

# Локализованные возбуждения и рассеяние спиновых волн в ферромагнитных цепочках, содержащих магнитные нанокластеры

О.В. Чаркина, М.М. Богдан

*Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины  
пр. Науки, 47, г. Харьков, 61103, Украина  
E-mail: charkina@ilt.kharkov.ua, bogdan@ilt.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 2 марта 2018 г., опубликована онлайн 28 мая 2018 г.

Точно найден спектр локализованных возбуждений в анизотропном одномерном ферромагнетике, содержащем спиновый кластер произвольного размера, в рамках дискретной модели Такено–Хомма. Определены границы устойчивости спиновых нанокластеров в зависимости от их размеров, параметров обмена и анизотропии ферромагнетика. Решена задача рассеяния спиновых волн на нанокластере и получены явные аналитические выражения для их коэффициентов отражения и прохождения. Предложена модель метаматериала, состоящего из слабовзаимодействующих магнитных молекулярных нанокластеров, обладающая найденными динамическими свойствами.

Точно знайдено спектр локалізованих збуджень в анізотропному одновимірному ферромагнетіку, що містить спіновий кластер довільного розміру, в рамках дискретної моделі Такено–Хомма. Визначено межі стійкості спинових нанокластерів в залежності від їх розмірів і параметрів обміну та анізотропії ферромагнетика. Розв'язано задачу розсіювання спинових хвиль на нанокластері і отримано явні аналітичні вирази для їхніх коефіцієнтів відбиття та проходження. Запропоновано модель метаматеріала, що складається з слабковзаємодіючих магнітних молекулярних нанокластерів, яка має знайдені динамічні властивості.

PACS: 75.10.Pq Спиновые цепочечные модели;  
75.60.Ch Доменные стенки и доменная структура;  
36.40.Cg Электронные и магнитные свойства кластеров;  
05.45.Yv Солитоны.

Ключевые слова: квазиодномерный ферромагнетик, спиновый кластер, уравнение Такено-Хомма, локализованные возбуждения, рассеяние спиновых волн.

## 1. Введение

Нанокластерные магнитные структуры в квазиодномерных изинговских ферромагнетиках были обнаружены более полувека назад в экспериментах по резонансному поглощению высокочастотного электромагнитного поля. Это явление получило название спин-кластерного резонанса [1]. Спиновый кластер представляет собой нанодомен, состоящий из нескольких спинов, ориентированных противоположно направлению спинов матрицы. В квазиодномерных ферромагнетиках он ограничен двумя изинговскими доменными границами, поэтому энергия нанокластера не зависит от его размера. Существование подобных магнитных наноструктур возможно и в системах, которые моделируются гейзенберговски-

ми спиновыми цепочками с близкими по величине обменным взаимодействием и легкоосной магнитной анизотропией [2,3]. Квазиодномерными ферромагнетиками, обладающими такими свойствами при низких температурах, являются металлоорганические соединения типа TMNB, TMNC, TMANC и FeTAC [4–6]. О существовании дискретных доменных границ изинговского типа в таких кристаллах свидетельствуют магниторезонансные эксперименты по обнаружению внутренних мод колебаний, демонстрирующие наличие локальных пиков поглощения при частотах, меньших края спектра спиновых волн [5].

В последние годы был синтезирован целый класс новых магнитных нанообъектов [7], так называемых «магнитных молекул», обладающих суммарным спи-

ном порядка десятка магнетонов Бора. Такие молекулярные нанокластеры состоят из чередующихся магнитных ионов и радикалов, спины которых неодинаковы, и поэтому в основном состоянии они являются ферримагнетиками [8]. При низких температурах эти нанокластеры образуют молекулярный кристалл, в котором моменты «молекул» слабо взаимодействуют друг с другом. Расположив в кристалле регулярным образом в виде цепочек такие «магнитные молекулы», разделенные немагнитными органическими структурами, можно получить квазиодномерный метаматериал с заданным периодом структуры и, соответственно, с заданным параметром взаимодействия между классическими спинами, которое может быть как одного порядка, так и много меньше константы одноионной анизотропии. В таком метаматериале спиновые кластеры, образованные «магнитными молекулами», являются фактически мезоскопическими объектами. Очевидно, что существенно более простое управление их магнитной ориентацией с помощью локальных полей, чем ориентацией отдельных спинов, делает эти структуры очень привлекательными с точки зрения использования их в качестве базовых элементов памяти в новых компьютерных технологиях.

В этой связи важным обстоятельством является то, что от числа спинов в кластере существенно зависит его устойчивость и, в целом, магниторезонансные свойства содержащего его квазиодномерного ферромагнетика. Поэтому представляет безусловный интерес теоретическое исследование спектра слабых возбуждений анизотропных гейзенберговских цепочек, содержащих спиновые нанокластеры. Основной целью данной работы является исследование эффектов дискретности, обусловленных полным учетом обменного взаимодействия в уравнениях движения сильно анизотропного ферромагнетика. Описание динамики проводится в рамках уравнения Такено–Хомма [9] для азимутальных углов узельных спинов, к которому сводятся дискретные уравнения Ландау–Лифшица для ферромагнетика с анизотропной легкой плоскостью и обменом, близким к константе анизотропии наиболее легкой оси [10]. Для такой системы в работе рассмотрены точные решения, описывающие нанокластеры, и проанализирована структура всего спектра их малых возбуждений. Точно найден спектр локализованных возбуждений ферромагнетика, содержащего нанокластеры, и установлены границы их устойчивости. Показано, что неустойчивость ведет или к разрушению нанокластеров, или к их превращению в магнитные домены, ограниченные неколлинеарными доменными границами. Для анализа особенностей динамики волн сплошного спектра точно решена задача рассеяния спиновых волн на кластерах произвольного размера и получены явные выражения для их коэффициентов отражения и прохождения.

