ВІДГУК
офіційного опонента на дисертацію Ігнатович Світлани Юріївни
«Метод рядів та вільних алгебр в аналізі нелінійних керованих систем»,
подану на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз

Дисертація присвячена дослідженню локальних властивостей керованих систем і їх класифікації з точки зору асимптотичної поведінки розв'язків задачі швидкодії. Ці питання інтенсивно розробляються у нас в країні і за кордоном. Математична теорія керування відносно нова математична дисципліна, яка почала розвиватися в середині XX століття. В ній активно використовуються методи аналізу, геометрії, алгебри, диференціальних рівнянь, варіаційного числення тощо.

У 1987 р. В. І. Коробов і Г. М. Скляр запропонували нову постановку - зведення задачі швидкодії до задачі з теорії моментів - проблеми моментів Маркова на мінімально можливому відрізку (min-проблеми моментів Маркова). Для опису траєкторій нелінійних систем, лінійних і афінних за керуванням з 1970- 80-х років використовуються вільні алгебри, коли М. Фліс для розв'язку цих задач застосував ряди К.Н. Чена. Алгебри ітерованих інтегралів активно застосовували А. О. Аграчов, Р. В. Гамкрелідзе, П. Кроуч, Ф. Ламнабі-Лагаррік, М. Кавскі, Г. Сусман.

Задачі, що досліджувані в дисертації, є суттєво нелінійними. Основний внесок автора полягає у запропонованому новому підході до розв'язання таких задач. Вивчення керованих систем зводиться до дослідження степеневих рядів, але цікаво, що це ряди від некомутуючих змінних. Застосування ідей і методів рядів і вільних алгебр до вивчення нелінійних керованих систем, лінійних або афінних за керуванням дозволило отримати вичерпні відповіді на низку важливих питань теорії керування. Тому вважаю, що тематика досліджень дисертації є актуальною і сучасною областю математики.

Дисертація С.Ю. Ігнатович складається зі вступу, основної частини з семи розділів, висновків, списку використаних джерел зі 162 найменувань і трьох додатків. Загальний обсяг роботи 356 сторінок, з них основного тексту 298 сторінок. Це цілісне наукове дослідження, написане за результатами 21 робіти.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовані мета та завдання, об'єкт та предмет дослідження, розкрита наукова новизна та значення отриманихих результатів.

У першому розділі наведено огляд літератури і міститься детальний огляд постановок задач, зокрема, задачі швидкодії та її зв'язок з min-проблемою Маркова, задачі однорідної апроксимації. Наведені визначення та формулювання деяких відомих результатів, які мають безпосереднє відношення до дисертації.

Основна частина дисертації – це розділи 2–7. У розділі 2 формулюються дві задачі, які мотивують дослідження: задача Коші для системи, лінійної за керуванням

$$\dot{x} = u_1 X_1(x) + \cdots + u_m X_m(x), \quad x(0) = 0, \tag{1}$$

і задача попадання до точки спокою для керованої системи, афінної за керуванням

$$\dot{x} = a(t,x) + b(t,x)u, \quad a(t,0) \equiv 0, \ \ x(\theta) = 0. \tag{2}$$

У загальному випадку такі системи є нелінійними. Для них добре відомий прийом – перейти від диференціальних рівнянь до (операторних) рядів; тоді заміни змінних у системах зводяться до перетворення рядів. У розділі 2 автор роз'яснює особливість підходу, який запропонований і розвинутий у даній дисертації: відповідні ряди

$$\mathcal{E}_{X_1,\dots,X_m}(\theta,u) = \sum c_{i_1\dots i_k}\eta_{i_1\dots i_k}(\theta,u) \tag{3}$$

$$S_{a,b}(\theta,u) = \sum v_{m_1\dots m_k}\xi_{m_1\dots m_k}(\theta,u) \tag{4}$$

розглядаються як ряди зі *сталими* векторними коефіцієнтами $c_{i_1\dots i_k}$ або $v_{m_1\dots m_k}$ відносно функціоналів – ітерованих інтегралів $\eta_{i_1\dots i_k}(\theta,u)$ або нелінійних степеневих моментів $\xi_{m_1\dots m_k}(\theta,u)$. Ці функціонали утворюють вільну некомутативну алгебру (вона позначається $\mathcal{F}$ або $\mathcal{A}$ відповідно); далі в дисертації вивчаються структури, що породжує система в цих алгебрах.

