

## Динамика и устойчивость солитонов в моделях синус-Гордон с сильной дисперсией

*М.М. Богдан, О.В. Чаркина*

Исследовано влияние сильной дисперсии на динамические свойства солитонов (кинков) в одномерных системах, близких к дискретным; показано, что типичными примерами кинков являются дислокации в модели Френкеля–Конторовой, флаксоны в джозефсоновских контактах и доменные границы в анизотропных магнетиках; в случае сильной дисперсии солитоны обладают характерной структурой с внутренними степенями свободы; аналитическое описание новых эффектов, обусловленных дисперсией, произведено в рамках уравнений синус-Гордон и двойной синус-Гордон с четвертой пространственно-временной производной, что позволяет точно найти весь спектр линейных возбуждений неподвижного кинка (этот подход состоит из дискретного набора частот внутренних мод и ограниченного сплошного спектра); показано аналитически и численно, что поступательное движение одиночного солитона в этих диспергирующих системах сопровождается возбуждением его внутренних мод, ведущим к возникновению бризерного состояния, а также генерацией регулярного или хаотического излучения; продемонстрировано, что взаимодействие двух быстрых солитонов может привести к образованию связанного солитонного комплекса, движущегося безызлучательно в сильно диспергирующей среде; численно изучены условия устойчивости и распада солитонных комплексов в диспергирующих системах синус-Гордон и двойной синус-Гордон.

### ВВЕДЕНИЕ

Особенности динамики одномерных нелинейных топологических солитонов в длинноволновом пределе подробно изучены [1, 2]. Типичными физическими примерами таких солитонных возбуждений являются дислокации в неидеальной решетке [3], флаксоны (кванты магнитного потока) в системах джозефсоновских контактов [4] и магнитные доменные стенки в анизотропных магнетиках [5]. Эти топологические солитоны описываются в длинноволновом пределе в рамках обычных уравнений синус-Гордон и двойной синус-Гордон (уравнения СГ и ДСГ) [1, 2, 5].

Дискретные варианты этих систем демонстрируют новые свойства, которые известны как эффекты дискретности [6–8]. Такие эффекты в дискретной системе синус-Гордон описываются уравнением [6]:

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial \tau^2} + 2u_n - u_{n-1} - u_{n+1} + \frac{1}{d^2} \sin u_n = 0, \quad (1)$$

где  $d$  – параметр дискретности.

Поскольку частоты линейных волн  $\omega$  сильно зависят от волнового вектора  $\mathbf{k}$ :

$$\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{d^{-2} + 2(1 - \cos \mathbf{k})}, \quad (2)$$

то такая дискретная модель естественно относится к классу сильно диспергирующих систем. Сильная пространственная дисперсия в решеточных системах может радикальным образом влиять на динамические свойства нелинейных топологических возбуждений. В сильно диспергирующей среде нелинейные волны могут обладать сложной внутренней структурой, которая проявляется в способности солитонов изменять эффективную ширину в ходе движения и при взаимодействии с другими солитонами. Это свойство является результатом наличия внутренних степеней свободы у дискретных солитонов, а следовательно, возможности возбуждения их внутренних мод осцилляций [9]. При этом может меняться сам характер взаимодействия солитонов, в частности, в определенной области параметров становится возможным притяжение между идентичными топологическими солитонами [10–13].

Обычно высшая дисперсия аналитически учитывается оставлением четвертой пространственной производной в разложении второй разности:

$$u_{n-1} + u_{n+1} - 2u_n \approx u_{xx} + \gamma u_{xxxx}, \quad (3)$$

где  $x = n/d$  и параметр  $\gamma = 1/12d^2$ .

Однако использование уравнения с четвертой пространственной производной ведет к искусственной неустойчивости состояния с  $u=0$  относительно возбуждения коротких волн. Чтобы избежать подобной неустойчивости в уравнениях, описывающих волны в гидродинамике, Буссинеск первым предложил использовать четвертую смешанную пространственно-временную производную вместо пространственной. Эта идея была применена к уравнениям СГ и ДСГ с сильной дисперсией в [12, 13]. Розенау [14] обосновал такую замену в теории решетки, и в настоящее время этот подход активно используется для аналитического описания эффектов дискретности [15,16].

В работе исследованы динамические свойства топологических солитонов и их связанных комплексов в рамках уравнений синус-Гордон и двойной синус-Гордон с четвертой пространственно-временной производной. Для этих уравнений мы находим точные решения, соответствующие неподвижному кинку и вобблеру, а также движущимся двухсолитонным комплексам. Далее получим явные выражения для частот внутренних мод кинка и вобблера в уравнениях СГ и ДСГ с дисперсией. В работе предложен анзац для описания взаимодействия коллективных мод кинка и излучения и показано аналитически и численно, как эти моды проявляют себя в динамике уединенного солитона. С помощью численного моделирования исследуется взаимодействие кинков и вобблеров в уравнениях с высшей дисперсией и находятся условия образования и устойчивости связанных двухсолитонных комплексов в этих сильно диспергирующих системах.