Отметим, что частоты локальных колебаний нанокластеров рассчитаны аналитически методом локальных возмущений И.М. Лифшица [11]. Одной из первых работ, в которых этот метод использован для нахождения спектра локализованных возбуждений нелинейных систем, содержащих дискретные доменные границы, была работа А.М. Косевича и его учеников [12]. Арнольд Маркович был автором многих идей, которые легли в основу физической теории солитонов. В частности, такой была идея о самолокализации нелинейных колебаний [13], которые в сильно дискретном случае представляют собой неоднородности, подобные локальным искажениям в кристалле. Поэтому при исследовании влияния дискретных солитонов на динамику кристалла оказывается возможным применение методов теории дефектов. Используя подходы, развитые А.М. Косевичем, мы с глубокой благодарностью вспоминаем нашего учителя, и в год 90-летия Арнольда Марковича посвящаем его памяти эту работу.

## 2. Модель Такено–Хомма для анизотропного ферромагнетика

Классическая гейзенберговская модель ферромагнитной цепочки с двухосной одноионной анизотропией неоднократно использовалась для интерпретации результатов экспериментов [4–6] и описания нелинейных эффектов в теории магнетизма [14]. Гамильтониан этой модели имеет вид

$$\mathbf{H} = -J \sum_n \mathbf{S}_n \mathbf{S}_{n+1} + \frac{1}{2} \sum_n \left( D(S_n^z)^2 - A(S_n^x)^2 \right), \quad (1)$$

где  $\mathbf{S}_n$  — классический спин на узле с номером  $n$ ,  $J$  — константа обменного взаимодействия,  $A$  и  $D$  — соответственно константы легкоосной и легкоплоскостной анизотропии. В легкоосном ферромагнетике, т.е. при  $D = 0$ , дискретные коллинеарные  $180^\circ$  доменные границы и спектр их локализованных колебаний исследовались в [3]. Было найдено критическое значение обмена  $J_0 = 0.75A$ , при котором происходит потеря устойчивости дискретной границей изинговского типа. Также были рассчитаны зависимости частот внутренних мод колебаний доменных границ от величины обменного взаимодействия. В случае сильной легкоплоскостной анизотропии  $D \gg A$ , когда предполагается возможность только слабого выхода вектора  $\mathbf{S}_n$  из легкой плоскости, гамильтониан (1) может быть приближенно сведен (см., например, [10]) к гамильтониану модели Такено–Хомма [9]:

$$H = \frac{\hbar^2}{2DS_0^2} \sum_{n=1}^N \dot{\varphi}_n^2 - J \sum_{n=1}^N \cos(\varphi_n - \varphi_{n-1}) - \frac{1}{2} A \sum_{n=1}^N \cos^2(\varphi_n). \quad (2)$$

Такая модель описывается одной независимой скалярной переменной — азимутальным углом  $\varphi_n$  узельного спина  $\mathbf{S}_n$ . В записи гамильтониана точка означает дифференцирование по времени,  $S_0$  — величина спина. В общем случае модель Такено–Хомма учитывает и зеемановский вклад внешнего магнитного поля. Однако в этой работе мы ограничимся случаем отсутствия поля. Тогда уравнение движения Лагранжа, отвечающее модели (2), в безразмерном виде может быть представлено следующим образом:

$$\frac{d^2\varphi_n}{dt^2} + \lambda(\sin(\varphi_n - \varphi_{n-1}) - \sin(\varphi_{n+1} - \varphi_n)) + \cos(\varphi_n)\sin(\varphi_n) = 0. \quad (3)$$

Оно записано посредством введения безразмерного параметра обмена  $\lambda = J/A$  и единицы измерения времени  $t_0 = \hbar/(S_0\sqrt{DA})$ . Это уравнение Такено–Хомма (УТХ) в терминологии авторов носит название  $\pi$ -синус-решеточного уравнения [9], подчеркивая существование в нем  $\pi$ -солитонов —  $180^\circ$ -градусных доменных границ. Уравнение (3) исследовалось его авторами с точки зрения близости к интегрируемым уравнениям. Изучение динамики его нелинейных возмущений с помощью аналитического метода и численного моделирования при немалых значениях параметра  $\lambda \geq 1$  показало, что поведение солитонов и антисолитонов (доменных границ разного знака) при столкновениях в УТХ подобно таковому в точно решаемых моделях [9]. При больших обменах ( $\lambda \gg 1$ ) для сохранения одинакового порядка величин во всех слагаемых в УТХ следует заменить разность синусов разностью их аргументов, т.е. второй разностью. В этом случае уравнение (3) становится дискретным уравнением синус-Гордон (ДУСГ):

$$\frac{d^2\varphi_n}{dt^2} + \lambda(2\varphi_n - \varphi_{n-1} - \varphi_{n+1}) + \sin(\varphi_n)\cos(\varphi_n) = 0. \quad (4)$$

Дальнейшее увеличение параметра  $\lambda$  позволяет перейти к длинноволновому пределу и получить точно интегрируемое континуальное уравнение синус-Гордон:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \sin\varphi\cos\varphi = 0, \quad (5)$$

в котором введена непрерывная координата  $z = n/\sqrt{\lambda}$ .

Отмеченным С. Такено и С. Хомма преимуществом уравнения (3) над уравнением (4) является полный учет обменного взаимодействия, которое приводит к наличию точных статических решений УТХ. Они соответствуют спиновым кластерам, ограниченным изинговскими границами. Для кластера в бесконечной цепочке, заключенного между узлами  $j$  и  $l$ , распределение азимутального угла имеет вид

$$\varphi_n^0 = 0 \quad n < j; \quad \varphi_n^0 = \pi \quad j \leq n \leq l; \quad \varphi_n^0 = 0, 2\pi \quad n > l. \quad (6)$$

Выбор нулевого значения при  $n \rightarrow \infty$  представляется естественным для кластера, а выбор значения азимутального угла, равного  $2\pi$ , отвечает решению в виде  $360^\circ$  доменной границы. Для магнитных приложений оба распределения в (6) полностью эквивалентны, поскольку все спины вне кластера находятся в одном основном состоянии. Но для других физических систем, описываемых УТХ, оно может означать нахождение частиц в различных вакуумных состояниях. Тогда первая конфигурация соответствует солитон–антисолитонной паре, а вторая — последовательности из двух одинаковых дискретных солитонов. Как показано ниже, в случае потери устойчивости структурами (6), вырождение между ними снимается и в ферромагнетике (2), поскольку бифуркационным образом возникают неколлинеарные распределения спинов, которые отличаются друг от друга и обладают разными динамическими свойствами.

