ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертационной работе
Л.В.Фардиголы

"Операторы преобразования и операторы влияния в задачах управления"

В диссертационной работе изучены новые операторы преобразования и операторы влияния для дифференциальных операторов второго порядка с постоянными и переменными коэффициентами и пространства соболевского типа, связанные с ними. В работе разработана методика применения этих операторов и пространств к исследованию проблем управляемости и стабилизируемости, а также проблемы корректности нелокальных краевых задач для волнового уравнения на полуоси или полуплоскости.

Отмечу, что вопросы управляемости и стабилизируемости для волновых уравнений в *ограниченных* по пространственным переменным областях изучены достаточно хорошо (R. Curtain, R. Datko, S. Dolecki, M. Gugat, I. Lasiecka, G. Leugering, N. Levan, J.-L. Lions, D.L. Russel, R. Triggiani, X. Zhang, В.А. Ильин, Е.И. Моисеев, В.И. Коробов, Г.М. Скляр и др.), в то время как эти вопросы для волновых уравнений в областях, *неограниченных* по пространственным переменным, изучены намного хуже. То же можно сказать и о краевых задачах. Поэтому тематика диссертации является актуальной. Кроме того, несмотря на то, что операторы преобразования широко используются для исследования проблем математической физики, к теории управления и к теории краевых задач эти операторы, практически, не применялись до этой диссертационной работы. Поэтому построение методики применения (и, собственно, применение) операторов преобразования в этих теориях также является важной и актуальной задачей.

В разделе 1 диссертации сделан обзор литературы и уже известных результатов по тематике диссертации, а также даны постановки задач, изучаемых в этой работе.

В диссертационной работе исследовано волновое уравнение на полуоси

$$w_{tt} = w_{xx} - q^2 w, \qquad x > 0,\ t \in (0, T), \tag{1}$$

с краевым условием Дирихле

$$w(0, t) = u(t), \qquad t \in (0, T), \tag{2}$$

и начальными условиями

$$w(x, 0) = w_0^0(x), \quad w_t(x, 0) = w_1^0(x), \qquad x > 0, \tag{3}$$

где $T > 0$, $q \geq 0$ — некоторые постоянные; $u \in L^\infty(0, T)$ —управление; w_0^0 и w_1^0 — начальные данные. Эта управляемая система рассматривается в пространствах Соболева.

Для этой управляемой системы рассмотрены задачи (приближенной) 0-управляемости за заданное и свободное время. В диссертационной работе впервые исследованы эти задачи для волнового уравнения *на неограниченном множестве — полуоси*. Отметим, что для волнового уравнения (1) на конечном отрезке $(0, d)$ с дополнительным условием закрепления $w(d, t) = 0$ результаты по 0-управляемости за время $T \geq 2d$ хорошо известны. В случае $T < 2d$ начальное состояние $\begin{pmatrix} w_0^0 \\ w_1^0 \end{pmatrix}$ этой системы является 0-управляемым тогда и только тогда, когда компоненты w_0^0 и w_1^0 начального состояния системы связаны некоторыми соотношениями. В случае полубесконечного отрезка время не может быть сделано больше длины отрезка, поэтому, помимо задачи (приближенной) 0-управляемости этой системы за заданное время, актуальной является задача приближенной 0-управляемости за свободное время. Методика исследования управляемой системы (1)–(3) на полуоси также отличается от методики исследования такой системы на конечном отрезке. Если в последнем случае (конечного отрезка) широко используемым является метод разложения по собственным функциям, требующий изучения спектра соответствующей задачи, то в первом случае (полуоси) соответствующий оператор имеет непрерывный спектр $\sigma = \{iy \mid y \in \mathbb{R}\backslash(-q,q)\}$ и вместо разложения по собственным функциям используется преобразование Фурье.

