

ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна НАН України

Електронні видання



Л.В. ФАРДИГОЛА

***КУРС ЛЕКЦІЙ
З ТЕОРІЇ МІРИ
ТА ІНТЕГРАЛА***



ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ НИЗЬКИХ ТЕМПЕРАТУР
ім. Б.І. ВЕРКІНА
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

Л.В. ФАРДИГОЛА

КУРС ЛЕКЦІЙ
З ТЕОРІЇ МІРИ ТА ІНТЕГРАЛА

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Харків
ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна НАН України
2024

УДК 517.9
Ф 24

Фардигола Л.В. **Курс лекцій з теорії міри та інтеграла.** Навчальний посібник. — Харків: ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна НАН України, 2024. — 259 с.

ISBN 978-617-95455-1-1

Курс присвячено вивченню міри, вимірних функцій та інтеграла Лебега. Теорія міри та інтеграла знаходить застосування у цілій низці розділів сучасної математики та застосуваннях, зокрема, теорії ймовірностей, функціональному аналізі, теорії оптимізації тощо. У курсі лекцій розглянуто основні поняття і факти цієї теорії: основні класи множин, міри та їх продовження, вимірні функції, інтеграл Лебега, заряди та абсолютна неперервність, інтегрування на добутку просторів, простір L_p .

Цей навчальний посібник містить матеріали курсу «Теорія міри та інтеграла», який протягом багатьох років викладався для студентів бакалаврату спеціальності «прикладна математика» Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Його призначено для студентів та аспірантів фізико-математичних спеціальностей університетів.

Рецензенти:

Є.Я. Хруслов, академік НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор, ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна НАН України

С.Ю. Ігнатович, доктор фіз.-мат. наук, доцент, ХНУ ім. В.Н. Каразіна

*Рекомендовано до друку Вченою радою
Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Веркіна
Національної академії наук України
(протокол № 4 від 10.07.2024 р.)*

Видавництво ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна НАН України

ISBN 978-617-95455-1-1

© Л.В. Фардигола, 2024

© О.М. Калиненко, Р.М. Баснукаєва,
художнє оформлення, 2024

© ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна НАН України, 2024

Зміст

Вступ	6
1. Основні класи множин	7
1.1. Означення основних класів множин	7
1.2. Породжені класи множин	15
1.3. Дві теореми про породжені класи	20
1.4. Метричні простори \mathbb{R}^d та $\overline{\mathbb{R}^d}$	24
1.5. Борельові множини	28
2. Міри та їх продовження	35
2.1. Функції множин та міри	35
2.2. Приклади мір	43
2.2.1. Міра Жордана	43
2.2.2. Міри на півкільці \mathcal{P}_d	51
2.3. Зовнішні міри	55
2.4. Теорема Каратеодорі та повні міри	59
2.5. Продовження міри з півкільця на породжене ним σ -кільце	65
2.6. Міра Лебега в \mathbb{R}^d	74
2.6.1. Приклади обчислення міри Лебега	75
2.6.2. Міра Лебега–Стілтєса	79
2.7. Регулярність мір	80
3. Вимірні функції та збіжність	86
3.1. Означення вимірної функції	86
3.2. Дії з вимірними функціями	93
3.3. Наближення вимірних функцій простими	99
3.4. Еквівалентні функції. Збіжність майже скрізь	103
3.5. Теорема Єгорова	107

3.6.	Теорема Лузіна	111
3.7.	Збіжність за мірою	118
3.8.	Фундаментальність за мірою	124
4.	Інтеграл Лебега	130
4.1.	Означення інтеграла Лебега	130
4.2.	Наближення значення інтеграла інтегралами від простих функцій	137
4.3.	Зліченна адитивність інтеграла Лебега	140
4.4.	Елементарні властивості інтеграла Лебега	143
4.5.	Лінійність інтеграла Лебега	152
4.6.	Граничні теореми для інтеграла Лебега	156
4.7.	Порівняння інтеграла Рімана та інтеграла Лебега	165
4.8.	Інтеграл Рімана–Стільтьєса і Лебега–Стільтьєса	171
4.9.	Критерій Лебега інтегровності за Ріманом на $[a, b]$	173
4.10.	Інтеграл Лебега, що залежить від параметра	177
4.11.	Заміна змінної в інтегралі Лебега	179
5.	Заряди і абсолютна неперервність	184
5.1.	Означення заряду. Розклади Гана і Жордана	184
5.2.	Теорема Радона–Никодима	194
5.3.	Розклад Лебега	202
5.4.	Функції обмеженої варіації на $[a, b]$	208
5.5.	Абсолютно неперервні на $[a, b]$ функції	215
5.6.	Абсолютна неперервність заряду відносно міри Лебега на $[a, b]$	222
5.7.	Невизначений інтеграл Лебега	228
6.	Інтегрування на добутку просторів	229
6.1.	Множини та функції на добутку просторів	229
6.2.	Добуток мір	234
6.3.	Теореми Тонеллі і Фубіні	244

7. Простір $L_p(A, \lambda_d), p \geq 1$	247
7.1. Нормовані простори	247
7.2. Означення і властивості простора $L_p(A, \lambda_d), p \geq 1$.	248
Список літератури	255
Предметний покажчик	256
Список позначень	258