### УРАВНЕНИЯ СИНОС-ГОРДОН И ДВОЙНОЙ СИНОС-ГОРДОН С ВЫСШЕЙ ДИСПЕРСИЕЙ И ИХ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Прежде всего введем уравнение синус-Гордон с четвертой смешанной производной:

$$u_{tt} - u_{xx} - \beta u_{xxtt} + \sin u = 0, \quad (4)$$

и аналогичное уравнение для системы двойной синус-Гордон:

$$u_{tt} - u_{xx} - \beta u_{xxtt} + \sin u + 2H \sin(u/2) = 0. \quad (5)$$

Константу  $\beta$  в этих уравнениях назовем параметром дисперсии. Константа  $H$  в уравнении (5) имеет физический смысл магнитного поля для приложений, в которых переменная  $\phi = u/2$  соответствует азимутальному углу вектора намагниченности в легкой плоскости одномерного ферромагнетика. Законы дисперсии волн, описываемые линеаризованными уравнениями (4) и (5), имеют следующий вид:

$$\omega(k) = \sqrt{(1+k^2)/(1+\beta k^2)}, \quad (6)$$

$$\omega(k) = \sqrt{(1+H+k^2)/(1+\beta k^2)}. \quad (7)$$

Состояния обеих систем, отвечающие  $u = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ , являются устойчивыми относительно малых отклонений в противоположность таким же состояниям в уравнении с четвертой пространственной производной  $u_{xxxx}$  [13].

Особенностью спектров (6) и (7) является его ограниченность по частотам не только снизу, но и сверху. С увеличением параметра  $\beta$  спектральные зоны сжимаются. При  $\beta = 1$  спектр (6) полностью вырождается, сводясь к одной частоте  $\omega = 1$ . При  $\beta > 1$  этот спектр имеет максимум при  $k = 0$  и принимает форму, характерную для оптической ветви колебаний (например, двухатомной цепочки). Спектр (7) вырождается в одну частоту  $\omega = \sqrt{1+H}$  при  $H = (1-\beta)/\beta$ .

При  $\beta = 0$  уравнения (4) и (5) становятся лоренц-инвариантными. Решение для неподвижного кинка обычного уравнения СГ хорошо известно [1]:

$$u_{2\pi} = 4 \arctan \left( \exp \left( \frac{x-Vt}{\sqrt{1-V^2}} \right) \right). \quad (8)$$

Легко видеть, что неподвижный кинк с  $V = 0$  остается точным решением уравнения (4). Аналогично решение для неподвижного вобблера уравнения ДСГ [13]:

$$u_w = 4 \arctan(\exp(qx + R)) + 4 \arctan(\exp(qx - R)), \quad (9)$$

где  $q = \sqrt{1+H}$ ;  $\sin h(R) = 1/\sqrt{H}$  является точным решением для уравнения (5).

Однако для уравнения (5) было найдено решение, описывающее движущееся связанное состояние двух солитонов [12]:

$$u_{4\pi}(x) = 8 \operatorname{arctg} \left\{ \exp \left( \sqrt{\frac{2}{3} + H} \frac{x - V_0 t}{\sqrt{1 - V_0^2}} \right) \right\}. \quad (10)$$

Оно получило название солитонного комплекса и представляет собой волну стационарного профиля, которая распространяется безызлучательно в сильно диспергирующей среде. В этом решении скорость является заданной функцией параметров  $\beta$  и  $H$ :

$$V_0(\beta) = \sqrt{1 + \frac{\beta}{3} \left(1 + \frac{3}{2}H\right)^2} - \sqrt{\frac{\beta}{3} \left(1 + \frac{3}{2}H\right)}. \quad (11)$$

При  $H = 0$  выражения (10) и (11) переходят в точное решение для уравнения (4). Для волн стационарного профиля уравнение (4) сводится к следующему выражению:

$$u_{zz} + \alpha u_{zzzz} - \sin u = 0, \quad (12)$$

где параметр  $\alpha$ , определенный как

$$\alpha = \frac{\beta V^2}{(1 - V^2)^2}, \quad (13)$$

играет важную роль при качественном анализе динамики моделей с дисперсией. Очевидно, что для малых  $\beta$  и  $V$  динамические свойства этих моделей должны быть близкими к таковым для лоренц-инвариантных СГ-систем. Рассматривая  $\alpha$  как малый параметр и следуя формальной теории возмущений, для уравнения (9) легко получить в первом приближении «подправленное» выражение для формы кинка:

$$u_k(z) = u_{2\pi}(z) + \alpha \left( 3 \frac{\sin hz}{\cos h^2 z} - \frac{z}{\cos hz} \right) + \dots \quad (14)$$

Казалось бы, что асимптотический ряд может быть построен с произвольной точностью. Тем не менее ряд (14) не является сходящимся, и движущийся с постоянной скоростью  $2\pi$ -кинк, как точное решение, в уравнении (4) при  $\beta \neq 0$  отсутствует [11, 12]. Помимо точного решения, отвечающего солитонному комплексу, уравнение (12) и соответствующее уравнение для ДСГ-системы обладают другими решениями с граничными условиями 0 и  $4\pi$ . Эти конфигурации для «возбужденных» связанных состояний двух солитонов находятся численно, причем им соответствует дискретный набор значений скоростей [12, 13].