Очевидно, что энергия ферромагнетика (1) с кластером (6), отсчитанная от основного состояния, равна сумме энергий двух изинговских границ и не зависит от размера кластера  $E = 4JS_0^2$ . Заметим, что такие точные коллинеарные решения отсутствуют в ДУСГ (4) и уравнении синус-Гордон (5).

В работе [10] в рамках уравнения Такено–Хомма (3) изучались устойчивость и спектр малых колебаний  $180^\circ$  коллинеарных и неколлинеарных доменных границ и кластера, состоящего из одного спина. В данной работе исследуется устойчивость и спектр возбуждений кластеров (6) произвольного размера. Результаты работы [10] отвечают двум предельным случаям решения этой спектральной проблемы — для кластера бесконечного размера с фактически уединенными доменными границами и для кластера минимального размера. В следующем разделе задача о локализованных колебаниях спинового кластера УТХ произвольного размера полностью решена аналитически.

### 3. Спектральная задача для колебательных мод спиновых кластеров

Малые колебания нанокластеров описываются уравнением (3), линеаризованным вблизи решения (6). Предполагая, что добавки к кластерному решению  $\Delta\varphi_n(t) = \varphi_n(t) - \varphi_n^0 \ll 1$  и выделяя явную зависимость от времени  $\Delta\varphi_n(t) = \psi_n \exp(i\omega t)$ , приходим к следующей системе алгебраических уравнений для амплитуд  $\psi_n$ :

$$\lambda[(\psi_n - \psi_{n-1})\cos(\varphi_n^0 - \varphi_{n-1}^0) - (\psi_{n+1} - \psi_n)\cos(\varphi_{n+1}^0 - \varphi_n^0)] + \cos(2\varphi_n^0)\psi_n = \omega^2\psi_n. \quad (7)$$

Эта система уравнений представляет собой задачу на собственные значения для параметра квадрата частоты  $\varepsilon = \omega^2$ . Положительные значения  $\varepsilon$  отвечают колебательным модам, а отрицательные  $\varepsilon = -v^2$  соответ-

ствуют модам неустойчивости, приводящим к экспоненциальному росту добавок  $\Delta\varphi_n(t) = \psi_n \exp(\nu t)$ .

Подставим распределение углов (6) в уравнение (7). Разделив его на  $\lambda$  и введя обозначение

$$\beta = (1 - \omega^2)/\lambda, \quad (8)$$

получим спектральную задачу на собственные значения параметра  $\beta$ . Соответствующую систему алгебраических уравнений можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} 2\psi_n - \psi_{n-1} - \psi_{n+1} + \beta\psi_n = \\ = 2\left((\delta_{n,j-1} + \delta_{n,j} + \delta_{n,l} + \delta_{n,l+1})\psi_n - \right. \\ \left. - (\delta_{n,j} + \delta_{n,l+1})\psi_{n-1} - (\delta_{n,j-1} + \delta_{n,l})\psi_{n+1}\right), \end{aligned} \quad (9)$$

где индексы  $l$ , как следует из решения (6), отвечают граничным номерам спинов в кластере. Из формул (8) и (9) следует, что квадраты частот всех мод линейно зависят от параметра  $\lambda$ :

$$\omega^2 = 1 - \beta\lambda, \quad (10)$$

где множители  $\beta$ , как собственные значения спектральной задачи (9), зависят только от полного числа спинов в системе  $N$  и числа спинов в кластере  $m = l - j + 1$ . Очевидно, что локализованным колебаниям отвечают положительные  $\beta$  и соответственно  $\omega^2 < 1$ , а делокализованным колебаниям — отрицательные значения  $\beta \equiv -\mu < 0$  и  $\omega^2 \geq 1$ . Волны сплошного спектра в пределе, когда число спинов  $N$  стремится к бесконечности, при  $n \rightarrow \infty$  описываются асимптотикой  $\psi_n \propto \exp(ikn)$ . Тогда из уравнения (9), взятого в области вдали от кластера, следует связь между параметром  $\mu$  и квазиволновым вектором  $k$ , и, соответственно, стандартное выражение для закона дисперсии спиновых волн:

$$\mu(k) = 4\sin^2 \frac{k}{2}, \quad \omega^2(k) = 1 + 4\lambda \sin^2 \frac{k}{2}. \quad (11)$$

Приведенная в (9) форма уравнения спектральной задачи удобна для применения метода локальных возмущений И.М. Лифшица [11]. Воспользуемся им для нахождения частот, отвечающих внутренним модам колебаний спинового кластера. Прежде всего, установим связь между параметром  $\beta$  и декрементом убывания амплитуд внутренних мод  $\kappa$ , которые при  $n \rightarrow \infty$  убывают как  $\psi_n \propto \exp(-\kappa n)$ . Подставим эту асимптотику для  $\psi_n$  в уравнение (9) в области значений  $n \gg l, j$ , когда его правая часть обращается в нуль, и получим

$$\beta = 4\text{sh}^2 \frac{\kappa}{2} \quad (12)$$

Применим к уравнению (9) преобразование Фурье [11]:

$$\Psi_k = \sum_n \psi_n \exp(-ikn), \quad \psi_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_k \exp(ikn) dk. \quad (13)$$

