

## В І Д Г У К

офіційного опонента про дисертацію Резуненка Олександра Вячеславовича “Якісні властивості динамічних систем, що породжені нелінійними диференціальними рівняннями у частинних похідних із загаюванням”, що подана на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.03 — математична фізика.

Дисертаційна робота присвячена актуальній і важливій темі — дослідженню функціонально-диференціальних рівнянь з частинними похідними. Такі рівняння мають численні застосування у хімічній кінетиці, математичній біології, економіці, теорії управління. Останнім часом особливу увагу привертають функціонально-диференціальні рівняння із запізненням, яке залежить від стану системи. Такі рівняння мають специфічні властивості, що суттєво ускладнюють їх вивчення і вимагають розробки спеціальних методів дослідження.

У дисертації вивчено наступні основні питання:

1. Розвинуто теорію інерційних многовидів для функціонально-диференціальних рівнянь з частинними похідними. Поняття інерційного многовиду відіграє важливу роль при дослідженні асимптотичної поведінки нескінченновимірної системи. Оскільки існування інерційного многовиду навіть для рівняння без запізнення можна довести при істотних обмеженнях на спектр головного оператора системи (він повинен бути достатньо розрідженим, з великими інтервалами між власними значеннями), були запропоновані поняття інерційного многовиду із загаюванням, а також такі ослаблені варіанти, як наближений інерційний многовид та експоненціальний атрактор. Поширення цих понять на функціонально-диференціальні рівняння є нетривіальною задачею, пов'язаною з необхідністю аналізу низки як ідейних, так і технічних проблем. У дисертації вони успішно розв'язані. Зокрема, дуже ефективним стало введення так званої функції зсуву-продовження.

Інерційні многовиди із загаюванням для параболічних функціонально-диференціальних рівнянь будуються на деякому інтервалі часу  $[-T, 0]$ , на відміну від поточної побудови звичайного інерційного многовиду, що дає можливість зняти суттєві обмеження на спектр. Показано, що інерційні многовиди із загаюванням існують для всіх достатньо малих  $T$ , розмірності многовиду  $N$  та запізнення  $r$ .

Запропоновано метод побудови сім'ї наближених інерційних многовидів, які містять усі стаціонарні точки параболічного рівняння зі сталим запізненням. Також для рівняння без запізнення побудовано наближений многовид експоненціального типу.

Окремо вивчаються функціонально-диференціальні рівняння в частинних похідних з другою похідною за часом.

2. Вперше досліджено рівняння в частинних похідних із запізненням, яке залежить від стану. Відомо, що для рівнянь із запізненням, які залежить від стану, для доведення теорем існування і єдиності розв'язків та їх неперервної залежності від початкових даних потрібно робити суттєві додаткові припущення. У загальному випадку неможливо побудувати еволюційний оператор у просторі неперервних функцій. Один з відомих підходів — звуження фазового простору до ліпшицевих чи диференційовних функцій.

Автор дисертації запропонував альтернативний підхід, увівши поняття ігноруючої умови та узагальненої ігноруючої умови. Це дало можливість довести теореми існування і єдиності розв'язків та їх неперервної залежності від початкових даних на всьому просторі неперервних функцій. Далі в цьому просторі досліджено асимптотичну поведінку розв'язків та знайдено умови існування глобального атрактора.

3. Запропонований метод застосовано до широкого класу рівнянь, зокрема, до параболічних рівнянь у частинних похідних із загаюваним елементом, представленим інтегралом Стілт'еса, який охоплює як розподілені, так і зосереджені запізнення, що залежать від стану системи. Це дає можливість досліджувати моделі, у яких у різних частинах фазового простору можуть бути загаювання різного типу.

Поняття ігноруючої умови поширено на неавтономні нелінійні рівняння із запізненням, що залежить від стану. Доведено теореми існування і єдиності, а також принцип інваріантності.

Вивчено клас нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних із загаюваннями, які є розподіленими як у часі, так і у просторі, одночасно залежними від стану. Досліджено асимптотичну поведінку розв'язків, включно з доведенням існування глобального атрактора, а також знайдено стаціонарні розв'язки системи та досліджено їх стійкість.

Окремо досліджено динаміку еволюційних рівнянь другого порядку за часом із запізненням, що залежить від стану.

Для параболічних рівнянь із різними типами загаювань, що залежать від

стану, отримано умови існування компактних атракторів. Відмітимо результати автора про скінченновимірність глобальних атракторів для таких рівнянь.

4. Ще один цікавий підхід у дисертації при дослідженні рівняння в частинних похідних із зосередженим загаюванням, що залежить від стану, полягає в наближенні члена із зосередженим загаюванням послідовністю елементів із розподіленими загаюваннями. Це дало можливість дослідити локальне існування та асимптотичну поведінку розв'язків. Доведено, що задача із розподіленим загаюванням має глобальний атрактор, а задача із зосередженим загаюванням має траєкторний атрактор.

5. Окремо відмітимо дві моделі з математичної біології, які є застосуванням теорії, розвинутої у попередніх розділах. З іншого боку, вони мають важливе самостійне значення. Перша модель описує динаміку вірусних захворювань із загальним функціоналом відповіді та загаюванням, що залежить від стану. У другій моделі динаміки вірусних захворювань враховано неоднорідну розподіленість у просторі. Це приводить до системи реакції-дифузії із загаюванням. Таким моделям без запізнення чи зі сталим запізненням присвячено багато робіт. Моделі вірусних захворювань із запізненням, що залежить від стану, вперше досліджуються у роботах дисертанта. Такий підхід дозволяє більш адекватно моделювати біологічний процес, при цьому вимагає інших методів дослідження. В дисертації отримано результати з коректної розв'язності систем і досліджено стійкість стаціонарних розв'язків.

Дисертаційна робота Резуненка О. В. є завершеним науковим дослідженням. Усі результати, винесені на захист, є новими та достовірними. Вони чітко сформульовані та строго доведені і достатньо повно опубліковані у авторитетних міжнародних математичних журналах, переважна більшість з яких належать до першого і другого квартилів міжнародних наукометричних баз даних Scopus і Web of Sciences.

Результати дисертації широко апробовані на міжнародних наукових конференціях та наукових семінарах. Автореферат дисертації цілком відповідає її змісту.

Роботи Резуненка О. В. належать до тих робіт, які визначають сучасний стан теорії функціонально-диференціальних рівнянь із запізненням, які залежать від стану системи, — галузі теорії диференціальних рівнянь, яка останнім часом дуже активно розвивається у різних країнах і має багато застосувань.

Підсумовуючи висловлене вище, можна зробити висновок про те, що актуальність теми докторської дисертації Резуненка О. В., її теоретичне спрямування та отримані в дисертації нові наукові результати свідчать про відповідність даної докторської дисертації пп. 9, 10, 12-14 “Порядку присудження наукових ступенів”, затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України № 567 від 24 липня 2013 року (зі змінами і доповненнями, внесеними згідно з постановами КМУ № 656 від 19.08.2015 р., № 1159 від 30.12.2015 р., № 567 від 27.07.2016 р. та наказом МОН України від 12.01.2017 р.) щодо докторських дисертацій, а її автор, Резуненко Олександр Вячеславович заслуговує на присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.03 — математична фізика.

Офіційний опонент  
провідний науковий співробітник  
Інституту математики НАН України  
доктор фізико-математичних наук, професор

