено рівно-

мірні та інтегральні умови збіжності, отримано усереднене рівняння, до розв'язку якого збігаються розв'язки початкової задачі.

2. Для областей локально-періодичної структури отримано явні формули для ефективних характеристик середовища – тензора провідності й функції поглинання, які є коефіцієнтами усередненого рівняння.

3. Досліджено асимптотичну поведінку розв'язків початково-крайової задачі для рівняння нестаціонарної дифузії зі знесенням часток дифундуючої речовини рідиною в перфорованих сильно зв'язних областях довільного виду з нелінійною крайовою умовою типу Робена на поверхні перфоруючої множини; отримано усереднене рівняння.

4. Досліджено асимптотичну поведінку розв'язків крайової задачі для оператора Лапласа з нелінійною крайовою умовою типу Робена в областях з дрібнозернистою межею при довільному розподілі перфоруючої множини, що складається із часток-куль. Встановлено умови збіжності та виведено усереднене рівняння.

5. Досліджено асимптотичну поведінку розв'язків крайової задачі для оператора Лапласа з нелінійною крайовою умовою типу Робена в областях з дрібнозернистою випадковою межею. Виведено усереднене рівняння й отримано явні формули для його коефіцієнтів, які виражаються через функцію розподілу центрів і радіусів часток.

Практичне значення одержаних результатів. Результати, отримані в дисертаційній роботі, мають теоретичне спрямування та є внеском у теорію усереднення диференціальних рівнянь із частинними похідними в неперіодичних сильно перфорованих областях.

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертації отримані автором особисто. Науковому керівнику Є. Я. Хруслову належать постановки задач. В спільних роботах [6, 7] Є. Я. Хруслову належать загальні схеми дослідження. Співавтору М. В. Гончаренко в роботі [2] належать леми 1, 2, в роботі [3] загальна схема доведення, в роботі [5] лема 1, в роботі [6] леми 1,6.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались на наступних наукових конференціях:

– II International Conference "Analysis and mathematical physics", 16-20 червня, 2014, Харків;

– International Conference of Young Mathematicians, 3-6 червня, 2015, Київ;

– III International Conference "Analysis and mathematical physics", 15-19 червня, 2015, Харків;

– IV International Conference "Analysis and mathematical physics", 13-17 червня, 2016, Харків;

– 5 th International Conference on Differential Equations and Applications dedicated to Ya. B. Lopatynsky, 9-11 листопада, 2016, Київ;

– International Conference dedicated to the 100 th Anniversary of NAS of Ukraine, Professor Yu. O. Mitropolskiy, 7-10 червня, 2017, Київ;

– V International Conference "Analysis and mathematical physics" dedicated to Vladimir A. Marchenko's 95 th birthday and the centennial anniversary of NAS of Ukraine, 19-24 червня, 2017, Харків;

– International Conference Differential Equations, Mathematical Physics and Applications, 17-19 жовтня, 2017, Черкаси.

Результати дисертації доповідались та обговорювались на наступних наукових семінарах:

– науковий семінар відділу диференціальних рівнянь і геометрії Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України, Харків (керівник: академік НАН України, д.ф.-м.н., професор Є. Я. Хруслов) 15 квітня 2015 р., 7 лютого 2018 р.;

– науковий семінар кафедри математичної фізики механіко-математичного факультету Київського національного університету ім. Шевченка "Асимптотичні та аналітичні методи для задач математичної фізики", Київ (керівники: д.ф.-м.н., професор Т. А. Мельник, д.ф.-м.н., професор В. Г. Самойленко) 14 грудня 2017 р.;

– науковий семінар відділу нелінійного аналізу та рівнянь математичної фізики Інституту прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ (керівник: д.ф.-м.н., І. І. Скрипнік) 22 січня 2018 р.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані у 15 наукових працях. Серед них 7 наукових статей у фахових виданнях та 8 тез доповідей на міжнародних наукових конференціях.

Структура і обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, вступу, п'яти розділів, висновків та списку використаних джерел. Повний обсяг дисертації становить 154 сторінки. Список використаних джерел містить 123 найменування.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету дослідження, висвітлено наукову новизну і практичне значення одержаних результатів, наведено відомості про публікації, особистий внесок здобувача і ступінь апробації роботи.

У **першому розділі** наводяться допоміжні відомості: визначаються сильно зв'язні області, наводиться узагальнена теорема Соболєва й будується "розбиття одиниці" з потрібними властивостями.

Нехай $\Omega \in R^n \left(n \geq 2\right)$ – обмежена область, а $\left\{\Omega^\varepsilon\right\}_\varepsilon$ – послідовність її підобластей, таких що Ω^ε та їх доповнення $F^\varepsilon = \Omega \setminus \Omega^\varepsilon$ розташовуються асимптотично щільно в Ω, тобто, для будь-якої кулі $B \subset \Omega$ при досить малому ε

$$B \bigcap \Omega^\varepsilon \neq \varnothing,\ B \bigcap F^\varepsilon \neq \varnothing,$$

і лебегова міра областей Ω^ε не прямує до 0 при $\varepsilon \to 0$, тобто при будь-якому $\varepsilon > 0$

$$mes\left\{B \bigcap \Omega^\varepsilon\right\} \geq C mes\left\{B\right\} > 0, \tag{1}$$

де константа C не залежать від ε.

Розглянемо послідовність функцій $\left\{u^\varepsilon\left(x\right) \in H^1\left(\Omega^\varepsilon\right)\right\}_\varepsilon$, що задовольняють наступній умові

$$\left\| u^{\varepsilon} \right\|_{H^1\left(\Omega^{\varepsilon}\right)} \le C, \qquad (2)$$

де константа C не залежить від ε.

Одне з перших питань, що виникає в теорії усереднення крайових задач, – це питання про компактність послідовності $\left\{u^{\varepsilon}(x)\right\}_{\varepsilon}$, а саме: чи можна з послідовності функцій, які задовольняють умові (2), виділити підпослідовність $\left\{u^{\varepsilon_k}(x)\right\}_k$, що збігається до деякої функції $u(x)$, визначеної в усій області Ω. Збіжність при цьому розуміється в наступному сенсі.

Визначення 1.1. Будемо казати, що послідовність функцій $\left\{u^{\varepsilon}(x) \in L^p\left(\Omega^{\varepsilon}\right)\right\}_{\varepsilon}$ збігається в $L^p\left(\Omega^{\varepsilon}, \Omega\right)$, якщо існує функція $u(x) \in L^p(\Omega)$ така що

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\| u^{\varepsilon} - u \right\|_{L^p\left(\Omega^{\varepsilon}\right)} = 0.$$

Визначення 1.2. Будемо казати, що послідовність областей $\left\{\Omega^{\varepsilon}\right\}_{\varepsilon}$ задовольняє умову сильної зв'язності (або стисло області Ω^{ε} є сильно зв'язними), якщо будь-яка послідовність функцій $\left\{u^{\varepsilon}(x) \in H^1\left(\Omega^{\varepsilon}\right)\right\}_{\varepsilon}$, яка задовольняє умову (2), є компактною в сенсі збіжності Визначення 1.1.

Умова сильної зв'язності для областей Ω^{ε}, що задовольняють нерівності (1), може бути замінена умовою продовження.