Тогда для переменной  $\Psi_k$  получим выражение

$$\begin{aligned} \Psi_k = \frac{2}{\beta + 2(1 - \cos k)} \left( (1 - \exp(ik))(\psi_j - \psi_{j-1}) \times \right. \\ \left. \times \exp(-ikj) + (1 - \exp(-ik))(\psi_l - \psi_{l+1}) \exp(-ikl) \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Применяя обратное преобразование, приходим к системе четырех линейных алгебраических уравнений Лифшица для амплитуд  $\psi_{j-1}, \psi_j, \psi_l, \psi_{l+1}$ :

$$\begin{aligned} (1 - I_0)\psi_{j-1} + I_0\psi_j - I_{m+1}\psi_l + I_{m+1}\psi_{l+1} = 0, \\ I_0^*\psi_{j-1} + (1 - I_0^*)\psi_j - I_m\psi_l + I_m\psi_{l+1} = 0, \\ I_m^*\psi_{j-1} - I_m^*\psi_j + (1 - I_0)\psi_l + I_0\psi_{l+1} = 0, \\ I_{m+1}^*\psi_{j-1} - I_{m+1}^*\psi_j + I_0^*\psi_l + (1 - I_0^*)\psi_{l+1} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Коэффициенты-интегралы  $I_\gamma$ , где  $\gamma = 0, m, m+1$ , определяются формулой

$$I_\gamma = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \exp(-ik)}{\beta + 2(1 - \cos k)} \exp(-ik\gamma) dk. \quad (16)$$

Условие разрешимости системы (15) является равенство нулю детерминанта матрицы, составленной из коэффициентов при амплитудах  $\psi_{j-1}, \psi_j, \psi_l, \psi_{l+1}$ ,

$$D(\beta) = (1 - I_0 - I_0^*)^2 - |I_{m+1} - I_m|^2 = 0. \quad (17)$$

Несложно найти явные выражения для коэффициентов-интегралов и убедиться в вещественности соответствующих выражений

$$I_0 = I_0^* = 1 - \sqrt{\frac{\beta}{\beta + 4}},$$

$$\Delta = \Delta^* = I_{m+1} - I_m = 2\sqrt{\frac{\beta}{\beta + 4}} \left[ \frac{1}{2} (\sqrt{\beta + 4} - \sqrt{\beta}) \right]^{2m}. \quad (18)$$

Используя (17) и (18), для нахождения частот внутренних мод получим два уравнения:

$$1 - 2I_0 = \pm \Delta. \quad (19)$$

Введем обозначение  $x = \exp(-\kappa) < 1$ , тогда из (12) для параметра  $\beta$  получим выражение

$$\beta = (1 - x)^2 / x. \quad (20)$$

Воспользуемся этой заменой и сведем (19) к следующим двум уравнениям

$$\frac{1}{1 - x} - \frac{3}{2} = \pm x^m. \quad (21)$$

С помощью графического анализа можно легко убедиться в существовании в каждом из уравнений (21) единственного положительного корня, меньшего единицы. Таким образом, в ферромагнетике с кластером любого размера имеется только два локализованных колебания.

В случае  $m = 1$  и  $m = 2$  решения уравнений (21) находятся в явном виде. При  $m = 1$  положительные корни  $x_{\pm} < 1$  квадратных уравнений (21), и, соответственно,  $\beta_{\pm}$  следующие:

$$x_{-} = \frac{1}{4}(5 - \sqrt{17}), \quad \beta_{-} = \frac{1}{4}(7 + \sqrt{17}); \quad x_{+} = \frac{1}{2}, \quad \beta_{+} = \frac{1}{2}; \quad (22)$$

а частоты внутренних мод  $\omega_{\pm} = \sqrt{1 - \beta_{\pm}\lambda}$  обращаются в нуль при значениях параметра  $\lambda$ :

$$\lambda_{-} = \frac{1}{8}(7 - \sqrt{17}), \quad \lambda_{+} = 2. \quad (23)$$

Эти значения полностью совпадают с результатами ранее решенной задачи для нанокластера, состоящего из одного спина [10]. Таким образом, односпиновый кластер теряет устойчивость при  $\lambda_{-} \cong 0,3596$ .

При  $m = 2$  положительные корни кубических уравнений, меньшие единицы, равны

$$x_{-} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_{+} = \frac{1}{3} \left( 1 + \sqrt[3]{\frac{3}{4}\sqrt{78} + 1} - \sqrt[3]{\frac{3}{4}\sqrt{78} - 1} \right). \quad (24)$$

Корни (24) численно равны  $x_{-} \cong 0,2929$  и  $x_{+} \cong 0,3966$ . Решению  $x_{-}$  отвечают значения параметров

$$\beta_{-} = \frac{1}{2 - \sqrt{2}}, \quad \lambda_{-} = 2 - \sqrt{2}, \quad (25)$$

т.е. им соответствует внутренняя мода с наименьшей частотой  $\omega_{-}$ , которая превращается в моду неустойчивости при  $\lambda_{-} \cong 0,5858$ . Для локализованной моды с частотой  $\omega_{+}$  численные значения параметров соответственно равны:  $\beta_{+} \cong 0,9180$  и  $\lambda_{+} \cong 1,089$ .

Проведем теперь анализ решений уравнений (21) в пределе больших  $m$ , т.е. для случая кластеров больших размеров. Очевидно, что в основном приближении, когда степенное слагаемое  $x^m$  пренебрежимо мало,  $x = x_0 = 1/3$ , а  $\beta = \beta_0 = 4/3$ . Этот случай отвечает фактически двум уединенным изинговским границам, единственной локализованной модой колебаний которых является внутренняя мода с квадратом частоты  $\omega_0^2(\lambda) = 1 - \beta_0\lambda$ . Она становится модой неустойчивости при  $\lambda_0 = 1/\beta_0 = 3/4$  [3,10].