Розділ 3, на мій погляд, є центральним у дисертації. По-перше, тут формулюється задача однорідної апроксимації в абстрактній постановці. А саме, розглядається абстрактна вільна асоціативна алгебра $\mathfrak{A}$ (конкретними реалізаціями якої можуть бути алгебри $\mathcal{F}$ або $\mathcal{A}$, згадані вище) і клас формальних рядів її елементів зі сталими векторними коефіцієнтами, що задовольняють припущення 3.2 («n-вимірність» і «реалізованість»); конкретними реалізаціями можуть бути ряди ітерованих інтегралів або нелінійних степеневих моментів, що відповідають системам. Важливо, що в алгебрі вводиться градуювання, яке дозволяє порівнювати її елементи (для ітерованих інтегралів і нелінійних степеневих моментів градуювання природно породжується обмеженнями на керування; цікаво, що воно може бути обране по-різному для фіксованої системи). Абстрактна задача однорідної апроксимації формулюється таким чином: для формального ряду (який, по суті, є поліноміальним рядом відносно некомутуючих змінних) знайти таке перетворення, після якого однорідна «головна частина» ряду (тобто члени найменшого порядку в сенсі градуювання) є рядом зі вказаного класу. Ця головна частина називається однорідною апроксимацією ряду. Задача полягає в дослідженні однорідних апроксимацій: їх класифікації, побудові тощо.

Далі в розділі 3 розвивається теорія, що дозволяє розв'язати цю задачу. Вона представляє і самостійний інтерес і, напевне, може знайти й інші застосування. Перш за все, тут знайдений об'єкт, що відповідає за однорідну апроксимацію: виявляється, що це є певна підалгебра Лі $\mathfrak{L}_g$ алгебри Лі $\mathfrak{L}$, яка породжується тим самим базисом, що й $\mathfrak{A}$; у дисертації вона називається *ядерною підалгеброю Лі*. Ядерна підалгебра Лі визначається коефіцієнтами ряду. Основний результат розділу: (1) існування: для кожного ряду зі вказаного класу існує однорідна апроксимація; (2) єдиність: вона є єдиною з точністю до поліноміальної заміни змінних; (3) класифікація: два ряди мають одну й ту саму однорідну апроксимацію тоді і тільки тоді, коли їх ядерні підалгебри Лі співпадають, причому множина всіх ядерних підалгебр Лі – це всі градуйовані підалгебри Лі ковимірності n; (4) побудова: для заданої ядерної підалгебри Лі вказаний явний вигляд відповідного ряду. Отже, щодо абстрактної задачі однорідної апроксимації, на основі запропонованого підходу *отриманий її вичерпний аналіз*.

У розділах 4 і 5 (підрозділи 4.1 і 5.1) ці результати застосовуються до задач (1) і (2) (точніше, до рядів (3) і (4)) відповідно: як наслідок, отримані існування, єдиність, класифікація, методи побудови однорідних апроксимацій, а також відповідних керованих систем. Відзначу, що для задачі (1) деякі факти були відомі раніше (існування і метод побудови однорідної апроксимації; див., наприклад, статтю А. Белаїче), але найцікавіші результати – класифікація, єдиність, опис усіх апроксимуючих перетворень і систем – отримані вперше, незважаючи на те, що цією задачею займалися багато математиків протягом щонайменше трьох десятиліть. Очевидно, це вдалося зробити завдяки запропонованому в дисертації підходу. Для задачі (2) усі відповідні результати є новими.

Крім того, в розділах 4 і 5 розглядається зв'язок однорідної апроксимації і апроксимації у сенсі швидкодії. Поясню, що мається на увазі. Припустимо, що для системи (1) або (2) знайдена її однорідна апроксимація. Це є система такого ж вигляду, але однорідна (у тому сенсі, що її ряд є однорідним), а отже, вона є простішою за вихідну систему. Це може означати, що розв'язання задач з теорії керування для неї теж буде простішим. Але чи будуть ці розв'язки наближати розв'язки вихідної задачі (аналогічно тому, як це буває, коли розглядається лінійне наближення)? У дисертації (підрозділи 4.2 і 5.2) отримана така відповідь: за певних додаткових умов розв'язок *задачі швидкодії* для однорідної апроксимації (тобто оптимальний час і оптимальне керування) є асимптотично еквівалентним в околі нуля розв'язку задачі швидкодії для вихідної системи.