Визначення 1.3. Будемо казати, що послідовність областей $\left\{\Omega^{\varepsilon}\right\}_{\varepsilon}$ задовольняє умову продовження, якщо для будь-якої функції $u^{\varepsilon}(x) \in H^1\left(\Omega^{\varepsilon}\right)$ існує функція $\widetilde{u}^{\varepsilon}(x) \in H^1(\Omega)$ така, що $\widetilde{u}^{\varepsilon}(x) = u^{\varepsilon}(x)$ при $x \in \Omega^{\varepsilon}$, і справедлива нерівність

$$\left\| \nabla \widetilde{u}^{\varepsilon} \right\|_{L^2(\Omega)} \le C \left\| \nabla u^{\varepsilon} \right\|_{L^2\left(\Omega^{\varepsilon}\right)}$$

де константа C не залежить від ε.

Другий розділ присвячений дослідженню крайової задачі для рівняння стаціонарної дифузії в сильно зв'язних перфорованих областях $\Omega^{\varepsilon} \in R^n \left(n \ge 2\right)$ з поглинанням на межі F^{ε}, що описується нелінійною крайовою умовою типу Робена. Доведено, що при кожному фіксованому ε існує єдиний розв'язок $u^{\varepsilon}(x)$ крайової задачі. Досліджена асимптотична поведінка $\left\{u^{\varepsilon}(x)\right\}_{\varepsilon}$ при $\varepsilon \to 0$, визначені умови збіжності та побудовано усереднене рівняння.

Розглядається наступна крайова задача

$$\begin{cases} -\Delta u^{\varepsilon} = f^{\varepsilon}(x), \quad x \in \Omega^{\varepsilon}, \\ \dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial \nu} + \sigma^{\varepsilon}\left(x, u^{\varepsilon}\right) = 0, \quad x \in \partial F^{\varepsilon}, \\ u^{\varepsilon} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

де Δ – оператор Лапласа, ν – одинична нормаль до межі ∂F^{ε}, зовнішня щодо області Ω^{ε}; функції $f^{\varepsilon}(x) \in L^2\left(\Omega^{\varepsilon}\right)$ та $\sigma^{\varepsilon}(x,u) \in C(\Omega \times R)$ задані.

Припустимо, що при будь-якому ε функція $\sigma^{\varepsilon}(x,u)$ задовольняє наступні умови:

$a_1 : \ \forall u_1, u_2 \in R : \left(\sigma^{\varepsilon}(x,u_1) - \sigma^{\varepsilon}(x,u_2)\right)\left(u_1 - u_2\right) \geq 0$, $\sigma^{\varepsilon}(x,0) = 0$;

$a_2 : \ \forall u \in R : \left|\sigma^{\varepsilon}(x,u)\right| \leq \hat{\sigma}^{\varepsilon}(x)\left(1 + |u|^{\Theta}\right) \ \left(\Theta < \dfrac{n}{n-2}\right)$, де функція $\hat{\sigma}^{\varepsilon}(x) \in C(\Omega)$ така, що для будь-якої кулі $B(\rho, z)$ радіуса ρ із центром у точці $z \in \Omega$

$$\int\limits_{\partial F^{\varepsilon} \cap B(\rho,z)} \hat{\sigma}^{\varepsilon}(x) d\Gamma < C_1 \rho^n + C_2(\varepsilon)\rho^{n-1}, \tag{4}$$

де постійна C_1 не залежить від z, ρ, ε, C_2 не залежить від z, ρ й $C_2(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0$.

Визначення 2.1. Узагальненим розв'язком задачі (3) будемо називати функцію $u^{\varepsilon}(x)$ із простору $H^1\left(\Omega^{\varepsilon}, \partial\Omega\right) = \left\{u(x) \in H^1\left(\Omega^{\varepsilon}\right) : u\big|_{\partial\Omega} = 0\right\}$, що задовольняє тотожності

$$\int\limits_{\Omega^{\varepsilon}} \left(\nabla u^{\varepsilon}, \nabla \varphi\right) dx + \int\limits_{\partial F^{\varepsilon}} \sigma^{\varepsilon}\left(x, u^{\varepsilon}\right) \varphi d\Gamma = \int\limits_{\Omega^{\varepsilon}} f^{\varepsilon} \varphi dx, \ \forall \varphi(x) \in H^1\left(\Omega^{\varepsilon}, \partial\Omega\right).$$

У підрозділі 2.2 доведена наступна теорема.

Теорема 2.1. *При кожному фіксованому ε задача (3) має єдиний узагальнений розв'язок $u^{\varepsilon}(x) \in H^1\left(\Omega^{\varepsilon}, \partial\Omega\right)$.*

Основною метою даного розділу є вивчення асимптотики розв'язків задачі (3) при $\varepsilon \to 0$. Доведено, що головний член асимптоти $u(x)$ є узагальненим розв'язком наступної усередненої задачі

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \dfrac{1}{2} c_u(x,u) = f(x), \quad x \in \Omega, \\ u = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{5}$$

Тут тензор $\left\{a_{ij}(x)\right\}_{i,j=1}^{n}$ характеризує ефективну провідність, $c_u(x,u) = \dfrac{\partial}{\partial u} c(x,u)$ й функція $c(x,u)$ характеризує ефективні поглинаючі властивості пористого середовища.

Коефіцієнти усередненого рівняння визначаються через локальні енергетичні характеристики областей Ω^ε, розгляду яких присвячено підрозділ 2.3. Ці характеристики описують властивості середовища в малому околу кожної точки $z \in \Omega$ – "мезокубі" $K_h^z = K(z,h)$ із центром у точці z і ребрами довжиною h, орієнтованими по координатних осях. Префікс "мезо" означає, що розмір куба істотно більший за розмір мікроструктури ε, але істотно менший за розмір області Ω^ε $(0 < \varepsilon << h << 1)$.

Кількісну характеристику провідності задамо за допомогою функціоналу щодо довільного $\ell \in R^n$:

$$T_{h,z}^\varepsilon(\ell) = \inf_{v^\varepsilon} \int_{K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} \left\{ \left|\nabla v^\varepsilon\right|^2 + h^{-2-\tau} \left| v^\varepsilon - (x - z.\ell) \right|^2 \right\} dx,$$

де інфінум береться в класі функцій $v^\varepsilon(x) \in H^1\left(K_h^z \cap \Omega^\varepsilon\right)$, $\tau \in (0{,}2)$ – параметр штрафу. Цей функціонал є однорідно квадратичним відносно сталого вектора ℓ і може бути представленим у вигляді

$$T_{h,z}^\varepsilon(\ell) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(z,\varepsilon,h)\ell_i \ell_j,$$

де

$$a_{ij}(z,\varepsilon,h) = \int_{K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} \left[\left(\nabla v_i^\varepsilon, \nabla v_j^\varepsilon\right) + h^{-2-\tau}\left(v_i^\varepsilon - (x_i - z_i)\right)\left(v_j^\varepsilon - (x_j - z_j)\right)\right] dx,$$

та v_i^ε – мінімізант функціоналу $T_{h,z}^\varepsilon(\ell)$ при $\ell = e^i$ – орту осі x_i.