Учет малых величин  $x^m$  приводит к расщеплению предельного решения  $x_0$  и наличию в уравнениях (21) двух близких корней, которые с хорошей точностью даются выражением

$$x_{\pm} \approx \frac{1}{3} \pm 4 \left( \frac{1}{3} \right)^{m+2}. \quad (26)$$

Соответственно, для параметра  $\beta$  и для квадратов частот внутренних мод получаем

$$\beta_{\pm} \approx \frac{4}{3} \mp 32 \left( \frac{1}{3} \right)^{m+2}, \quad \omega_{\pm}^2 = 1 - \beta_{\pm}\lambda. \quad (27)$$

Сравнение численного решения уравнений (21) с формулой (26) показывает, что уже для кластера с  $m = 3$  аналитическое выражение является очень хорошим приближением, которое совпадает с корнями уравнений (21) с точностью до 0,5%. В результате оказывается, что частоты внутренних мод и границы устойчивости кластеров с  $m \geq 3$  определяются формулами (26) и (27) в явном виде, причем с ростом размеров кластера граница его устойчивости по параметру  $\lambda$  быстро стремится к предельному значению  $\lambda_0 = 3/4$  по закону

$$\lambda_{-} \approx \frac{3}{4} - 2 \left( \frac{1}{3} \right)^m. \quad (28)$$

Найденные зависимости частот локализованных колебаний от параметра  $\lambda$  для нанокластеров с числом спинов от одного до восьми представлены на рис. 1. Видно, что частотная зависимость  $\omega_0(\lambda)$  для уединенной изинговской границы разделяет области частот двух мод разной симметрии. Если выбрать начало координат так, чтобы оно располагалось в центре кластера, то четной моде колебаний будет отвечать область частот ниже кривой  $\omega_0(\lambda)$ , а нечетной моде — область выше этой кривой. Четная мода описывает противофазные осцилляции двух доменных границ, а нечетная — синфазные колебания (рис. 2). При немалом расстоянии между границами моды колебаний фактически представляют собой соответственно разность и сумму разнесенных на размер кластера собственных функций спектральной задачи для уединенной изинговской границы. По мере уменьше-

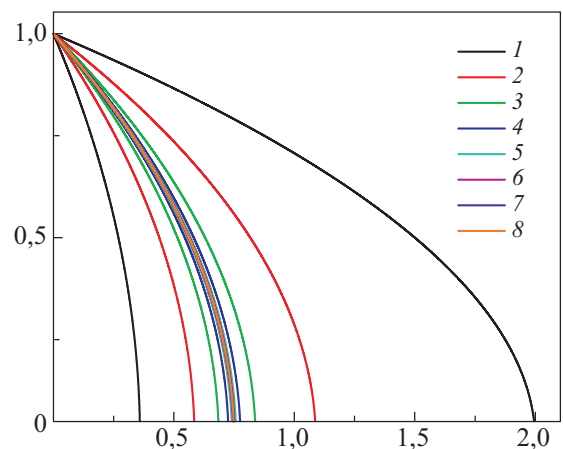


Рис. 1. Частоты двух локализованных мод колебаний нанокластеров с числом спинов от 1 до 8.

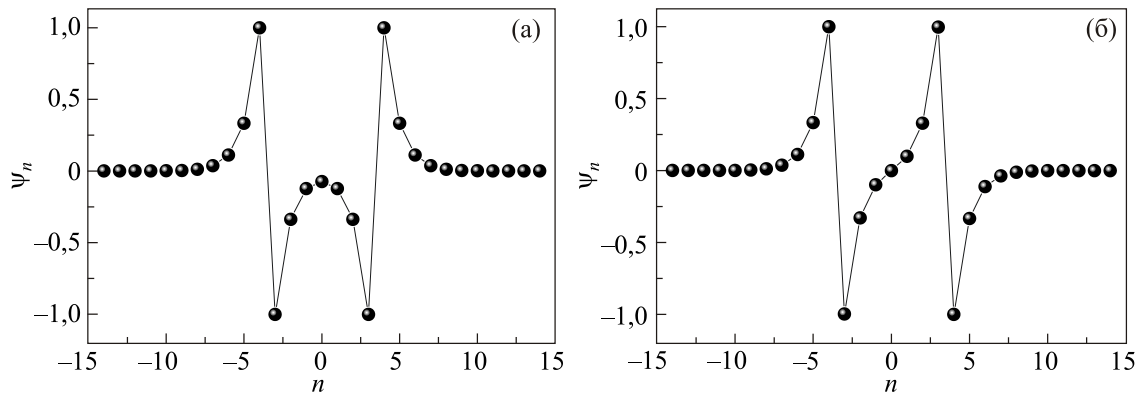


Рис. 2. Локализованные моды колебаний кластера с 7 спинами: (а) четная мода колебаний, отвечающая минимальной частоте; (б) нечетная мода колебаний.

ния числа спинов в кластере, т.е. при сближении изинговских границ, происходит все большее отдаление частотных кривых этих двух мод друг от друга и, естественно, от разделяющей их предельной зависимости для уединенной изинговской границы (рис. 1). Принципиальное различие между модами наглядно проявляется в критических точках  $\lambda_-$  и  $\lambda_+$ , в которых происходит смягчение мод и бифуркационным образом появляются новые статические решения. Четная мода, добавленная к кластеру (6) с распределением  $(0, \pi, 0)$ , приводит к появлению солитон-антисолитонной конфигурации, состоящей из неколлинеарных границ разного знака, а нечетная мода, добавленная к кластеру  $(0, \pi, 2\pi)$ , — к солитон-солитонной конфигурации, образующей  $360^\circ$  неколлинеарную доменную границу.

Полученная выше последовательность критических значений  $\lambda_-$  устанавливает границы устойчивости кластеров по мере возрастания их размеров. Как видно на рис. 1, для ферромагнитной цепочки с заданным значением параметра  $\lambda = \lambda_*$  нанокластеры с малым числом спинов, для которых  $\lambda_- < \lambda_*$ , будут либо полностью разрушены, либо преобразуются в динамически неустойчивые неколлинеарные солитон-антисолитонные структуры, в то время как кластеры с большим числом частиц, для которых  $\lambda_- > \lambda_*$ , останутся практически неизменными. При этом оказывается, что функция распределения локализованных колебаний по частотам имеет точку сгущения на частоте колебания уединенной изинговской границы  $\omega_0(\lambda_*)$ . Тогда следует ожидать, что в квазиодномерных ферромагнетиках, параметры обмена и анизотропии которых таковы, что в них неустойчивы одно- и двухспиновые кластеры, резонансный пик поглощения СВЧ поля будет иметь лишь размытый максимум на частоте  $\omega_0(\lambda_*)$ . В случае стабильных одно- и двухспиновых нанокластеров, особенно вблизи границы их устойчивости, в спектре поглощения могут появиться локальные пики,

сильно отстоящие от резонансного максимума на частоте  $\omega_0(\lambda_*)$ . Таким образом, обнаружение этих пиков на резонансных кривых может не только свидетельствовать о наличии спиновых нанокластеров, но и содержать дополнительную информацию о соотношении параметров обмена и анизотропии в квазиодномерных ферромагнетиках.