Рассматривая нечетные продолжения по x для векторов $\begin{pmatrix} \mathrm{w}(\cdot,t) \\ \mathrm{w}_t(\cdot,t) \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathrm{w}_0^0 \\ \mathrm{w}_1^0 \end{pmatrix}$ и обозначая их через $\mathrm{W}(t)$, W^0, соответственно, задача (1)–(3) сводится к следующей задаче

$$\mathrm{W}' = \mathbf{A}\mathrm{W} + \mathbf{B}u, \qquad t \in (0,T), \tag{4}$$

$$\mathrm{W}(0) = \mathrm{W}^0, \tag{5}$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ \frac{d^2}{dx^2} - q^2 & 0 \end{pmatrix} : \mathbf{H}^{-1} \to \mathbf{H}^{-1},\ D(\mathbf{A}) = \mathbf{H}^0, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\delta \end{pmatrix} : \mathbb{R} \to \mathbf{H}^{-2},\ D(\mathbf{B}) = \mathbb{R},$$

где Id является тождественным оператором, δ — распределением Дирака по x, $\mathrm{W} : [0,T] \to \mathbf{H}^0$, $\mathrm{W}' : [0,T] \to \mathbf{H}^{-1}$, $\mathrm{W}^0 \in \mathbf{H}^0$, $u \in L^\infty(0,T)$ является управлением, $\mathbf{H}^p = \widetilde{H}^p \times \widetilde{H}^{p-1}$, а $\widetilde{H}^p$ — подпространством нечетных распределений пространства Соболева $H^p(\mathbb{R})$, $p \in \mathbb{Z}$. Оператор $\mathbf{A}$ является неограниченным, а $\mathbf{B}$ — ограниченным.

В разделе 5 диссертационной работы показано, что оператор $\mathbf{A}$ является инфинитезимальным генератором группы $\mathbb{S} : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbf{H}^{-1})$, где $\mathcal{L}(\mathbf{H}^{-1})$ является пространством линейных ограниченных операторов, определенных на всем $\mathbf{H}^{-1}$ и действующих в $\mathbf{H}^{-1}$. Поэтому решение задачи (4), (5) записывается в виде

$$\mathrm{W}(t) = \mathbb{S}(t)\left(\mathrm{W}^0 + \int_0^t \mathbb{S}(-\xi)\mathbf{B}u(\xi)\,d\xi\right), \qquad t \in [0,T].$$

Центральную роль в изучении (приближенной) 0-управляемости системы (4), (5) (а, следовательно, и (1)–(3)) играет оператор $\mathbf{\Lambda} : L^2(\mathbb{R}_+) \to \mathrm{H}$, который является интегральным операторм, действующим по правилу

$$\mathbf{\Lambda} f = \lim_{T\to\infty} \int_0^T \mathbb{S}(-\xi)\mathbf{B}f(\xi)\,d\xi,$$

определенным при тех $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, для которых существует соответствующий предел.

Исследованию этого оператора посвящен раздел 2 диссертации. Оператор $\mathbf{\Lambda}$ представляется в виде

$$\mathbf{\Lambda} f = -\begin{pmatrix} \Psi \mathbf{I}_{\mathrm{odd}} f \\ \widehat{\Psi} \mathbf{I}_{\mathrm{odd}} f \end{pmatrix}, \qquad f \in D(\mathbf{\Lambda}) = L^2(\mathbb{R}_+),$$

где $\mathbf{I}_{\mathrm{odd}}$ является оператором нечетного продолжения, а $\Psi : \widetilde{H}^0 \to \widetilde{H}^0$, $D(\Psi) = \widetilde{H}^0$, и $\widehat{\Psi} : \widetilde{H}^0 \to \widetilde{H}^{-1}$, $D(\widehat{\Psi}) = \widetilde{H}^0$, названы операторами влияния, введенными и исследованными в диссертационной работе. В разделе 2 исследованы свойства этих операторов, в частности, показано, что они являются ограниченными операторами, имеют ненулевые ядра $N(\Psi)$ и $N(\widehat{\Psi})$, если $q > 0$, и

$$N(\Psi) = N(\widehat{\Psi}) = 0, \qquad \text{если } q = 0. \tag{6}$$

Основным результатом раздела 2 является следующее утверждение:

$$\overline{\widehat{\Psi}\big(N(\Psi)\big)} = \widetilde{H}^{-1} \quad \text{и} \quad \overline{\Psi\big(N(\widehat{\Psi})\big)} = \widetilde{H}^{0} \qquad \text{для } q > 0. \tag{7}$$

Этот результат дает возможность доказать критерий приближенной 0-управляемости за свободное время.

