ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ
Том XXIII 1978 Выпуск 3

О ГАУССОВСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ НА ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ

Г. М. ФЕЛЬДМАН

§ 1. Введение

1.1. Пусть X — локально компактная сепарабельная абелева метрическая группа, $Y = X^*$ — ее группа характеров, (x, y) — значение характера $y \in Y$ на элементе $x \in X$. Мы будем рассматривать неотрицательные меры, определенные на борелевском σ-поле $\mathfrak{B}$ подмножеств X. Будем говорить, что мера μ *сосредоточена на множестве* $A \in \mathfrak{B}$, если $\mu(E) = 0$ для любого такого $E \in \mathfrak{B}$, что $A \cap E = \varnothing$. Свертка двух распределений μ и ν и характеристическая функция (х. ф.) распределения μ определяются обычным образом:

$$(\mu * \nu)(E) = \int_X \mu(E - x)\, d\nu(x), \quad \hat{\mu}(y) = \int_X (x, y)\, d\mu(x).$$

Если распределение μ сосредоточено в точке $x \in X$, то вместо $\mu * \nu$ пишем $x * \nu$. Через m обозначим меру Хаара на X.

1.2. Распределение μ называется *безгранично делимым*, если для каждого натурального n существуют элемент $x_n \in X$ и распределение ν_n такие, что $\mu = \nu_n^{*n} * x_n$. Известно ([1], [2]), что распределение μ является безгранично делимым тогда и только тогда, когда его х.ф. $\hat{\mu}(y)$ может быть представлена в виде

$$\hat{\mu}(y) = (x_0, y)\, \hat{\lambda}(y) \exp\left\{ -\varphi(y) + \int_X [(x, y) - 1 - ig(x, y)]\, dF(x) \right\}, \tag{1.1}$$

где x_0 — некоторый элемент X, λ — распределение Хаара на некоторой компактной подгруппе X, $\varphi(y)$ — непрерывная неотрицательная функция на Y, удовлетворяющая равенству

$$\varphi(y_1 + y_2) + \varphi(y_1 - y_2) = 2\, [\varphi(y_1) + \varphi(y_2)] \tag{1.2}$$

для любых $y_1, y_2 \in Y$, $g(x, y)$ — некоторая фиксированная (не зависящая от μ) функция, определенная на $X \times Y$ и удовлетворяющая ряду дополнительных условий, F — такая борелевская мера на X, конечная на дополнении каждой окрестности нуля, для которой при всех $y \in Y$

$$\int_X [1 - \operatorname{Re}(x, y)]\, dF(x) < \infty.$$

Из представления (1.1) следует, что каждое безгранично делимое распределение μ представимо в виде свертки $\mu = x_0 * \lambda * \Gamma * \Pi$, где распределения Г и П имеют соответственно х.ф.

$$\hat{\Gamma}(y) = \exp\{-\varphi(y)\}, \quad \hat{\Pi}(y) = \exp\left\{\int\limits_X [(x, y) - 1 - ig(x, y)]\, dF(x)\right\}.$$

Следуя [1], безгранично делимое распределение μ будем называть *гауссовским распределением* (*г.р.*), если оно имеет вырожденную «пуассоновскую» компоненту. Как доказано в [1], распределение μ тогда и только тогда является г.р., когда его х.ф. представима в виде

$$\hat{\mu}(y) = (x, y) \exp\{-\varphi(y)\}. \tag{1.3}$$

Замечание 1.1. В работах [13], [14] были предложены формально другие определения г.р., эквивалентные приведенному, т. е. получены различные характеризации г.р. Отметим в связи с этим работу [15] (см. также [16]), в которой по существу также содержится доказательство одной теоремы о характеризации г.р. на группах, являющейся обобщением известной характеризации С. Н. Бернштейна.

Г. р. μ будем называть *симметричным г.р.*, если в представлении (1.3) его х.ф. $x = 0$.

1.3. Хорошо известно, что каждое распределение μ на X может быть представлено в виде

$$\mu = \alpha_1\mu_{ac} + \alpha_2\mu_s + \alpha_3\mu_d, \tag{1.4}$$

где $\alpha_j \geqslant 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, μ_{ac} — абсолютно непрерывное (относительно m), μ_s — сингулярное (относительно m), μ_d — дискретное распределение. Следуя статье В. М. Золотарева и В. М. Круглова [3], разложение распределения μ в сумму (1.4) будем называть *структурой* этого распределения.

В [3] исследована структура безгранично делимого распределения «пуассоновского» типа П в зависимости от свойств спектральной меры F и сформулирована задача изучения структуры произвольного безгранично делимого распределения на группе X. В той же работе приведен пример, показывающий, что структура г.р. зависит от строения группы X и не столь очевидна, как в случае, когда $X = R^n$.

Изучению структуры г.р., а также некоторых близких вопросов и посвящена в основном эта статья.

1.4. Как доказано в [1], каждое г.р. сосредоточено на классе смежности связной подгруппы в X. Поэтому, не ограничивая общности, будем считать группу X связной. Это предположение мы сохраним на протяжении всей статьи.

При изучении г.р. мы систематически будем использовать некоторые сведения о структуре локально компактных абелевых групп и теорию двойственности Понтрягина [4].

Каждая связная локально компактная абелева группа X изоморфна группе вида $R^n \times K$, где K — связная компактная абелева группа. Группа характеров $Y = X^*$ изоморфна тогда группе вида $(R^n)^* \times D$, где $D = K^*$ — дискретная группа без кручения, т. е. не содержащая элементов конечного порядка. (Несмотря на изоморфизм $(R^n)^* \approx R^n$, нам удобно для дальнейшего обозначать группу характеров группы R^n символом $(R^n)^*$.) В силу сепарабельности X группа D счетна.

Условимся также через T обозначать группу вращений окружности, через Z и Q — дискретные группы целых и рациональных чисел, через $\tilde{Z}^p$ и $\tilde{R}^p$ замкнутые подгруппы в R^n, изоморфные соответственно Z^p и R^p, но не обязательно канонически вложенные в R^n.

Как правило, при проведении доказательств мы будем ограничиваться рассмотрением лишь компактной группы, т. е. считать, что $X = K$, так как для тех вопросов, которыми мы интересуемся, соответствующие результаты для общего случая $X = R^n \times K$ получаются совершенно аналогичными рассуждениями.

