ВІДГУК
офіційного опонента про дисертаційну роботу
Рибалка Володимира Олександровича
"Існування і асимптотична поведінка розв'язків задач математичної фізики "
представлену на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук за спеціальністю
01.01.03 - математична фізика

Головну частину дисертаційної роботи присвячено дослідженню варіаційних задач для функціонала Гінзбурга-Ландау і сингулярно збурених спектральних задач.

Варіаційні задачі для функціонала енергії Гінзбурга-Ландау є фізично мотивованими дослідженнями фазових переходів в надпровідниках та надплинних рідинах і становлять значний математичний інтерес в контексті розвинення теорії якісних властивостей розв'язків нелінійних задач математичної фізики, зокрема, їх асимптотичної поведінки і формування сингулярностей. Піонерською математичною роботою з цієї тематики є монографія Ф. Бетюеля, Х. Брезіса і Ф. Хелейна (1994) присвячена дослідженню сингулярної асимптотичної поведінки мінімізантів функціонала Гінзбурга-Ландау з умовою Діріхле на межі в границі Лондонів. Результати і методи цієї роботи сприяли сплеску активності в тематиці, що продовжує пригортати значну увагу математиків до теперішнього часу. Дослідження в дисертаційній роботі мотивоване природною спробою послабити крайову умову Діріхле на межі (що не є фізичною) до заданих степенів відображення мінімізантів на компонентах межі. Проте таке послаблення веде до некомпактної варіаційної задачі. Такі задачі зустрічаються в геометрії і фізиці, наприклад, задача Ямабе, гармонічні відображення, рівняння Янга- Міллса, для них є характерним нелінійний ефект концентрації квантованих енергій. Розглядаючи задачу вивчену в дисертації в загальному контексті некомпактних варіаційних задач, треба відмітити нестандартний механізм втрати компактності – через концентрацію енергій в околі точок, що прямують до межі.

Інший клас задач, логічно пов'язаний зі згаданою вище властивістю втрати компактності, є сингулярно збурені еліптичні задачі які також займають значну частину досліджень представлених в дисертації. Історія досліджень таких задач восходить до роботи М.Й. Вішика і Л.А.Люстерника (1957), де було запропоновано техніку побудови примежових шарів у випадку, коли гранична задача є в певному сенсі добре поставленою. Для сингулярно збурених лінійних еліптичних рівнянь згодом було винайдено інші методи (що, зокрема, дозволяють розглянути більш загальні випадки) серед яких виділяється потужна техніка, яка базується на понятті в'язкісних розв'язків введеному П.-Л. Ліонсом і М. Крендаллом (1983). В дисертаційній роботі використано і розвинуто цей метод для вивчення спектральних задач з сингулярно збуреними несиметричними операторами. Основна складність в дослідженні таких задач пов'язана з відсутністю варіаційного принципу через конвективні члени.

Також в роботі досліджено дві задачі усереднення до яких застосовано класичні (для теорії усереднення) техніки асимптотичного аналізу проте винайдено нетривіальні ефекти спричинені неоднорідностями; і доведено існування розв'язків типу біжних хвиль в задачі з вільною межею, що моделює рух клітин на субстраті.

З огляду на сказане вище, дослідження в дисертаційній роботі є актуальними.

Дисертація складається з чотирьох розділів, причому перші два з них містять головну частину роботи.

В першому розділі досліджуються варіаційні задачі для функціонала Гінзбурга-Ландау (як спрощеного так і повного, що враховує магнітні ефекти) в класі комплекснозначних функцій з одиничним модулем на межі і заданими степенями відображення на її зв'язних компонентах. Серед основних результатів розділу можна виділити наступні:

a) Доведено гіпотезу, що було висунуто в роботі Л. Берлянда і П. Міронеску (2006), про існування скінченного порогового значення параметра Гінзбурга-Ландау κ, більше якого не існує глобальних мінімізантів спрощеного функціонала Гінзбурга-Ландау з заданими одиничними степенями відображення на компонентах межі двозв'язних областей з ємністю меншою π.

b) Запропоновано варіаційний підхід для побудови локальних мінімізантів функціонала Гінзбурга-Ландау. За допомогою цього підходу доведено існування локальних мінімізантів з нулями (вихорами) функціонала Гінзбурга-Ландау (як спрощеного так і повного, що враховує магнітні ефекти) в двозв'язних областях з заданими степенями відображення на межі. Вивчено асимптотичну поведінку локальних мінімізантів у границі Лондонів, показано, що вихорі наближаються до межі і в їх околах концентруються скінченні квантовані енергії.

c) Досліджено модельну задачу для повного функціонала Гінзбурга-Ландау в двозв'язній області з заданими одиничним і нульовим степенями на компонентах межі, і вивчено сингулярну поведінку мінімізантів коли параметр Гінзбурга-Ландау κ прямує до критичного значення $1/\sqrt{2}-0$. Доведено існування вихорів коло межі і описано їх граничні положення на межі в зазначеній вище границі. Також описано δ-подібну поведінку струмів на межі.

d) Досліджено структуру послідовностей Пале-Смейла пов'язаних з варіаційной задачею для спрощеного функціонала Гінзбурга-Ландау з заданими степенями на межі. Результати про структуру послідовностей Пале-Смейла застосовано для доведення існування критичних точок з одиничним степенем на межі однозв'язної області.