#### 4. Рассеяние спиновых волн в ферромагнетике со спиновым кластером

Наличие устойчивых нанокластеров в ферромагнетике оказывает существенное влияние на распространение в нем спиновых волн. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим в рамках линеаризованного уравнения (9) следующую задачу рассеяния волн сплошного спектра на спиновом кластере произвольного размера. Пусть с  $n = -\infty$  на кластер с границами в узлах  $n = j$  и  $n = l$  падает волна с единичной амплитудой. Частично отражаясь, она проходит через кластер, и при  $n \rightarrow \infty$  имеет амплитуду, квадрат модуля которой равен коэффициенту прохождения спиновых волн:

$$\begin{aligned} \psi_n &= \exp(ikn) + A \exp(-ikn), \quad n < j \\ \psi_n &= B \exp(ikn) + C \exp(-ikn), \quad j \leq n \leq l \\ \psi_n &= D \exp(ikn), \quad n > l. \end{aligned} \quad (29)$$

Выражения (29) являются точными решениями уравнения (9) в соответствующих областях ферромагнитной цепочки, причем квазиволновой вектор  $k$  связан с частотой  $\omega$  законом дисперсии (11). На границах кластера и соседних с ними внешних узлах уравнения для амплитуд имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_j - \psi_{j-2} - \mu \psi_{j-1} &= 0, \\ \psi_{j-1} - \psi_{j+1} - \mu \psi_j &= 0, \\ \psi_{l+1} - \psi_{l-1} - \mu \psi_l &= 0, \\ \psi_l - \psi_{l+2} - \mu \psi_{l+1} &= 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Подставляя решения (29) в систему уравнений (30), получаем неоднородную систему уравнений для определения коэффициентов  $A, B, C, D$ . Решения этой системы алгебраических уравнений для коэффициентов  $A$  и  $D$ , выглядят следующим образом:

$$A = e^{ik(l+j-2)} \frac{V^* e^{ikr} - V e^{-ikr}}{V^2 - e^{2ikr}}, \quad (31)$$

$$D = \frac{e^{-2ik}}{(V^2 - e^{2ikr})} \left( \frac{q - q^*}{|q|^2 - 1} \right)^2, \quad (32)$$

В формулах (31) и (32) введены обозначения

$$V = \frac{q^2 - 1}{|q|^2 - 1}, \quad q = \mu + e^{ik} = 2 - e^{-ik}, \quad (33)$$

где  $\mu = \mu(k)$  дается формулой (11) и параметр  $r$  есть разность номеров граничных спинов в кластере  $r \equiv l - j = m - 1$ . Очевидно, что квадраты модулей коэффициентов  $A$  и  $D$ , т.е. коэффициенты отражения  $R = |A|^2$  и прохождения  $T = |D|^2$ , не зависят от положения кластера в цепочке, а зависят только от его размера через параметр  $r$ . Нетрудно убедиться, что, как обычно, сумма этих коэффициентов равна единице:  $R + T = 1$ . Замечая также, что  $q - q^* = 2i \sin k$  и  $|q|^2 - 1 = 4(1 - \cos k) = 2\mu$ , для коэффициентов отражения и прохождения получим следующее представление:

$$R = \frac{F^2(k)}{1 + F^2(k)}, \quad T = \frac{1}{1 + F^2(k)}, \quad (34)$$

$$F(k) = 8 \operatorname{Im} \left( V e^{-ikr} \right) \operatorname{tg}^2 \frac{k}{2} = \sec^2 \frac{k}{2} \cdot \operatorname{Im} \left( (q^2 - 1) e^{-ikr} \right). \quad (35)$$

Из формул (34) и (35) следует, что, когда функция  $F(k)$  обращается в нуль, коэффициент отражения  $R = 0$ , а коэффициент прохождения  $T = 1$ , т.е. имеет место эффект, аналогичный эффекту Рамзауэра в квантовой механике [15,16]. Иными словами, существуют такие выделенные значения квазиволнового вектора  $k$ , для которых кластер полностью прозрачен для прохождения спиновых волн. Очевидно, что в формуле (35) мнимая часть комплексного выражения  $\operatorname{Im}((q^2 - 1)e^{-ikr})$  обращается в нуль, когда его аргумент  $\chi = \pi p$ , где  $p$  — целое число. Замечая, что

$$q^2 - 1 = |q - 1| \exp\left(i \frac{\pi - k}{2}\right) \cdot |q + 1| \exp\left(i \operatorname{arctg} \left( \frac{\sin k}{3 - \cos k} \right)\right) \quad (36)$$

получим уравнение для нахождения значений квазиволнового вектора, при которых  $T = 1$ ,

$$k \left( m - \frac{1}{2} \right) - \operatorname{arctg} \left( \frac{\sin k}{3 - \cos k} \right) = \pi \left( p - \frac{1}{2} \right), \quad p = 1, \dots, m - 1. \quad (37)$$

Легко убедиться графически, что число корней у этого уравнения внутри интервала  $[0, \pi]$  равно  $m - 1$ , так как  $p = m$  отвечает границе интервала  $k = k_B = \pi$ . Для немалых значений  $m$  из формулы (37) следует явное аналитическое выражение для искомым корней

$$k = k_p + \frac{1}{m - 1} \operatorname{arctg} \left( \frac{\sin k_p}{3 - \cos k_p} \right), \quad k_p = \frac{\pi}{m - \frac{1}{2}} \left( p - \frac{1}{2} \right). \quad (38)$$