§ 2. Гауссовские распределения на группах конечной размерности

2.1. Пусть $X = R^n \times K$ — группа конечной размерности. Тогда группа K также имеет конечную размерность, ранг группы D конечен и совпадает с размерностью K (см. [4]). Хорошо известно (и очевидно), что любое г.р. на группе T^l является образом г.р. в l-мерном вещественном пространстве R^l при естественном гомоморфизме R^l на T^l. Оказывается, что таким же образом устроено любое симметричное г.р. на группе конечной размерности. Именно, справедлива

Теорема 2.1. *Пусть X — группа конечной размерности l. Тогда существует непрерывный гомоморфизм p: $R^l \to X$, обладающий следующим свойством: для любого симметричного г.р. μ на X существует такое г.р. M на R^l, что $\mu = p\,(M)$.*

Доказательство. Пусть $X = K$, тогда $Y = D$. Обозначим через $d_1, d_2, \ldots, d_l$ максимальную независимую над Z систему элементов в D. Тогда для каждого $d \in D$ существуют такие целые числа $k, k_1, k_2, \ldots, k_l$, что

$$kd = k_1 d_1 + k_2 d_2 + \ldots + k_l d_l.$$

Из независимости $\{d_j\}_{j=1}^l$ следует, что набор рациональных чисел $\{k_j/k\}_{j=1}^l$ однозначно определяется по d. Поскольку D — группа без кручения, то отображение f:

$$f\,(d) = (k_1/k,\ k_2/k,\ \ldots,\ k_l/k)$$

является изоморфизмом D на некоторую подгруппу в Q^l. Так как группа Q^l канонически вложена в группу $(R^l)^*$, то f можно рассматривать как мономорфизм D в $(R^l)^*$.

Пусть p — двойственный к f непрерывный гомоморфизм R^l в K, т. е.

$$(p\,(t),\ d) = (t,\ f\,(d))$$

для любых $t \in R^l, d \in D$. Заметим теперь, что если L — произвольное распределение на R^l, то х.ф. распределения $p\,(L)$ имеет вид

$$P\,(\widehat{L})\,(d) = \widehat{L}\,(f\,(d)). \tag{2.1}$$

Как известно (см. [1]), каждой непрерывной неотрицательной функции $\varphi\,(y)$, удовлетворяющей условию (1.2), соответствует непрерывная функция $\psi(y_1, y_2)$, $y_1, y_2 \in Y$, обладающая следующими свойствами:

I. $\psi(y_1, y_2) = \psi(y_2, y_1)$,

II. $\psi(y_1 + y_2, y_3) = \psi(y_1, y_3) + \psi(y_2, y_3)$,

III. $\psi(y, y) \geqslant 0$.

Функция $\psi(y_1, y_2)$ определяется по функции $\varphi(y)$ следующим образом:

$$\psi(y_1, y_2) = {}^1/_2\,[\varphi(y_1 + y_2) - \varphi(y_1) - \varphi(y_2)].$$

Верно и обратное. Каждой непрерывной функции $\psi(y_1, y_2)$, удовлетворяющей условиям I — III, соответствует непрерывная неотрицательная функция $\varphi(y)$, удовлетворяющая условию (1.2), а именно, $\varphi(y) = \psi(y, y)$. Поэтому

$$k^2\varphi(d) = \varphi(kd) = \psi(kd, kd) = \psi\left(\sum_{i=1}^{l} k_i d_i,\ \sum_{i=1}^{l} k_i d_i\right) = \sum_{i,j=1}^{l} \alpha_{ij} k_i k_j,$$

где $\alpha_{ij} = \psi(d_i, d_j)$. Следовательно,

$$\varphi(d) = \sum_{i,j=1}^{l} \alpha_{ij} \frac{k_i}{k} \frac{k_j}{k} = \langle Af(d), f(d)\rangle,$$

где $f(d) = (k_1/k, k_2/k, \ldots, k_l/k)$, $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{l}$ — некоторая неотрицательно определенная матрица.

Пусть теперь μ — некоторое симметричное г.р. на K. Как показано выше, его х.ф. имеет вид

$$\hat{\mu}(d) = \exp\{-\langle Af(d), f(d)\rangle\}. \tag{2.2}$$

Обозначим через M г.р. в R^l с х.ф.

$$\hat{M}(s) = \hat{M}(s_1, s_2, \ldots, s_l) = \exp\{-\langle As, s\rangle\}. \tag{2.3}$$

Из (2.1) и (2.3) тогда следует, что

$$p(\hat{M})(d) = \exp\{-\langle A f(d), f(d)\rangle\}. \tag{2.4}$$

Сравнивая (2.2) и (2.4) и учитывая, что любое распределение на K однозначно определяется своей х.ф., мы заключаем, что $\mu = p(M)$. Отметим, что из (2.3) следует симметричность г.р. M.

Пусть теперь $X = R^n \times K$, тогда $Y \approx (R^n)^* \times D$. Доказательство теоремы в этом случае совершенно аналогично уже проведенному. Отметим только, что отображение $f: Y \to (R^n)^* \times (R^m)^*$ $(n + m = l)$ определяется следующим образом:

$$f[(s;d)] = f[(s_1, s_2, \ldots, s_n;\ d)] = (s_1, s_2, \ldots, s_n;\ k_1/k, k_2/k, \ldots, k_m/k),$$

где $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in (R^n)^*$, $k, k_1, k_2, \ldots, k_m$ выбираются так же, как и при доказательстве теоремы в случае $X = K$, а сужение двойственного к f непрерывного гомоморфизма p: $R^n \times R^m \to R^n \times K$ на R^n является тождественным отображением.

2.2. Прежде чем переходить к изучению структуры г.р., сделаем

З а м е ч а н и е 2.1. В разложении (1.4) для г.р. μ на произвольной группе X (не обязательно конечной размерности) всегда $\alpha_3 = 0$.

Этот факт, по-видимому, хорошо известен. Для полноты изложения приведем его короткое доказательство.

Допустим, что существует такой элемент $x_0 \in X$, что $\mu(\{x_0\}) > 0$. Выберем в X подгруппу X_1 так, чтобы фактор-группа X/X_1 была изоморфна T. Это всегда можно сделать (см. [4]). Рассмотрим образ $\pi(\mu)$ г. р. μ при каноническом гомоморфизме $\pi: X \to X/X_1$. Ясно, что $\pi(\mu)$ — г.р. на T. Имеем

$$\pi(\mu)(\{\pi(x_0)\}) = \mu(\{\pi^{-1}(\pi(x_0))\}) \geqslant \mu(\{x_0\}) > 0,$$

что невозможно. Значит, $\alpha_3 = 0$.