Що стосується методів доведення, в їх основі лежать дуже нетривіальні точні оцінки для енергій. Треба зазначити, що точні оцінки енергії було вперше використано для доведення існування розв'язків некомпактних варіаційних задач Т. Обіном (1976) в дослідженнях задачі Ямабе.

В другому розділі роботи вивчаються сингулярно збурені спектральні задачі для несиметричних еліптичних операторів. Більша частина результатів стосується асимптотичної поведінки основних станів, тобто перших власних значень і відповідних власних функцій. За допомогою логарифмічного перетворення власної функції задачу зведено до сингулярно збуреного рівняння Гамільтона-Якобі, і його асимптотичний аналіз проведено користуючись методами теорії в'язкісних розв'язків. Проте найбільш вагомі результати цього розділу стосуються уточнених асимптотик для власних значень і селекції власної функції ефективної задачі, що відповідає границі масштабованих логарифмічних перетворень власних функцій вихідних задач. Основними результатами про асимптотичну поведінку основних станів є наступні:

e) Знайдено усереднену задачу, що описує асимптотичну поведінку першого власного значення і власної функції сингулярно збурених несиметричних еліптичних операторів з осцилюючими локально періодичними коефіцієнтами і умовою Діріхле на межі, доведено теорему про збіжність. Встановлено уточнені асимптотики у випадку, коли молодші члени мають однаковий порядок. Зокрема, описано локалізацію власних функцій у випадку коли множина Обрі ефективної задачі складається з кількох гіперболічних нерухомих точок і (або) граничних циклів динамічної системи породженої ефективним знесенням.

f) Встановлено границю першого власного значення задачі Неймана для несиметричних еліптичних операторів з плавно змінними коефіцієнтами і малим множником перед дифузійним членом. Описано асимптотичну поведінку першої власної функції.

Також в другому розділі вивчено спектральну задачу для сингулярно збурених несиметричних еліптичних операторів з осцилюючими локально періодичними коефіцієнтами в тонкому циліндрі з умовою Неймана на бічній поверхні і Фур'є на основах. Для цієї задачі

g) знайдено одновимірну ефективну задачу, що описує асимптотики основних станів. За структурної умови щодо ефективної задачі знайдено двочленні асимптотичні формули для першого і наступних власних значень.

В третьому розділі роботи розглянуто дві задачі усереднення, для дослідження яких використано стандартні методи, проте винайдено нові ефекти. Зокрема, отримано наступні результати:

h) Вивчено варіаційну задачу для гармонічних відображена в областях з великим числом малих отворів, що моделюють чужорідні домішки в надпровідному зразку. Знайдено ефективну задачу, що описує асимптотичну поведінку вихоревих структур спричинених зовнішнім магнітним полем. Показано, що виникають структури з кратних вихорів у вложених областях.

i) Вивчено задачу усереднення монотонних операторів у перфорованих областях з умовою Фур'є на межі дірок. Виведено ефективну (усереднену) задачу, що описує асимтотичну поведінку розв'язків.

Відмітимо, що в останньому результаті ефективна крайова умова на зовнішній межі містить доволі неочикуваний додатковий член спричинений колективним ефектом від дірок в області.

Останній розділ дисертації містити дослідження задачі з вільною межею, що моделює рух живих клітин на субстраті. Встановлено існування сім'ї радіально симетричних стаціонарних розв'язків і проведено її біфуркаційний аналіз. В результаті

j) доведено існування розв'язків типу біжних хвиль і стаціонарних розв'язків без радіальної симетрії.

Для доведення існування розв'язків типу біжних хвиль застосовано топологічні міркування, які базуються на понятті степеня Лере-Шаудера.

Отримані в дисертації результати є новими та супроводжуються повними доведеннями, їх достовірність не викликає сумніву. Всі результати викладені в опублікованих роботах. Вони доповідалися на багатьох наукових семінарах і міжнародних конференціях.

Автореферат правильно відображає зміст дисертації. Результати дисертації опубліковано в міжнародних журналах високого рівня.

До дисертації є наступні зауваження:

1) Формулювання Теореми 1.4.1 містить друкарську помилку: в твердженні (ii) точка ξ^* не максимізує, а мінімізує $\left|\frac{\partial V}{\partial \nu}\right|$ (або максимізує $\frac{\partial V}{\partial \nu}$). Така сама помилка є і в авторефераті.

2) Досить незграбним є використання однакових позначень J, J_p і J_{pq} в Розділі 1 як для класів функцій u у випадку спрощеного функціонала Гінзбурга-Ландау, так і для пар (u, A) у випадку повного функціонала Гінзбурга-Ландау.

3) В дисертації і автореферат є описки, невдалі вирази.

Зазначені вище зауваження не впливають суттєвим чином на загальну позитивну оцінку роботи.

Резюмуючи сказане вище, вважаю, що дисертаційна робота Рибалка В.О. *"Існування і асимптотична поведінка розв 'язків задач математичної фізики"*, представлена на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.03 – математична фізика, за обсягом і рівнем проведених досліджень, їх актуальністю та кількістю публікацій відповідає всім вимогам, що пред'являються до докторських дисертацій, а дисертант заслуговує присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук.

Директор
Інституту прикладної математики
і механіки НАН України,
чл.-кор. НАН України,
д.ф.-м.н. І.І. Скрипнік
11.12.2019 р.

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
Інститут прикладної математики і механіки
КОД 05420675
50