Кількісну характеристику поглинання на межі ∂F^ε задамо за допомогою функціоналу

$$c(z,s;\varepsilon,h) = \inf_{w^\varepsilon} \left[\int_{K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} \left\{ \left|\nabla w^\varepsilon\right|^2 + h^{-2-\tau} \left| w^\varepsilon - s \right|^2 \right\} dx + \int_{K_h^z \cap \partial F^\varepsilon} g^\varepsilon\left(x, w^\varepsilon\right) d\Gamma \right],$$

де інфінум береться в класі функцій $w^\varepsilon(x) \in H^1\left(K_h^z \cap \Omega^\varepsilon\right)$, $s \in R$ – довільне число, а функція $g^\varepsilon(x,u)$ визначена формулою

$$g^\varepsilon(x,u) = 2\int_0^u \sigma^\varepsilon(x,s) ds.$$

Тензор $\left\{a_{ij}(z,\varepsilon,h)\right\}_{i,j=1}^n$ і функція $c(z,s;\varepsilon,h)$ є локально енергетичними, "мезоскопічними", характеристиками областей Ω^ε, відповідно тензором провідності й функцією поглинання.

Дослідження асимптотичної поведінки розв'язків задачі (3) проведено за двох умов існування щільностей мезоскопічних характеристик при $h \to 0$, $\varepsilon \to 0$: рівномірної (теорема 2.2) й інтегральної (теорема 2.3).

Теорема 2.2. *Нехай області* Ω^ε *є сильно зв'язними й* $\exists\,\tau\in(0,2)$ *при якому рівномірно по* $x\in\Omega$ *виконуються умови:*

1) $\lim\limits_{h\to 0}\underline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}}\dfrac{a_{ij}(x,\varepsilon,h)}{h^n}=\lim\limits_{h\to 0}\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}}\dfrac{a_{ij}(x,\varepsilon,h)}{h^n}=a_{ij}(x)$, *де* $a_{ij}(x)$ *– кусково-неперервні функції від* x *та* $\{a_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$ *– додатньо визначений, симетричний тензор в* Ω*;*

2) $\forall s\in R:\ \lim\limits_{h\to 0}\underline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}}\dfrac{c(x,\varepsilon;s,h)}{h^n}=\lim\limits_{h\to 0}\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}}\dfrac{c(x,\varepsilon;s,h)}{h^n}=c(x,s)$, *де функція* $c(x,s)$ *обмежена по* x, *диференційована по* s *та її похідна* $c_s(x,s)$ *задовольняє умови*

$$\forall s_1,s_2\in R:(c_s(x,s_1)-c_s(x,s_2))(s_1-s_2)\geq 0, \tag{6}$$

$$\forall s\in R: c_s(x,s)\leq C\left(1+|s|^\Theta\right),\ \text{де}\ \Theta<\frac{n+2}{n-2}. \tag{7}$$

3) Функції $f^\varepsilon(x)$, *продовжені нулем на* F^ε, *збігаються слабко в* $L^2(\Omega)$ *до* $f(x)$.

Тоді послідовність узагальнених розв'язків $\{u^\varepsilon(x)\}_\varepsilon$ *задачі (3) збігається в* $L^p(\Omega^\varepsilon,\Omega)$ $\left(p<\dfrac{2n}{n-2}\right)$ *до функції* $u(x)$, *що є узагальненим розв'язком задачі (5).*

Теорема 2.3. *Нехай області* Ω^ε *є сильно зв'язними й* $\exists\,\tau\in(0,2)$ *при якому виконуються умови:*

1) $\lim\limits_{h\to 0}\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}}\int\limits_\Omega\left|\dfrac{a_{ij}(x,\varepsilon,h)}{h^n}-a_{ij}(x)\right|dx=0$, *де* $a_{ij}(x)$ *– кусково-неперервні функції від* x *та* $\{a_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$ *– додатньо визначений, симетричний тензор в* Ω*;*

2) $\forall s\in R:\ \lim\limits_{h\to 0}\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}}\int\limits_\Omega\left|\dfrac{c(x,\varepsilon;s,h)}{h^n}-c(x,s)\right|dx=0$, *де функція* $c(x,s)$ *обмежена по* x, *диференційована по* s *та її похідна* $c_s(x,s)$ *задовольняє умови (6), (7).*

3) Функції $f^\varepsilon(x)$, *продовжені нулем на* F^ε, *збігаються слабко в* $L^2(\Omega)$ *до* $f(x)$.

Тоді послідовність узагальнених розв'язків $\{u^\varepsilon(x)\}_\varepsilon$ *задачі (3) збігається в* $L^p(\Omega^\varepsilon,\Omega)$ $\left(p<\dfrac{2n}{n-2}\right)$ *до функції* $u(x)$, *що є узагальненим розв'язком задачі (5).*

Визначення 2.2. Узагальненим розв'язком задачі (5) називається функція $u(x)\in\dot{H}^1(\Omega)$, що задовольняє тотожності

$$\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}dx+\frac{1}{2}\int\limits_\Omega c_u(x,u)\varphi dx=\int\limits_\Omega f\varphi dx,\ \forall\varphi(x)\in\dot{H}^1(\Omega).$$

Третій розділ присвячений дослідженню крайової задачі (3) в локально-періодичному пористому середовищі. Метою даного розділу є доведення умов збіжності та одержання явних формул для ефективних характеристик пористого середовища.

Локально-періодична структура областей дифузії визначається наступним чином. Нехай $\Pi \in R^3$ – паралелепіпед, F – область в Π із гладкою межею ∂F. Припустимо, що простір R^3 розрізаний на паралелепіпеди $\Pi^{\varepsilon}_{x^{\alpha}}$ із центрами в точках x^{α}, що утворюють періодичну решітку з періодом $O(\varepsilon)$. У кожному паралелепіпеді $\Pi^{\varepsilon}_{x} \in \Omega$, знаходиться множина $F^{\varepsilon}_{x} = \varepsilon F_x + x$, яка є трансляцією і гомотетичним стисненням F_x, отриманої із множини F у такий спосіб:

$$F_x = f_x(F),\ \partial F_x = f_x(\partial F),$$

де $f_x(\xi): R^3 \to R^3$ – дифеоморфізм, що залежить від точки $x \in \Omega$ так, що $f_0(\xi) = I$ (де I – тотожне відображення) та

$$\forall x_1, x_2 \in \Omega: \left\| f_{x_1} - f_{x_2} \right\|_{C^1(\Omega)} \le C|x_1 - x_2|.$$

Область $\Omega^{\varepsilon} = \Omega \setminus \bigcup\limits_{\alpha} F^{\varepsilon}_{x^{\alpha}}$ будемо називати локально-періодичною.

В локально-періодичній області Ω^{ε} розглядається крайова задача (3). Припустимо, що функція

$$\sigma^{\varepsilon}(x,u) = \varepsilon\sigma(x,u),$$

де $\sigma(x,u)$ неперервна по x і по u задовольняє умові Ліпшиця:

$$\forall u_1, u_2 \in R: |\sigma(x,u_1) - \sigma(x,u_2)| \le C\left(1 + |u_1|^{\Theta-1} + |u_2|^{\Theta-1}\right)|u_1 - u_2|, \text{ де } \Theta < \frac{n}{n-2},$$

а також умовам монотонності та пасивного поглинання $(\sigma(x,0) = 0)$.

