

ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу
Андрєєва Кирила Миколайовича
“Хвилі розрідження для рівняння Кортевега-де Фріза:
асимптотики та інтеграли руху”,
подану на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.03 – математична фізика

Основним об'єктом вивчення дисертаційної роботи Андрєєва Кирила Миколайовича “Хвилі розрідження для рівняння Кортевега-де Фріза: асимптотики та інтеграли руху” є рівняння Кортевега-де Фріза, яке має глибокий фізичний зміст, оскільки описує різні фізичні явища та процеси.

Як відомо, рівняння Кортевега-де Фріза – це фундаментальне рівняння сучасної теоретичної і математичної фізики, яке опинилося у центрі уваги дослідників після публікації у 1965 році відомої статті, в якій Kruskal M.D. і Zabusky N.J. вказали на зв'язок цього рівняння з проблемою Фермі-Паста-Улама та виявили, що рівняння Кортевега-де Фріза має розв'язки, особливістю яких є збереження форми хвилі, яку вони описують, після зіткнення з хвилями такої ж природи. Такі розв'язки отримали назву *солітонних*.

Вивченню тих чи інших питань, що стосуються рівняння Кортевега-де Фріза, присвячено чисельні монографії і наукові статті, де досліджено широке коло різних математичних задач і питань. Значна увага дослідників була зосереджена на побудові в явному вигляді розв'язків рівняння Кортевега-де Фріза, розвитку методу оберненої задачі розсіювання, вивченню цього рівняння методами теорії гамільтонових систем, симплектичного і симетрійного аналізу, методами перетворень Беклунда і Дарбу та багатьма іншими. У цьому напрямку класичні результати отримали Gardner C.S., Green J.M., Kruskal M.D., Miura R.M., Lax P.D., Hirota R., Ablowitz M.J., Kaup D.J., Newell A.C., Segur H., Date E., Tanaka S., Захаров В.Є., Фаддєєв Л.Д., Марченко В.О., Новіков С.П., Дубровін Б.А., Матвєєв В.Б., Ітс О.Р., Кричевер І.М., Mc Kean H.P., Kodama Y., Adler M., Fuchssteiner B., Fokas A.S., Березін Ф.О., Переломов А.М., Новокшенов В.Ю., Салль М.А., Голод П.І., Прикарпатський А.К. та інші.

Крім солітонних розв'язків і розв'язків типу ударної хвилі рівняння Кортевега-де Фріза має також розв'язки з іншими властивостями, наприклад, розв'язки, які за скінченний час руйнуються "трубо", або ж згідно сценарію градієнтної катастрофи. Це явище добре відоме для рівняння переносу (рівняння Хопфа), коли при відповідному виборі гладких початкових умов розв'язок задачі Коші руйнується за скінченний час.

Рівняння Кортевега-де Фріза вивчалось також за наявності малих збурень і при цьому було отримано низку цікавих результатів, зокрема, запропоновано нелінійний метод ВКБ (Miura R.M., Kruskal M.D., 1974); вивчено модуляцію нелінійних хвиль (Flaschka H., Forest M.G., McLaughlin D.W., 1980); досліджено границю розв'язку задачі Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза при прямуванні малого параметра до нуля (Lax P., Levermore S.D., 1983); побудовано асимптотичні солітоноподібні розв'язки (Маслов В.П. та інші, 1980).

Хоча рівняння Кортевега-де Фріза вивчалось впродовж тривалого часу багатьма відомими вченими, але і до сьогодні це рівняння залишається цікавим і важливим математичним об'єктом для дослідження.

Тому тема дисертаційної роботи Андрєєва Кирила Миколайовича "Хвилі розрідження для рівняння Кортевега-де Фріза: асимптотики та інтеграли руху" є актуальною.

Перейдемо тепер до детального аналізу змісту дисертації Андрєєва К.М.

Дана дисертація складається з анотації (українською і англійською мовами), списку публікацій здобувача за темою дисертації, вступу, чотирьох розділів, списку використаних джерел і додатку А, в якому подано список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації. Загальний обсяг дисертації (з додатком А) становить 128 с.

У вступі дисертації обґрунтовано вибір теми досліджень, викладено мету і завдання дослідження, описано наукову новизну отриманих у дисертації результатів та їх практичне значення, охарактеризовано особистий внесок здобувача та подано перелік наукових конференцій і семінарів, на яких доповідалися результати дисертації.

У першому розділі, який є оглядовим, описано метод оберненої задачі розсіювання на прикладі рівняння Кортевега-де Фріза, зокрема,

продемонстровано основні властивості задачі розсіювання для оператора Шредінгера з потенціалом типу сходинок, описано основні принципи нелінійного методу найшвидшого спуску для задачі Рімана – Гільберта і показано процедуру знаходження інтегралів руху у класі спадних функцій. Цей розділ можна також розглядати як розділ, у якому описується методика дисертаційного дослідження.

