АНОТАЦІЯ

Тєплова Д. П. Застосування теорії випадкових матриць до багатовимірних часових рядів. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – Математика. — Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Вєркіна Національної академії наук України, Харків, 2020.

У **вступі** обґрунтовано актуальність досліджуваних задач, наведено зв'язок роботи з науковими програмами, планами і темами. Сформульовано мету, задачі та методи дослідження. Визначено наукову новизну і значення отриманих результатів. Надано відомості про публікації, особистий внесок здобувача та апробацію результатів дисертації.

Перший розділ присвячений огляду та аналізу літератури. **Підрозділи 1.2** та **1.3** містять ключові результати по двом ансамблям, що розглядаються у роботі, а саме: ансамбль матриць автоковаріацій та матриць коваріацій, компоненти яких представлені тензорними добутками.

Матриця автоковаріацій між минулим та майбутнім деякого часового ряду грає важливу роль у проблемах статистичного висновування, які пов'язані з багатовимірними часовими рядами, що мають раціональний спектр. Тим не менш, існуючи методи, що дозволяють отримати необхідну інформацію з матриці автоковаріацій, можуть бути використані лише у випадку, коли кількість спостережень набагато більша за їх розмірність. Проте, сучасні тенденції великих даних приводять до випадків, коли розмірність спостережень пропорційна кількості спостережень. Таким чином, доречно дослідити поведінку емпіричної матриці автоковаріацій у випадку, коли обидва параметри, кількість спостережень та їх розмірність, прямують до $+\infty$ так, що їх відношення прямує до ненульової константи.

Другий розділ присвячений дослідженню асимптотичної поведінки розподілу власних значень матриць автоковаріацій. Ми розглядаємо послідовність натуральних чисел $(M(N))_{N\geq 1}$ та додатно визначних $M(N) \times M(N)$ ермітових матриць $(R_N)_{N\geq 1}$. Для кожного N ми визначимо послідовність незалежних однаково розподілених Гауссових векторів $(y_n)_{n\geq 1}$ (що залежать також від N) з нульовим математичним сподіванням та розмірністю $M(N)$ і таких, що $y_n = R_N^{1/2}\xi_n$, де компоненти M–вимірного вектора ξ_n є комплексними незалежними однаково розподіленими стандартними Гауссовими величинами (тобто їх дійсні та уявні частини незалежні та мають розподіл $\mathcal{N}(0, 1/2)$). Далі, фіксуємо натуральне число L і розглядаємо дві блокові матриці Ханкеля $W_{p,N}$ та $W_{f,N}$ розмірністю $ML \times N$

$$W_{p,N} = \frac{1}{\sqrt{N}} Y_{p,N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{N-1} & y_N \\ y_2 & y_3 & \cdots & y_N & y_{N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_L & y_{L+1} & \cdots & y_{N+L-2} & y_{N+L-1} \end{pmatrix}$$

та

$$W_{f,N} = \frac{1}{\sqrt{N}} Y_{f,N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} y_{L+1} & y_{L+2} & \cdots & y_{N-1+L} & y_{N+L} \\ y_{L+2} & y_{L+3} & \cdots & y_{N+L} & y_{N+L+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{2L} & y_{2L+1} & \cdots & y_{N+2L-2} & y_{N+2L-1} \end{pmatrix}.$$

Вивчається поведінка нормованої рахуючої міри $\hat{\nu}_N$ матриці $W_{f,N}W_{p,N}^*W_{p,N}W_{f,N}^*$ розмірністю $ML \times ML$ при асимптотичному режимі, коли M та N прямують до $+\infty$ таким чином, що

$$c_N = \frac{ML}{N} \to c_*,\ c_* > 0.$$

Підрозділ 2.1: оцінки дисперсії нормованого сліду та квадратичної форми резольвенти $Q_N(z) = (W_{f,N}W_{p,N}^*W_{p,N}W_{f,N}^* - z)^{-1}$. Для їх доведення використовується нерівність Пуанкаре-Неша.

