

ФТІІТ ім. Б.І. Веркіна НАН України

Електронні видання

**A. BORISENKO
E. CABEZAS-RIVAS
V. MIQUEL**

***AN INTRODUCTION
TO HAMILTON AND
PERELMAN'S WORK ON
THE CONJECTURES OF
POINCARÉ AND
THURSTON***



ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ НИЗЬКИХ ТЕМПЕРАТУР
ім. Б.І. ВЕРКІНА
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

A. BORISENKO, E. CABEZAS-RIVAS, V. MIQUEL

**AN INTRODUCTION TO HAMILTON AND
PERELMAN'S WORK ON THE CONJECTURES
OF POINCARÉ AND THURSTON**

Харків
ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна НАН України
2024

УДК 514
Б 82

Borisenko A., Cabezas-Rivas E., Miquel V. **An introduction to Hamilton and Perelman's work on the conjectures of Poincaré and Thurston.** – Харків: ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна НАН України, 2024. – 160 с.

ISBN 978-617-95455-5-9

Лекції присвячені викладу необхідних знань для вивчення доведення Г. Перельманом гіпотези Пуанкаре і гіпотези Терстона.

Також викладено нарис доведення цих гіпотез.

Сформульовані:

- 1) основні теореми з теорії тривимірних многовидів;
- 2) описано 8 тривимірних однорідних моделей геометрії;
- 3) викладено основні факти з теорії параболічних рівнянь, а також принцип максимуму для них;
- 4) введено потоки Річчі на ріманових многовидах, вивчено сингулярності потоку Річчі;
- 5) особливу увагу приділено властивостям потоку Річчі на двомірних поверхнях;
- 6) введені простори Александрова, збіжність Громова-Хаусдорфа;
- 7) зроблений огляд статей Перельмана з проблеми Пуанкаре.

Курс лекцій призначено для студентів фізико-математичних спеціальностей університетів, а також для аспірантів та науковців науково-дослідних інститутів.

*Рекомендовано до друку Вченою радою
Фізико-технічного інститут низьких температур ім Б.І. Веркіна
Національної академії наук України
(протокол № 4 від 10.07.2024 р.)*

Видавництво ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна НАН України

ISBN 978-617-95455-5-9 © О.А. Борисенко, Е. Cabezas-Rivas, V. Miquel, 2024
© О.М. Калиненко Р.М. Баснукаєва, художнє оформлення, 2024
© ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна НАН України, 2024

CONTENTS

Preface	3
Introduction	4
1 The Topology Setting	8
1.1 The Poincaré conjecture	8
1.2 Some examples of 3-dimensional manifolds	9
1.3 The Sphere (or Prime) Decomposition	13
1.4 The Torus Decomposition	15
1.5 Geometric structures and the Geometrization Conjecture	16
2 The eight 3-dimensional model geometries	19
2.1 Generalities and classes	19
2.2 Contact structures	20
2.3 Twisted product geometries	25
3 The Thurston Theorem on the 8 geometric structures	30
3.1 Preliminares	30
3.2 The theorem and its proof	32
3.3 On the uniqueness of the geometric structure of a topological three-manifold	35
4 Some elementary facts about heat equation	37
4.1 The heat equation in the euclidean space	37
4.2 The heat equation in a Riemannian manifold	40
5 Introduction to harmonic maps and Ricci flow	44
5.1 Harmonic maps	44
5.2 Ricci flow	46
5.3 The normalized Ricci flow	48
6 An overview of the fundamental steps in the Hamilton-Perelman proof of geometrization conjecture	51
6.1 The existence of solutions	51
6.2 The possible solutions and singularities	54
6.3 The Perelman's work	55
7 The maximum principle	57
7.1 Prerequisites about Lipschitz functions	57
7.2 The maximum principle for systems	61
7.3 Maximum principle for functions	65
8 Long time existence	66
8.1 Steps of the proof	66
8.2 Results used along the proof	66
8.3 Case $\dim(M) = 3$	69
9 Ricci flow on surfaces (I)	70
9.1 The normalized Ricci flow on surfaces	70
9.2 The reaction equation	72
9.3 The complete evolution equation of R	76

9.4 Ricci solitons	78
9.5 Potential of the curvature	80
10 Ricci flow on surfaces (II). Harnack inequality	88
10.1 Classical Harnack inequality	88
10.2 Hamilton's Harnack inequality	91
10.3 Entropy	94
10.4 Bounds on $R(t)$ when $R > 0$	96
10.5 Asymptotic approach to a soliton	99
10.6 Modified Ricci flow and the final Theorem	99
10.7 Case $r = 0$	100
10.8 Chow's Theorem	100
11 Matrix Harnack inequality	101
11.1 Matrix Harnack inequality	101
11.2 How Hamilton derived the Harnack expression	104
12 Survey on Length Spaces (I)	108
12.1 Length spaces	108
12.2 Alexandrov spaces	109
12.3 Space of metric spaces	113
13 Survey on Length Spaces (II)	117
13.1 Gromov-Hausdorff distance	117
13.2 Gromov-Hausdorff convergence	119
13.3 Tangent cone and Asymptotic cone of a metric space	123
14 Singularities and dilations about them	125
14.1 Introduction	125
14.2 Properties of non-singular solutions	125
14.3 Classification of maximal solutions	128
14.4 Singularity models	129
14.5 Properties of the ancient solutions	129
14.6 Dilations about singularities	132
14.7 Existence of convergent subsequences	133
14.8 Limit of dilated solutions	135
15 Survey on Perelman's work (I): New functionals and κ -collapse	138
15.1 Introduction	138
15.2 Ricci flow as a gradient flow	138
15.3 Shrinking solitons	140
15.4 No Local Collapsing Theorem	142
16 Survey on Perelman's work (II): κ -solutions	145
16.1 The L-distance	145
16.2 The reduced volume	147
16.3 No local collapsing theorem II	148
16.4 κ -solutions	148
17 Survey on Perelman's work (III): The way to the end	153
References	157