Предложение 2.1. *Пусть группа X конечной размерности l не локально связна. Тогда любое г. р. на X сингулярно.*

Для доказательства нам понадобится следующая

Лемма 2.1. *Пусть X — группа конечной размерности l. Если существует непрерывный гомоморфизм R^l на X, то группа X локально связна.*

Доказательство. Действительно, если $p(R^l) = X$, то p — открытое отображение ([5], теорема 5.29). Но тогда группа X изоморфна фактор-группе $R^l/\operatorname{Ker} p$ ([5], теорема 5.27). Ядро $\operatorname{Ker} p$ гомоморфизма p — некоторая замкнутая подгруппа в R^l и, следовательно, имеет вид $\widetilde{R}^s \times \widetilde{Z}^t$ (см. [6]). Поэтому

$$X \approx R^l/\operatorname{Ker} p = R^l/\widetilde{R}^s \times \widetilde{Z}^t \approx \widetilde{R}^{l-s-t} \times T^t,$$

т. е. группа X локально связна.

Доказательство предложения 2.1. Ясно, что предложение 2.1 достаточно доказать лишь для симметричных г.р. Пусть μ — такое распределение на X. Тогда по теореме 2.1 имеем $\mu = p(M)$, где M — г. р. на R^l. Отсюда, в частности, следует, что распределение μ сосредоточено на $p(R^l)$. По лемме 2.1 множество $p(R^l)$ — собственная подгруппа (вообще говоря, не замкнутая) в X. Для завершения доказательства остается только заметить, что мера Хаара любой собственной (борелевской) подгруппы группы X равна нулю *, и учесть замечание 2.1.

2.3. В статье [2] В. В. Сазоновым и В. Н. Тутубалиным поставлен следующий вопрос: справедлива ли для групп альтернатива, имеющая место для линейных пространств, согласно которой всякие два г.р. либо взаимно абсолютно непрерывны, либо взаимно сингулярны? Для групп конечной размерности ответом на этот вопрос является

Теорема 2.2. *Любые два г.р. μ и ν на группе X конечной размерности l либо взаимно абсолютно непрерывны, либо взаимно сингулярны.*

Доказательство. Мы ограничимся проведением доказательства лишь для компактной группы, т. е. будем считать, что $X = K$ (тогда $Y = D$).

Представим группу K в виде

$$K = T^q \times G, \tag{2.5}$$

* Действительно, пусть $A \in \mathfrak{B}$ и $m(A) > 0$. Тогда, как известно, разностное множество $A - A$ содержит окрестность нуля группы X. Поэтому если A — подгруппа в X, то $A - A = A$, а значит, $A = X$ в силу связности X.

где группа G не содержит подгруппы, изоморфной T. Как известно ([5], 25.31), это всегда можно сделать. Из (2.5) следует, что тогда группа характеров D представима в виде прямой суммы

$$D = H_1 \times H_2, \tag{2.6}$$

где $H_1 \approx Z^q$, а $H_2 = G^*$ не содержит подгруппы, изоморфной Z, в качестве прямого слагаемого.

Выберем максимальную независимую над Z систему элементов d_1, $d_2, \ldots, d_l$ в D так, чтобы $d_1, d_2, \ldots, d_q$ являлись в H_1 естественными образующими, а $d_{q+1}, d_{q+2}, \ldots, d_l \in H_2$. Пусть $f : D \to Q^l$ то же, что и в теореме 2.1. Мономорфизм f в таком случае осуществляет вложение

$$f : D \to (R^q)^* \times (R^{l-q})^*,$$

согласованное с (2.6). Рассмотрим двойственный к f непрерывный гомоморфизм

$$p : R^q \times R^{l-q} \to T^q \times G$$

и проверим, что $\operatorname{Ker} p = Z^q \subset R^q$. Для этого достаточно убедиться, что $\operatorname{Ker}(p \mid_{R_{l-q}}) = 0$. Рассмотрим замыкание образа $\overline{f(H_2)}$ при отображении $f : H_2 \to (R^{l-q})^*$. Как и всякая замкнутая подгруппа в конечномерном линейном пространстве, $\overline{f(H_2)}$ имеет вид $\overline{f(H_2)} = \widetilde{R}^s \times \widetilde{Z}^t$ $(s + t = l - q)$, см. [6]. Но здесь $t = 0$, иначе, как нетрудно проверить, группа H_2 будет содержать в качестве прямого слагаемого подгруппу, изоморфную Z, что невозможно. (Действительно, если $t > 0$, то $\overline{f(H_2)} = \widetilde{Z}^t \times \widetilde{R}^s = \widetilde{Z} \times H$. Пусть e — образующая в $\widetilde{Z}$. Выберем $d_0 \in f(H_2) \cap (e + H)$ и рассмотрим подгруппу $S = \{nd_0\}$, порожденную d_0. Непосредственно проверяется, что $f(H_2) = S \times (f(H_2) \cap H)$, а значит, H_2 содержит подгруппу, изоморфную Z в качестве прямого слагаемого.)

Итак, $\overline{f(H_2)} = (R^{l-q})^*$. Тогда (см. [4]) $\operatorname{Ker}(p \mid_{R^{l-q}}) = 0$.

Предположим, что распределения μ и ν симметричны. Тогда по теореме 2.1 имеем $\mu = p(M)$, $\nu = p(N)$, где M и N — г. р. на R^l. Если M и N взаимно абсолютно непрерывны, то μ и ν, очевидно, также взаимно абсолютно непрерывны. Поэтому предположим, что M и N не взаимно абсолютно непрерывны. Но тогда M и N взаимно сингулярны. Пусть носитель распределения M — подпространство $\widetilde{R}^a$, а носитель распределения N — подпространство $\widetilde{R}^b$, причем $\widetilde{R}^a \neq \widetilde{R}^b$. Будем считать для определенности, что пересечение $\widetilde{R}^a \cap \widetilde{R}^b$ — собственное подпространство в $\widetilde{R}^b$. Так как $\operatorname{Ker} p = Z^q$, то $p^{-1}(p(\widetilde{R}^a)) = \widetilde{R}^a + Z^q$. По предположению $\mu(p(\widetilde{R}^a)) = 1$. С другой стороны, имеем

$$\nu(p(\widetilde{R}^a)) = N(p^{-1}(p(\widetilde{R}^a))) = N(\widetilde{R}^a + Z^q) = N((\widetilde{R}^a + Z^q) \cap \widetilde{R}^b) = 0,$$

так как $(\widetilde{R}^a + Z^q) \cap \widetilde{R}^b$ — собственная подгруппа в $\widetilde{R}^b$. Значит, μ и ν взаимно сингулярны.