### СПЕКТРЫ ЛИНЕЙНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ КИНКА И ВОББЛЕРА В СИСТЕМАХ С ДИСПЕРСИЕЙ

Изучение динамических свойств солитонов начнем с нахождения точного спектра линейных возбуждений кинка (8) уравнения СГ с высшей дисперсией. Спектральная задача формулируется следующим образом [17]: будем искать решение уравнения (4) в виде

$$u(x, t) = u_{2\pi}(x) + \Delta u(x, t) = u_{2\pi}(x) + f(x) \exp(i\omega t), \quad (15)$$

где  $\Delta u(x, t)$  предполагается малым по сравнению с  $u_{2\pi}(x)$ . Линеаризованное уравнение для функции  $f(x)$  – это уравнение Шредингера с хорошо известным безотражательным потенциалом [18]:

$$\left\{ -(1-\beta\omega^2) \frac{d^2}{dx^2} + 1 - \frac{2}{\cosh^2 x} \right\} f(x) = \omega^2 f(x). \quad (16)$$

Полный спектр решений уравнения (16) легко находится, если воспользоваться результатами задачи на собственные значения, приведенной в [18]. Очевидно, что непрерывный спектр дается формулой (6). Дискретные значения частот внутренних мод могут быть найдены из уравнения для дискретных уровней:

$$\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2}{1-\beta\omega^2}} - \sqrt{\frac{1-\omega^2}{1-\beta\omega^2}} = n + \frac{1}{2}, \quad (17)$$

где  $n$  – целое число.

Нулевое значение  $\omega_0 = 0$  соответствует  $n = 0$  и, следовательно, функции основного состояния и описывает сдвиговую моду кинка. Число уровней возбужденных состояний определяется значением параметра  $\beta$ . С ростом  $\beta$  все внутренние моды последовательно отщепляются от нижнего края непрерывного спектра. Пороговое значение параметра  $\beta$  для  $n$ -й моды определяется так:

$$\beta_n = 1 - \frac{2}{n(n+1)}. \quad (18)$$

Выражения для частот всех внутренних мод кинка могут быть записаны в явном виде:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{\beta} \frac{\Delta_n^2 - 9}{\Delta_n^2 - 1}}, \quad \Delta_n(\beta) = \left( n + \frac{1}{2} \right) \left( 4\beta + \sqrt{(9-\beta)(1+\beta) \left( n + \frac{1}{2} \right)^{-2} - 8\beta(1-\beta)} \right) / (1+\beta). \quad (19)$$

Первая внутренняя мода при малых  $\beta$  отщепляется от сплошного спектра следующим образом:

$$\omega_1 \approx 1 - \frac{2}{9}\beta^2 - \frac{10}{81}\beta^3 + \dots \quad (20)$$

Это поведение хорошо согласуется с частотной зависимостью для дискретной системы синус-Гордон при больших значениях параметра дискретности  $d$  [9,15]. Заметим, что в случае полного вырождения непрерывного спектра  $\beta=1$  весь бесконечный ряд частот внутренних мод сводится к очень простому выражению:

$$\omega_n = \sqrt{1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)}}. \quad (21)$$

Для определения спектра внутренних мод статического вобблера в уравнении ДСГ необходимо решить линеаризованное уравнение

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} - \beta \phi_{txx} + W(x)\phi = 0, \quad (22)$$

где  $\phi = u - u_w$  и потенциал  $W(x) = \cos(u_w(x)) + H \cos(u_w(x)/2)$ .

После подстановки  $\phi = f(x) \exp(i\omega t)$  и явного выражения для вобблера (9) получим

$$\left\{ \frac{1-\beta\omega^2}{1+h} \cdot \frac{d^2}{dx^2} + 1 - \frac{8(1+h/4)}{1+hch^2qx} + \frac{8(h+1)}{(1+hch^2qx)^2} \right\} f(x) = \frac{\omega^2}{1+h} f(x). \quad (23)$$

В обычном уравнении ДСГ у вобблера существует одна внутренняя мода, частота которой является функцией параметра  $H$ . В уравнении ДСГ с высшей дисперсией существует целый набор частот внутренних мод, зависящих от двух параметров  $H$  и  $\beta$ . Найти весь спектр частот вобблера в этом случае можно только численно, и это – отдельная достаточно сложная задача. Вместе с тем приближенное ана-

литическое выражение для частоты первой внутренней моды можно получить, воспользовавшись вариационной оценкой для соответствующей собственной функции, выбрав ее в виде [13]

$$\phi_1(x) = \frac{\partial u_w(x)}{\partial H}. \quad (24)$$

В результате получаем уравнение для нахождения  $\omega$  :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_1 \left\{ -\left(1 - \beta\omega^2\right) \frac{d^2}{dx^2} + W(x) \right\} \phi_1 dx = \omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1^2 dx. \quad (25)$$

При малых значениях поля  $H$  для частоты внутренней моды находим в основном приближении:

$$\omega \approx \sqrt{2H / \left(1 + \frac{\beta}{3}\right)}. \quad (26)$$

Спектр колебаний СГ-кинка, движущегося в диспергирующей среде, определяется сложным линейаризованным уравнением, которое может быть проанализировано в случае малых скоростей  $V$  и значений параметра  $\beta$ . В такой среде движение кинка приводит к связанным осцилляциям его скорости и эффективной ширины. Даже в пределе слабой дисперсии кинк играет роль движущегося источника излучения и может возбуждать волны с длиной волны  $\lambda = 2\pi / k_0$ , где волновой вектор определяется из уравнения  $\omega(k_0) = Vk_0$  [19]. Чтобы описать этот эффект аналитически, было решено приближенно линейаризованное уравнение СГ для случая малой скорости и параметра дисперсии и получено выражение для кинка, излучающего волну в направлении, противоположном движению:

$$u_{kr}(z, t) = u_k(z) + a \cdot [1 - \tanh(z)] \cdot \sin(k_0(z - vt)). \quad (27)$$