Підрозділ 2.2: декілька корисних результатів, що стосуються перетворень Стілтьєса спеціального вигляду.

Підрозділ 2.3: за допомогою формул інтегрування частинами доведено, що математичне сподівання резольвенти $Q_N(z)$ є

$$\mathbb{E}\{Q_N(z)\} = I_L \otimes S_N(z) + \Delta_N(z),$$

де $\mathbb{E}\{\cdot\}$ – операція математичного сподівання та

$$S_N(z) = -\left(zI_M + \frac{c_N z \alpha_N(z)}{1 - c_N^2 \alpha_N(z)^2} R_N\right)^{-1},$$
$$\alpha_N(z) = \frac{1}{ML}\mathrm{Tr}\mathbb{E}(Q_N(z))(I_L \otimes R_N)$$

і $\Delta_N(z)$ – малий доданок(помилка).

Підрозділ 2.4: оцінка доданку $\Delta_N(z)$, а саме, що $(ML)^{-1}|\mathrm{Tr}\Delta_N(z)| \leq \kappa N^{-2} P_1(z) P_2((\mathrm{Im} z)^{-1})$, для деяких хороших поліномів P_1, P_2, тобто степені і коефіцієнти яких є незалежними від N.

Підрозділ 2.5: доведено, що для усіх $z \in \mathbb{C}^+$,

$$\frac{1}{M}\mathrm{Tr}\left((S_N(z) - T_N(z))F_N\right) \to 0,$$

де $(F_N)_{N \geq 1}$ – будь-яка послідовність невипадкових матриць, для яких $\sup_N \|F_N\| < +\infty$, і матриця $T_N(z)$ є

$$T_N(z) = -\left(zI_M + \frac{zc_N t_N(z)}{1 - zc_N^2 t_N^2(z)} R_N\right)^{-1},$$

де $t_N(z)$ – єдиний розв'язок рівняння

$$t_N(z) = \frac{1}{M}\mathrm{Tr} R_N \left(-zI_M - \frac{zc_N t_N(z)}{1 - zc_N^2 t_N^2(z)} R_N\right)^{-1}, \tag{0.1}$$

для якого $t_N(z)$ та $zt_N(z)$ належать до $\mathbb{C}^+$, якщо $z \in \mathbb{C}^+$. Показано, що $t_N(z)$ та $T_N(z)$ є перетвореннями Стілтьєса скалярної міри μ_N та додатної $M \times M$-вимірної матрично-значної міри ν_N^T, відповідно. Також виявляється, що $\nu_N = (M)^{-1}\mathrm{Tr}(\nu_N^T)$ є ймовірнісною мірою, для якої $\hat{\nu}_N - \nu_N \to 0$ слабко, майже напевно. Тобто, ν_N є так званою невипадковою еквівалентою міри $\hat{\nu}_N$.

Підрозділ 2.6: показано, що використання методів вільної ймовірності є альтернативним підходом до вивчення асимптотичної поведінки міри $\hat{\nu}_N$. При цьому головною проблемою є довести, що матриці $W_{f,N}^* W_{f,N}$ та $W_{p,N}^* W_{p,N}$ є асимптотично вільними. Виявляється, що цей факт є наслідком Леми 6 [24]. Тим не менш, не зважаючи на те, що цей підхід здається набагато простішим, ніж описаний вище, важливо зауважити, що методи вільної ймовірності не дозволяють дослідити поведінку резольвенти матриці $W_{f,N} W_{p,N}^* W_{p,N} W_{f,N}^*$. Тим не менш, для вирішення подальших задач, таких як оцінка найбільших власних значень та відповідних власних векторів матриці $W_{f,N}W_{p,N}^{*}W_{p,N}W_{f,N}^{*}$ з присутнім корисним сигналом, необхідно знати асимптотичну поведінку резольвенти моделі лише з шумом.

Третій розділ присвячений детальному вивченню властивостей міри ν_N та її носія.