Случай, когда $\mu = u * \mu_1$, $\nu = v * \nu_1$, где $u, v \in K$, а μ_1 и ν_1 — симметричные г. р., рассматривается по существу аналогично, и мы опустим соответствующие рассуждения.

§ 3. Гауссовские распределения на группах бесконечной размерности

3.1. Пусть $X = R^n \times K$ — группа бесконечной размерности. Прежде чем переходить к изучению г. р. на X, введем следующие обозначения. Через Z_0^∞, Q_0^∞ и R_0^∞ обозначим счетные прямые суммы групп целых чисел, рациональных чисел и вещественных чисел соответственно (элементами этих групп являются бесконечные последовательности чисел, лишь конечное число членов которых отлично от нуля). Имеют место канонические вложения

$$\begin{gathered} Z \subset Z^2 \subset \ldots \subset Z^n \subset \ldots \subset Z_0^\infty, \\ Q \subset Q^2 \subset \ldots \subset Q^n \subset \ldots \subset Q_0^\infty, \\ R \subset R^2 \subset \ldots \subset R^n \subset \ldots \subset R_0^\infty, \\ Z_0^\infty \subset Q_0^\infty \subset R_0^\infty. \end{gathered}$$

Группы Z_0^∞ и Q_0^∞ будем рассматривать в дискретной топологии, а в группе R_0^∞ введем топологию строгого индуктивного предела пространств R^n. Сходимость элементов $s^{(k)} \to s$ в R_0^∞ в этой топологии означает, что все $s^{(k)}$ лежат в некотором R^n и там сходятся.

Через R^∞ обозначим пространство всех последовательностей вещественных чисел в тихоновской топологии. Сходимость элементов $t^{(k)} \to t$ в этой топологии означает покоординатную сходимость Пространство R^∞ можно рассматривать как проективный предел фильтрующегося множества подпространств R^n. Пространство R^∞ метризуемо и сепарабельно.

Мы напомним сейчас некоторые факты о распределениях в R^∞. Они понадобятся нам при изучении г. р. на группах бесконечной размерности.

Пусть $\mathfrak{B}$ — σ-поле борелевских множеств в R^∞, которое можно рассматривать как минимальное σ-поле, содержащее все множества вида $U_J^n \times R^{\infty \setminus J}$, где U_J^n — открытое множество в R_J^n $(J = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$ — некоторый набор индексов). Под мерой на R^∞ будем понимать неотрицательную вполне аддитивную функцию множества, определенную на $\mathfrak{R}$.

Обозначим через (t, s) непрерывную на R^∞ функцию

$$(t, s) = \exp\left\{i \sum_{j=1}^{\infty} t_j s_j\right\}, \tag{3.1}$$

$t = (t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots) \in R^\infty$, $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n, 0, \ldots) \in R_0^\infty$, которую естественно называть *характером* группы R^∞, так как она осуществляет непрерывный гомоморфизм R^∞ в T. Легко видеть также, что любой характер на R^∞ имеет вид (3.1). Из определения топологии на R^∞ и σ-поля $\mathfrak{B}$ следует, что каждая непрерывная на R^∞ функция $\mathfrak{B}$-измерима. Для любого распределения μ на R^∞ определим его характеристическую функцию (в другой терминологии — характеристический функционал) формулой

$$\hat{\mu}(s) = \int_{R^\infty} (t, s)\, d\mu(t), \quad s \in R_0^\infty.$$

Функция $\hat{\mu}(s)$: 1) непрерывна, 2) является положительно определенной на любом подпространстве $(R_J^n)^* \subset R_0^\infty$, 3) нормирована условием $\hat{\mu}(0) =$

$= 1$. Из теоремы Колмогорова [7] непосредственно следует, что каждой функции $g(s)$ на R_0^∞, удовлетворяющей условиям 1) — 3), соответствует единственное распределение μ_g на R^∞, для которого $\hat{\mu}_g(s) = g(s)$.

Распределение μ на R^∞ с х. ф.

$$\hat{\mu}(s) = (t, s) \exp\{-\langle As, s\rangle\},$$

где t — некоторый элемент из R^∞, $A = (\alpha_{ij})_{ij=1}^\infty$ — неотрицательно определенная матрица, т. е. $\langle As, s\rangle \geqslant 0$ для любого $s \in R_0^\infty$, будем называть *гауссовским*.

После этих замечаний, относящихся к распределениям на группе R^∞, мы перейдем к изучению г. р. на группе X.

3.2. Теорема 3.1. *Пусть X — группа бесконечной размерности. Тогда существует непрерывный гомоморфизм $p : R^\infty \to X$, обладающий следующим свойством: для любого симметричного г. р. μ на X существует такое г. р. M на R^∞, что $\mu = p(M)$.*

Доказательство. Пусть $X = K$, тогда $Y = D$ — счетная группа без кручения бесконечного ранга. Выберем в D максимальную независимую над Z систему элементов $d_1, d_2, \ldots, d_l, \ldots$ Тогда для каждого $d \in D$ существуют такие целые числа $k, k_1, k_2, \ldots, k_l$, что

$$kd = k_1 d_1 + k_2 d_2 + \ldots + k_l d_l.$$

Из независимости $\{d_j\}_{j=1}^\infty$ следует, что набор рациональных чисел $\{k_j/k\}_{j=1}^l$ однозначно определяется по d. Так как D — группа без кручения, то отображение f

$$f(d) = (k_1/k, k_2/k, \ldots, k_l/k, 0, \ldots)$$

является изоморфизмом D на некоторую подгруппу в Q_0^∞. Поскольку группа Q_0^∞ канонически вложена в группу R_0^∞, то f можно рассматривать как мономорфизм D в R_0^∞. Пусть p — двойственный к f непрерывный гомоморфизм R^∞ в K, т. е. $(p(t), d) = (t, f(d))$ (непрерывность p легко проверить, если заметить, что окрестность нуля в K имеет вид

$$U[\varepsilon; a_1, a_2, \ldots, a_n] =$$
$$= \{x \in K : |1 - (x, a_k)| < \varepsilon, \ a_k \in D, \ k = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Заметим теперь, что если L — произвольное распределение на R^∞, то х. ф. распределения $p(L)$ имеет вид

$$\widehat{p(L)}(d) = \hat{L}(f(d)). \tag{3.2}$$

Точно так же, как и при доказательстве теоремы 2.1, убеждаемся в том, что неотрицательная функция на D, удовлетворяющая (1.2), имеет вид

$$\varphi(d) = \langle Af(d), f(d)\rangle,$$

где $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^\infty$ $(\alpha_{ij} = \psi(d_i, d_j))$ — некоторая неотрицательно определенная матрица, т. е. $\langle As, s\rangle \geqslant 0$ для любого $s \in R_0^\infty$.

