

## ВІДГУК ОФІЦІЙНОГО ОПОНЕНТА

на дисертаційну роботу **Карпенко Ірини Миколаївни**  
«Метод задачі Рімана–Гільберта для модифікованого рівняння  
Камасси–Хольма з ненульовими крайовими умовами»  
на здобуття ступеня доктора філософії  
за спеціальністю 111 «Математика»,  
з галузі знань 11 «Математика і статистика»

У дисертаційній роботі Карпенко Ірини Миколаївни вивчено початкові задачі для модифікованого рівняння Камасси–Хольма з різними ненульовими крайовими умовами.

### Актуальність обраної теми

Модифіковане рівняння Камасси–Хольма (the modified Camassa–Holm equation) є некласичним інтегровним рівнянням, зокрема з точки зору поведінки його солітонних розв'язків). Воно належить до класу так званих піконних рівнянь: солітони таких рівнянь на нульовому фоні мають форму піків, тобто мають негладку поведінкою біля точки максимуму. З іншого боку, якщо його розглядати на ненульовому фоні, тобто з ненульовими крайовими умовами відносно просторової змінної, то на кшталт класичного інтегровного рівняння Кортевега–де Фріза воно може мати гладкі солітонні розв'язки. Така поведінка є характерною для всіх рівнянь, які певною мірою є узагальненнями або модифікаціями оригінального рівняння Камасси–Хольма, запропонованого Р. Камасою і Д. Хольмом у 1993 році у якості моделі хвиль на мілкій воді, яку на відміну від рівняння Кортевега–де Фріза можна застосовувати до дослідження ефектів руйнації гладких хвиль за скінченний час (wave breaking).

До цих рівнянь належить і модифіковане рівняння Камасси–Хольма, яке на відміну від стандартного рівняння Камасси–Хольма має кубічну нелінійність. Воно запропоновано Фокасом та Олвером і Розенау незалежно у 1996 році як формальне інтегровне рівняння, а у 2009 році воно виникло у роботі Новікова, де автор використав підхід збуреної симетрії для систематизації інтегровних рівнянь, подібних до рівняння Камасси–Хольма. Крім того, нещодавно модифіковане рівняння Камасси–Хольма розглянуто у роботі R. M. Chen, T. Hu

and Y. Liu [The shallow-water models with cubic nonlinearity, *J. Math. Fluid Mech.*, **24** (2022), 49] як модель односпрямованого розповсюдження для мілководних хвиль помірної амплітуди над плоским дном, де розв'язок пов'язаний з горизонтальною швидкістю на певному рівні води.

Цікаво, що, застосовуючи масштабне перетворення, яке відповідає короткохвильовій границі, модифіковане рівняння Камасси–Хольма можна звести до рівняння короткого імпульсу (the short pulse equation), яке саме по собі є цікавою моделлю: воно запропоновано Шефером та Вейном у 2004 році як альтернативна нелінійному рівнянню Шредингера модель для апроксимації еволюції ультракоротких інтенсивних інфрачервоних імпульсів у кремнеземній оптиці.

Як і оригінальне рівняння Камасси–Хольма, модифіковане рівняння Камасси–Хольма є інтегровним, тобто для нього існує зображення у вигляді пари Лакса. З одного боку, це принципово дозволяє адаптувати для нього метод оберненої задачі розсіювання, зокрема у формі задачі Рімана–Гільберта. З іншого боку, така адаптація є абсолютно нетривіальною вже у випадку оригінального рівняння Камасси–Хольма, а для модифікованого рівняння Камасси–Хольма вона пов'язана з подоланням додаткових аналітичних труднощів.

Отже, можна стверджувати, що дослідження модифікованого рівняння Камасси–Хольма мотивуються щонайменше двома обставинами: (i) воно є некласичним інтегровним рівнянням та (ii) воно має потенціальні застосування у фізиці. Особливістю дисертаційної роботи є те, що в ній розглянуто початкові задачі для модифікованого рівняння Камасси–Хольма на ненульовому фоні з огляду на те, що саме такі задачі можна використовувати як моделі для вивчення дисперсійних ударних хвиль.