Основним результатом розділу 3 є наступна теорема.

Теорема 3.1. *Нехай області Ω^{ε} є локально-періодичними, тоді виконуються умови 1), 2) теореми 2.2 і ефективні характеристики середовища визначаються формулами:*

функція поглинання

$$c_u(x,u) = \frac{2|\partial F_x|}{|\Pi|}\sigma(x,u),$$

тензор провідності:

$$a_{ij}(x) = \delta_{ij}\left(1 - \frac{|F_x|}{|\Pi|}\right) - \frac{1}{|\Pi|}\int\limits_{\Pi \setminus F_x} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial V_i(\xi,x)}{\partial \xi_k}\frac{\partial V_j(\xi,x)}{\partial \xi_k} d\xi,\ i,j = 1,\ldots,3,$$

де функції $V_i(\xi) = V_i(\xi,x)$ є розв'язком наступної "коміркової" задачі:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{3} \dfrac{\partial^2 V_i(\xi)}{\partial \xi_k^2} = 0, \quad \xi \in \Pi \setminus F_x, \\ \dfrac{\partial V_i(\xi)}{\partial \nu_\xi} = cos\left(\nu(\xi), e^i\right), \quad \xi \in \partial F_x, \\ V_i\big|_{\Gamma_k^+} = V_i\big|_{\Gamma_k^-}, \quad \left.\dfrac{\partial V_i}{\partial \xi_k}\right|_{\Gamma_k^+} = \left.\dfrac{\partial V_i}{\partial \xi_k}\right|_{\Gamma_k^-}, \quad k = \overline{1,3}, \\ \int\limits_{\Pi \setminus F_x} V_i(\xi) d\xi = 0. \end{cases}$$

де $\Gamma_k^{\pm}$ *– протилежні грані в* Π, $\nu = \nu(\xi)$ *– одиничний вектор зовнішньої нормалі до* F_x *у точці* $\xi \in F_x$.

Четвертий розділ присвячений дослідженню начально-крайової задачі для рівняння нестаціонарної дифузії в сильно зв'язних перфорованих областях $\Omega^\varepsilon \in R^n$ $(n \geq 2)$ з переносом часток дифундуючої речовини рідиною. Доведено, що при кожному фіксованому ε існує єдиний розв'язок $u^\varepsilon(t,x)$ початково-крайової задачі. Досліджена асимптотична поведінка $\{u^\varepsilon(t,x)\}_\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$, визначені умови збіжності та побудовано усереднена задача.

В області $\Omega^\varepsilon \times (0,T)$ розглядається початково-крайова задача:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^\varepsilon(t,x)}{\partial t} - \Delta u^\varepsilon(t,x) + \sum\limits_{i=1}^{n} V_i^\varepsilon(x) \dfrac{\partial u^\varepsilon(t,x)}{\partial x_i} = 0 \ \textit{ в } \ \Omega^\varepsilon \times (0,T), \\ \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} + \sigma^\varepsilon\left(x, u^\varepsilon\right) = 0 \ \textit{ на } \ \partial F^\varepsilon \times (0,T), \\ u^\varepsilon(t,x) = 0 \ \textit{ на } \ \partial\Omega \times (0,T), \\ u^\varepsilon(0,x) = \varphi(x) \ \textit{ в } \ \Omega^\varepsilon. \end{cases} \tag{8}$$

Де функції $\varphi(x)$, $\sigma^\varepsilon(x,u)$ і вектор-функція $V^\varepsilon(x)$ задані.

Припустимо, що функція $\sigma^\varepsilon(x,u)$ задовольняє умови:

a_1 : $\sigma^\varepsilon(x,u) \in L^\infty\left(\partial\Omega^\varepsilon; C^1(R)\right)$; $\sigma^\varepsilon(x,0) = 0$;

a_2 : $0 < \dfrac{\partial}{\partial u}\sigma^\varepsilon(x,u) \leq \hat{\sigma}^\varepsilon(x)$ і функція $\hat{\sigma}^\varepsilon(x) \in C(\Omega)$ та задовольняє нерівність (4).

Щодо функції швидкості знесення часток $V^\varepsilon(x)$ припустимо виконання наступних умов:

b_1 : $V^\varepsilon(x) \in \left(H^1\left(\Omega^\varepsilon\right)\right)^n$ і нормальний компонент вектора швидкості $V_\nu^\varepsilon\big|_{\partial F^\varepsilon} = 0$;

b_2 : $divV^\varepsilon(x) = 0$, $x \in \Omega^\varepsilon$;

b_3 : $\max\limits_{x \in \Omega^\varepsilon}\left|V_i^\varepsilon(x)\right| \leq C$, де константа C не залежить від ε.

Визначення 4.1. Узагальненим розв'язком задачі (8) називається функція $u^{\varepsilon} \in W\left(0,T;\Omega^{\varepsilon},\partial\Omega\right)=\left\{u \in L^2\left(0,T;H^1\left(\Omega^{\varepsilon},\partial\Omega\right)\right), u_t' \in L^2\left(0,T;\left(H^1\left(\Omega^{\varepsilon},\partial\Omega\right)\right)'\right)\right\}$, така що $u^{\varepsilon}(x,0)=\varphi(x)$ і для будь-яких функцій $\psi(x) \in H^1\left(\Omega^{\varepsilon},\partial\Omega\right)$ при майже усіх $t \in (0,T)$ виконується наступна інтегральна рівність

$$\left\langle \left(u^{\varepsilon}\right)_t', \psi \right\rangle + \int\limits_{\Omega^{\varepsilon}} \left\{\left(\nabla u^{\varepsilon}, \nabla \psi\right) + \sum_{i=1}^{n} V_i^{\varepsilon} \frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial x_i} \psi \right\} dx + \int\limits_{\partial F^{\varepsilon}} \sigma^{\varepsilon}\left(x,u^{\varepsilon}\right) \psi \, d\Gamma = 0 .$$

Тут $\left\langle \left(u^{\varepsilon}\right)_t', \psi \right\rangle$ означає дію функціонала $\left(u^{\varepsilon}\right)_t' \in \left(H^1\left(\Omega^{\varepsilon},\partial\Omega\right)\right)'$ на елемент $\psi(x) \in H^1\left(\Omega^{\varepsilon},\partial\Omega\right)$.

У підрозділі 4.2 доведена наступна теорема.

Теорема 4.1. *Нехай функція $\varphi(x) \in H^1\left(\Omega^{\varepsilon},\partial\Omega\right)$, функція $\sigma^{\varepsilon}(x,u)$ задовольняє умови a_1, a_2, вектор-функція $V^{\varepsilon}(x)$ задовольняє умови $b_1 - b_3$, тоді при кожному фіксованому ε задача (8) має єдиний узагальнений розв'язок $u^{\varepsilon}(t,x) \in W\left(0,T;\Omega^{\varepsilon},\partial\Omega\right)$.*

Основною метою даного розділу є вивчення асимптотичної поведінки розв'язків задачі (8) при $\varepsilon \to 0$. У підрозділах 4.3-4.5 доведена наступна теорема.