Підрозділ 3.1: характеризація поведінки рішення $t_N(z)$ рівняння (0.1), коли аргумент z наближається до осі дійсних чисел. Для усіх $x > 0$, існує кінцева границя $t_N(z)$, коли $z \in \mathbb{C}^+$ прямує до x. Якщо $c_N \leq 1$, ми отримали, що ν_N абсолютно неперервна по відношенню до міри Лебега. Відповідна щільність $g_N(x)$ є дійсною аналітичною функцією на $\mathbb{R}^+$ і прямує до $+\infty$ коли $x \to 0, x > 0$. У випадку $c_N < 1$, справедливо $g_N(x) = \mathcal{O}(x^{-1/2})$, $x \to 0$ та $g_N(x) = \mathcal{O}(x^{-2/3})$, $x \to 0$ якщо $c_N = 1$. Нарешті, якщо $c_N > 1$, ν_N містить масу Дірака у 0 зі значенням $1 - \frac{1}{c_N}$ та абсолютно неперервну компоненту, подібно тому, як це має місце для стандартних емпіричних матриць коваріацій [Марченко, Пастур, 1967].

Підрозділ 3.2: проаналізовано носій міри ν_N, для цього ми встановили, що функція

$$w_N(z) = zc_N t_N(z) - \frac{1}{c_N t_N(z)}$$

є розв'язком рівняння $\phi_N(w_N(z)) = z$ для кожного $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$, де $\phi_N(w)$ визначається як

$$\phi_N(w) = c_N w^2 \frac{1}{M} \mathrm{Tr} R_N \left(R_N - wI\right)^{-1} \left(c_N \frac{1}{M} \mathrm{Tr} R_N \left(R_N - wI\right)^{-1} - 1\right).$$

Більш того, якщо ми визначимо $t_N(x)$ для $x > 0$ як границю $t_N(z)$ при $z \to x, z \in \mathbb{C}^+$, рівняння $\phi_N(w_N(x)) = x$ залишається справедливим на $\mathbb{R}^+$. Доведено, що якщо x лежить ззовні носія міри ν_N, тоді

$$\phi_N(w_N(x)) = x,\ \phi^{'}(w_N(x)) > 0,\ w_N(x) \frac{1}{M} \mathrm{Tr} R_N \left(R_N - w(x)I\right)^{-1} < 0.$$

Ці властивості дозволяють довести, що окрім $\{0\}$ коли $c_N > 1$, носій міри ν_N є об'єднанням інтервалів, кінцеві точки яких є екстремумами функції ϕ_N, аргументи яких задовольняють $\frac{1}{M} \mathrm{Tr} R \left(R - wI\right)^{-1} < 0$. Наведена достатня умова на власні значення матриці R_N, коли носій міри ν_N стає лише одним інтервалом.

Підрозділ 3.3: на основі підходу [Haagerup-Thornbjornsen, 2005], доведено, що для достатньо великих N, усі власні значення матриці $W_{f,N}\, W^*_{p,N}\, W_{p,N}\, W^*_{f,N}$ належать околу носія невипадкової міри ν_N. Зауважимо, що з цього не випливає існування кінцевої границі послідовності нормованих рахуючих мір $\hat{\nu}_N$ матриць $W_{f,N}W^*_{p,N}W_{p,N}W^*_{f,N}$. Для отримання такого результату необхідні додаткові припущення, такі як існування границі нормованої рахуючої міри власних значень матриці R_N коли $N \to +\infty$.

Четвертий розділ присвячений аналізу ансамблю матриць коваріацій, компоненти яких є тензорними добутками. Ми розглядаємо $N^2 \times N^2$ дійсну симетричну або ермітову матрицю $\mathcal{M}_N$, яка є сумою M_N тензорних добутків $X^\mu \otimes X^\mu$ векторів $X^\mu = B_N(Y^\mu \otimes Y^\mu)$, $\mu = 1, \ldots, M_N$, де вектори Y^μ є незалежними однаково розподіленими векторами з $\mathbb{R}^N(\mathbb{C}^N)$ з нульовим математичним сподіванням та одиничною дисперсією. Матриця B_N є додатно визначеною невипадковою матрицею розмірності $N^2 \times N^2$. Визначимо також $N^2 \times N^2$ матрицю $J_N = \{J_{p_1p_2,q_1q_2}\}^N_{p_1,p_2,q_1,q_2=1}$, де $J_{p_1p_2,q_1q_2}$ є елементом, що знаходиться у рядку $(p_1 - 1)N + p_2$ та стовпчику $(q_1 - 1)N + q_2$ та дорівнює $\delta_{p_1,q_1}\delta_{p_2,q_2} + \delta_{p_2,q_1}\delta_{p_1,q_2}$.