Пусть теперь μ — симметричное г. р. на K. Тогда его х. ф. имеет вид

$$\hat{\mu}(d) = \exp\{-\langle Af(d), f(d)\rangle\}. \tag{3.3}$$

Обозначим через M г. р. на R^∞ с х. ф.

$$\hat{M}(s) = \hat{M}(s_1, \ldots, s_l, 0, \ldots) = \exp\{-\langle As, s\rangle\}. \tag{3.4}$$

Из (3.2) и (3.4) следует, что

$$\widehat{p(M)}(d) = \exp\{-\langle Af(d), f(d)\rangle\}. \tag{3.5}$$

Сравнивая (3.3) и (3.5) и учитывая, что любое распределение на K однозначно определяется своей х.ф., мы заключаем, что $\mu = p(M)$.

Пусть теперь $X = R^n \times K$, тогда $Y = (R^n)^* \times D$. Доказательство теоремы в этом случае совершенно аналогично уже проведенному. Отображение $f: Y \to (R^n) \times R_0^\infty$ определяется следующим образом:

$$f[(s; d)] = f[(s_1, s_2, \ldots, s_n; d)] =$$
$$= (s_1, s_2, \ldots, s_n; k_1/k, k_2/k, \ldots, k_l/k, 0, \ldots),$$

где $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in (R^n)^*$, $k, k_1, k_2, \ldots, k_l$ выбираются так же, как и при доказательстве теоремы в случае $X = K$, а сужение двойственного к f непрерывного гомоморфизма $p: R^n \times R^\infty \to R^n \times K$ на R^n является тождественным отображением.

3.3. Предложение 3.1. *Пусть группа X бесконечной размерности не локально связна. Тогда любое г. р. μ на X сингулярно.*

Доказательство. Пусть $X = R^n \times K$. Как известно (см. [4]), любая локально связная группа бесконечной размерности изоморфна группе вида $R^n \times T^\infty$, где T^∞ — бесконечномерный тор, т. е. $T^\infty = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty} T_i$, $T_i = T$ и группа T^∞ рассматривается в тихоновской топологии. Очевидно, что $T^\infty \approx R^\infty/Z^\infty$ (здесь Z^∞ — аддитивная группа всех целочисленных последовательностей). При доказательстве мы ограничимся случаем $X = K$. Тогда условие не локальной связности означает, что $K \not\approx T^\infty$, а значит, $D \not\approx Z_0^\infty$.

Рассмотрим построенное при доказательстве теоремы 3.1 вложение $f: D \to R_0^\infty$ и проверим, что при некотором n группа $D_n = \{d \in D : f(d) \in (R^n)^*\}$ не изоморфна Z^n (мы считаем, что группа $(R^n)^*$ канонически вложена в R_0^∞). Для этого допустим противное. Тогда имеют место изоморфизмы $D_n \approx Z^n$, $n = 1, 2, \ldots$, и каждая из групп $f(D_n)$ является замкнутой подгруппой в $(R^n)^*$. Так как $f(D_n) = f(D_{n+1}) \cap (R^n)^*$, то каждая из групп $f(D_n)$ является прямым слагаемым в $f(D_{n+1})$ (см. [6]). Поэтому существуют такие подгруппы $E_n \approx Z$, $n = 1, 2, \ldots$, в $f(D)$, что $f(D_n) = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$, а значит, $f(D) \approx Z_0^\infty$. Следовательно, и $D \approx Z_0^\infty$. Полученное противоречие показывает, что при некотором n группа $D_n \not\approx Z^n$ и поэтому $(D_n)^* \not\approx T^n$.

Обозначим через f_n сужение f на D_n, а через p_n — двойственный к f_n непрерывный гомоморфизм из R^n в $(D_n)^*$.

Так как $(D_n)^* \not\approx T^n$, то $p_n(R^n) \neq (D_n)^*$ по лемме 2.1. Пусть $k^{(n)} \in (D_n)^*$ и $k^{(n)} \notin p_n(R^n)$. Продолжим $k^{(n)}$ до характера на всем D и обозначим полученный характер через k. По теореме двойственности $k \in K$. Проверим, что $k \notin p(R^\infty)$, где p — двойственный к f непрерывный гомоморфизм из R^∞ в K. Допустим противное. Тогда $k = p(t)$, $t \in R^\infty$. Обозначим через $t^{(n)}$ проекцию t на подпространство $R^n \subset R^\infty$. Для любого $d^{(n)} \in D_n$ имеем

$$(k^{(n)},\ d^{(n)}) = (k,\ d^{(n)}) = (p\ (t),\ d^{(n)}) = (t,\ f\ (d^{(n)})) = \\ = (t^{(n)},\ f_n\ (d^{(n)})) = (p_n\ (t^{(n)}),\ d^{(n)}),$$

т. е. $k^{(n)} = p_n\ (t^{(n)})$. Полученное противоречие показывает, что $k \notin$ $\notin p\ (R^\infty)$, а поэтому $p\ (R^\infty) \neq K$.

Завершается доказательство предложения 3.1 точно так же, как и предложения 2.1. Только вместо теоремы 2.1 нужно воспользоваться теоремой 3.1.

3.4. Для некоторого класса групп бесконечной размерности мы можем доказать утверждение, аналогичное теореме 2.2.

Теорема 3.2. *Любые два г. р. μ и ν на группе X бесконечной размерности, не содержащей подгруппы, изоморфной T, либо взаимно абсолютно непрерывны, либо взаимно сингулярны.*

Доказательство. Мы ограничимся проведением доказательства лишь для компактной группы, т. е. будем считать, что $X = K$, $Y = D$. Пусть f и p те же, что в доказательстве теоремы 3.1. Как следует из доказательства леммы 1 в [8], если группа X не содержит подгруппы, изоморфной T, то замыкание $\overline{f\ (D)}$ (в топологии R_0^∞) совпадает с R_0^∞ (ср. с доказательством теоремы 2.2). Но тогда Ker $p = 0$, а это значит, что гомоморфизм p осуществляет взаимно однозначное соответствие между распределениями на R^∞ и распределениями на K, сосредоточенными на $p\ (R^\infty)$.