Амплитуда волны в этом выражении предполагается малой, т.е.  $a \ll 1$ , а ее скорость  $v$  относительно кинка зависит от параметра  $\beta$ . В пределе  $\beta \rightarrow 1$  скорость излучения в лабораторной системе отсчета стремится к нулю. С ростом дисперсии влияние внутренних мод на динамику кинка становится все больше, а вклад состояний сплошного спектра уменьшается. Для того чтобы описать связывание внутренней и трансляционной моды и их взаимодействие с излучением, был использован анзац, обобщающий выражение (27):

$$u_{kr}(x, t) = 2 \arctan(\exp(\xi + R)) + 2 \arctan(\exp(\xi - R)) + a \cdot [1 - \tanh(\xi)] \cdot \sin(k(\xi - vt)), \quad (28)$$

в котором  $\xi = s(x - Vt)$  и параметры  $s(t)$ ,  $V(t)$ ,  $R(t)$ ,  $a(t)$ ,  $v(t)$  и  $k(t)$  предполагаются функциями, зависящими от времени. Это позволило исследовать качественно нестационарные режимы движения кинка, вобблера и двухсолитонных комплексов в диспергирующей среде. Оказалось, что в пределе сильной дисперсии влияние на динамические свойства солитонов возможности возбуждения их внутренних мод становится принципиальным обстоятельством. Предсказания теории были проверены численным моделированием динамики солитонов.

### ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ СОЛИТОНОВ

Особенности динамики кинков, вобблеров и солитонных комплексов в уравнениях СГ и ДСГ с высшей дисперсией были исследованы с помощью компьютерного моделирования. Для решения уравнений с четвертой пространственно-временной производной использовали разностную схему, которая обладает высокой устойчивостью и аналогична схеме, предложенной в [20]. В вычислениях шаг по времени выбирался равным  $\Delta t = 0,0001$  и шаг по координате, как правило, равным  $\Delta x = 0,02$ , при этом размер системы обычно брался равным  $L = N \cdot \Delta x$ , где  $N = 3000$ . В случаях, когда надо было исключить или минимизировать граничные эффекты, выбирали  $N = 6000$  и  $10000$ . Начальные условия выбирались в соот-

ветствии с выражениями (8)–(11) и (14). Типичными значениями параметра дисперсии были  $\beta = 1/12, 1/6$  и  $1$ , а начальные скорости  $V_{in}$  брались в интервале между  $0,1$  и  $0,9$ . Удобно было также определить характерный параметр  $\alpha_0$ , как значение параметра  $\alpha$ , в начальный момент времени, считая для этого в формуле (13)  $V$  равным  $V_{in}$ .

Полученные численные результаты сводятся к следующему. При очень маленьких значениях параметра  $\alpha_0 \leq 0,01$  динамические свойства одиночного кинка мало отличаются от свойств кинка в Лоренц-инвариантном уравнении синус-Гордон. Однако при увеличении скорости возникают новые эффекты, для понимания которых становятся важными детали движения кинка. Чтобы их описать, была рассчитана скорость центра масс кинка как производная координаты центра кинка по времени. Результат для  $\beta = 1/12$  и  $V_{in} = 0,5$  приведен на рис. 1.

Как видно, скорость периодически меняется со временем, очень медленно убывая по амплитуде. На заднем фронте кинка также есть слабые осцилляции, но нет излучения вперед, если скорость кинка не очень мала. Такая эволюция может быть описана в терминах комбинированной коллективной моды, описывающей связывание поступательного (с малыми колебаниями) движения и внутренних осцилляций кинка с квазилокальной частотой  $12/\pi^2$  [21], с учетом излучения как эффективной диссипации. При малых  $\beta$ , но достаточно больших значениях начальной скорости осциллирующий «хвост» кинка становится видимым, даже если стартовать с начального условия с улучшенным профилем кинка (14). Это сложное движение может быть описано обобщенным анзацем (28). Для этого достаточно положить  $R = 0$ , считать  $a(t)$  малой величиной и волновой вектор излучения определять из уравнения  $\omega(k_0) = V k_0$ .

Если параметр  $\beta$  не мал и скорость достаточно велика, то динамика кинка на первой стадии становится сильно нестационарной и диссипативной, как в дискретных системах [7]. При этом появляется новый канал потерь энергии благодаря возможности возбуждения бризера на заднем фронте кинка. Этот процесс показан на рис. 2, где показаны движущийся кинк и бризерная мода при  $\beta = 1/6$  и  $V_{in} = 0,86$ .

В то же время, когда параметр  $\alpha_0$  достаточно велик благодаря большой скорости, становится возможным образование связанных солитонных комплексов в СГ и ДСГ системах с дисперсией. Начиная изучение этого явления, прежде всего, убедившись, что точное решение (10) со скоростью (11) безусловно устойчиво относительно малых возмущений как в случае  $H = 0$ , так и в случае  $H \neq 0$ , и солитонный комплекс распространяется без всякого излучения.