Підрозділ 4.1: доведення головного результату цього розділу, а саме наступної теореми.

Теорема. Нехай послідовність нормованих рахуючих мір σ_N матриць $B_N J_N B_N$ слабко збігається до ймовірнісної міри σ:

$$\lim_{N\to\infty} \sigma_N = \sigma,$$

та матриці B_N рівномірно обмежені по N та $\{M_N\}$ є послідовністю натуральних чисел, для якої

$$M_N \to +\infty,\ N \to +\infty,\ c_N = M_N/N^2 \to c \in [0, +\infty).$$

Тоді нормована рахуюча міра ν_n власних значень матриці $\mathcal{M}_N$ слабко збігається з ймовірністю 1 до невипадкової ймовірнісної міри ν та, якщо $f^{(0)}$ – це перетворення Стілтьєса міри σ, тоді перетворення Стілтьєса f міри ν однозначно визначається рівнянням

$$f(z) = f^{(0)}\left(\frac{z}{c - zf(z) - 1}\right)(c - zf(z) - 1)^{-1}$$

у класі перетворень Стілтьєса ймовірнісних мір.

Підрозділ 4.2: доведення деяких допоміжних оцінок математичного сподівання та дисперсії функціоналів резольвенти.

Ключові слова: теорія випадкових матриць, випадкові матриці з незалежними елементами, Гаусові випадкові матриці, матриця автоковаріацій, перетворення Стілтьєса, матриця коваріацій, тензорний добуток, розподіл власних значень.

Список публікацій здобувача

Публікації у фахових виданнях України і виданнях України, що входять до міжнародних наукометричних баз:

1. Tieplova, D.: Distribution of eigenvalues of sample covariance matrices with tensor product samples. Журнал математичної фізики, аналізу, геометрії. 13(1), 82–98 (2017)

   (Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Web of Science, MathSciNet, Google Scholar; Impact Factor: 0.424; квартиль Q3)

Публікації у зарубіжних виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз:

2. Loubaton, P., Tieplova, D.: On the Behaviour of Large Empirical Autocovariance Matrices Between the Past and the Future. Random Matrices: Theory and Applications, doi: 10.1142/S2010326321500210

   (Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Web of Science, MathSciNet, Google Scholar, zbMATH; Impact Factor: 1.02; квартиль Q2)

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

3. Tieplova, D.: Distribution of eigenvalues of some random matrices of large order. In: II International Conference "ANALYSIS AND MATHEMATICAL PHYSICS": Book of abstracts, p. 31. B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv (2015)

4. Tieplova, D.: Distribution of eigenvalues of sample covariance matrices with tensor product samples. In: Abstracts of Lectures and Talks: Trilateral German-Russian-Ukrainian Summer School "Spectral Theory, Differential Equations and Probability", p. 22. Johannes Gutenberg Universität Mainz, Mainz (2016)

5. Tieplova, D., Loubaton, P., Pastur, L.: On the behaviour of the singular values of empirical autocovariance matrices in the high-dimensional case. In: International Conference "XXVII Colloque francophone de traitement du signal et des images", p. 95. L'Universite de Lille, France, 26–29 august (2019)

6. Tieplova, D., Loubaton, P., Pastur, L.: "On the Limit Distribution of the Canonical Correlation Coefficients Between the Past and the Future of a High-Dimensional White Noise. In: International Conference "2020 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), pp. 8772–8776. Barcelona, Spain (2020)