Теорема 4.2. *Нехай області Ω^{ε} є сильно зв'язними, функція $\varphi(x) \in H^2(\Omega) \cap C_0(\Omega)$, функція $\sigma^{\varepsilon}(x,u)$ задовольняє умови a_1, a_2, вектор-функція $V^{\varepsilon}(x)$ задовольняє умови $b_1 - b_3$ і послідовність вектор-функцій $\left\{V^{\varepsilon}(x)\right\}_{\varepsilon}$, продовжених нулем на множину F^{ε}, при $\varepsilon \to 0$ збігається слабко в $\left(L^2(\Omega)\right)^n$ до вектор-функції $V(x)$. Крім того, $\exists \tau \in (0,2)$ при якому виконуються умови 1), 2) теореми 2.2 та $\lim\limits_{h\to 0}\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{mes\left[K_x^h \cap \Omega^{\varepsilon}\right]}{h^n} = b(x)$ або умови 1), 2) теореми 2.3 та $\lim\limits_{h\to 0}\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega} \left| \frac{mes\left[K_x^h \cap \Omega^{\varepsilon}\right]}{h^n} - b(x) \right| dx$, де $b(x) > 0$ – неперервна функція в Ω.*

Тоді при майже всіх $t \in (0,T)$ послідовність узагальнених розв'язків $\left\{u^{\varepsilon}(t,x)\right\}_{\varepsilon}$ задачі (8) збігається в $L^2\left(\Omega^{\varepsilon},\Omega\right)$ до функції $u(t,x)$ – узагальненого розв'язку задачі:

$$\begin{cases} b(x)\dfrac{\partial u}{\partial t} - \sum\limits_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum\limits_{i=1}^{n} V_i(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_i} + \dfrac{1}{2}c_u(x,u) = 0 \ \text{ в } \Omega \times (0,T), \\ u(t,x) = 0 \ \text{ на } \partial\Omega \times (0,T), \qquad u(0,x) = \varphi(x) \ \text{ в } \Omega. \end{cases}$$

тут $b(x)$ *– об'ємна щільність середовища,* $c_u(x,u)=\dfrac{\partial}{\partial u}c(x,u)$ *– гранична щільність поглинання,* $\{a_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n}$ *– тензор провідності середовища,* $V_i(x)$ *– компоненти вектора граничної швидкості знесення.*

П'ятий розділ присвячений вивченню асимптотичної поведінки розв'язків крайової задачі (3) в області з дрібнозернистою межею, заповненої дрібними непересічними включеннями-кулями, діаметр яких істотно менше відстаней між ними.

Нехай $\Omega\in R^3$ – обмежена область з гладкою межею, у якій розташовані включення $B_i^\varepsilon=B\left(x^{i\varepsilon},r_i^\varepsilon\right)$ – непересічні кулі радіусів $r_i^\varepsilon=O\left(\varepsilon^\alpha\right)$ із центрами в точках $x^{i\varepsilon}\left(i=1,...,N^\varepsilon\right)$. В області $\Omega^\varepsilon=\Omega\setminus F^\varepsilon$, де $F^\varepsilon=\bigcup\limits_{i=1}^{N^\varepsilon}B_i^\varepsilon$, розглядається крайова задача (3), де функція $\sigma^\varepsilon(x,u)$ задовольняє умови:

$a_1:\ \sigma^\varepsilon(x,u)=\varepsilon^\beta\sigma(x,u)$, де $\beta\in R$, $\sigma(x,u)\in C\left(\Omega,C^1(R)\right)$, $\sigma^\varepsilon(x,0)=0$;

$a_2:\ \forall x\in\Omega:\ 0<k_1\le\dfrac{\partial}{\partial u}\sigma(x,u)\le k_2\left(1+|u|^\theta\right)$, де $0\le\theta<1$.

Основна мета цього розділу – вивчити асимптотичну поведінку розв'язків $u^\varepsilon(x)$ задачі (3) при $\varepsilon\to 0$ і різних значеннях параметрів α,β.

У підрозділі 5.2 розглядаються області із дрібнозернистою детермінованою межею. Радіуси куль визначаємо рівністю $r_i^\varepsilon=a_i^\varepsilon\varepsilon^\alpha$, де $0<a_0\le a_i^\varepsilon\le A_0<\infty$ та a_0,A_0 не залежать від ε. Позначимо d_i^ε – відстань від центра i-ої до центру найближчої кулі або до межі $\partial\Omega$; b_i^ε – характеризує поглинання на поверхні i-ої кулі.

Будемо вважати, що кулі в області Ω розташовуються так, що виконуються умови:

$b_1:\ \exists\dfrac{2}{3}<\chi_1<1:\ d_i^\varepsilon\ge\left(r_i^\varepsilon\right)^{\chi_1}$ та $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\max\limits_i d_i^\varepsilon\to 0$;

$b_2:\ \exists\dfrac{6}{4-\theta}<\chi_2\le 2:\ \sum\limits_{i=1}^{N^\varepsilon}\dfrac{\left(b_i^\varepsilon\right)^{\chi_2}}{\left(d_i^\varepsilon\right)^{3(\chi_2-1)}}\le C$, де C не залежить від ε, $0\le\theta<1$.

Просторовий розподіл щільності поглинання в області Ω задамо за допомогою узагальненої функції

$$C^\varepsilon(x,u)=\sum_{i=1}^{N^\varepsilon}C_i^\varepsilon(u)\delta\left(x-x^{i\varepsilon}\right),\ \left(\forall\varepsilon>0,\forall u\in R:C^\varepsilon(x,u)\in D'(\Omega)\right),$$

де $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака, а $C_i^\varepsilon(u)$ – функції поглинальної здібності куль, визначені при $(\alpha,\beta)\in\Lambda_d=\{1<\alpha<3,2\alpha+\beta\ge 3\}\bigcup\{\alpha\ge 3,-\infty<\beta<+\infty\}$ рівностями

$$C_i^\varepsilon(u)=\begin{cases}2\pi\left(a_i^\varepsilon\right)^2 g\left(x^{i\varepsilon},u\right)\varepsilon^{2\alpha+\beta}, \text{при} \quad \alpha+\beta>0;\\ 2\pi a_i^\varepsilon\left(u-V_i^\varepsilon\right)^2\varepsilon^\alpha+2\pi\left(a_i^\varepsilon\right)^2 g\left(x^{i\varepsilon},V_i^\varepsilon\right)\varepsilon^{2\alpha+\beta}, \text{при} \quad \alpha+\beta=0;\\ 2\pi a_i^\varepsilon u^2\varepsilon^\alpha, \text{при} \quad \alpha+\beta<0.\end{cases}$$

У цих рівностях

$$g(x,u)=2\int_0^u\sigma(x,s)ds$$

та $V_i^\varepsilon=V_i^\varepsilon(u)$ – розв'язок рівняння

$$V_i^\varepsilon(u)=u-a_i^\varepsilon\sigma\left(x^{i\varepsilon},V_i^\varepsilon\right).$$

Із властивостей функції $\sigma(x,u)$ випливає, що це рівняння має єдиний розв'язок.

У підрозділі 5.2 доведена наступна теорема.