Легко видеть, что теорему достаточно доказать в предположении, что одно из г. р. симметрично. Поэтому предположим, что μ — симметричное г. р., а $\nu = v * \nu_1$, где $v \in K$, а ν_1 — симметричное г. р. Если существует такое $t \in R^\infty$, что $v = p\ (t)$, то, очевидно, $\mu = p\ (M)$, $\nu = p\ (N)$, где M и N — некоторые г. р. на R^∞. Как известно [9], любые два г. р. в пространстве R^∞ либо взаимно абсолютно непрерывны, либо взаимно сингулярны. В силу взаимной однозначности p, г. р. μ и ν поэтому также будут либо взаимно абсолютно непрерывны, либо взаимно сингулярны. Если же $v \notin p\ (R^\infty)$, то г. р. μ и ν сосредоточены на непересекающихся подмножествах $p\ (R^\infty)$ и $v + p\ (R^\infty)$ и поэтому взаимно сингулярны. Теорема 3.2 полностью доказана.

Замечание 3.1. Предположим, что μ и ν — симметричные г. р. на группе X бесконечной размерности, а M и N — такие г. р. на R^∞, что $\mu = p\ (M)$, $\nu = p\ (N)$. Если M и N взаимно абсолютно непрерывны, то μ и ν, очевидно, также взаимно абсолютно непрерывны. Однако, в отличие от групп конечной размерности, на группах бесконечной размерности может случиться так, что M и N взаимно сингулярны, а μ и ν взаимно абсолютно непрерывны (ср. с доказательством теоремы 2.2). Для того чтобы привести соответствующий пример, нам понадобится следующая теорема Какутани [10]:

Пусть $\{q_k\}$ и $\{q_k'\}$ — две последовательности распределений. Предположим, что для всех $k = 1, 2, \ldots$ распределения q_k и q'_k взаимно абсолютно *непрерывны. Тогда прямые произведения распределений*

$$q = \bigotimes_{k=1}^{\infty} q_k, \quad q' = \bigotimes_{k=1}^{\infty} q_k'$$

взаимно абсолютно непрерывны, если сходится произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty} \rho(q_k, q_k'), \quad \rho(q_k, q_k') = \int \sqrt{\frac{dq_k'}{dq_k}}\, dq_k$$

$\left(\frac{dq_k'}{dq_k}\right.$ *— производная Радона — Никодима*$\left.\right)$, *и взаимно сингулярны, если это произведение расходится.*

Пусть $X = T^\infty$, а г. р. μ и ν отвечают диагональные матрицы $A = \operatorname{diag}\{\alpha_k\}$, $B = \operatorname{diag}\{\beta_k\}$ (см. доказательство теоремы 3.1). Ясно, что

$$\mu = \bigotimes_{k=1}^{\infty} \mu_k, \quad \nu = \bigotimes_{k=1}^{\infty} \nu_k,$$

где μ_k и ν_k — г. р. на T с х. ф. $\hat{\mu}_k(n) = \exp\{-\alpha_k n^2\}$ и $\hat{\nu}_k(n) = \exp\{-\beta_k n^2\}$. Соответствующие г.р. μ и ν г.р. M и N на R^∞ также представимы в виде прямых произведений

$$M = \bigotimes_{k=1}^{\infty} M_k, \quad N = \bigotimes_{k=1}^{\infty} N_k,$$

где M_k и N_k — г. р. на R с х. ф. $\widehat{M}_k(s) = \exp\{-\alpha_k s^2\}$ и $\widehat{N}_k(s) = \exp\{-\beta_k s^2\}$.

Так как г. р. M_k и N_k имеют плотности

$$\frac{dM_k}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha_k}} \exp\left\{-\frac{t^2}{4\alpha_k}\right\} \quad \text{и} \quad \frac{dN_k}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{\pi\beta_k}} \exp\left\{-\frac{t^2}{4\beta_k}\right\},$$

то

$$\rho(M_k, N_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{dM_k}{dt}\cdot\frac{dN_k}{dt}}\, dt = \sqrt[4]{\frac{4\alpha_k\beta_k}{(\alpha_k+\beta_k)^2}}.$$

Поэтому по теореме Какутани г. р. M и N будут взаимно сингулярны, если расходится произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{4\alpha_k\beta_k}{(\alpha_k+\beta_k)^2}. \tag{3.6}$$

Рассмотрим теперь подробнее г. р. μ. Его х. ф. имеет вид

$$\hat{\mu}(n_1, \ldots, n_k, 0, \ldots) = \exp\{-(\alpha_1 n_1^2 + \ldots + \alpha_k n_k^2 + \ldots)\}.$$

Если последовательность $\{\alpha_k\}$ такова, что функция $\hat{\mu}(n_1, \ldots, n_k, 0, \ldots)$ суммируема на группе Z_0^∞, то, очевидно, г. р. μ имеет плотность (относительно меры Хаара m на T^∞), определяемую формулой

$$\frac{d\mu}{dm}(s) = \sum_{(n_1,\ldots,n_k,0,\ldots)\in Z_0^\infty} \exp\{-(\alpha_1 n_1^2 + \ldots + \alpha_k n_k^2 + \ldots) +$$

$$+ i(n_1 s_1 + \ldots + n_k s_k + \ldots)\} = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n_k=-\infty}^{\infty} \exp\{-\alpha_k n_k^2 + i n_k s_k\}, \quad (3.7)$$

где $s = (s_1, \ldots, s_k, \ldots) \in T^\infty$.

Из (3.7) легко следует, что если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \exp\{-\alpha_k\} \quad (3.8)$$

сходится, то непрерывная плотность $d\mu/dm\,(s_1, \ldots, s_k, \ldots)$ ни в одной точке T^∞ не обращается в нуль. Поэтому сходимость ряда (3.8) обеспечивает взаимную абсолютную непрерывность г. р. μ и распределения Хаара m. Аналогичное утверждение верно и для ν.

Положим теперь, например, $\alpha_k = k$, $\beta_k = k^2$. Тогда ряд (3.8) сходится и, следовательно, г.р. μ и ν взаимно абсолютно непрерывны, так как μ и ν в таком случае взаимно абсолютно непрерывны с m. С другой стороны, произведение (3.6) при таких α_k и β_k расходится. Значит, M и N взаимно сингулярны.

§ 4. Обсуждение результатов

4.1. Теоремы 2.1 и 3.1 утверждают, что любое симметричное г.р. на группе является гомоморфным образом г.р. в линейном пространстве. Это пространство конечномерно, если размерность группы конечна, и бесконечномерно в противном случае. Такая «линеаризация» г.р. не только позволяет ответить в некоторых случаях на естественные вопросы о г.р. на группе, например об их структуре (предложения 2.1 и 3.1), но также свести ряд задач о г.р. на группе к уже решенным задачам в линейном пространстве. Примерами могут служить теоремы 2.2 и 3.2, где взаимная абсолютная непрерывность или взаимная сингулярность г.р. на группе следует в конечном счете из соответствующих результатов о г.р. в линейном пространстве. Еще одним примером такого сведения может служить более простое, чем в [8] (но использующее некоторые результаты из [8]), доказательство обобщения классической теоремы Крамера о делителях * г.р. в R^n.