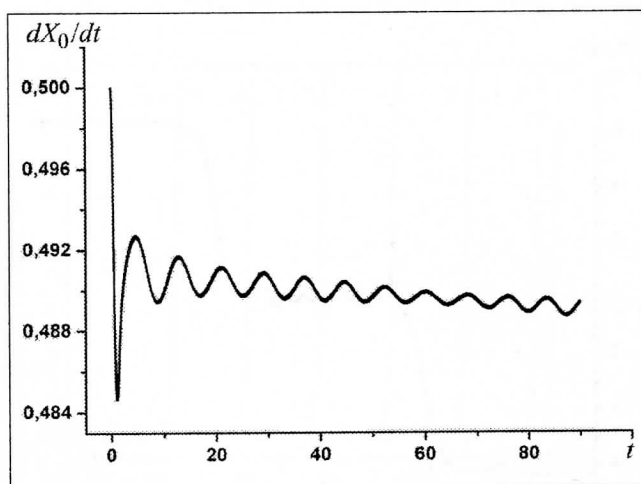


Рис. 1. Зависимость скорости центра масс кинка от функции времени

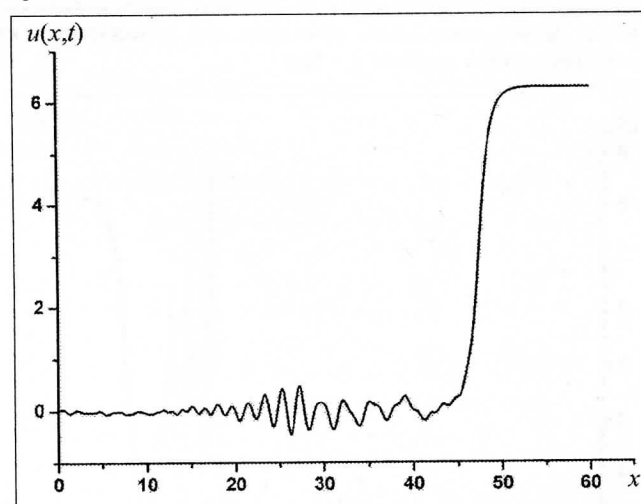


Рис. 2. Движущийся  $2\pi$ -кинк и бризер в момент времени  $t_1 = 70$

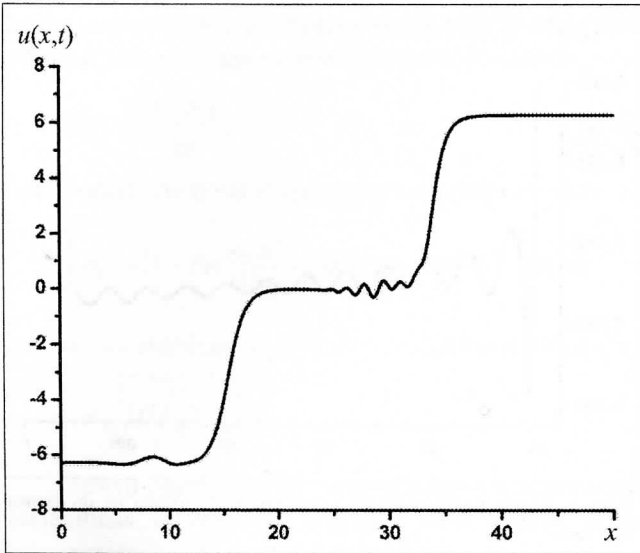


Рис. 3. Распад солитонного комплекса при малых скоростях движения (момент времени  $t_1 = 70$ )

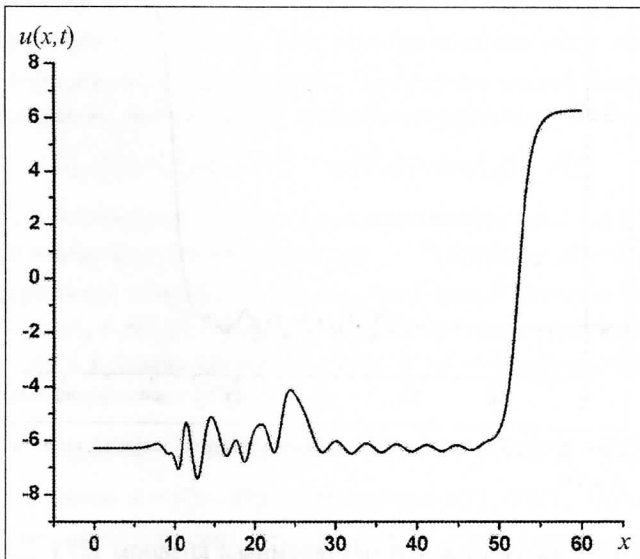


Рис. 4. Солитонный комплекс и бризерные моды при большом значении  $\alpha_0$  в момент времени  $t_1 = 70$

Если выбрать  $H = 0$  и начальный профиль в виде точного решения (10), но выбирать для скорости малые значения, тогда солитонный комплекс распадается взрывным образом, как это показано на рис. 3 для  $\beta = 1/12$  и  $V_{in} = 0,3$ .

Начальное положение комплекса было взято равным  $x = 20$ , но из-за сильного взаимного отталкивания разбегание кинков произошло в разные стороны со скоростями  $V_1 \approx -0,25$  и  $V_2 \approx 0,62$ .

Когда параметр  $\alpha$  велик, солитонный комплекс выживает в ходе эволюции, сбрасывая большую избыточную энергию через возбуждение внутренних мод, которые трансформируются в бризеры на нелинейной стадии. Этот случай показан на рис. 4 для  $\beta = 1$  и  $V_{in} = 0,86$ .