Оно оказывается очень хорошим приближением не только для кластеров большого размера, но даже для кластера с двумя спинами, где, как показывает сравнение с численным результатом, точность для наименьших корней составляет порядка процента, а для остальных — порядка десятых и сотых процента. Заметим, что в случае односпинового кластера у коэффициента прозрачности есть только один максимум  $T(0) = 1$ , и ему соответствует  $F(0) = 0$ , что обеспечивается не нулем аргумента  $\chi$ , а равенством нулю в этой точке модуля  $|q - 1|$  в выражении (36). На рис. 3 приведены зависимости коэффициента прохождения от квазиволнового вектора для нанокластеров из 5 и 12 частиц. Видно, что в длинноволновом пределе спиновые волны практически беспрепятственно проходят через нанокластеры, в то время как коротковолновые колебания почти полностью отражаются от кластеров задолго до границы зоны Бриллюэна. В промежуточной области наблюдаются максимумы полной прозрачности, число которых вместе с длинноволновым максимумом равно числу спинов в кластере. При этом резонансные пики становятся все более узкими по мере их появления с ростом размера кластера. Очевидно, что при пропускании пакетов спиновых волн кластеры ведут себя как частотные фильтры. Следует ожидать, что в цепочке с распределенными кластерами коротковолновые возбуждения будут локализованы между кластерами, и лишь длинноволновые колебания пройдут через всю систему. С другой стороны, если в квазиодномерном ферромагнетике или метаматериале будет возбужден или создан локальным полем уединенный спиновый кластер, то по результатам спектрального анализа прошедшей через него волны, можно будет установить его размер, т.е. число образующих его спинов.

Для проверки полученных теоретических результатов было проведено численное моделирование динамики ферромагнитной цепочки, содержащей кластеры с двумя, тремя и четырьмя спинами в рамках нелиней-

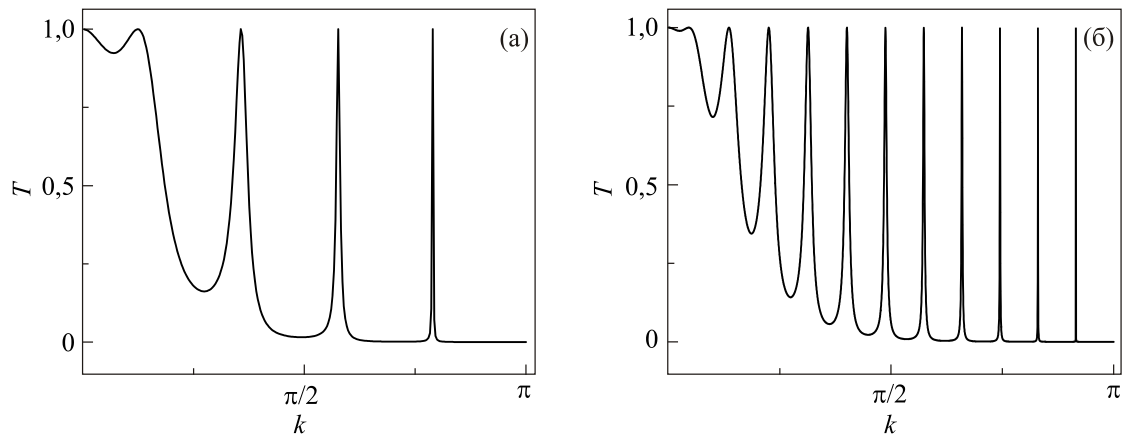


Рис. 3. Коэффициент прохождения  $T$  спиновых волн через нанокластеры как функция квазиволнового вектора  $k$ : (а) для кластера из 5 спинов; (б) для кластера из 12 спинов.

ного уравнения Такено–Хомма (3). Результаты его представлены на рис. 4. Значение параметра  $\lambda$  было выбрано равным  $\lambda_* = 0,7$ , при котором двухспиновый кластер является заведомо неустойчивым, кластер из четырех спинов еще устойчив, а кластер из трех спинов уже теряет устойчивость (см. рис. 1). В начальном распределении нанокластеров с конфигурацией  $(0, \pi, 0)$  двухспиновый располагался в начале координат между трехспиновым и четырехспиновым, которые находились в строго равновесном состоянии, в то время как двухспиновый имел добавку к  $\pi$ , равную  $10^{-4}$ , к обеих амплитудам. В результате, как и следует из полученных аналитических результатов двухспиновый кластер сразу полностью разрушился. На нелинейной стадии эволюции из него образовался сильно локализованный дискретный бризер, и в обе стороны от него стали распространяться пакеты спиновых волн. Как видно на рис. 4, длинноволновые составляющие пакетов прошли через трехспиновый и четырехспиновый кластер, а ко-

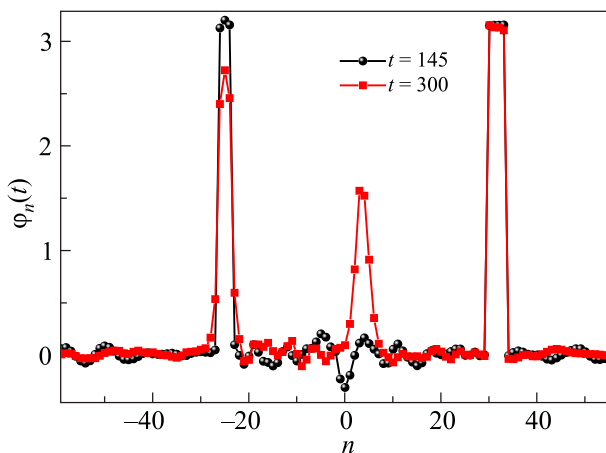


Рис. 4. (Онлайн в цвете) Результаты моделирования динамики ферромагнитной цепочки, содержащей кластеры с 2, 3 и 4 спинами в рамках нелинейного УТХ.