## **Основні результати дисертаційної роботи та їх новизна**

У розділі 2 дисертаційної роботи, вперше запропоновано та розвинуто формалізм метода оберненої задачі розсіювання у вигляді задачі факторизації Рімана–Гільберта для випадку задачі Коші для модифікованого рівняння Камасси–Хольма на ненульовому постійному фоні. Зокрема, авторка знайшла калібрувальне перетворення для рівнянь пари Лакса, яке перетворює початкову пару Лакса у вигляд, що дозволяє ефективно контролювати аналітичні властивості її розв'язків як функцій спектрального параметру. Необхідність і



нетривіальність цього кроку є характерними для рівнянь типу Камасси–Хольма. Далі дисертантка ввела відповідні розв'язки Йоста та пов'язані з ними коефіцієнти розсіювання, та проаналізувала їхні властивості. Використовуючи ці властивості, вона побудувала асоційовану задачу Рімана–Гільберта та отримала параметричне зображення розв'язку задачі Коші в термінах розв'язку зазначеної задачі Рімана–Гільберта. Крім іншого, це дозволило охарактеризувати односолітонні розв'язки в залежності від розташування спектральних параметрів — нулів відповідної спектральної функції — у комплексній площині.

Як відомо з практики дослідження різноманітних інтегровних рівнянь, формалізм задачі Рімана–Гільберта дозволяє не тільки отримати певне зображення розв'язку початкової задачі, але й розробити на його основі метод аналізу поведінки розв'язку за великим часом, адаптуючи та застосовуючи відповідний варіант нелінійного методу перевалу (метод Дейфта–Жу). Цьому присвячено розділ 3 дисертації, у якому здобувачка вперше описала основні асимптотичні члени для розв'язку задачі Коші у секторах півплощини, де відхилення від фону є нетривіальним, подолавши значні труднощі, пов'язані з наявністю нетипових сингулярних умов у формулюванні вихідної задачі Рімана–Гільберта.

Нарешті, у розділі 4 дисертації вперше розглянуто задачу Коші на «ступінчастому фоні». Для цієї задачі розроблено формалізм задачі Рімана–Гільберта для обох випадків взаємного співвідношення фонових рівнів. Зокрема, при побудові формалізму дисертантка дослідила аналітичні та асимптотичні властивості розв'язків Йоста та спектральних функцій, включаючи їхні симетрії та поведінку в точках розгалуження. Використовуючи розроблений формалізм, здобувачка отримала параметричне зображення розв'язку початкової задачі для модифікованого рівняння Камасси–Хольма на ступінчастому фоні у термінах розв'язку пов'язаної з нею задачі Рімана–Гільберта. Ці результати можуть стати основою для подальшого дослідження асимптотичної поведінки розв'язків цієї задачі Коші за великим часом.

### **Зауваження до дисертаційної роботи**

У якості зауважень та побажань, відзначу таке:

1. Можна було б розширити вступ, навівши більше результатів, пов'язаних з піконними рівняннями.

2. Посилання на монографії краще робити повними, вказуючи конкретну главу та розділ.
3. Системи рівнянь представлено у дисертації іноді з фігурною дужкою, а іноді — без неї. Оформлення систем рівнянь краще було б зробити одноманітним.
4. Дисертація містить незначну кількість хибодруків.

### Загальна оцінка роботи та висновок

Висловлені зауваження не впливають на загальну високу оцінку дисертаційної роботи. Усі результати, наведені в ній, є новими, мають інноваційний характер та поглиблюють знання про інтегровні системи. Їх опубліковано у трьох статтях, проіндексованих у міжнародних наукометричних базах. Згідно з класифікацією *SCImago Journal and Country Rank* відповідні журнали належать до кuartилів Q2 та Q3. Крім того, основні результати дисертаційної роботи пройшли апробацію на дев'яти міжнародних конференціях в Україні, Німеччині, Австрії та Великій Британії. Запропоновані методи можна використати у подальших дослідженнях інтегровних систем типу Камасси–Хольма.

Вважаю, що за актуальністю, обсягом та новизною отриманих результатів дисертаційна робота «Метод задачі Рімана–Гільберта для модифікованого рівняння Камасси–Хольма з ненульовими крайовими умовами» задовольняє вимогам, що передбачені «Порядком присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженим Постановою Кабінету Міністрів України № 44 від 12 січня 2022 року, а її авторка, Карпенко Ірина Миколаївна, безумовно заслуговує на присудження їй ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 «Математика».

Офіційний опонент

доктор фізико-математичних наук,  
професор,  
провідний науковий співробітник  
Інституту математики НАН України



Роман ПОПОВИЧ

**ЗАСВІДЧУЮ**

Відділ кадрів  
Інститут математики НАН України

«14» листопада 2023 р.