

**ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна НАН України**

*Електронні видання*



**Л.В. ФАРДИГОЛА**

***ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є  
ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ***



ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ НИЗЬКИХ ТЕМПЕРАТУР  
ім. Б.І. ВЕРКІНА  
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

Л.В. ФАРДИГОЛА

# ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Харків  
ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна НАН України  
2024

УДК 517.9  
Ф 24

Фардигола Л.В. **Перетворення Фур'є та його застосування**. Навчальний посібник. — Харків: ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна НАН України, 2024. — 249 с.

ISBN 978-617-95455-0-4

Навчальний посібник присвячено вивченню розподілів (які ще називаються узагальненими функціями), перетворення Фур'є для різних типів розподілів і класичних функцій, а також їх застосуванню для розв'язання різноманітних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними, зокрема, деяких задач теорії керування.

У ньому розглянуто низку просторів, які є просторами соболевського типу і є підпросторами простору Шварца помірно зростаючих розподілів, перетворення Фур'є в них та застосування.

Цей навчальний посібник містить матеріали курсу «Перетворення Фур'є та його застосування», який протягом багатьох років викладався для студентів магістратури спеціальності «прикладна математика» Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Його призначено для студентів та аспірантів фізико-математичних спеціальностей університетів, а також для науковців, які використовують перетворення Фур'є у просторах класичних функцій та розподілів і розглядають диференціальні рівняння в цих просторах у своїх дослідженнях.

Рецензенти:

Є.Я. Хруслов, академік НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор, ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна НАН України

С.Ю. Ігнатович, доктор фіз.-мат. наук, доцент, ХНУ ім. В.Н. Каразіна

*Рекомендовано до друку Вченою радою*

*Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Веркіна*

*Національної академії наук України*

*(протокол № 4 від 10.07.2024 р.)*

Видавництво ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна НАН України

ISBN 978-617-95455-0-4

© Л.В. Фардигола, 2024

© О.М. Калиненко, Р.М. Баснукаєва,  
художнє оформлення, 2024

© ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна НАН України, 2024

# Зміст

<b>Вступ</b>	<b>5</b>
<b>1. Загальні відомості про лінійні нормовані простори</b>	<b>6</b>
1.1. Банахові простори	6
1.2. Спряжені простори	12
1.3. Гільбертові простори	14
1.4. Базис в $\ell_2$	21
1.5. Базис в $L^2(-\alpha, \alpha)$	22
1.6. Базиси в $L^2(0, \alpha)$	23
1.7. Базис в $L^2(\mathbb{R})$	25
1.7.1. Поліноми Ерміта	25
<b>2. Простір Шварца швидко спадних функцій та двоїстий до нього простір повільно зростальних розподілів</b>	<b>30</b>
2.1. Простір Шварца $\mathcal{S}$	30
2.1.1. Простори $C_p^{(m)}$	35
2.1.2. Властивості простора Шварца	42
2.2. Перетворення Фур'є в $\mathcal{S}$	59
2.3. Перетворення Фур'є в $L^1(\mathbb{R})$	73
2.3.1. Повнота системи функцій Ерміта в $L^2(\mathbb{R})$	81
2.4. Перетворення Фур'є в $L^2(\mathbb{R})$	83
2.5. Теорема відліків	97
2.6. Простір $\mathcal{S}'$ повільно зростальних розподілів	100
2.7. Перетворення Фур'є в $\mathcal{S}'$	126
2.8. Задача Коші для диференціальних рівнянь з частинними похідними в $\mathcal{S}'$	142

<b>3. Простори Соболева</b>	<b>152</b>
3.1. Простори Соболева $H_l$ . . . . .	152
3.2. Простори Соболева $H^m$ . . . . .	159
3.3. Задача Коші для диференціальних рівнянь з частинними похідними в $H^m$ . . . . .	168
3.3.1. Рівняння теплопровідності . . . . .	168
3.3.2. Хвильове рівняння . . . . .	172
<b>4. Дискретні та періодичні простори соболевського типу</b>	<b>177</b>
4.1. Періодичні функції в $\mathcal{S}'$ . . . . .	177
4.1.1. Регулярні розподіли в $\mathcal{S}'$ , які визначені функціями $f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ , що є $a$ -періодичними . . . . .	182
4.2. Дискретні простори соболевського типу . . . . .	186
4.3. Періодичні простори соболевського типу . . . . .	201
4.4. Простори соболевського типу на скінченному відрізку та їх зв'язок з періодичними просторами соболевського типу . . . . .	224
4.5. Задачі для хвильового рівняння в періодичних просторах соболевського типу і просторах соболевського типу на скінченному відрізку . . . . .	230
4.5.1. Крайова задача типу Діріхле для хвильового рівняння . . . . .	230
4.5.2. Проблема 0-керованості для хвильового рівняння . . . . .	236
<b>Список літератури</b>	<b>244</b>
<b>Предметний покажчик</b>	<b>245</b>
<b>Список позначень</b>	<b>247</b>