Для подальшого аналізу результатів дисертаційної роботи Андреєва К.М. доцільно згадати про дослідження задачі Коші для рівняння Кортевега-де Фріза для випадку початкової умови типу сходинок і, зокрема, асимптотичної поведінки розв'язку при великих значеннях часової змінної. Такі дослідження розпочалися ще у 70-х роках минулого століття. Саме тоді Хруслов Є.Я. за допомогою методу оберненої задачі розсіювання довів, що в області позаду переднього фронту хвилі стиску з'являються асимптотичні солітони, які не пов'язані з дискретним спектром. Подібні задачі також вивчали Манаков С.В., Deift P., Its A.I., Zhou X., Котляров В.П., Єгорова І.Є., Шепельський Д.Г., Мінаков О.О. та інші, які розглядали асимптотичну поведінку розв'язків для різних нелінійних інтегровних рівнянь. При цьому ефективним методом дослідження таких задач виявився нелінійний метод найшвидшого спуску для осциляторної задачі Рімана-Гільберта.

Проте, не зважаючи на значну кількість ґрунтовних праць, які присвячені вивченню асимптотичної поведінки розв'язку при великих значеннях незалежних змінних, до сьогодні з використанням нелінійного методу найшвидшого спуску для задачі Рімана-Гільберта не було досліджено асимптотичну (за незалежними змінними) поведінку розв'язків задачі Коші для рівняння Кортевега-де Фріза у випадку хвилі розрідження, тобто, коли початкова функція має різну асимптотику при необмеженому зростанні просторової змінної, і коли ця функція на $+\infty$ рівна нулеві, а на $-\infty$ – деякій додатній сталій. Саме дослідженню цієї задачі і присвячено другий та третій розділи даної дисертації.

У другому розділі дисертації розглянуто задачу Коші для рівняння Кортевега-де Фріза у так званій солітонній і середній областях.

При дослідженні асимптотичної поведінки розв'язку у солітонній області розглянуто відповідну задачу Рімана-Гільберта, доведено існування та єдиність її розв'язку. Показано, що розв'язок задачі Коші у відповідній області є асимптотичною сумою солітонів.

Для дослідження асимптотичних властивостей у середній області просторово-часової півплощини відповідну задачу Рімана-Гільберта зведено до еквівалентної задачі Рімана-Гільберта із "майже сталими" (за змінною k) стрибками (за допомогою деформації та спряження) та розв'язано відповідну модельну задачу. Обчислено перший і другий доданки асимптотичного розкладу (при великих значеннях часової змінної) як у нерезонансному, так і у резонансному випадку.

Третій розділ дисертації присвячено розгляду асимптотичної поведінки розв'язку задачі Коші в області позаду заднього фронту хвилі. Тут вивчено відповідну векторну задачу Рімана-Гільберта, що побудована за лівими даними розсіювання, доведено існування та єдиність її розв'язку, розглянуто відповідну модельну задачу і отримано асимптотику її розв'язку при великих значеннях часової змінної. Доведено, що резонанс не впливає на асимптотику першого і другого доданків асимптотичного розв'язку.

Ще одним важливим підсумком дослідження рівняння Кортевега-де Фріза у даній дисертаційній роботі є результати дисертанта, що стосуються вивчення регуляризованих інтегралів руху для випадку, коли початкові умови типу сходінки є нескінченно гладкими, швидко спадають на правій півосі і є асимптотично скінченнозонними на лівій півосі. Такі потенціали в дисертації називаються функціями шварцевського типу.

Зауважимо, що гамільтонову структуру рівняння Кортевега-де Фріза (для випадку швидко спадних функцій) вперше встановили Захаров В.Є. і Фаддеев Л.Д. (1971), що ініціювало численні дослідження гамільтонової структури різних інтегрованих рівнянь як в класі швидкоспадаючих, так і періодичних функцій. Але до сьогодні питання про гамільтонову структуру у випадку функцій шварцевського типу залишалось відкритим.

Розгляду цієї задачі і присвячено четвертий розділ дисертації, основні результати якого стосуються доведення існування та вивчення властивостей інтегралів руху для рівняння Кортевега-де Фріза у випадку початкових умов шварцевського типу, які в дисертації називаються регуляризованими інтегралами руху. Тут встановлено існування нескінченної серії регуляризованих інтегралів руху, знайдено рекурентні співвідношення для їх визначення, записано в явному вигляді перші шість інтегралів руху. Окремо розглянуто випадок сталого лівого фону. Тут також показано, що рівняння Кортевега-де Фріза у випадку початкових умов типу сходінки є гамільтоновою динамічною системою. Крім того, у

четвертому розділі отримано вирази для інтегралів руху через праві дані розсіювання і ліві дані розсіювання.

Кожен розділ дисертації завершується формулюванням висновків до нього, а теоретичний матеріал дисертаційної роботи – формулюванням загальних висновків до дисертації.