Крім того, у розділах 4 і 5 досліджується ще низка задач на основі запропонованого підходу. Так, у підрозділі 4.3 досліджуються регулярні і однорідні системи; цікаво, що тут вдається отримати деякі нелокальні результати. Відзначу, що відповіді на поставлені питання (наприклад, можливість перерозкладання ряду) доводяться до точних формул. У підрозділі 5.3 отримані результати щодо реалізованості ряду нелінійних степеневих моментів.

У розділі 6 запропонований підхід застосовується до іншої задачі класифікації – до задачі класифікації векторів зросту. Отримана класифікація ґрунтується на вивченні ядерних підалгебр Лі і їх перетворень при заміні керування.

Розділ 7 включає результати щодо відображуваності систем класу C^1 і розв'язання одної конкретної нелінійної задачі швидкодії.

Перейду до зауважень.

1) У розділах 2-6 розглядаються виключно дійсно-аналітичні системи. Але очевидно, що певні результати можна перенести на системи, права частина яких лише скінченну кількість разів диференційована. Було б доцільно хоча б сформулювати такі результати. З іншого боку: в розділі 7 вивчається питання відображуваності для систем з класу C^1. Було б цікаво сформулювати отримані критерії у випадку дійсно-аналітичних систем на мові рядів і ядерних підалгебр Лі. Дане зауваження можна розглядати і як побажання на майбутнє.
2) У розділі 3 вивчається клас рядів, що задовольняє припущенню 3.2. Було б доцільно ввести спеціальну назву для цього класу (наприклад, «реалізовані ряди»), на яку було б зручно посилатися.
3) У підрозділі 7.2 отриманий повний розв'язок одної задачі швидкодії для однорідної системи, причому наведені і комп'ютерні розрахунки. Було б цікаво продемонструвати, як працює отримане оптимальне керування для іншої системи, для якої (7.41) є однорідною апроксимацією.
4) У тексті є певна кількість друкарських помилок, які є несуттєвими або легко можуть бути виправлені виходячи з контексту. Наведу деякі:

a. Лема 3.16, стор. 114, останній рядок: має бути $P_i(d_1, \dots, d_n)$ замість $P_i(d_1, \dots, d_{i-1})$, як в теоремі 3.2.
b. Приклад 4.1, стор. 122 (рядок 4 прикладу): має бути $-3c_{1211}$ замість $-3\eta_{1211}$.
c. Теорема 4.4, стор. 128: має бути «вона» замість «воно».
d. Формула (1.35), стор. 43: зайва кома.

Вказані зауваження не впливають на загальне позитивне враження від дисертації.

Дисертація С. Ю. Ігнатович є цілісним науковим дослідженням з актуальної теми, в ній запропоновано і розвинуто новий підхід до дослідження нелінійних керованих систем. Головним достоїнством дисертації вважаю те, що автору вдалося розв'язати кілька складних і важливих задач, які представляють істотний внесок в розвиток сучасної теорії керування.

Дисертація є завершеним науковим дослідженням. Усі основні результати дисертації є новими. Вони доведені з достатньою повнотою і їх достовірність не викликає сумнівів, наведені приклади ілюструють зміст означень і висновків.

Автореферат повністю відображає зміст дисертації. Всі результати дисертації опубліковано в фахових і міжнародних журналах, серед них 11 робіт опубліковані у виданнях, які входять до наукометричних баз даних Scopus і Web of Sciences. Вони доповідалися на багатьох наукових семінарах і міжнародних конференціях.

Резюмуючи сказане, вважаю, вважаю, що дисертація «Метод рядів та вільних алгебр в аналізі нелінійних керованих систем» відповідає всім вимогам МОН України щодо докторських дисертацій, а її автор Ігнатович Світлана Юріївна безумовно заслуговує на присудження їй наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

Офіційний опонент:
завідувач кафедри вищої та
прикладної математики
ДВНЗ «Приазовський державний технічний
університет»,
доктор фізико-математичних наук О. М. Холькін

Підпис Холькіна О.М.
ЗАСВІДЧУЮ
Нач. загального
відділу
Т. О. [illegible]ренко
02-04. 20[illegible]

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД «ПРИАЗОВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
ІДЕНТИФІКАЦІЙНИЙ КОД 02070812