Для того чтобы любое г. р. на группе X имело только гауссовские делители, необходимо и достаточно, чтобы группа X не содержала подгруппы, изоморфной T.

Мы докажем достаточность (необходимость следует из одной теоремы Марцинкевича, см. ниже). Ограничимся случаем, когда $X = K$ — компактная группа бесконечной размерности, так как если размерность K конечна, то доказательство упрощается, а общий случай $X = R^n \times K$ легко сводится к рассматриваемому.

Пусть p то же, что и в доказательстве теоремы 3.1. Как уже было отмечено при доказательстве теоремы 3.2, из результатов [8] следует, что

* Распределение μ_1 называется *делителем* распределения μ, если существует такое распределение μ_2, что $\mu = \mu_1 * \mu_2$

если группа K не содержит подгруппы, изоморфной T, то $\operatorname{Ker} p = 0$. Воспользуемся теперь следующим утверждением.

Лемма 4.1 (принцип изоморфизма) (*см.* [8]). *Пусть G_1 и G_2 — топологические сепарабельные абелевы метрические группы и мономорфизм $p : G_1 \to G_2$ таков, что образы и прообразы борелевских множеств являются борелевскими. Тогда p осуществляет изоморфизм между полугруппой распределений (относительно свертки) на G_1 и полугруппой распределений на G_2, сосредоточенных на $p(G_1)$.*

Пусть μ — г.р. на K. При изучении делителей μ, не ограничивая общности, можно считать, что μ симметрично. Тогда по теореме 3.1 г. р. $\mu = p(M)$, где M — г.р. на R^∞. Используя теорему Крамера для R^n, легко проверить, что M имеет только гауссовские делители. Применяя лемму 4.1, получаем, что и μ имеет только гауссовские делители.

4.2. З а м е ч а н и е 4.1. «Линеаризация» симметричного г.р. на группе, приведенная в теоремах 2.1 и 3.1, не единственна. Можно указать другую линеаризацию, при которой матрица соответствующего г.р. M в линейном пространстве единичная. Ограничимся проведением рассуждения, считая, что $X = K$ — компактная группа бесконечной размерности.

Пусть гомоморфизм $f : D \to Q_0^\infty$ тот же, что и в теореме 3.1. Тогда х.ф. симметричного г.р. μ имеет вид

$$\hat{\mu}(d) = \exp\{-\langle Af(d), f(d)\rangle\} = \exp\left\{-\sum_{i,j=1}^{\infty} \alpha_{ij}\frac{k_i}{k}\frac{k_j}{k}\right\}.$$

Приводя полученную квадратичную форму к сумме квадратов, получим

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} \alpha_{ij}\frac{k_i}{k}\frac{k_j}{k} = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=i}^{\infty}\beta_{ij}\frac{k_j}{k}\right)^2.$$

Предположим для определенности, что квадратов оказалось бесконечное число, и определим гомоморфизм $f_1 : D \to R_0^\infty$ следующим образом:

$$f_1(d) = \left(\sum_{j=1}^{\infty}\beta_{1j}\frac{k_j}{k}, \ldots, \sum_{j=n}^{\infty}\beta_{nj}\frac{k_j}{k}, 0, \ldots\right)$$

(если квадратов конечное число l, то определяем гомоморфизм $f_1 : D \to (R^l)^*$). Пусть p_1 — двойственный к f_1 гомоморфизм из R^∞ в K. Рассмотрим на R^∞ г.р. с х.ф.

$$\widehat{M}(s) = \widehat{M}(s_1, \ldots, s_n, 0, \ldots) = \exp\{-(s_1^2 + \ldots + s_n^2 + \ldots)\}.$$

Так же, как и при доказательстве теоремы 3.1, сравнивая х.ф. г.р. μ и $p_1(M)$, убеждаемся, что $\mu = p_1(M)$. Гомоморфизм p_1 в этом случае оказывается зависящим от г.р. μ.

4.3. В [8] получено следующее обобщение теоремы Марцинкевича о существовании у произвольного г. р. на T негауссовского делителя: *для того чтобы любое г.р. μ, носитель которого совпадает с X, имело негауссовский делитель, необходимо и достаточно, чтобы группа X была изоморфна группе вида $R^n \times T$, $n \geqslant 0$.*

Достаточность легко следует из теоремы Марцинкевича. Мы же используем установленную в замечании 4.1 «линеаризацию» для более простого, чем в [8], доказательства необходимости. Будем считать, не ограничивая общности, что $X = K$ — компактная группа. Проверим, что если $K \not\approx T$, то на K существует г.р. μ, имеющее только гауссовские делители, носитель которого совпадает с K.

Предположим вначале, что группа K бесконечной размерности. Пусть отображение f то же, что и при доказательстве теоремы 3.1. Выберем независимое множество вещественных чисел $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ и рассмотрим г.р. на K с х.ф.

$$\hat{\mu}(d) = \exp\left\{-\left(\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j k_j/k\right)^2\right\}.$$

Гомоморфизм $f_1 : D \to (R)^*$, построенный в замечании 4.1, тогда имеет вид

$$f_1(d) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j k_j/k,$$

а $\mu = p_1(M)$, где M — г.р. на R с х.ф. $\widehat{M}(s) = \exp\{-s^2\}$. В силу независимости последовательности $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ имеем $\overline{f_1(D)} = (R)^*$. Отсюда $\operatorname{Ker} p_1 = 0$. Так как по теореме Крамера M имеет только гауссовские делители, то, применяя лемму 4.1, заключаем, что и μ имеет только гауссовские делители. Из независимости последовательности $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ следует также, что $\hat{\mu}(d) \neq 1$ при $d \neq 0$. Поэтому (см. [1], [2]) носитель μ совпадает с K.

Если группа K конечной размерности l, то в случае $l > 1$ рассуждение точно такое же. Достаточно рассмотреть конечное множество независимых чисел $\{\alpha_j\}_{j=1}^{l}$ и повторить доказательство, воспользовавшись отображением f из теоремы 2.1. В случае $l = 1$ для проверки равенства $\overline{f_1(D)} = (R)^*$ рассуждаем следующим образом. Так как $K \not\approx T$, то $D \not\approx Z$. Поэтому $f_1(D)$ — подгруппа в $(R)^*$, не изоморфная Z. Но любая подгруппа в $(R)^*$, не изоморфная Z, плотна в $(R)^*$, т. е. $\overline{f_1(D)} = (R)^*$.