На мій погляд, основні результати дисертаційної роботи Андреева К.М. полягають у наступному:

1. досліджено асимптотичну (при великих значеннях часової змінної) поведінку розв'язків задачі Коші для рівняння Кортевега-де Фріза для випадку початкової функції, що описує хвилю розрідження, у різних частинах просторово-часової площини;

2. показано, що в області $x > \epsilon t$, де $\epsilon > 0$ і як завгодно мале, розв'язок задачі Коші при великих значеннях часової змінної є асимптотичною сумою солітонних розв'язків;

3. знайдено вигляд головного доданку асимптотичного розвинення в області $(-6c^2 + \epsilon)t < x < -\epsilon t$, де $\epsilon > 0$ і як завгодно мале, обчислено наступний доданок асимптотичного розвинення, обґрунтовано отримані асимптотики та проаналізовано вплив резонансу на асимптотику;

4. показано, що в області $x < (-6c^2 - \epsilon)t$, де $\epsilon > 0$ і як завгодно мале, розв'язок задачі Коші при великих значеннях часової змінної є близьким до сталої c^2 , проаналізовано вплив резонансу на асимптотику;

5. побудовано ієрархію регуляризованих інтегралів руху для функцій шварцевського типу.

Всі основні результати дисертації Андреева К.М. є новими, строго обґрунтованими і сформульовані у вигляді теорем, доведення яких не викликає сумнівів.

Наукові результати дисертаційної роботи Андреева К.М. можуть отримати розвиток у подальших дослідженнях як вітчизняних, так і закордонних вчених.

Основні результати дисертації Андреева К.М. опубліковані у 10 наукових працях, серед яких 5 статей у наукових фахових виданнях, з них 3 – у виданнях, що входять до наукометричних баз даних Web of Science і Scopus, та 5 тез і матеріалів міжнародних наукових конференцій.

Результати дисертації Андреева К.М. достатньо добре апробовані серед фахівців з тематики дисертації і доповідалися на науковому семінарі

відділу диференціальних рівнянь і геометрії Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Веркіна, науковому семінарі відділу математичної фізики Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Веркіна, науковому семінарі Математичного відділення Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Веркіна і науковому семінарі “Асимптотичні та аналітичні методи для задач математичної фізики” кафедри математичної фізики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка та міжнародних наукових конференціях, хоча у подальшому дисертанту доцільно представляти результати своїх досить цікавих досліджень і в інших наукових центрах

Автореферат правильно і повно відображає зміст дисертації.

Разом з тим, щодо дисертаційної роботи Андреева Кирила Миколайовича “Хвилі розрідження для рівняння Кортевега-де Фріза: асимптотики та інтеграли руху” можна висловити деякі побажання і зауваження, а саме:

1. дисертант детально вивчив асимптотичні властивості розв’язку задачі Коші для рівняння Кортевега-де Фріза у всій площині за винятком області $x \approx 0$ та $x \approx -6c^2t$.

На мій погляд, доцільно продовжити ці дослідження і вивчити асимптотичну поведінку хвилі розрідження у згаданих областях;

2. у формулюванні теореми 3.1 (розділ 3, с. 81) в умові V наведено співвідношення (3.11), яке виконується при $k_1 \rightarrow ic$. Що ж стосується випадку, коли $k_1 \rightarrow -ic$, то вказано, що “в точці $-ic$ аналогічна умова формулюється з урахуванням симетрії (3.10)”.

На мій погляд, при формулюванні математичних тверджень потрібно всі умови тверджень наводити повністю.

Аналогічне зауваження стосується і формулювання лема 3.2;

3. у дисертації наявні окремі невдалі вирази та описки.

Зокрема, на с. 92 у формулі (після формули (3.31)) у верхній межі інтегрування пропущено знак “-”.

Висловлені вище зауваження не впливають суттєвим чином на загальну позитивну оцінку дисертаційної роботи Андреева Кирила Миколайовича “Хвилі розрідження для рівняння Кортевега-де Фріза: асимптотики та інтеграли руху”, яка є завершеною науковою роботою, що виконана на високому науковому рівні, стосується важливих і актуальних

проблем математичної фізики, при дослідженні яких дисертант продемонстрував досконале володіння методами сучасної математики.

Вважаю, що дисертаційна робота Андреева К. М. "Хвилі розрідження для рівняння Кортевега-де Фріза: асимптотики та інтеграли руху", задовольняє всі вимоги "Порядку присудження наукових ступенів", затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України № 567 від 24 липня 2013 року (із змінами, внесеними згідно з Постановами Кабінету Міністрів України № 656 від 19 серпня 2015 року та № 1159 від 30 грудня 2015 року), щодо дисертаційних робіт на здобуття наукового ступеня кандидата наук, а її автор – Андреев Кирило Миколайович заслуговує на присудження йому наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.03 – математична фізика.

Офіційний опонент
старший науковий співробітник
механіко-математичного факультету
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка,
доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник

СШУ

Самойленко Ю. І.

Підпис зас
Вчений се
КАРАУЛЬНА
14.09



СШУ

Відух надійшов до ради 18.09.2015р.

Вчений секретар

Спец. Вченої ради 2 64.175.01



СШУ (Трькавський)