Теорема 5.1. *Нехай області* Ω^ε *задовольняють умови* b_1, b_2 *і при* $\varepsilon\to 0$

1) узагальнені функції $C^\varepsilon(x,u)$ *при* $\forall u\in R$ *збігаються в слабкій топології простору* $D'(\Omega)$ *до функції* $C(x,u)\in C\left(\Omega,C^1(R)\right)$*;*

2) функції $f^\varepsilon(x)$*, продовжені нулем на множину* F^ε*, збігаються слабко в* $L^2(\Omega)$ *до деякої функції* $f(x)$*.*

Тоді послідовність узагальнених розв'язків $\left\{u^\varepsilon(x)\right\}_\varepsilon$ *задачі (3) збігається в* $L^p\left(\Omega^\varepsilon,\Omega\right)$ *(при* $p<6$*) до функції* $u(x)$*, що є узагальненим розв'язком задачі*

$$\begin{cases}-\Delta u(x)+C_u(x,u)=f(x), \; x\in\Omega,\\ u(x)=0 \quad x\in\partial\Omega.\end{cases} \tag{9}$$

У підрозділі 5.3, розглядаються області із дрібнозернистою випадковою межею. А саме, ми припускаємо, що положення центрів $x^{i\varepsilon}$ куль і величини їх радіусів r_i^ε визначаються набором s-часткових функцій розподілу

$$f_s^\varepsilon\left(x^1,x^2,...,x^s;r_1,r_2,...,r_s\right):(\Omega)^s\times[0,\infty)^s\to[0,\infty) \quad \left(s=1,...,N^\varepsilon\right), \tag{10}$$

які задовольняють умовам симетрії, нормалізації та узгодження.

Одночасткову та двочасткову функції розподілу $f_1^\varepsilon, f_2^\varepsilon$ виберемо такими, щоб для них виконувалися умови:

c_1 : $f_1^\varepsilon(x;r)=\varepsilon^{-\alpha}f\left(x;\varepsilon^{-\alpha}r\right)$, де параметр $\alpha>2$, $f(x;r)\in L^\infty(\Omega\times[0,\infty))$ – невід'ємна функція з компактним носієм $\Omega'\times[a_0,A_0]$ $(0<a_0<A_0<\infty)$ в $\Omega\times[0,\infty)$, нормована на 1 в $L^1(\Omega\times[0,\infty))$;

c_2 : $f_2^\varepsilon\left(x^1,x^2;r_1,r_2\right)=f_1^\varepsilon\left(x^1;r_1\right)f_1^\varepsilon\left(x^2;r_2\right)+q^\varepsilon\left(x^1,x^2;r_1,r_2\right)$, де функція $q^\varepsilon\left(x^1,x^2;r_1,r_2\right)=-f_1^\varepsilon\left(x^1;r_1\right)f_1^\varepsilon\left(x^2;r_2\right)$ при $\left|x^{i\varepsilon}-x^{j\varepsilon}\right|<r_i^\varepsilon+r_j^\varepsilon$ і при малих ε у середньому мала так, що при $\forall\chi_1,\chi_2\ge 0$

$$\int_{\Omega}\int_{0}^{\infty}\int_{\Omega}\int_{0}^{\infty} r_1^{\chi_1} r_2^{\chi_2} \left|q^{\varepsilon}\left(x^1, x^2; r_1, r_2\right)\right| dr_1 dx^1 dr_2 dx^2 < C\varepsilon^{\alpha(\chi_1+\chi_2+3)}.$$

Умова c_2 є умовою ослабленої кореляції між парами часток.

При $\forall\varepsilon > 0$ функції розподілу (10) породжують імовірнісну міру P^{ε} в імовірнісному просторі G^{ε}. Точки ω^{ε} цього простору перебувають у взаємо-однозначній відповідності з випадковими множинами $F\left(\omega^{\varepsilon}\right) = \bigcup_{i=1}^{N^{\varepsilon}} B_i^{\varepsilon}$ в Ω. Для кожної реалізації множини $F\left(\omega^{\varepsilon}\right)$ існує єдиний узагальнений розв'язок $u\left(x, \omega^{\varepsilon}\right)$ задачі (3) в області $\Omega\left(\omega^{\varepsilon}\right) = \Omega \setminus F\left(\omega^{\varepsilon}\right)$.

Просторовий розподіл граничної (при $\varepsilon \to 0$) щільності поглинання в області Ω задамо за допомогою функції

$$C(x,u) = \int_0^{\infty} C_{\alpha\beta}(x,u;r) f(x,r) dr, \tag{11}$$

де $f(x,r)$ – функція з умови c_1, а функції $C_{\alpha\beta}(x,u;r)$ мають наступні визначення залежно від значень параметрів $(\alpha,\beta) \in \Lambda_p$, де $\Lambda_p = \{2 < \alpha < 3, 2\alpha + \beta \geq 3\} \cup \{\alpha \geq 3, -\infty < \beta < +\infty\}$:

$$C_{\alpha\beta}(x,u;r) = \begin{cases} 2\pi r^2 g(x,u), \text{при} \quad (\alpha,\beta) \in \ell_1; \\ 2\pi r(u-V)^2 + 2\pi r^2 g(x,V), \text{при} \quad (\alpha,\beta) = \lambda_0; \\ 2\pi r u^2, \text{при} \quad (\alpha,\beta) \in \ell_2; \\ 0, \text{при} \quad (\alpha,\beta) \in \Lambda_p \setminus (\ell_1 \cup \ell_2 \cup \lambda_0). \end{cases}$$

Тут через $\ell_1, \ell_2, \lambda_0$ позначені окремі ділянки межі області Λ_p: $\ell_1 = \{2 < \alpha < 3, \beta = 3 - 2\alpha\}$, $\ell_2 = \{\alpha = 3, \beta < -\alpha\}$, $\lambda_0 = (3,-3)$; $V = V(x,u;r)$ – розв'язок рівняння

$$V = u - r\sigma(x,V).$$

У підрозділі 5.2 доведена наступна теорема.

Теорема 5.2. *Нехай функції розподілу $f_1^{\varepsilon}, f_2^{\varepsilon}$ задовольняють умови c_1, c_2. Тоді узагальнений розв'язок $u^{\varepsilon}(x)$ задачі (3) є випадковою функцією $u\left(x,\omega^{\varepsilon}\right)$, що при $\varepsilon \to 0$ збігається по ймовірності P^{ε} в метриці $L^p\left(\Omega\left(\omega^{\varepsilon}\right)\right)(p < 6)$, тобто*

$$\forall\delta > 0 \quad \lim_{\varepsilon\to 0} P^{\varepsilon}\left\{\omega^{\varepsilon} \in G^{\varepsilon} : \int_{\Omega\left(\omega^{\varepsilon}\right)} \left|u\left(x,\omega^{\varepsilon}\right) - u(x)\right|^p dx < \delta\right\} = 1,$$

до невипадкової функції $u(x)$ – узагальненого розв'язку крайової задачі (9), де функція $C(x,u)$ визначена формулою (11).

ВИСНОВКИ

Відзначимо найбільш важливі результати отримані в дисертації:

1. Досліджено крайову задачу для оператора Лапласа з нелінійною крайовою умовою типу Робена в перфорованих сильно зв'язних областях довільного виду. Доведено, що при кожному фіксованому ε існує єдиний розвязок $u^{\varepsilon}(x)$ крайової задачі, досліджено асимптотичну поведінку розв'язків $u^{\varepsilon}(x)$ при $\varepsilon \to 0$, встановлено рівномірні та інтегральні умови збіжності й отримано усереднене рівняння, що описує головний член асимптотики.