Также была исследована возможность реализации «возбужденных» состояний солитонных комплексов, которые предсказаны в работе [13]. Действительно, нашли такую ситуацию в случае слабой дисперсии для  $\beta = 1/12$  и  $V_{in} = 0,5$  [17]. Однако выяснилось, что это «возбужденное» состояние комплекса возникает на начальной стадии эволюции, но оказывается метастабильным и на больших временах диссоциирует на два кинка.

Было исследовано как характер взаимодействия между кинками зависит от разделяющего их расстояния и от скорости движения. Выявлено, что, как и предсказывалось теорией [13], на малых расстояниях (при  $R \leq 1$ ) между центрами масс быстро движущихся кинков имеет место притяжение. При больших расстояниях кинки отталкиваются при тех же значениях скоростей. Результаты численного моделирования для обоих случаев показаны на рис. 5 и 6. Например, солитонный комплекс диссоциирует при  $R = 2$  для  $\beta$

и  $V_{in}$ , взятых во всем вышеуказанном диапазоне. Последовательность профилей решения для типичного процесса распада комплекса показана на рис. 5 для  $\beta = 1/12$  и  $V_{in} = 0,85$ .

В противоположность этому, эволюция для начального расстояния  $R = 1$  ведет к образованию комплекса, например при  $\beta = 1$  и  $V_{in} = 0,6$  и  $\beta = 1/12$  и  $V_{in} = 0,9$  (рис. 6).

В этих случаях начальные скорости выбраны близкими к скорости стационарного движения  $V_0(\beta)$ , и запас избыточной кинетической энергии оказывается малым. В обратном случае возможна диссоциация комплекса. Такой распад «высокоэнергетического» солитонного комплекса происходит, например, при  $\beta = 1$  и  $V_{in} = 0,9$  (рис. 7).

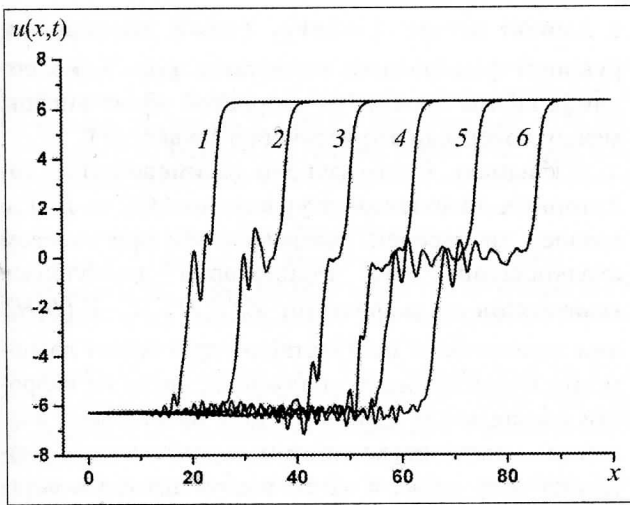


Рис. 5. Распад солитонного комплекса при  $\beta=1/12$ ,  $V_m = 0,85$  и  $R=2$  (каждая кривая с номером  $m$  соответствует моменту времени  $t_m = 20 \cdot m$ )

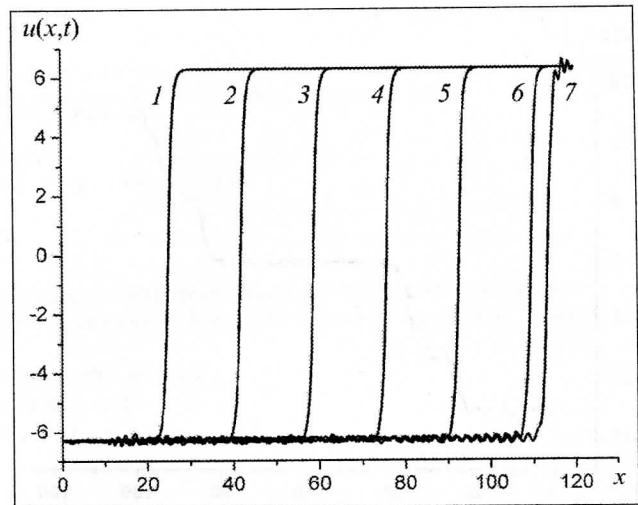


Рис. 6. Распространение устойчивого солитонного комплекса (каждая кривая с номером  $m$  соответствует моменту времени  $t_m = 20 \cdot m$ )

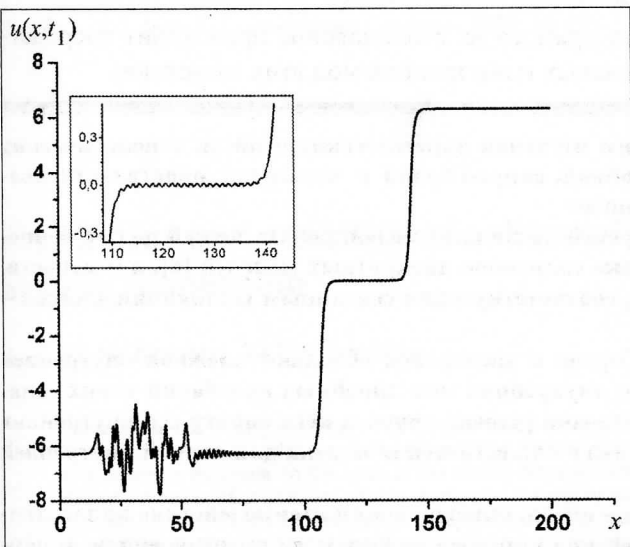


Рис. 7. Распад солитонного комплекса при больших значениях  $\alpha_0$  (первый кинк движется с постоянной скоростью  $V_{K1} = 0,152\dots$ : на вставке показана в увеличенном масштабе пространственная модуляция поля между кинками)