4.4. Обсудим в заключение полученные результаты о структуре г.р. Из предложений 2.1 и 3.1 непосредственно следует

Теорема 4.1. *Пусть группа X не локально связна. Тогда любое г.р. на X сингулярно.*

Эта теорема полностью выясняет структуру г. р. на не локально связных группах. В связи с этим результатом отметим работу Зиберта [12], в которой доказано следующее утверждение: для того чтобы на группе X существовало абсолютно непрерывное г. р., необходимо и достаточно, чтобы группа X была локально связной.

Сделаем также еще несколько замечаний о локально связных группах. Если локально связная группа имеет конечную размерность, то она изоморфна группе вида $R^n \times T^m$ [4]. Структура г.р. на таких группах общеизвестна. Любое г.р. либо абсолютно непрерывно, либо сингулярно (этот факт может быть легко получен также и из теоремы 2.1).

Сложнее обстоит дело с локально связными группами бесконечной размерности. Если X — локально связная группа бесконечной размерности, то она изоморфна группе вида $R^n \times T^\infty$ [4]. Пусть μ — г.р. на такой группе, которому отвечает диагональная матрица A (см. доказательство теоремы 3.1). Тогда из теоремы Какутани непосредственно следует, что μ в таком случае либо абсолютно непрерывно, либо сингулярно. (Подробнее об этом см. в [12], [3]. В [12] имеются также некоторые другие результаты о г.р. на группе T^∞.) В случае же, когда матрица A произвольна, структура соответствующего г.р. на X остается невыясненной.

Подчеркнем теперь следующее обстоятельство. Как уже отмечалось, любое симметричное г.р. на произвольной группе X является гомоморфным образом г.р. в линейном пространстве B. При этом $p(B)$, в случае не локально связной группы, всегда является собственной подгруппой в X, что в конечном счете и обеспечивает сингулярность г.р. на таких группах. Если же группа X локально связна, то $p(B) = X$. Поэтому для установления абсолютной непрерывности или сингулярности г.р. на локально связных группах бесконечной размерности даже в простейшем случае, когда матрица A, отвечающая г.р., диагональна, приходится применять совершенно иные соображения, а именно, теорему Какутани. В связи с этим выяснение структуры произвольных г.р. на локально связной группе бесконечной размерности представляется весьма интересным.

З а м е ч а н и е 4.2. Так как на группе $X = R^n \times T^\infty$ легко указать г.р., взаимно абсолютно непрерывное с мерой Хаара m на X, то доказательство упомянутой в пп. 2.3. и 3.4 альтернативы для г.р. на X одновременно выяснило бы и структуру г.р. на этой группе. Любое г.р. было бы либо абсолютно непрерывным, либо сингулярным.

Поступила в редакцию
19.11.76

ЛИТЕРАТУРА

[1] **К. Р. Партасарати, Р. Ранга Рао, С. Р. С. Варадхан,** Распределения вероятностей на локально компактных абелевых группах, сб. перев. «Математика», 9, 2 (1965), 115—146.

[2] **В. В. Сазонов, В. Н. Тутубалин,** Распределения вероятностей на топологических группах, Теория вероятн. и ее примен., **XI**, 1 (1966), 3—55.

[3] **В. М. Золотарев, В. М. Круглов,** Структура безгранично делимых распределений на локально бикомпактной абелевой группе, Теория вероятн. и ее примен., XX, 4 (1975), 712—723.

[4] **Л. С. Понтрягин,** Непрерывные группы, М., изд-во «Наука», 1973.

[5] **Э. Хьюит, К. Росс,** Абстрактный гармонический анализ, т. I, М., изд-во «Наука», 1975.

[6] **Н. Бурбаки,** Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства, М., изд-во «Наука», 1969.

[7] **В. Феллер,** Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2, М., изд-во «Мир», 1967.

[8] **Г. М. Фельдман,** О разложении гауссовского распределения на группах, Теория вероятн. и ее примен., **XXII**, 1 (1977), 136—143.

[9] **Ю. А. Розанов,** Гауссовские бесконечномерные распределения, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, **CVIII**, 1968.

[10] **S. Kakutani**, On equivalence of infinite product measures, Ann. Math., 49, 1 (1948), 214—224.
[11] **Ю. В. Линник, И. В. Островский**, Разложения случайных величин и векторов, М., изд-во «Наука», 1972.
[12] **E. Siebert**, Einige Bemerkungen zu den Gauss—Verteilungen auf lokalkompakten abelschen Gruppen, Manuscr. math., **14**, 1 (1974), 41—55.
[13] **K. Urbanik**, Gaussian measures on locally compact Abelian topological groups, Studia Math., 19, 1 (1960), 77—88.
[14] **E. Siebert**, Stetige Halbgruppen von Wahrscheinlichkeitsmassen auf lokalkompakten maximal fastperiodischen Gruppen, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., **25**, 3 (1973), 269—300.
[15] **А. Л. Рухин**, Об одной теореме С. Н. Бернштейна, Матем. заметки, **6**, 3 (1969), 301—307.
[16] **H. Heyer, C. Rall**, Gaussche Wahrscheinlichkeitsmaße auf Corwinschen Gruppen, Math. Z., **128**, 4 (1972), 343—361.

ON GAUSSIAN DISTRIBUTIONS ON LOCALLY COMPACT ABELIAN GROUPS

G. M. FEL'DMAN (KHARKOV)

(*Summary*)

Let X be a connected locally compact separable metric Abelian group, μ be a symmetric Gaussian distribution (G. d.) on X. It is proved that if X is a group of finite dimension l, then there exist a continuous homomorphism $p: R^l \to X$ (independent of μ) and a G. d. M on R^l such that $\mu = p$ (M). If X is an infinite-dimensional group, then there exist a continuous homomorphism $p: R^\infty \to X$ (independent of μ) and a G. d. M on R^∞ such that $\mu = p$ (M); here R^∞ is the space of all real sequences with the topology determined by the coordinate convergence. By means of these results, the singularity of G. d.'s (with respect to the Haar measure) on not locally connected groups is proved. It is also proved that any two G. d.'s on finite-dimensional groups are either mutually absolutely continuous or singular. For infinite-dimensional groups an analogous result is established under the assumption that the group in question contains no subgroup isomorphic to the circle group T.