Кроме того, в этом же разделе показано, что сужения операторов Ψ и $\widehat{\Psi}$ на функции, носители которых ограничены наперед заданной константой, являются обратимыми. Это свойство дает возможность получить критерии (приближенной) 0-управляемости за заданное время.

В разделе 2, также, введены и изучены операторы влияния Φ и $\widehat{\Phi}$, порожденные волновым уравнением (1), управляемым краевым условием Неймана (вместо условия Дирихле (2)). В отличие от операторов Ψ и $\widehat{\Psi}$, операторы Φ и $\widehat{\Phi}$ не являются ограниченными. Но в диссертации найдены и изучены их сужения, являющиеся ограниченными операторами. Для этих сужений доказаны аналоги свойств (6), (7) и доказаны критерии (приближенной) 0-управляемости волнового уравнения (1), управляемого краевым условием Неймана, за заданное и свободное время. Эти критерии аналогичны критериям, полученным для случая управления условием Дирихле.

Результаты раздела 2 дают возможность получить в разделе 5 диссертационной работы критерии (приближенной) 0-управляемости волнового уравнения (1), управляемого краевым условием Дирихле или краевым условием Неймана за заданное и свободное время. В частности, для системы (4), (5) условие (7) дает возможность утверждать, что в случае $q > 0$ для любого начального состояния $\mathrm{W}^0 = \begin{pmatrix} \mathrm{w}_0^0 \\ \mathrm{w}_1^0 \end{pmatrix}$ этой системы системы можно найти две последовательности функций

$$\{g_0^n\}_{n=1}^{\infty} \subset N(\widehat{\Psi}) \subset \widetilde{H}^0 \qquad \text{и} \qquad \{g_1^n\}_{n=1}^{\infty} \subset N(\Psi) \subset \widetilde{H}^0$$

такие, что

$$\Psi g_0^n \to \mathrm{w}_0^0 \qquad \text{и} \qquad \widehat{\Psi} g_1^n \to \mathrm{w}_1^0, \qquad \text{когда } n \to \infty.$$

Поэтому для $g^n = g_0^n + g_1^n$ имеем

$$\Psi g^n \to \mathrm{w}_0^0 \qquad \text{и} \qquad \widehat{\Psi} g^n \to \mathrm{w}_1^0, \qquad \text{когда } n \to \infty.$$

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ функцию g^n можно приблизить с любой точностью функциями из $L^\infty(\mathbb{R})$ с ограниченными носителями. С учетом непрерывности операторов Ψ и $\widehat{\Psi}$ эти приближения дают возможность построить управления, решающие задачу приближенной 0-управляемости за свободное время в случае $q > 0$. В случае $q = 0$ критерии управляемости получены с помощью анализа формулы Даламбера для решения волнового уравнения. В разделе 5 показано, что свойства (приближенной) 0-управляемости за заданное время подобны в случаях $q > 0$ и $q = 0$, а свойства приближенной 0-управляемости за свободное время существенно различны в упомянутых случаях. А именно, при $q > 0$ любое начальное состояние системы (4), (5) (а, следовательно, и (1)–(3)) является приближенно 0-управляемым за свободное время, а при $q = 0$ начальное состояние $\mathrm{W}^0 = \begin{pmatrix} \mathrm{w}_0^0 \\ \mathrm{w}_1^0 \end{pmatrix}$ этой системы является приближенно 0-управляемым за свободное время в том и только том случае, когда $\mathrm{w}_1^0 = \operatorname{sgn}(\cdot)\, \mathrm{w}_0^{0\prime}$. Подобное условие является необходимым для (приближенной) 0-управляемости этой системы за заданное время в обоих случаях: $q > 0$ и $q = 0$. Аналогичные результаты получены для уравнения (1), управляемого краевым условием Неймана в том же разделе.