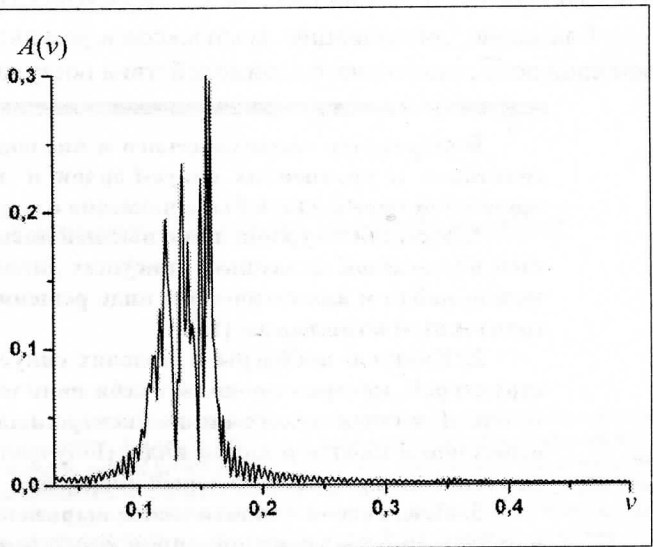


Рис. 8. Частотный спектр колебания в точке  $x = 30$  (начальное положение центра масс было выбрано равным  $x_0 = 10$ )

При этом обнаруживается целый ряд интересных явлений. Комплекс сбрасывает энергию в начальной стадии, оставляя в конечной области пространства локализованные бризерные моды, коллективные колебания которых характеризуются практически хаотическим спектром (рис. 8).

Далее комплекс распадается на два кинка, причем передний из них быстро выходит на движение с постоянной скоростью  $V_{K1} = 0,152\dots$ . Второй кинк движется почти стационарно с меньшей скоростью, стремящейся к  $V_{K2} \approx 0,127$ . Чтобы убедиться в существовании стационарно движущегося  $2\pi$ -кинка со скоростью  $V_{K1}$ , было проведено моделирование динамики уединенного кинка. Найдено, что решение состоит из движущегося кинка и статического модулированного в пространстве фона на заднем фронте



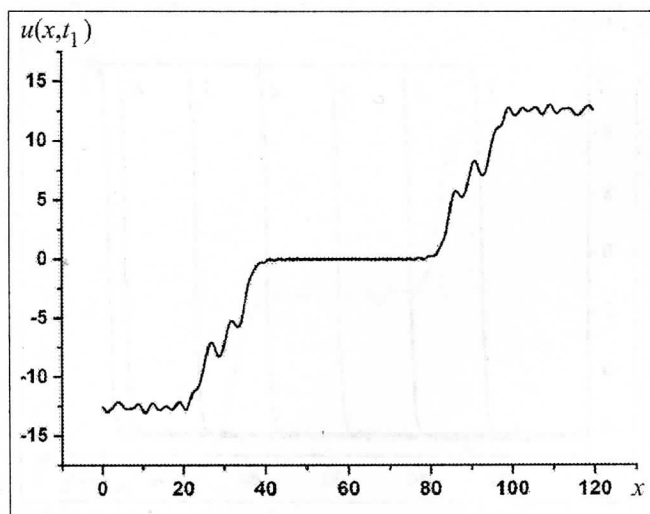


Рис. 9. Столкновение и распад солитонных комплексов в уравнении ДСГ с высшей дисперсией.

для уравнения ДСГ с параметрами  $H = 0,01$  и  $\beta = 1/12$ .

Как видно, диссоциация комплексов в результате прямого их столкновения происходит посредством сложного резонансного взаимодействия поступательных и внутренних мод этих солитонов.

с длиной волны  $\lambda = 2\pi V_{K1}$  (такой же осциллирующий фон показан на вставке рис. 7, но его длина волны зависит от скоростей обоих кинков, между которыми это излучение захвачено).

Наконец, было изучено взаимодействие солитонных комплексов в уравнениях СГ и ДСГ с высшей дисперсией. Оказалось, что при лобовом столкновении двух стационарно движущихся комплексов со скоростями  $V_0(\beta, H)$  и  $-V_0(\beta, H)$  они практически не чувствуют друг друга до момента максимального сближения, когда их скорости обращаются в ноль. В ходе дальнейшей эволюции между расходящимися комплексами возникает излучение, а затем возбуждаются и внутренние степени свободы. После отражения от границ и при повторном сближении солитонные комплексы выглядят так, как показано на рис. 9

В результате аналитического и численного изучения динамических свойств топологических солитонов в уравнениях синус-Гордон и двойной синус-Гордон с четвертой пространственно-временной производной было показано следующее:

1. Указанные уравнения с высшей дисперсией позволяют моделировать целый ряд особенностей нелинейной динамики, присущих динамике солитонов дискретных моделей [6], в частности, можно найти в аналитическом виде решения, соответствующие связанным состояниям кинков – солитонным комплексам [13].

