

ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна НАН України

Електронні видання



Д.Г. ШЕПЕЛЬСЬКИЙ

**НЕЛІНІЙНІ
ІНТЕГРОВНІ РІВНЯННЯ
І ЗАДАЧА РІМАНА-
ГІЛЬБЕРТА**



ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ НИЗЬКИХ ТЕМПЕРАТУР
ім. Б.І. ВЕРКІНА
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

Д.Г. ШЕПЕЛЬСЬКИЙ

**НЕЛІНІЙНІ ІНТЕГРОВНІ РІВНЯННЯ
І ЗАДАЧА РІМАНА–ГІЛЬБЕРТА**

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Харків
ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна НАН України
2024

УДК 517.9
Ш 48

Шепельський Д.Г. **Нелінійні інтегровні рівняння і задача Рімана–Гільберта.** Навчальний посібник. — Харків: ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна НАН України, 2024. — 83 с.

ISBN 978-617-95455-2-8

Добре відомо, що у при дослідженні лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, стандартні розв'язки можна зобразити у вигляді інтегралів, отриманих, наприклад, за допомогою рядів або інтегралів Фур'є або функцій Гріна.

Навчальний посібник присвячено розробці ідеї про те, що у випадку нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними певного класу (інтегровних), роль інтегральних зображень може (з певним успіхом) відігравати зображення у вигляді розв'язків асоційованих задач Рімана–Гільберта. Задачі Рімана–Гільберта — це крайові задачі для кусково (або секційно) аналітичних (або мероморфних) функцій комплексного змінного. Застосування загальних ідей демонструється на прикладі нелінійного рівняння Шредингера.

Рецензенти:

Є.Я. Хруслов, академік НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор, ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна НАН України

С.Ю. Ігнатович, доктор фіз.-мат. наук, доцент, ХНУ ім. В.Н. Каразіна

Рекомендовано до друку Вченою радою

Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Веркіна

Національної академії наук України

(протокол № 4 від 10.07.2024 р.)

Видавництво ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна НАН України

ISBN 978-617-95455-2-8

© Д.Г. Шепельський, 2024

© О.М. Калиненко, Р.М. Баснукаєва,
художнє оформлення, 2024

© ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна НАН України, 2024

Зміст

Вступ	6
1. Інтегровні нелінійні рівняння з частинними похідними: перший погляд	8
1.1. Приклади інтегровних рівнянь	8
1.2. Схема методу оберненої задачі розсіювання	9
2. Задачі Рімана–Гільберта	11
2.1. Що таке “Задача Рімана–Гільберта”?	11
2.1.1. Контури	11
2.2. Скалярні задачі РГ	13
2.3. Інтеграли Коші	13
2.3.1. Граничні значення інтегралів Коші: Формули Сохоцького–Племеля	14
2.3.2. Поведінка інтегралів Коші поблизу кінців скін- ченної дуги	16
2.4. Адитивна задача РГ	17
2.5. Мультиплікативна задача РГ	17
2.5.1. Скалярна задача РГ (замкнений контур)	17
2.5.2. Неоднорідна задача РГ	19
2.6. Задача РГ на незамкненому контурі	20
2.7. Приклад задачі РГ: задача з постійним стрибком на скінченій дузі.	20
2.8. Матричні задачі РГ	21
2.8.1. Діагональні задачі РГ	22
2.8.2. Задачі з постійном стрибком	22
2.8.3. Трикутні задачі РГ	23

3. Задача Рімана–Гільберта як засіб дослідження	25
3.1. Приклад: ортогональні поліноми	26
3.2. Задача Рімана–Гільберта для “лінеарізованого нелінійного рівняння Шредингера” (ЛНРШ)	27
3.2.1. Лінійні РЧП і пара Лакса	28
3.2.2. Задача РГ для ЛНРШ	28
3.2.3. Асимптотика за великим часом: лінійні РЧП	31
3.3. Задача РГ і нелінійні РЧП: загальні зауваження	31
4. Нелінійне рівняння Шредингера	34
4.1. Пара Лакса	34
4.2. Задачі для НРШ	35
4.3. Розв’язки Йоста рівнянь пари Лакса	36
4.4. Співвідношення розсіювання	39
4.4.1. Властивості матриці розсіювання	40
4.5. Від матриці розсіювання до матриці стрибка для задачі Рімана–Гільберта	41
4.6. Формалізм задачі РГ для НРШ	43
4.6.1. Нулі $a(k)$ для $k \in \overline{\mathbb{C}_+}$	45
4.7. Умови на лишки	46
4.7.1. Узагальнена (нерегулярна) задача РГ для НРШ:	47
4.8. Солітони	48
4.9. Зведення сингулярної задачі РГ до регулярної	51
4.9.1. Перший спосіб	52
4.9.2. Другий спосіб	54
4.10. Від задачі РГ до НРШ	56
4.10.1. Солітони: графічне зображення	58
4.10.2. Неспадні розв’язки НРШ	58
5. Задача Рімана–Гільберта та сингулярні інтегральні рівняння	61
5.1. Контури для задач РГ	61
5.1.1. Функціональні класи для розв’язання задач РГ	63
5.1.2. Зв’язок між $E^p(D)$ і $L^p(\Sigma)$	65
5.2. Зведення до інтегрального рівняння	66

	5
5.3. Апроксимації в задачах Рімана-Гільберта	68
6. Асимптотика при $t \rightarrow \infty$ для регулярної задачі Рімана-Гільберта: Нелінійний метод найшвидшого спуску	70
6.1. Деформація задачі Рімана-Гільберта	70
6.2. Локальний параметрикс	77
6.3. Асимптотика ($t \rightarrow \infty$) регулярної задачі РГ. Кінцевий результат	80
6.4. Асимптотика нерегулярної задачі РГ	81
Список літератури	82