ротковолновая часть оказалась запертой между ними. В результате возмущений трехспиновый кластер также потерял устойчивость, превратившись в солитон–антисолитонную дискретную конфигурацию, которая оказывается динамически неустойчивой, что приводит к существенно нелинейным колебаниям ее амплитуд. В то же время на рис. 4 видно, что четырехспиновый кластер сохраняет свою устойчивость, испытывая лишь малые колебания амплитуд, несмотря на столкновения со спиновыми волнами. В дальнейшем дискретный бризер начинает двигаться в сторону четырехспинового кластера и отражается от него. На поздней стадии эволюции он проходит трехспиновый динамический комплекс, окончательно разрушая его, в результате чего образуется еще один дискретный бризер.

## 5. Заключение

Таким образом, в работе в рамках дискретной модели Такено–Хомма точно решены спектральная проблема для локализованных возбуждений и задача о рассеянии спиновых волн в анизотропной ферромагнитной цепочке, содержащей спиновые кластеры. Методом локальных возмущений найдены частоты локализованных колебаний спинового кластера произвольного размера, которые описывают противофазные и синфазные осцилляции его дискретных доменных границ. Найдены критические значения отношения обмена к анизотропии при которых «смягчается» нижайшая по частоте мода и наступает неустойчивость кластеров. Решена задача рассеяния спиновых волн на кластерах произвольного размера и показано, что имеет место размерный эффект резонансного полного прохождения волн с дискретным набором значений квазиволнового вектора, аналогичный эффекту Рамзауера в квантовой механике. Обнаруженные особенности динамики магнитных возбуждений могут быть выявлены не только в ферромагнетиках и антиферромагнетиках [10], но и в других системах



взаимодействующих планарных ротаторов [9,17]. Особо привлекательным представляется создание метаматериала, состоящего из цепочек взаимодействующих магнитных молекул и допускающего локальное возбуждение магнитных нанокластеров. Такие метаматериалы, обладающие обнаруженными выше свойствами, могли бы использоваться как частотные фильтры, а в современных нанотехнологиях служить элементной базой компьютерной памяти.

Работа поддержана ФФИ НАН Украины (грант № 1.4.10.26.4/Ф26-4) и НАН Украины (грант № 4/17-Н) и выполнена с использованием вычислительных ресурсов грид-кластера ФТИНТ им. Б.И. Веркина НАН Украины.

1. M. Date and M. Motokawa, *Phys.Rev.Lett.* **16**, 1111 (1966).
2. J.J. van den Broek and H. Zijlstra, *IEEE Transactions on Magnetism*, **MAG-7**, 226 (1971).
3. А.Н. Гончарук, А.А. Степанов, Д.А. Яблонский, *ФТТ* **31**, 132 (1989) [*Sov. Phys. Solid State* **31**, 2099 (1989)].
4. C. Dupas and J.P. Renard, *J. Phys. C* **10**, 5057 (1977).
5. А.Г. Андерс, С.В. Волоцкий, В.Г. Борисенко, Ю.В. Переверзев, *ФНТ* **15**, 39 (1989) [*Sov. J. Low Temp. Phys.* **15**, 21 (1989)].
6. R.S. Rubins, T.D. Black, A. Sohn, and J.E. Drumheller, *Phys. Rev. B* **49**, 15366 (1994).
7. D. Gatteschi, R. Sessoli, and J. Villain, *Molecular Nanomagnets*, Oxford University Press, New York (2006).
8. V.V. Kostyuchenko, I.M. Markevtsev, A.V. Philippov, V.V. Platonov, V.D. Selemir, O.M. Tatsenko, A.K. Zvezdin, and A. Caneschi, *Phys. Rev. B* **67**, 184412 (2003).
9. S. Takeno and S. Homma, *J. Phys. Soc. Jpn.* **55**, 2547 (1986).
10. М.В. Гвоздикова, А.С. Ковалев, *ФНТ* **25**, 1295 (1999) [*Low Temp. Phys.* **25**, 972 (1999)].
11. A.M. Kosevich, *The Crystal Lattice (Phonons, Solitons, Dislocations)*, WILEY-VCH Verlag Berlin GmbH, Berlin (1999).
12. M.M. Bogdan, A.M. Kosevich, and V.P. Voronov, in: *Solitons and Applications*, V.G. Makhankov, V.K. Fedyanin, and O.K. Pashaev (eds.) World Scientific: Singapore (1990), p. 231.

13. А.М. Косевич, А.С. Ковалев, *ЖЭТФ* **67**, 1793 (1974) [*JETP* **40**, 891 (1975)].
14. A.M. Kosevich, B.A. Ivanov, and A.S. Kovalev, *Phys. Rep.* **194**, 117 (1990).
15. D. Bom, *Quantum Theory*, Prentice Hall, New York (1952).
16. S.R. Sharma and B. Bergersen, *Phys. Rev. B* **30**, 6586 (1984).
17. S. Takeno and M. Peyrard, *Physica D* **92**, 140 (1996).

## Localized excitations and scattering of spin waves in ferromagnetic chains containing magnetic clusters

O.V. Charkina and M.M. Bogdan

The spectrum of localized excitations in an anisotropic one-dimensional ferromagnet containing a spin cluster of arbitrary size is found exactly within the framework of the discrete Takeno–Homma model. The boundaries of stability of spin nanoclusters are determined in dependence of their size and the exchange and the anisotropy parameter of the ferromagnet. The problem of the spin wave scattering against nanoclusters is solved and explicit analytical expressions for their reflection and transmission coefficients are obtained. A model of a metamaterial consisting of weakly interacting magnetic molecular nanoclusters and possessing revealed dynamic properties is proposed.

PACS: 75.10.Pq Spin chain models;  
 75.60.Ch Domain walls and domain structure;  
 36.40.Cg Electronic and magnetic properties of clusters;  
 05.45.Yv Solitons.

Keywords: quasi-one-dimensional ferromagnet, spin cluster, Takeno–Homma equation, localized excitations, spin wave scattering.