2. Для областей локально-періодичної структури доведено виконання умов збіжності та отримано явні формули для ефективних характеристик середовища – тензора провідності й функції поглинання, які є коефіцієнтами усередненого рівняння.

3. Досліджено початково-крайову задачу для рівняння нестаціонарної дифузії зі знесенням часток дифундуючої речовини рідиною в перфорованих сильно зв'язних областях довільного виду з нелінійною крайовою умовою типу Робена на межі. Доведено, що при кожному фіксованому ε існує єдиний розвязок $u^{\varepsilon}(t,x)$ початково-крайової задачі, досліджено асимптотичну поведінку розв'язків $u^{\varepsilon}(t,x)$ при $\varepsilon \to 0$, встановлено умови збіжності й отримано усереднене рівняння, що описує головний член асимптотики.

4. Досліджено асимптотичну поведінку розв'язків крайової задачі для оператора Лапласа з нелінійною крайовою умовою типу Робена в областях з дрібнозернистою межею при довільному детермінованому розподілі перфоруючої множини, що складається із часток-куль. Установлено умови збіжності та виведено усереднене рівняння.

5. Досліджено асимптотичну поведінку розв'язків крайової задачі для оператора Лапласа з нелінійною крайовою умовою типу Робена в областях з дрібнозернистою випадковою межею, у яких центри куль та їх радіуси випадкові й описуються сукупністю s-часткових функцій розподілу. Доведено, що розв'язок задачі збігається за ймовірністю до розв'язку усередненого рівняння, для коефіцієнтів якого отримані явні формули, що виражаються через функції розподілу.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковані основні результати дисертації:

1. Хилькова Л. А. О гладкой зависимости решения "ячеечной" краевой задачи Неймана от параметров области / Л. А. Хилькова // Доповіді НАНУ. – 2014. – № 4. – С. 32-36.

2. Гончаренко М. В. Усреднённая модель диффузии в пористой среде с нелинейным поглощением на границе / М. В. Гончаренко, Л. А. Хилькова // Укр. матем. журн. – 2015. – Т. 67, № 9. С. 1201–1216.

3. Гончаренко М. В. Усредненная модель диффузии в локально периодической пористой среде с нелинейным поглощением на границе / М. В. Гончаренко, Л. А. Хилькова // Доповіді НАНУ. – 2016. – № 6. – С. 15-19.

4. Хилькова Л. А. Усреднение уравнения диффузии в областях с мелкозернистой границей с нелинейным граничным условием типа Робена / Л. А. Хилькова. // Вісник ХНУ, Серія «Матем., прикладна матем. і механіка». – 2016. – Т. 84. – С. 93-111.

5. Goncharenko M. Homogenized Model of Non-Stationary Diffusion in Porous Media with the Drift / M. Goncharenko, L. Khilkova // J. Math. Phys. Anal. Geom. – 2017. – Vol. 13, No. 2. – P. 154-172.

6. Khruslov E. Ya. Integral conditions for convergence of solutions of non-linear Robin's problem in strongly perforated domains / E. Ya. Khruslov, L. O. Khilkova, M. V. Goncharenko // J. Math. Phys. Anal. Geom. – 2017. – Vol. 13, No. 3. – P. 1-31.

7. Хруслов Е. Я. Нелинейная задача Робена в областях с мелкозернистой случайной границей / Е. Я. Хруслов, Л. А. Хилькова // Доповіді НАНУ. – 2017. – № 9. – С. 3-8.

Публікації, які засвідчують апробацію дисертації:

8. Khilkova L. Homogenized model of diffusion in porous media with nonlinear absorption at the boundary // II International Conference “Analysis and mathematical physics”, Kharkiv, June 16-20, 2014. Book of abstracts. – P. 32-33.

9. Хількова Л. О. Усереднена модель дифузії в сильно зв'язному пористому середовищі з нелінійним поглинанням на межі // International Conference of Young Mathematicians, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, June 3–6, 2015. Book of abstracts. – c. 173.

10. Khilkova L. Homogenized conductivity tenzor and absorption function for a locally periodic porous medium // III International Conference “Analysis and mathematical physics”, Kharkiv, June 15-19, 2015. Book of abstracts. – P. 25-26.

11. Khilkova L. Homogenized model of non-stationary diffusion in porous media with the drift // IV International Conference “Analysis and mathematical physics”, Kharkiv, June 13-17, 2016. Book of abstracts. – P. 22.

12. Khilkova L. The study of the asymptotic behavior of the third boundary value problem solutions in domains with fine-grained boundaries // 5 th International Conference on Differential Equations and Applications dedicated to Ya. B. Lopatynsky, Kyiv, Ukraine, November 9-11, 2016. Book of abstracts. – P. 75-76.

13. Хількова Л. О. Інтегральні умови збіжності розв'язку нелінійної задачі Робена в сильно перфорованих областях // International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100 th Anniversary of NAS of Ukraine, Professor Yu. O. Mitropolskiy, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, June 7–10, 2017. Book of abstracts. – c. 104.

14. Khilkova L. Homogenization of the diffusion equation in domains with the fine-grained boundary with the nonlinear boundary Robin condition // V International Conference “Analysis and mathematical physics” dedicated to Vladimir A. Marchenko's 95 th birthday and the centennial anniversary of NAS of Ukraine, Kharkiv, June 19-24, 2017. Book of abstracts. – P. 36-37.

15. Khilkova L. Robin's nonlinear problem in domains with a fine-grained random boundary // International Conference Differential Equations, Mathematical Physics and Applications, Cherkasy, October 17-19, 2017. Book of abstracts. – P. 64-65.

АНОТАЦІЯ

Хількова Л.О. Усереднені моделі дифузії в пористому середовищі з нелінійною адсорбцією на межі. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.03 – математична фізика. – Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України, Харків, 2018.

У дисертаційній роботі вивчаються питання усереднення крайових задач для рівнянь дифузії в сильно перфорованих областях $\Omega^{\varepsilon} = \Omega \setminus F^{\varepsilon} \in R^{n}$ ($n \geq 2$) з нелінійною адсорбцією на межі F^{ε}. Область дифузії Ω^{ε} залежить від малого параметра ε так, що при $\varepsilon \to 0$ перфоруюча множина F^{ε} стає все більш порізаною й розташовується в фіксованій області Ω все більш щільно.

Дифузійні процеси розглядаються в перфорованих областях Ω^{ε} двох типів: сильно зв'язних областях й областях із дрібнозернистою межею. Для обох типів перфорованих структур теорія усереднення третьої крайової задачі з нелінійною крайовою умовою становить значний інтерес і раніше не була побудована.