2. Кинки и вобблеры в моделях синус-Гордон с дисперсией обладают сложной внутренней структурой, которая проявляется наличием внутренних мод линейных колебаний таких солитонов. Для статического кинка спектральная задача решена точно и весь спектр его внутренних осцилляций найден в явном виде. Получена также аналитическая оценка для первой внутренней моды воблера с учетом высшей дисперсии.

3. Предложено аналитическое выражение – анзац, описывающий взаимодействие коллективных координат – трансляционной и внутренней мод кинка с генерируемым им излучением. В рамках такого приближения качественно и количественно описаны динамика кинков при малых скоростях движения в слабо диспергирующей среде.

4. С помощью компьютерного моделирования подробно исследовано распространение кинков и солитонных комплексов в моделях синус-Гордон с сильной дисперсией. Выяснены условия образования двухсолитонного комплекса благодаря притяжению между кинками на малых расстояниях и показана его устойчивость в малом. Изучены механизмы распада солитонных комплексов, включающие резонансное возбуждение внутренних мод и последующую их трансформацию в нелинейные бризерные моды. Последние являются первоочередным каналом потерь энергии солитонным комплексом в условиях сильной дисперсии. Продемонстрирована неустойчивость комплексов при взаимных столкновениях в уравнениях синус-Гордон и двойной синус-Гордон с четвертой пространственно-временной производной.

5. Полученные результаты могут быть использованы для объяснения и описания новых эффектов в динамике топологических солитонов в сильно диспергирующих средах, в частности, дислокаций в неидеальной решетке, флаксонов в системах джозефсоновских контактов и магнитных доменных стенок в анизотропных магнетиках.

## Литература

1. Захаров В.Е., Мананков С.В., Новиков С.П., Потаевский Л.П. Теория солитонов: метод обратной задачи. – М.: Наука, 1980.
2. Косевич А.М., Ковалев А.С. Введение в нелинейную физическую механику. – Киев: Наукова думка, 1989.
3. Fytzannis N., Crowley S., Celli V. – Phys. Rev. Lett., 1977, 39, 891.
4. Ustinov A.V., Malomed B.A., Sakai S. – Phys. Rev., 1998, B 57, 11691.
5. Kosevich A.M., Ivanov B.A., Kovalev A.S. – Magnetic Solitons. Phys. Rep., 1990, 194, 118.
6. Peyrard M., Kruskal M.D. – Physica D, 1984, 14, 88.
7. Peyrard M. – Physica D, 1998, 123, 403.
8. Dinda P. T., Willis C.R. – Phys. Rev. E, 1995, 51, 4958.
9. Bogdan M.M., Kosevich A.M., Voronov V.P. In: Solitons and Applications. – Singapore: World Scientific, 1990, pp. 231–243.
10. Bogdan M.M., Kosevich A.M. In: Nonlinear Coherent Structures in Physics and Biology. – New York: Plenum Press., 1994, NATO ASI Series B: Physics., vol. 329, pp. 373–376.
11. Bogdan M.M., Kosevich A.M. – Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math., 1997, 46, 14.
12. Bogdan M.M., Kosevich A.M., Maugin G.A. – Cond. Matt. Phys., 1999, 2, 255.
13. Bogdan M.M., Kosevich A.M., Maugin G.A. – Wave Motion, 2001, 34, 1.
14. Rosenau P. – Phys. Rev. B, 1987, 36, 5868.
15. Kevrekidis P.G., Jones C.K.R.T. – Phys. Rev. E 61, 2002, 3114.
16. Kevrekidis P.G., Kevrekidis I.G., Bishop A.R., and Titi E.S. – Phys. Rev. E 65, 2002, 046613–1.
17. Charkina O.V., Bogdan M.M. – Uzhgorod Univ. Sci. Herald. Series Physics, 2005, 17, 30.
18. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. – М.: Наука, 1989.
19. Champneys A.R., Malomed B.A., Yang J., and Kaup D.J. – Physica D, 2001, 152–153, 340.
20. Alftimov G.L., Eleonskii V.M., Kulagin N.E., and Mitskevich N.N. – Chaos, 1993, 3, 405.
21. Rice M.J., Mele E.J. – Solid State Commun., 1980, 35, 487.

## Dynamics and stability of solitons in the sine-Gordon models with a strong dispersion

*M.M. Bogdan, O.V. Charkina*

Influence of the strong dispersion on dynamic properties of solitons (kinks) is investigated in one-dimensional near-discrete systems. Typical examples of kinks are dislocations in the Frenkel-Kontorova model, fluxons in the long Josephson junctions and domain walls in anisotropic magnets. In the case of the strong dispersion the solitons exhibit an intrinsic structure with internal degrees of freedom. Analytical description of novel effects caused by the dispersion is performed in the framework of the sine-Gordon and the double sine-Gordon equations with a fourth-order spatio-temporal derivative. This approach allows to find exactly a total spectrum of linear excitations of the static kink. It consists of a discrete set of frequencies of internal modes and a bounded spectrum of continuum waves. It is shown analytically and numerically that a translational motion of a single soliton in the dispersive systems is accompanied by exciting its internal modes leading to creation of the breather state, and by generation of the regular or chaotic radiation. It is demonstrated that interaction of two fast solitons can lead to a formation of the bound soliton complex which moves radiationlessly in the highly dispersive medium. Conditions of stability and dissociation of the soliton complexes are studied numerically in the dispersive sine-Gordon and double sine-Gordon systems.