Для волнового уравнения

$$w_{tt} = w_{xx} + v, \qquad x > 0,\ t > 0, \tag{8}$$

с условием Дирихле

$$w(0,t) = \omega(t), \qquad t > 0, \tag{9}$$

или с условием Неймана

$$w_x(0,t) = \omega(t), \qquad t > 0, \tag{10}$$

где v — это управление, а $\omega \in L^2(0,+\infty)$ — заданная функция, рассмотрена задача стабилизации с помощью позиционного управления

$$v = b_0 w + b_1 w_t, \tag{11}$$

где $b_0 \in \mathbb{R}$ и $b_1 \in \mathbb{R}$. После подстановки управления (11) в уравнение (8) так же, как и в случае задачи (1)–(3), рассматривается нечетное (для условия Дирихле) или четное (для условия Неймана) продолжение решений полученного уравнения, с помощью которого эти задачи сводятся к уравнению вида

$$\mathrm{W}' = (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathrm{W} + \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}, \qquad t > 0, \tag{12}$$

где $\mathbf{B} : \mathbf{H} \to \mathrm{H}$ является оператором умножения на матрицу $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_0 & b_1 \end{pmatrix}$, а $f(x,t) = -2\delta'(x)\omega(t)$ в случае условия Дирихле (9) и $f(x,t) = -2\delta(x)\omega(t)$ в случае условия Неймана (10). Оператор $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ является инфинитезимальным генератором группы $\mathbb{S}_{\mathbf{B}}$. Показано, что существуют такие $b_0 \in \mathbb{R}$ и $b_1 \in \mathbb{R}$ что спектр оператора $\mathbf{A}$ после возмущения его оператором $\mathbf{B}$ сдвигается в левую комплексную полуплоскость $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > a\}$, где $a > 0$ является константой, зависящей от b_0 и b_1. Показано, что

$$\|\mathbb{S}_{\mathbf{B}}\| \le C\sqrt{1+t^2}e^{-at}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

где $C > 0$ — некоторая константа.

В разделе 5 показано, что для любого $\omega \in L^2(0,+\infty)$ системы (8), (9) и (8), (10) являются стабилизируемыми, и найдены управления, стабилизирующие эти системы.

В этом же разделе, доказана стабилизируемость системы, отвечающей волновому уравнению с постоянными коэффициентами, с помощью позиционного управления с запаздыванием.

Кроме того, в разделе 5 также получены критерии корректности нелокальной двухточечной краевой задачи для волнового уравнения с постоянными коэффициентами.

В разделе 4 введены и исследованы операторы преобразования $\mathbf{\Psi}$, $\mathbf{\Phi}$ и связанные с ними пространства соболевского типа для двумерного оператора Лапласа с постоянными коэффициентами, определенного на радиально симметричных распределениях. Результаты этого раздела дают возможность получить в разделе 5 критерии (приближенной) 0-управляемости за заданное и свободное время для волнового уравнения с постоянными коэффициентами на полуплоскости, управляемого краевым условием Дирихле или краевым условием Неймана импульсного типа.

Результаты раздела 6 основаны на применении новых операторов преобразования $\widetilde{\mathbb{T}}$ и $\widehat{\mathbb{T}}$ для дифференциального оператора $\dfrac{1}{\rho(x)}\dfrac{d}{dx}\left(k(x)\dfrac{d}{dx}(\cdot)\right)$ и новых пространств $\mathbb{H}^p$, $m = \overline{-2,2}$, соболевского типа, введенных и изученных в разделе 3. Пространства $\mathbb{H}^p$ являются аналогами классических пространств Соболева $H^p(\mathbb{R})$, в которых пространство $L^2(\mathbb{R})$ заменено на весовое пространство $L^2_\rho(\mathbb{R})$ с весом $\sqrt{\widehat{\rho}}$, а дифференциальный оператор d/dx заменен на "линейно деформированный" дифференциальный оператор $\sqrt{\widehat{k}/\widehat{\rho}}\Big(d/dx + \big(\widehat{\rho}'/\widehat{\rho} + \widehat{k}'/\widehat{k}\big)/4\Big)$, $\widehat{k}$ и $\widehat{\rho}$ являются четными продолжениями k и ρ, соответственно, $m = \overline{-2,2}$. В разделе 6 все основные результаты, полученные в разделе 5 для волнового уравнения с постоянными коэффициентами на полуоси, обобщены на случай волнового уравнения с переменными коэффициентами на полуоси:

$$z_{tt} = \frac{1}{\rho}\left(kz_x\right)_x + \gamma z, \qquad x > 0,\ t \in (0,T), \tag{13}$$