Перша частина роботи присвячена усередненню дифузійних процесів в сильно зв'язних областях і викладена у розділах 2-4. У другому розділі вивчається крайова задача для рівняння стаціонарної дифузії з нелінійною адсорбцією на межі F^{ε}. При кожному фіксованому ε доведено існування єдиного розв'язку $u^{\varepsilon}(x)$. Досліджено асимптотику розв'язків $u^{\varepsilon}(x)$ при $\varepsilon \to 0$, встановлено умови збіжності та отримано усереднене рівняння. У третьому розділі розглядаються області локально-періодичної структури, для яких отримані явні формули для ефективних характеристик середовища. Четвертий розділ присвячено розгляду початково-крайової задачі для рівняння нестаціонарної дифузії зі знесенням часток дифундуючої речовини рідиною. При кожному фіксованому ε доведено існування єдиного розв'язку $u^{\varepsilon}(t,x)$. Вивчена асимптотична поведінку розв'язків $u^{\varepsilon}(t,x)$ при $\varepsilon \to 0$, визначені умови збіжності та отримано усереднене рівняння, що описує головний член асимптотики.

П'ятий розділ складає другу частину дисертації й присвячений розгляду дифузійних процесів в областях з дрібнозернистою межею. Вивчається крайова задача для рівняння стаціонарної дифузії в області, додаткової до великого числа дрібних поглинаючих часток-куль, радіуса порядку $O(\varepsilon^{\alpha})$, $\alpha > 1$, функція поглинання на поверхні яких має порядок $O(\varepsilon^{\beta})$, $\beta = \beta(\alpha)$. Досліджено вплив параметрів α, β на асимптотику розв'язків $u^{\varepsilon}(x)$, визначені умови збіжності й отримано усередненого рівняння.

Ключові слова: Усереднення, сильно перфоровані області, дифузія, адсорбція, нелінійна крайова умова Робена, варіаційні методи, усереднене рівняння.

ABSTRACT

Khilkova L.O. Homogenized models of diffusion in a porous medium with nonlinear adsorption at the boundary. – Manuscript.

The thesis for a Candidate's degree in Physics and Mathematics: Speciality 01.01.03 – Mathematical Physics. – B. I. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering, National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, 2018.

In the thesis we study the questions of homogenization of boundary value problems for equations of diffusion in strongly perforated domains $\Omega^{\varepsilon} = \Omega \setminus F^{\varepsilon} \in R^{n}$ ($n \geq 2$) with a non-linear Robin's boundary condition. The domain of diffusion Ω^{ε} depends on the small parameter ε such that the perforating set F^{ε} becomes more and more loosened and distributes more densely in the fixed domain Ω as $\varepsilon \to 0$.

Diffusion processes are considered in the perforated domains Ω^{ε} of two types: in strongly connected domains and in domains with fine-grained boundary. For both types of perforated structures, the theory of homogenization of the third boundary value problem with a non-linear boundary condition is of great interest and has not yet been constructed.

The first part of the thesis is devoted to the homogenizing of diffusion processes in strongly connected domains and contains sections 2-4. In the second section we study a boundary value problem for a equation of stationary diffusion with a non-linear adsorption on the boundary of F^{ε}. For each fixed ε we prove the existence of the unique solution $u^{\varepsilon}(x)$. We study the asymptotic behavior of solutions $u^{\varepsilon}(x)$ as $\varepsilon \to 0$, establish conditions of convergence and obtain of a homogenized equation. In the third section we consider the domains of locally-periodic structure, for which explicit formulas of effective characteristics of the medium are obtained. In the fourth section we consider an initial boundary value problem for a equation of non-stationary diffusion with non-linear absorption on the boundary and the transfer of the diffusing substance by fluid. For each fixed ε we prove the existence of the unique solution $u^{\varepsilon}(t,x)$. We study the asymptotic behavior of solutions $u^{\varepsilon}(t,x)$ as $\varepsilon \to 0$, define the conditions of convergence and obtain the homogenized model of the diffusion process.

The fifth section is the second part of the thesis, it is devoted to consideration of diffusion processes in the domains with a fine-grained boundary. We study the boundary value problem for the stationary diffusion equation in the domain, which is additional of fine (a radius is $O(\varepsilon^{\alpha})$, $\alpha > 1$) adsorbing grain-balls large number. The absorption function on surfaces of the grains is $O(\varepsilon^{\beta})$, $\beta = \beta(\alpha)$. We investigate the influence of the parameters α, β on the asymptotic of the solutions $u^{\varepsilon}(x)$, define the conditions of convergence and obtain of the homogenized equation.

Key words: Homogenization, strongly perforated domains, diffusion, adsorption, non-linear Robin's boundary condition, variational methods, homogenized equation.

АННОТАЦИЯ

Хилькова Л.А. Усреднённые модели диффузии в пористой среде с нелинейной адсорбцией на границе. – Рукопись.

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика. – Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Харьков, 2018.

В диссертации изучаются вопросы усреднения краевых задач для уравнений диффузии в сильно перфорированных областях $\Omega^{\varepsilon} = \Omega \setminus F^{\varepsilon} \in R^{n}$ ($n \geq 2$) с нелинейной адсорбцией на границе F^{ε}. Область диффузии Ω^{ε} зависит от малого параметра $\varepsilon > 0$ так, что при $\varepsilon \to 0$ перфорирующее множество F^{ε} становится всё более изрезанным и располагается в фиксированной области Ω всё более плотно.

Диффузионные процессы рассматриваются в перфорированных областях Ω^{ε} двух типов: сильно связных областях и областях с мелкозернистой границей. Для обоих типов структур теория усреднения третьей краевой задачи с нелинейным краевым условием представляет большой интерес и раньше не была построена.

Первая часть работы посвящена рассмотрению диффузионных процессов в сильно связных областях и изложена в разделах 2-4. Во втором разделе изучается краевая задача для уравнения стационарной диффузии с нелинейной адсорбцией на границе F^{ε}. При каждом фиксированном ε доказано существование единственного решения $u^{\varepsilon}(x)$. Исследовано асимптотическое поведение решений $u^{\varepsilon}(x)$ при $\varepsilon \to 0$, установлены условия сходимости и получено усреднённое уравнение. В третьем разделе рассматриваются области локально-периодической структуры, для которых получены явные формулы для эффективных характеристик среды. Четвёртый раздел посвящён изучению начально-краевой задачи для уравнения нестационарной диффузии с переносом частиц диффундирующего вещества жидкостью. При каждом фиксированном ε доказано существование единственного решения $u^{\varepsilon}(t,x)$. Изучена асимптотическое поведение решений $u^{\varepsilon}(t,x)$ при $\varepsilon \to 0$, определены условия сходимости и получено усреднённое уравнение, описывающее главный член асимптотики.

Пятый раздел составляет вторую часть диссертации и рассматривает диффузионные процессы в областях с мелкозернистой границей. Рассматривается краевая задача для уравнения стационарной диффузии в области, дополнительной к большому числу мелких поглощающих частиц-шаров, радиуса порядка $O(\varepsilon^{\alpha})$, $\alpha > 1$, функция поглощения на поверхности которых имеет порядок $O(\varepsilon^{\beta})$, $\beta = \beta(\alpha)$. Исследовано влияние параметров α, β на асимптотику решений $u^{\varepsilon}(x)$, определены условия сходимости и получено усреднённое уравнение.

Ключевые слова: Усреднение, сильно перфорированные области, диффузия, адсорбция, нелинейное краевое условие Робена, вариационные методы, усреднённое уравнение.