где ρ, k, γ — заданные функции такие, что $\gamma \in C^1[0,+\infty)$, а $\rho, k \in C^1[0,+\infty)$ являются положительными на $[0,+\infty)$, $(\rho k) \in C^2[0,+\infty)$, $(\rho k)'(0) = 0$ и

$$\sigma(x) = \int_0^x \sqrt{\rho(\mu)/k(\mu)}\,d\mu \to +\infty, \qquad \text{когда } x \to +\infty. \tag{14}$$

Уравнение (13) рассматривается в пространствах $\mathbb{H}^p$, $m = \overline{-2,2}$. С помощью операторов преобразования $\widetilde{\mathbb{T}}$ и $\widehat{\mathbb{T}}$ показано что уравнение (13) воспроизводит свойства управляемости, стабилизируемости и корректности нелокальной краевой задачи уравнения (1) с $q \geq 0$, определяемым данными уравнения ρ, k и γ. В частности, получены критерии управляемости за заданное и свободное время для этого уравнения, управляемого краевым условием Дирихле или краевым условием Неймана, доказана стабилизируемость этого уравнения позиционным управлением, и получены критерии корректности нелокальной двухточечной краевой задачи для этого уравнения.

Замечания:

1. В работах автора [19], [71] и [72] есть результаты, полученные применением *min*-проблемы моментов к изучаемым в диссертационной работе задачам управления. С помощью этого метода в названных работах построены релейные управления, решающие задачу приближенной 0-управляемости за заданное и свободное время. Думаю, что это важные и полезные результаты, которые автору следовало бы включить в диссертационную работу.

2. В случае уравнения неоднородной струны (13) автором исследуется только случай, когда $\sigma(x) \to \infty$ при $x \to \infty$ (см. (14)). Интересно было бы рассмотреть также и случай, когда $\sigma(x)$ имеет конечный предел при $x \to \infty$.

3. Думаю, что список работ следовало бы дополнить работами R.Triggiani и Ф.А.Шолоховича, в которых исследованы линейные управляемые системы в банаховом пространстве.

Впрочем, сделанные замечания не влияют на высокую оценку работы.

Таким образом, диссертация является завершенной научной работой, в которой получены новые научно обоснованные результаты. Итогом этой работы является построение новых типов операторов преобразования и пространств соболевского типа, связанных с ними, для дифференциальных операторов второго порядка с постоянными и переменными коэффициентами, а также операторов влияния для дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами и разработка методики их применения к задачам теории управления и теории краевых задач. В работе, также, получены критерии управляемости, доказана стабилизируемость и получены критерии корректности для волнового уравнения с постоянными и переменными коэффициентами. Достоверность утверждений, выносящихся на защиту, не вызывает сомнений, они строго обоснованы, сформулированы и доказаны в виде теорем, лемм и следствий и опубликованы в зарубежных и отечественных математических журналах. Автореферат правильно отображает содержание диссертации.

Таким образом, диссертационная работа ***“Операторы преобразования и операторы влияния в задачах управления”*** соответствует требованиям относительно докторских диссертаций положения о “Порядке присуждения ученых степеней ...” МОН Украины, а ее автор, ***Л.В.Фардигола***, заслуживает присуждения ей степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01— математический анализ.

Доктор физ.-мат. наук, профессор
заведующий кафедрой прикладной математики
ХНУ им. В.Н.Каразина **В.И.Коробов**

Підпис В. І. Коробова
ЗАСВІДЧУЮ
Учений секретар Харківського національного
університету імені В.Н.Каразіна

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В. Н. КАРАЗІНА
код 02071205

Відгук надійшов до ради 07.10.2016
Вчений секретар
Спец. вченої ради Д 64.175.01 (Пронская)

ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ НИЗЬКИХ ТЕМПЕРАТУР ІМ. Б.І. ВЄРКІНА НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ
КАНЦЕЛЯРІЯ
Ідентифікаційний код 03534601